

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONEKSİYONLU MANİFOLDLAR
ÜZERİNE

Ahmet SAZAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2019

Tezin Başlığı : Schouten-van Kampen Koneksiyonlu Manifoldlar Üzerine

Tezi Hazırlayan : Ahmet SAZAK

Sınav Tarihi : 25.10.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Fırat Üniversitesi

Doç.Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Adıyaman Üniversitesi

Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf UÇAR

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Kazım TÜRK

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Schouten-van Kampen Koneksiyonlu Manifoldlar Üzerine” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ahmet SAZAK

ÖZET

Doktora Tezi

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONEKSİYONLU MANİFOLDLAR ÜZERİNE

Ahmet SAZAK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

74+vi sayfa

2019

Danışman : Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde, daha sonraki bölümlerde bahsedilecek olan problemlerin ortaya çıkışı, geometrik anlamları ve ilgili çalışmalar tanıtılmaktadır. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Schouten-van Kampen (kısaca S.v.K.) koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldları incelenmektedir. Daha sonra bu tip bir manifoldun, sırasıyla, semi-simetrik, Ricci semi-simetrik, projektif semi-simetrik ve konharmonik semi-simetrik olması durumları ile ilgili karakterizasyonlar sunulmaktadır.

Son olarak dördüncü bölümde, S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu quasi-Sasakian (kısaca q.S.) manifoldları incelenmiştir. İlk olarak bu tip bir manifoldun üzerinde S.v.K. koneksiyonu denklemi verilip ona bağlı eğrilik tensörü, Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğriliği tanımlanmıştır. Daha sonra bu tip manifoldların projektif flat, konharmonik flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar sunulmuştur. Daha sonra S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldları üzerinde D_a -homotetik deformasyon incelenmiştir. Bunun sonucunda bu tip manifoldların semi-simetrik, projektif flat, konsirküler flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Bölüm sonunda ise S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldlarına iki örnek verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Schouten-van Kampen Koneksiyonu,
Quasi-Sasakian Manifoldu, Homotetik
Deformasyon, f-Kenmotsu Manifoldu,
3-Boyutlu Quasi-Sasakian Manifoldu,
Konsirküler Flat, Projektif Flat, Konharmonik
Flat, Projektif Semisimetrik, Konharmonik
Semisimetrik



ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON MANIFOLDS WITH THE SCHOUTEN-VAN KAMPEN CONNECTION

Ahmet SAZAK

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

74+vi pages

2019

Supervisor : Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

This thesis consists of four chapters. In the introduction chapter of the thesis, the emergence, geometric meanings and related studies of the problems to be discussed in the following chapters are introduced. In the second chapter, basic concepts, definitions and theorems which will be used in the other parts of the thesis are given.

In the third chapter, firstly, 3-dimensional f -Kenmotsu manifolds with the Schouten-van Kampen (shortly S.v.K.) connection are examined. Then, characterizations related to the fact that such a manifold is semisymmetric, Ricci semisymmetric, projectively semisymmetric and conharmonically semisymmetric are presented, respectively.

Finally, in the fourth chapter, 3-dimensional Quasi-Sasakian (shortly q.S.) manifolds with the S.v.K. connection are examined. Firstly, the S.v.K. connection equation is given on such a manifold and its curvature tensor, Ricci tensor, Ricci operator and scalar curvature are defined. Then, characterizations related to projectively flat, conharmonically flat, locally ϕ -symmetric and Ricci tensor being η -parallel states of such manifolds are presented. Then, D_a -homothetic deformation was investigated on 3-dimensional q.S. manifolds with the S.v.K. connection. Then, characterizations related to semisymmetric, projectively flat, concircularly flat, locally ϕ -symmetric and Ricci tensor being η -parallel states of such manifolds are presented. At the end of the chapter, two examples are given to 3-dimensional q.S. manifolds with the S.v.K. connection.

KEYWORDS: The Schouten-van Kampen Connection, Quasi-Sasakian Manifold, Homothetic Deformation, f-Kenmotsu Manifold, 3-Dimensional Quasi-Sasakian Manifold, Concircularly Flat, Projectively Flat, Conharmonically Flat, Projectively Semisymmetric, Conharmonically Semisymmetric



TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, tecrübe ve deneyimleriyle bana yol gösteren ve üzerimde büyük emeği olan tez danışmanım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ahmet YILDIZ'a, bu süreçte karşılaştığım problemleri çözmemde büyük yardımı dokunan değerli hocam Dr. Akın LEVENT'e, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve çalışmalarım boyunca sağladığı motivasyon ve gösterdiği sonsuz destek ve sabırdan dolayı sevgili eşim Fatma VURGUN SAZAK'a teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Riemann Manifoldları	4
2.2. Değme Manifoldları	8
2.3. Sasakian ve Quasi-Sasakian (Q.S.) Manifoldları	13
2.4. Kenmotsu ve f -Kenmotsu Manifoldları	17
2.5. Distribüsyonlar	19
2.6. Schouten-van Kampen (S.v.K.) Koneksiyonu	21
3. S.V.K. KONEKSİYONLU f -KENMOTSU MANİFOLDLARI	23
3.1. S.v.K. Koneksiyonlu 3-Boyutlu f -Kenmotsu Manifoldları	23
3.2. 3-Boyutlu f -Kenmotsu Manifoldlarında Bazı Eğrilik Şartları	24
4. S.V.K. KONEKSİYONLU 3-BOYUTLU Q.S.MANİFOLDLARI	42
4.1. S.v.K. Koneksiyonlu 3-Boyutlu Q.S. Manifoldları	42
4.2. 3-Boyutlu Q.S. Manifoldlarında D_α -Homotetik Deformasyon	51
4.3. S.v.K Koneksiyonlu Manifoldlara Örnekler	68
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

1. GİRİŞ

Schouten-van Kampen (kısaca S.v.K.) koneksiyonu, non-holonomik mekanik sistemlerin geometrik olarak yorumlanmasında ihtiyaç duyulup ortaya çıkarılan non-holonomik manifoldlar ile uyumlu lineer koneksiyonlardan biri olması sebebiyle bir çok önemli çalışmaya konu olmuştur [1, 2, 3, 4]. 1928'de Schouten non-holonomik uzayları bir lineer koneksiyon ile birlikte bir manifold üzerinde düşünmüştür [3]. Bu çalışmadan 2 yıl sonra ise S.v.K. koneksiyonu kavramı ortaya çıkarılmıştır [4]. S.v.K. koneksiyonu afin koneksiyon ile verilen bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde bir tümleyen distribüsyon çifti ile uyumlu en doğal koneksiyonlardan biridir [1]. A. F. Solov'ev S.v.K. koneksiyonunu kullanarak Riemann manifoldlarında hiperdistribüsyonları araştırmıştır [5, 6, 7, 8]. Daha sonra hemen hemen değme metrik yapı ile uyumlu S.v.K. koneksiyonlarını çalışmıştır [9]. Z. Olszak bu çalışmalarında S.v.K. koneksiyonlu hemen hemen değme metrik manifoldlarının bazı sınıflarını karakterize etmiş ve bu tip manifoldlar üzerinde bu koneksiyonun belirli eğrilik özelliklerini bulmuştur. Ayrıca A. Yıldız S.v.K. koneksiyonlu f -Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı karakterizasyonlar vermiş ve belirli eğrilik özellikleri bulmuştur [10].

Bir f -Kenmotsu manifoldu, normal ve lokal konformal hemen hemen kosimplektik manifold olan bir hemen hemen değme metrik manifoldu olarak tanımlanır. Normal lokal konformal hemen hemen kosimplektik manifoldlar Olszak ve Rosca tarafından çalışılmıştır [11]. Z. Olszak ve R. Rosca f -Kenmotsu manifoldlarının geometrik yorumlamasını vererek bazı eğrilik özelliklerini çalışmışlardır. Bununla birlikte bir Ricci semi-simetrik f -Kenmotsu manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğunu ispat etmişlerdir.

Quasi-Sasakian (kısaca q.S.) yapı kavramı, Sasakian ve kosimplektik yapıyı birleştirmek için D. E. Blair [12] tarafından tanımlanmıştır. S. Tanno [20] da

bu yapıya bazı yorumlar eklemiştir. Bu yapı üzerine kurulan q.S. manifoldların özellikleri ise J. C. Gonzalez - D. Chinea [13], S Kanemaki [14, 15] ve J. A. Oubina [16] gibi bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Kim [17] de bu manifoldların Riemann uzayı ile ilişkilerini çalışmıştır. Son zamanlarda q.S. manifoldlar fizikte, özel olarak super gravity ve manyetik teoride, önemli uygulamaları keşfetme açısından büyük ilgi konusu olmuştur. Quasi-Sasakian yapının yay teorisinin matematiksel analizinde de geniş uygulamaları vardır. Bunun yanısıra Z. Olszak β yapı fonksiyonunu ve 3-boyutlu q.S. manifoldları tanımlamış ve bu fonksiyon yardımıyla bu manifold üzerinde anlamlı sonuçlar elde etmiştir [18].

Tanno tarafından D_a -homotetik deformasyon kavramı hakkında bir çok çalışmaya ışık tutmuş önemli bir çalışma ortaya çıkarılmıştır [19]. D_a -homotetik deformasyon, (M, ϕ, ξ, η, g) tensör yapıları ile verilmiş manifoldun üzerindeki bu tensör yapılarının aşağıdaki şekilde değişimleri olarak tanımlanır [20]:

$$\begin{aligned}\eta^a &= a\eta, & \xi^a &= \frac{1}{a}\xi, & \phi^a &= \phi, \\ g^a &= ag + a(a-1)\eta \otimes \eta.\end{aligned}$$

Değme geometri üzerinde D_a -homotetik deformasyon hakkında son yıllarda bir çok çalışma gerçekleştirilmiştir (bazıları için .bkz. [21, 22, 23]).

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldları incelenmektedir. Daha sonra bu tip bir manifoldun, sırasıyla, semi-simetrik, Ricci semi-simetrik, projektif semi-simetrik ve konharmonik semi-simetrik olması durumları ile ilgili karakterizasyonlar sunulmaktadır.

Son olarak dördüncü bölümde, S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldları incelenmiştir. İlk olarak bu tip bir manifoldun üzerinde S.v.K. koneksiyonu denklemi verilip ona bağlı eğrilik tensörü, Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğriliği tanımlanmıştır. Daha sonra bu tip manifoldların projektif flat,

konharmonik flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar sunulmuştur. Daha sonra S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldları üzerinde D_a -homotetik deformasyon incelenmiştir. Bunun sonucunda bu tip manifoldların semi-simetrik, projektif flat, konsirküler flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Bölüm sonunda ise S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldlarına iki örnek verilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik, 2-lineer g metriğine **Riemann metriği** denir. g ile birlikte tanımlanan M ye de **Riemann manifoldu** adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir. Eğer g metriği non-dejenere, simetrik ve 2-lineer ise g metriğine **pseudo(semi)-Riemann metriği**, M ye de **pseudo(semi)-Riemann manifoldu** denir. Pseudo-Riemann manifoldu Riemann manifoldunun genelleştirilmişidir [24].

Tanım 2.1.2. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y,$$

dönüşümü, her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir **afin (lineer) koneksiyon** denir [25].

Tanım 2.1.3. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

şartları sağlanıyorsa ∇ ya **Levi-Civita koneksiyonu** denir [25].

Tanım 2.1.4. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonu olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

ile tanımlı R fonksiyonu M üzerinde $(1, 3)$ -tipinde bir tensör alanıdır ve M nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $R(X, Y)Z = 0$ olması durumunda M manifolduna **flat manifold** denir.

R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$$

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z),$$

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y),$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

şartlarını sağlar [25].

Tanım 2.1.5. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsun. M üzerinde

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

olarak tanımlı $(0, 2)$ -tipindeki S tensör alanına **Ricci eğrilik tensörü** denir. Her $X, Y \in \chi(M)$ için, $S(X, Y) = 0$ olması durumunda M manifolduna **Ricci-flat manifold** denir [25].

Tanım 2.1.6. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve M üzerinde Ricci eğrilik tensörü S olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ M nin bir lokal ortonormal bazı olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i),$$

ile tanımlı r fonksiyonuna M nin **skalar eğriliği** denir [25].

Tanım 2.1.7. (M, g) bir Riemann manifoldu ve S, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) + \mu \eta(X)\eta(Y),$$

olacak şekilde M üzerinde λ ve μ skalarları varsa M ye **η -Einstein manifoldu** denir. Eğer $\mu = 0$ ise M ye **Einstein manifoldu** denir.

Tanım 2.1.8. Bir n -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve Q Ricci operatörü olmak üzere, M üzerindeki her X, Y, W vektör alanları için, M nin **P projektif eğrilik tensör alanı**

$$P(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{1}{(n-1)}\{g(Y, W)QX - g(X, W)QY\}, \quad (2.1.1)$$

denklemleri ile verilir. Her $X, Y, W \in \chi(M)$ için, $P(X, Y)W = 0$ olması durumunda M manifolduna **projektif flat manifold** denir [25].

Tanım 2.1.9. Bir n -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve r M nin skalar eğriliği olmak üzere M üzerindeki her X, Y, W vektör alanları için, M nin Z **konsirküler eğrilik tensör alanı**

$$Z(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{r}{n(n-1)}\{g(Y, W)X - g(X, W)Y\}, \quad (2.1.2)$$

denklemleri ile verilir. Her $X, Y, W \in \chi(M)$ için, $Z(X, Y)W = 0$ olması durumunda M manifolduna **konsirküler flat manifold** denir [25].

Tanım 2.1.10. Bir n -boyutlu Riemann manifoldu M olsun. R Riemann eğrilik tensörü ve r M nin skalar eğriliği olmak üzere M üzerindeki her X, Y, Z vektör alanları için, M nin K **konharmonik eğrilik tensör alanı**

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} \left\{ \begin{array}{l} S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ +g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY \end{array} \right\}, \quad (2.1.3)$$

denklemleri ile verilir. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $K(X, Y)Z = 0$ olması durumunda M manifolduna **konharmonik flat manifold** denir [26].

Tanım 2.1.11. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M nin Riemann eğrilik tensörü R ve $(0, k)$ -tipinde ($k \geq 1$) tensör alanı T olmak üzere, M üzerinde tanımlı $R \cdot T$ tensörü her $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} (R(X, Y) \cdot T)(X_1, \dots, X_k) &= -T(R(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ &\quad - T(X_1, R(X, Y)X_2, \dots, X_k) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - T(X_1, \dots, X_{k-1}, R(X, Y)X_k), \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

denklemleri ile verilir. S Ricci eğrilik tensörü, P projektif eğrilik tensör alanı, K konharmonik eğrilik tensör alanı, $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $R \cdot R = 0$ ise M ye **semi-simetrik**, $R \cdot R = fQ(g, R)$ ise M ye **pseudo-simetrik**, $R \cdot S = 0$ ise M

ye **Ricci semi-simetrik**, $R \cdot S = f\mathbb{Q}(g, S)$ ise M ye **Ricci pseudo-simetrik**, $R \cdot P = 0$ ise M ye **projektif semi-simetrik**, $R \cdot P = f\mathbb{Q}(g, P)$ ise M ye **projektif pseudo-simetrik**, $R \cdot K = 0$ ise M ye **konharmonik semi-simetrik**, $R \cdot K = f\mathbb{Q}(g, P)$ ise M ye **konharmonik pseudo-simetrik** tir denir [27].

2.2 Değme Manifoldları

Tanım 2.2.1. M bir $(2n+1)$ -boyutlu manifold, ϕ, ξ, η M üzerinde, sırası ile, $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad (2.2.1)$$

$$\eta(\xi) = 1,$$

özellikleri sağlanıyor ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı ve bu yapı ile birlikte M ye de **hemen hemen değme manifold** denir [25].

Teorem 2.2.1. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

$$\phi\xi = 0, \quad \eta(\phi X) = 0, \quad \text{rank}\phi = 2n$$

dir [25].

Örnek 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlar (x, y, z) olmak üzere

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx),$$

$$\xi = 2\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(M)$$

ve

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M),$$

dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ de standart bazlara göre karşılık gelen matris

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \left(\frac{1}{2} (dz - ydx) \right) 2 \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} 2dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} 2ydx \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve $X \in \chi(M)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \left(\frac{1}{2} (dz - ydx) \right) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} x_1 dz \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} x_2 dz \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} x_3 dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} y x_1 dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} y x_2 dx \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} y x_3 dx \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} y x_1 = \frac{1}{2} (x_3 - y x_1), \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\phi(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix},$$

olduğundan

$$\phi^2(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -yx_1 \end{bmatrix},$$

dir. Buradan

$$\phi^2(X) = (-x_1, -x_2, -yx_1), \quad (2.2.2)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
-X + \eta(X)\xi &= (-x_1, -x_2, -x_3) + \left(\frac{1}{2}(x_3 - yx_1)\right)(0, 0, 2) \\
&= (-x_1, -x_2, -x_3) + (0, 0, x_3 - yx_1) \\
&= (-x_1, -x_2, -yx_1) ,
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

elde edilir. (2.2.2) ve (2.2.3) den dolayı $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen değme manifoldudur.

Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g Riemann metrik tensör alanı

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) , \tag{2.2.4}$$

olacak şekilde vardır [25].

Sonuç 2.2.1. Bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde

$$\eta(X) = g(X, \xi) ,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) ,$$

olacak şekilde tanımlanan g Riemann metriği için

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0, \tag{2.2.5}$$

eşitliği vardır [25].

Tanım 2.2.2. Bir hemen hemen değme M manifoldu verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi) ,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) ,$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik**, (ϕ, ξ, η, g) yapısına **hemen hemen değme metrik yapısı**, (ϕ, ξ, η, g) yapısına sahip M ye de bir **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir [25].

Tanım 2.2.3. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. Bu durumda

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y),$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının **temel 2 formu** denir [25].

Tanım 2.2.4. Eğer bir $(2n + 1)$ -boyutlu M manifoldu üzerinde

$$\eta \Lambda (d\eta)^n \neq 0,$$

olacak şekilde global bir η 1-formu mevcut ise M bir değme yapıya sahiptir denir. Bu durumda M bir **değme manifoldu** olarak adlandırılır. Burada η ya M nin bir **değme formu** denir. Burada $(d\eta)^n$ ile n yinci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani

$$(d\eta)^n = \underbrace{(d\eta) \Lambda \dots \Lambda (d\eta)}_{n\text{-tane}},$$

dir [25].

Teorem 2.2.3. Değme yapısı η olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y),$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır [25].

Sonuç 2.2.2. $(2n + 1)$ – boyutlu M manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı verilsin. Eğer $g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$ oluyorsa (M, ϕ, ξ, η, g) ye bir **değme metrik manifold**, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da bir **değme metrik yapı** denir [25].

Sonuç 2.2.3. Her değme metrik manifold, bir değme manifolddur [25].

Tanım 2.2.5. V bir reel vektör uzayı olmak üzere

$$J : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I,$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir [25].

Bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu $\mathbb{R}$ ile göstererek $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f \frac{d}{dt}),$$

şeklindedir. Burada X , M ye teğet bir vektör alanı, t R nin bir koordinatı ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [25].

$M \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}),$$

ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan J dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** olarak adlandırılır [25].

Tanım 2.2.6. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı F olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY],$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir [25].

Özel olarak $F = J$ olması durumunda

$$N_J(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY],$$

dir [25].

Tanım 2.2.7. Bir hemen hemen kompleks manifoldu (M, J) verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilir** denir [25].

Tanım 2.2.8. Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normal** dir denir [25].

2.3 Sasakian ve Quasi-Sasakian (Q.S.) Manifolfları

Tanım 2.3.1. Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir değme metrik manifoldu M olsun. Eğer değme metrik yapısı normal ise, M manifolduna **Sasakian manifoldu** denir. Sasakian manifold **normal değme metrik manifold** olarak da adlandırılır [25].

Teorem 2.3.1. Bir hemen hemen değme metrik manifold M nin bir Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \chi(M), \quad (2.3.1)$$

olmasıdır [25].

(2.3.1) denkleminde (2.2.1) kullanılarak

$$\nabla_X \xi = -\phi X, \quad X \in \chi(M) \quad (2.3.2)$$

elde edilir. Ek olarak

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\phi X, Y), \quad (2.3.3)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \quad (2.3.4)$$

$$R(X, \xi)\xi = X - \eta(X)\xi, \quad (2.3.5)$$

$$R(X, \xi)Y = \eta(Y)X - g(X, Y)\xi, \quad (2.3.6)$$

dir [25].

Örnek 2.3.1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir reel sayı uzayı R^{2n+1} olsun. (x^i, y^i, z) , $\{i = 1, \dots, n\}$, Kartezyen koordinatlar olmak üzere, (ξ, η, g) yapısı

$$\xi = -2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i),$$

$$g = \frac{1}{4}[\eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^n ((dx^i)^2 + (dy^i)^2)],$$

ile verilsin. Bu durumda (ξ, η, g) yapısı R^{2n+1} üzerinde bir değme metrik yapıdır.

Burada g metriği matris formunda

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^i & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

olarak elde edilir. ϕ tensör alanı

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{bmatrix},$$

ile verilsin. Bu durumda $N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$ dir. Dolayısıyla (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı normaldir [25].

Tanım 2.3.2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir Sasakian manifoldu M olsun. M üzerindeki vektör alanlarının modülü $\varepsilon^{(2n+1)}$ olmak üzere, eğer her $X, Y \in \varepsilon^{(2n+1)}$ için hemen hemen değme yapı (ϕ, ξ, η) normal ve temel 2-form Φ kapalı ise M manifoldu bir **quasi-Sasakian (q.S.) manifoldu** dur. Bu durum aşağıdaki denklemlerle ifade edilir:

$$[\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

$$d\Phi = 0, \quad \Phi(X, Y) = g(X, \phi Y).$$

Kosimplektik yapı ile birlikte verilenlerden ($d\eta = 0$ ($\text{rank}\eta = 1$)), Sasakian yapı ile birlikte verilenlere kadar ($\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ ($\text{rank}\eta = 2n + 1$, $\Phi = d\eta$)) bir çok $q.S.$ yapı tipleri vardır. Eğer $d\eta^p \neq 0$ ve $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$ ise η 1-formu için $\text{rank } r' = 2p$ dir. Eğer $d\eta^p = 0$ ve $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$ ise η 1-formu için $\text{rank } r' = 2p + 1$ dir. r' aynı zamanda $q.S.$ yapının da rankıdır [12].

Teorem 2.3.2. *Bir 3-boyutlu hemen hemen değme metrik manifold M nin bir 3-boyutlu $q.S.$ manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla_X \xi = -\beta \phi X, \quad X \in \chi(M), \quad (2.3.7)$$

olmasıdır. Burada β , M üzerinde $\xi\beta = 0$ ile belirli bir fonksiyon ve ∇ , M nin Riemann metriğine bağlı kovaryant türev operatörüdür [29].

Son denklemden açıktır ki bir $q.S.$ manifoldun kosimplektik olması için gerek ve yeter şart $\beta = 0$ olmasıdır [28].

(2.3.7) nin sonucu olarak

$$(\nabla_X \phi)Y = \beta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), \quad X, Y \in \chi(M), \quad (2.3.8)$$

dir [29]. Böylece (2.3.7) ve (2.3.8) yardımı ile

$$\nabla_X(\nabla_Y \xi) = -X[\beta]\phi Y - \beta^2\{g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\} - \beta\phi\nabla_X Y,$$

elde edilir [29]. Dolayısıyla

$$R(X, Y)\xi = -X[\beta]\phi Y + Y[\beta]\phi X + \beta^2\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\}, \quad (2.3.9)$$

$$R(X, \xi)\xi = \beta^2\{X - \eta(X)\xi\}, \quad (2.3.10)$$

ve

$$R(X, \xi)Y = -X[\beta]\phi Y - \beta^2\{g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\}, \quad (2.3.11)$$

dir [29].

Bir 3-boyutlu Riemann manifoldu için

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X \\ &\quad - S(X, Z)Y - \frac{r}{2}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

dir [25]. Burada Q Ricci operatörü, yani $S(X, Y) = g(QX, Y)$ ve r , M manifoldunun skalar eğriliğidir.

Bir 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. M nin Ricci tensorü S

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right)g(X, Y) + \left(3\beta^2 - \frac{r}{2}\right)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad - \eta(X)d\beta(\phi Y) - \eta(Y)d\beta(\phi X), \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

ile verilir [29]. (2.3.13) nin sonucu olarak, Q Ricci operatörü

$$\begin{aligned} QX &= \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right)X + \left(3\beta^2 - \frac{r}{2}\right)\eta(X)\xi \\ &\quad + \eta(X)(\phi \text{grad } \beta) - d\beta(\phi X)\xi, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

şeklinde elde edilir [29]. Burada β fonksiyonunun gradyanı ile dış türevi $d\beta$ arasındaki bağlantı $d\beta(X) = g(\text{grad } \beta, X)$ denklemi ile verilir [29]. Yine (2.3.13) denkleminde

$$S(X, \xi) = 2\beta^2\eta(X) - d\beta(\phi X), \quad (2.3.15)$$

elde edilir [29]. Ayrıca (2.3.7) denkleminin bir sonucu olarak

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\nabla_X \xi, Y) = -\beta g(\phi X, Y), \quad (2.3.16)$$

dir [29]. Son olarak (2.3.13) denkleminde

$$S(\phi X, \phi Z) = S(X, Z) - 2\beta^2\eta(X)\eta(Z),$$

elde edilir [29].

Tanım 2.3.3. *Bir M Sasakian manifoldunun S Ricci tensörü, M üzerindeki her X, Y, Z vektör alanları için,*

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0, \quad (2.3.17)$$

şartını sağlıyorsa S ye η -**paralel Ricci tensörü** denir [25].

Tanım 2.3.4. M bir Sasakian manifoldu olsun. ξ ye ortogonal her W, X, Y, Z vektör alanı için,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X, Y)Z) = 0, \quad (2.3.18)$$

şartı ile birlikte M manifolduna **lokal ϕ -simetrik** tir denir [25].

2.4 Kenmotsu ve f -Kenmotsu Manifolfları

Bir hemen hemen değme metrik yapı (ϕ, ξ, η, g) ile verilmiş $(2n + 1)$ -boyutlu manifold M olsun. $\chi(M)$, M manifoldunun tanjant uzayı olmak üzere, her $X, Y \in \chi(M)$ için, $\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$ denklemi ile verilen Φ, M nin temel 2-formu olsun. M manifoldu ve (ϕ, ξ, η, g) metrik yapısı için aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 0$ ise (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektiktir.

ii) (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektik ve normal (yani $\nabla\phi = 0$) ise (M, ϕ, ξ, η, g) kosimplektiktir [30].

$M, \sigma_t : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları ile birlikte verilen $\{U_t\}$ açık örtüsüne sahip olsun. Her U_t üzerinde

$$\phi_t = \phi, \quad \xi_t = e^{\sigma_t} \xi, \quad \eta_t = e^{-\sigma_t} \eta, \quad g_t = e^{-2\sigma_t} g,$$

ile tanımlı $(\phi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ hemen hemen değme metrik yapısı **kosimplektik** (veya **hemen hemen kosimplektik**) olsun. Bu durumda M , **lokal konformal kosimplektik** (veya **lokal konformal hemen hemen kosimplektik**) manifolddur [30]. Bir f -Kenmotsu manifoldu, normal ve lokal konformal hemen hemen kosimplektik manifold olan bir hemen hemen değme metrik manifoldu olarak tanımlanır [11].

Tanım 2.4.1. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X,$$

ise (M, ϕ, ξ, η, g) manifolduna bir **Kenmotsu manifoldu** denir [30]. Eğer

$$(\nabla_X \phi)(Y) = f\{g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X\}, \quad (2.4.1)$$

şartı sağlanıyorsa (M, ϕ, ξ, η, g) manifolduna bir **f -Kenmotsu manifoldu** denir [31]. Burada $df \wedge \eta = 0$ olacak şekilde $f \in C^\infty(M)$ dır. $f = \alpha \neq 0$ bir sabit ise M manifoldu bir α -Kenmotsu manifoldudur [28]. $f = 1$ için M nin bir Kenmotsu manifolduna olduğu açıktır. $f = 0$ için M manifoldu **kosimplektik** tir [28]. Bir f -Kenmotsu manifoldu $f' = \xi(f)$ olmak üzere $f^2 + f' \neq 0$ şartını sağlıyorsa **regüler** denir [28].

(2.2.1), (2.2.4) denklemleri (2.4.1) de kullanılarak

$$\nabla_X \xi = f\{X - \eta(X)\xi\}, \quad (2.4.2)$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla_X \eta)(Y) = f\{g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\}, \quad (2.4.3)$$

bulunur [11].

Bir 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldu M için (2.3.12) den, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \left(\frac{r}{2} + 2f^2 + 2f'\right)\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad - \left(\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f'\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ &\quad + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\}, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$S(X, Y) = \left(\frac{r}{2} + f^2 + f'\right)g(X, Y) - \left(\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f'\right)\eta(X)\eta(Y) \quad (2.4.5)$$

ve

$$QX = \left(\frac{r}{2} + f^2 + f'\right)X - \left(\frac{r}{2} + 3f^2 + 3f'\right)\eta(X)\xi, \quad (2.4.6)$$

dir [11]. Burada M üzerinde R eğrilik tensörü, S Ricci tensörü, Q Ricci operatörü ve r skalar eğriliktir.

Ayrıca (2.4.4) ve (2.4.5) denklemlerinden

$$R(X, Y)\xi = -(f^2 + f')\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} \quad (2.4.7)$$

ve

$$S(X, \xi) = -2(f^2 + f')\eta(X), \quad (2.4.8)$$

elde edilir.

2.5 Distribüsyonlar

Tanım 2.5.1. M bir m -boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$D : M \rightarrow \bigcup T_p M$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_p M, \quad \text{boy}(D_p) = r,$$

ile tanımlı D dönüşümüne r - boyutlu **distribüsyon** denir. $X \in \chi(M)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D_p altuzayına ait r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir [24].

Örnek 2.5.1. Bir M manifoldu üzerindeki bir vektör alanı 1-boyutlu bir distribüsyondur [24].

Örnek 2.5.2. Bir M manifoldu üzerinde tanımlı vektör demetinin her alt vektör demeti bir distribüsyon tanımlar [24].

Tanım 2.5.2. M bir C^∞ diferansiyellenebilir manifold ve D , M üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna **involütif** dir denir [1].

Tanım 2.5.3. Bir M manifoldu üzerinde ∇ koneksiyonu verilsin. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna **paralel distribüsyon** denir [1].

Tanım 2.5.4. $\overline{M}$ bir C^∞ diferansiyellenebilir manifold ve D , $\overline{M}$ üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. M , $\overline{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun **integral manifoldu** denir. Yani

$$f : M \rightarrow \overline{M}$$

bir imbedding olmak üzere her $p \in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dir. Eğer D distribüsyonunun M alt manifoldunu kapsayan bir integral manifoldu yoksa M ye D distribüsyonunun **maksimal integral manifoldu** denir [24].

Örnek 2.5.3. Bir vektör alanının integral eğrisi 1-boyutlu distribüyon olan vektör alanının integral manifoldudur [24].

Teorem 2.5.1. (Frobenius Teoremi) $\overline{M}$ bir C^∞ diferensiyellenebilir manifold ve D , $\overline{M}$ üzerinde r - boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involütif distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik M , $\overline{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere, D nin her $p \in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık alt manifoldudur [24].

Frobenius Teoreminden ve braket tanımından 1-boyutlu tüm distribüsyonların integrallenebilir olduğu açıktır. Daha yüksek boyutta ise bu geçerli değildir [24].

Tanım 2.5.5. $\overline{M}$ bir C^∞ diferensiyellenebilir manifold ve D , $\overline{M}$ üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. M , $\overline{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere, eğer her $p \in M$ için D nin p yi kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonu **integrallenebilirdir** denir [1].

Tanım 2.5.6. Bir M manifoldu üzerinde bir D distribüsyonu verilsin. D integrallenebilir değil ise (M, D) çiftine **non-holonomik manifold** denir [1].

2.6 Schouten-van Kampen (S.v.K.) Koneksiyonu

$n \geq 2$ boyutlu bir bağlantılı pseudo-Riemann manifoldu M olsun. M üzerindeki pseudo-Riemann metrik g ile, Levi-Civita koneksiyonu da ∇ ile verilsin. H ve V , M üzerinde iki tümleyen ortogonal distribüsyonlar $\dim H = n - 1$, $\dim V = 1$ ve V non-null olsun. Böylece $TM = H \oplus V$, $H \cap V = \{0\}$ ve $H \perp V$ dır. ξ bir birim vektör alanı ve η bir lineer form olmak üzere M nin keyfi seçilen bir noktasının belirli bir komşuluğunda $\eta(\xi) = 1$, $g(\xi, \xi) = \varepsilon = \pm 1$ ve

$$H = \ker \eta, \quad V = \text{span}\{\xi\}, \quad (2.6.1)$$

olacak şekilde en az bir ξ ve η seçilebilir. Burada ayrıca $\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi)$ dir. Dahası bu durum $\nabla_X \xi \in H$ olduğunu gösterir.

Her $X \in \chi(M)$ için, X^h ve X^v sırasıyla X in H ve V üzerine projeksiyonları olmak üzere $X = X^h + X^v$ ve

$$X^h = X - \eta(X)\xi, \quad X^v = \eta(X)\xi, \quad (2.6.2)$$

dır. Dolayısıyla S.v.K. koneksiyonu $\tilde{\nabla}$, Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile ilişkili ve (H, V) distribüsyon çifti ile uyumlu olarak

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y^h)^h + (\nabla_X Y^v)^v, \quad (2.6.3)$$

denklemleri ile verilir. Buna karşılık gelen B ikinci temel form, $B = \nabla - \tilde{\nabla}$ ile verilir [1]. Dikkat edilmelidir ki (2.6.3) denklemleri H ve V distribüsyonlarının $\tilde{\nabla}$ S.v.K. koneksiyonuna göre paralelliklerini ifade eder.

(2.6.2) den

$$(\nabla_X Y^h)^h = \nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X \xi,$$

$$(\nabla_X Y^v)^v = (\nabla_X \eta)(Y)\xi + \eta(\nabla_X Y)\xi,$$

denklemleri ve dolayısıyla S.v.K. koneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi + (\nabla_X \eta)(Y)\xi, \quad (2.6.4)$$

şeklinde elde edilir [5]. Böylece, B ikinci temel form ve $\tilde{\nabla}$ nin $\tilde{T}$ torsiyon tensörü, sırasıyla,

$$B(X, Y) = \eta(Y)\nabla_X\xi - (\nabla_X\eta)(Y)\xi, \quad (2.6.5)$$

$$\tilde{T}(X, Y) = \eta(X)\nabla_Y\xi - \eta(Y)\nabla_X\xi + 2d\eta(X, Y)\xi,$$

ile verilir [5, 6]. Bu S.v.K. koneksiyonu denklemi (2.6.4) yardımıyla, H ve V distribüsyonlarıyla bağlantılı bazı geometrik objelerin bir çok özelliği karakterize edilebilir. Bunların en dikkat çekici olanı g , ξ ve η nın $\tilde{\nabla}$ koneksiyonuna göre paralelliği yani $\tilde{\nabla}\xi = 0$, $\tilde{\nabla}g = 0$, $\tilde{\nabla}\eta = 0$ olmasıdır [5, 6, 7].

Tanım 2.6.1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold ve boy $M = 2n + 1$ olsun. a bir pozitif sabit olmak üzere, M de bir $2n$ -boyutlu $\mathcal{D}_a$ distribüsyonu verilsin. M manifoldunun üzerindeki tensör yapılarının bu distribüsyon yardımı ile

$$\begin{aligned} \eta^a &= a\eta, & \xi^a &= \frac{1}{a}\xi, & \phi^a &= \phi, \\ g^a &= ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

şeklinde $(M, \phi^a, \xi^a, \eta^a, g^a)$ yapısına dönüşümüne $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyon denir. Burada η sabit bir form ise $(M, \phi^a, \xi^a, \eta^a, g^a)$ yapısı da bir hemen hemen değme metrik yapıdır [20].

3. S.V.K. KONEKSİYONLU f -KENMOTSU MANİFOLDLARI

Bu bölümde, ilk olarak S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldları incelenmektedir. Daha sonra bu tip manifoldların, sırasıyla, semi-simetrik, Ricci semi-simetrik, projektif semi-simetrik ve konharmonik semi-simetrik olması durumları ile ilgili karakterizasyonlar sunulmaktadır.

3.1 S.v.K. Koneksiyonlu 3-Boyutlu f -Kenmotsu Manifoldları

Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldu M olsun. (2.4.2), (2.4.3) denklemleri (2.6.4) de kullanılarak

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + f(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), \quad (3.1.1)$$

elde edilir. ∇ Levi-Civita koneksiyona göre ve $\tilde{\nabla}$ S.v.K. koneksiyona göre eğrilik tensörleri, sırasıyla, R ve $\tilde{R}$ olmak üzere (3.1.1) denkleminde

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ &+ f^2\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &+ f\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ &+ \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dir. Son eşitliğin her iki tarafına W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &+ f^2\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \\ &+ f\{g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\ &+ g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere (3.1.3) denkleminde $X = W = e_i$ alırsak

$$\tilde{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + (2f^2 + f')g(Y, Z) + f'\eta(Y)\eta(Z), \quad (3.1.4)$$

denklemini elde edilir. Burada $\tilde{S}$ ve S , sırasıyla, $\tilde{\nabla}$ ve ∇ koneksiyonlarının Ricci tensörleridir. (3.1.4) nin sonucu olarak, $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q}Y = QY + (2f^2 + f')Y + f'\eta(Y)\xi, \quad (3.1.5)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.4) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa $\tilde{r}$ skaler eğriliği

$$\tilde{r} = r + 6f^2 + 4f', \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilir [10].

3.2 3-Boyutlu f -Kenmotsu Manifoldlarında Bazı Eğrilik Şartları

Teorem 3.2.1. *Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu regüler f -Kenmotsu manifoldu M olsun. M S.v.K. koneksiyonuna göre semi-simetrik ise aşağıdaki durumlar sağlanır:*

- i) $0 \neq f = \alpha$ sabit ise M bir pseudo-simetrik α -Kenmotsu manifoldudur.
- ii) f sabit değilse M bir Einstein manifoldudur.

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu regüler f -Kenmotsu manifoldu M olsun. M semi-simetrik ise

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{R})(Z, U)W = 0$$

ve dolayısıyla (2.1.4) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned} & \tilde{R}(X, Y)\tilde{R}(Z, U)W - \tilde{R}(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ & - \tilde{R}(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - \tilde{R}(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

yazılır. (3.2.1) de (3.1.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \tilde{R}(X, Y)R(Z, U)W - R(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ & - R(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - R(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

dir. Buradan

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot R)(Z, U)W = 0, \quad (3.2.3)$$

elde edilir. (3.2.3) de (3.1.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} & R(X, Y)R(Z, U)W - R(R(X, Y)Z, U)W \\ & - R(Z, R(X, Y)U)W - R(Z, U)R(X, Y)W \\ & + f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(R(Z, U)W, Y)X - g(R(Z, U)W, X)Y \\ & -g(Y, Z)R(X, U)W + g(X, Z)R(Y, U)W \\ & -g(Y, U)R(Z, X)W + g(X, U)R(Z, Y)W \\ & -g(Y, W)R(Z, U)X + g(X, W)R(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \\ & + f^1 \left\{ \begin{aligned} & g(R(Z, U)W, Y)\eta(X)\xi - g(R(Z, U)W, X)\eta(Y)\xi \\ & +\eta(R(Z, U)W)\eta(Y)X - \eta(R(Z, U)W)\eta(X)Y \\ & -g(Y, Z)\eta(R(X, U)W)\xi + g(X, Z)\eta(R(Y, U)W)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(Z)R(X, U)W + \eta(X)\eta(Z)R(Y, U)W \\ & -g(Y, U)\eta(R(Z, X)W)\xi + g(X, U)\eta(R(Z, Y)W)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(U)R(Z, X)W + \eta(X)\eta(U)R(Z, Y)W \\ & -g(Y, W)\eta(R(Z, U)X)\xi + g(X, W)\eta(R(Z, U)Y)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(W)R(Z, U)X + \eta(X)\eta(W)R(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. $0 \neq f = \alpha$ bir sabit olsun. Bu durumda $f^1 = 0$ olacağından (3.2.4) den dolayı $R \cdot R = -\alpha^2 Q(g, R)$ dır. Dolayısıyla M manifoldu bir pseudosimetrik α -Kenmotsu manifoldudur. f sabit değil ise bu durumda (3.2.4) denkleminde

$X = \xi$ alınarak ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \eta(R(\xi, Y)R(Z, U)W) - \eta(R(R(\xi, Y)Z, U)W) \\
& - \eta(R(Z, R(\xi, Y)U)W) - \eta(R(Z, U)R(\xi, Y)W) \\
& + f^2 \left\{ \begin{array}{l} g(R(Z, U)W, Y) - g(R(Z, U)W, \xi)\eta(Y) \\ -g(Y, Z)\eta(R(\xi, U)W) + g(\xi, Z)\eta(R(Y, U)W) \\ -g(Y, U)\eta(R(Z, \xi)W) + g(\xi, U)\eta(R(Z, Y)W) \\ -g(Y, W)\eta(R(Z, U)\xi) + g(\xi, W)\eta(R(Z, U)Y) \end{array} \right\} \\
& + f' \left\{ \begin{array}{l} g(R(Z, U)W, Y) - g(R(Z, U)W, \xi)\eta(Y) \\ +\eta(R(Z, U)W)\eta(Y) - \eta(R(Z, U)W)\eta(Y) \\ -g(Y, Z)\eta(R(\xi, U)W) + g(\xi, Z)\eta(R(Y, U)W) \\ -\eta(Y)\eta(Z)\eta(R(\xi, U)W) + \eta(Z)\eta(R(Y, U)W) \\ -g(Y, U)\eta(R(Z, \xi)W) + g(\xi, U)\eta(R(Z, Y)W) \\ -\eta(Y)\eta(U)\eta(R(Z, \xi)W) + \eta(U)\eta(R(Z, Y)W) \\ -g(Y, W)\eta(R(Z, U)\xi) + g(\xi, W)\eta(R(Z, U)Y) \\ -\eta(Y)\eta(W)\eta(R(Z, U)\xi) + \eta(W)\eta(R(Z, U)Y) \end{array} \right\} \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, M manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere son denklemde $Y = Z = e_i$ alınır

$$(f^2 + f')\{S(U, W) - 2g(R(\xi, W)U, \xi) + 2(f^2 + f')\eta(U)\eta(W)\} = 0, \tag{3.2.6}$$

denklemini elde edilir. $f^2 + f' \neq 0$ olduğundan (3.2.6) denkleminde

$$S(U, W) - 2g(R(\xi, W)U, \xi) + 2(f^2 + f')\eta(U)\eta(W) = 0, \tag{3.2.7}$$

dir. (3.2.7) de (2.4.7) kullanılırsa

$$S(U, W) = -2(f^2 + f')g(U, W),$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 3.2.2. *Bir Ricci semi-simetrik S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu regüler f-Kenmotsu manifoldu M olsun. M Levi-Civita koneksiyonuna göre Ricci semi-simetrik ise S.v.K. koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur.*

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu regüler f-Kenmotsu manifoldu M olsun. M Ricci semi-simetrik ise

$$\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{S} = 0,$$

dir. Dolayısıyla (2.1.4) denklemi yardımıyla

$$\tilde{S}(\tilde{R}(X, Y)Z, W) + \tilde{S}(Z, \tilde{R}(X, Y)W) = 0, \quad (3.2.8)$$

dir. (3.1.3), (3.1.4) denklemleri (3.2.8) de kullanılarak

$$\begin{aligned} & S(R(X, Y)Z, W) + S(Z, R(X, Y)W) \\ & + f' \left\{ \eta(R(X, Y)Z)\eta(W) + f' \eta(R(X, Y)W)\eta(Z) \right\} \\ & + f^2 \left\{ \begin{array}{l} S(X, W)g(Y, Z) - S(Y, W)g(X, Z) \\ + S(X, Z)g(Y, W) - S(Y, Z)g(X, W) \end{array} \right\} \\ & - f'(f^2 + f') \left\{ \begin{array}{l} g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\ + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \end{array} \right\} \\ & + f' \left\{ \begin{array}{l} S(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - S(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\ + S(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - S(Y, Z)\eta(X)\eta(W) \end{array} \right\} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

elde edilir. M, Levi-Civita koneksiyonuna göre Ricci semi-simetrik olsun. Bu durumda

$$R(X, Y) \cdot S = 0,$$

dir. Dolayısıyla

$$S(R(X, Y)Z, W) + S(Z, R(X, Y)W) = 0,$$

dir. Son eşitlik (3.2.9) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& f' \{ \eta(R(X, Y)Z) \eta(W) + f' \eta(R(X, Y)W) \eta(Z) \} \\
& + f^2 \left\{ \begin{array}{l} S(X, W)g(Y, Z) - S(Y, W)g(X, Z) \\ + S(X, Z)g(Y, W) - S(Y, Z)g(X, W) \end{array} \right\} \\
& - f'(f^2 + f') \left\{ \begin{array}{l} g(Y, Z) \eta(X) \eta(W) - g(X, Z) \eta(Y) \eta(W) \\ + g(Y, W) \eta(X) \eta(Z) - g(X, W) \eta(Y) \eta(Z) \end{array} \right\} \\
& + f' \left\{ \begin{array}{l} S(X, W) \eta(Y) \eta(Z) - S(Y, W) \eta(X) \eta(Z) \\ + S(X, Z) \eta(Y) \eta(W) - S(Y, Z) \eta(X) \eta(W) \end{array} \right\} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

dir. Burada $W = \xi$ alınarak

$$\begin{aligned}
& f' \eta(R(X, Y)Z) \\
& + f^2 \left\{ \begin{array}{l} S(X, \xi)g(Y, Z) - S(Y, \xi)g(X, Z) \\ + S(X, Z) \eta(Y) - S(Y, Z) \eta(X) \end{array} \right\} \\
& - f'(f^2 + f') \{ g(Y, Z) \eta(X) - g(X, Z) \eta(Y) \} \\
& + f' \left\{ \begin{array}{l} S(X, \xi) \eta(Y) \eta(Z) - S(Y, \xi) \eta(X) \eta(Z) \\ + S(X, Z) \eta(Y) - S(Y, Z) \eta(X) \end{array} \right\} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& 2(f^2 + f')^2 \{ g(Y, Z) \eta(X) - g(X, Z) \eta(Y) \} \\
& - (f^2 + f') \{ S(Y, Z) \eta(X) - S(X, Z) \eta(Y) \} = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.10) de $X = \xi$ alınarak

$$\begin{aligned}
& 2(f^2 + f')^2 \{ g(Y, Z) - \eta(Y) \eta(Z) \} \\
& - (f^2 + f') \{ S(Y, Z) + 2(f^2 + f') \eta(Y) \eta(Z) \} = 0,
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$(f^2 + f')\{S(Y, Z) + 4(f^2 + f')\eta(Y)\eta(Z) - 2(f^2 + f')g(Y, Z)\} = 0, \quad (3.2.11)$$

elde edilir. $f^2 + f' \neq 0$ olduğundan, (3.2.11) den

$$S(Y, Z) = 2(f^2 + f')g(Y, Z) - 4(f^2 + f')\eta(Y)\eta(Z), \quad (3.2.12)$$

dir. Böylece M manifoldu Levi-Civita koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldu olup (3.1.4) denkleminde (3.2.12) kullanılarak

$$\tilde{S}(Y, Z) = (4f^2 + 3f')g(Y, Z) - (4f^2 + 3f')\eta(Y)\eta(Z),$$

denklemini elde edilir. Buradan M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre de bir η -Einstein manifoldudur. $\square$

Teorem 3.2.3. *Bir projektif semi-simetrik S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifold M olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar sağlanır:*

i) Eğer f sabit ($f \neq 0$) ise M bir projektif pseudosimetrik α -Kenmotsu manifoldudur. Aynı zamanda M Levi-Civita ve S.v.K. koneksiyonlarına göre bir η -Einstein manifoldudur.

ii) Eğer f sabit değilse M manifoldu non-regülerdir.

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifold M olsun. (2.1.1), (3.1.2) ve (3.1.5) denklemleri kullanılarak M nin $\tilde{P}$ ve P projektif eğrilik tensör alanları

$$\begin{aligned} \tilde{P}(X, Y)Z &= P(X, Y)Z - \frac{1}{2}f'\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad + \frac{1}{2}f'\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + f'\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi\}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2}\{g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY\}, \quad (3.2.14)$$

olarak elde edilir. M S.v.K. koneksiyonuna göre projektif semi-simetrik ise $\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{P} = 0$ dır. Dolayısıyla (2.1.4) denkleminde

$$\begin{aligned} & (\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{P})(Z, U)W \\ &= \tilde{R}(X, Y)\tilde{P}(Z, U)W - \tilde{P}(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ & - \tilde{P}(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - \tilde{P}(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

dır. (3.2.15) de (3.2.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \tilde{R}(X, Y)P(Z, U)W - P(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ & - P(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - P(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

elde edilir. (3.2.16) de (3.1.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} & R(X, Y)P(Z, U)W - P(R(X, Y)Z, U)W \\ & - P(Z, R(X, Y)U)W - P(Z, U)R(X, Y)W \\ & + f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(Y, P(Z, U)W)X - g(X, P(Z, U)W)Y \\ & -g(Y, Z)P(X, U)W + g(X, Z)P(Y, U)W \\ & -g(Y, U)P(Z, X)W + g(X, U)P(Z, Y)W \\ & -g(Y, W)P(Z, U)X + g(X, W)P(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \\ & + f^1 \left\{ \begin{aligned} & g(P(Z, U)W, Y)\eta(X)\xi - g(P(Z, U)W, X)\eta(Y)\xi \\ & +\eta(P(Z, U)W)\eta(Y)X - \eta(P(Z, U)W)\eta(X)Y \\ & -g(Y, Z)\eta(P(X, U)W)\xi + g(X, Z)\eta(P(Y, U)W)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(Z)P(X, U)W + \eta(X)\eta(Z)P(Y, U)W \\ & -g(Y, U)\eta(P(Z, X)W)\xi + g(X, U)\eta(P(Z, Y)W)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(U)P(Z, X)W + \eta(X)\eta(U)P(Z, Y)W \\ & -g(Y, W)\eta(P(Z, U)X)\xi + g(X, W)\eta(P(Z, U)Y)\xi \\ & -\eta(Y)\eta(W)P(Z, U)X + \eta(X)\eta(W)P(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

elde edilir. (3.2.17) den dolayı, $0 \neq f = \alpha$ sabit ise $f^! = 0$ olacağından $R \cdot P = -\alpha^2 Q(g, P)$ elde edilir. Dolayısıyla M bir projektif pseudosimetrik α -Kenmotsu manifoldudur. f sabit değil ise (3.2.17) denkleminde (2.4.4) ve (3.2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)R(Z, U)W - R(R(X, Y)Z, U)W \\
& - R(Z, R(X, Y)U)W - R(Z, U)R(X, Y)W \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & S(R(X, Y)Z, W)U + S(Z, R(X, Y)W)U \\ & - S(R(X, Y)U, W)Z - S(R(X, Y)W, U)Z \end{aligned} \right\} \\
& - f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(Y, R(Z, U)W)X - g(X, R(Z, U)W)Y \\ & - g(Y, Z)R(X, U)W + g(X, Z)R(Y, U)W \\ & - g(Y, U)R(Z, X)W + g(X, U)R(Z, Y)W \\ & - g(Y, W)R(Z, U)X + g(X, W)R(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{f^2}{2} \left\{ \begin{aligned} & S(Y, W)g(X, U)Z - S(X, U)g(Y, W)Z \\ & + S(Y, U)g(X, W)Z - S(Y, Z)g(X, W)Z \\ & - S(Y, W)g(X, Z)U + S(X, Z)g(Y, W)U \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)R(Z, U)W - R(R(X, Y)Z, U)W \\
& - R(Z, R(X, Y)U)W - R(Z, U)R(X, Y)W \\
& = \frac{B}{2} \left\{ \begin{aligned} & \eta(R(X, Y)U)\eta(W)Z - \eta(R(X, Y)Z)\eta(W)U \\ & + \eta(R(X, Y)W)\eta(U)Z - \eta(R(X, Y)W)\eta(Z)U \end{aligned} \right\} \\
& - f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(Y, R(Z, U)W)X - g(X, R(Z, U)W)Y \\ & - g(Y, Z)R(X, U)W + g(X, Z)R(Y, U)W \\ & - g(Y, U)R(Z, X)W + g(X, U)R(Z, Y)W \\ & - g(Y, W)R(Z, U)X + g(X, W)R(Z, U)Y \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Af^2}{2} \{g(Y, U)g(X, W)Z - g(Y, Z)g(X, W)U\} \\
& + \frac{Bf^2}{2} \left\{ \begin{aligned} & g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)U - g(X, U)\eta(Y)\eta(W)Z \\ & + g(Y, W)\eta(X)\eta(U)Z - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)U \\ & - g(X, W)\eta(Y)\eta(U)Z + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)U \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A = \frac{\tau}{2} + 2f^2 + 2f'$ ve $B = \frac{\tau}{2} + 3f^2 + 3f'$ dir. Son denklemde $X = \xi$ alınarak elde edilen

$$\begin{aligned}
& R(\xi, Y)R(Z, U)W - R(R(\xi, Y)Z, U)W \\
& - R(Z, R(\xi, Y)U)W - R(Z, U)R(\xi, Y)W \\
& = \frac{B}{2} \left\{ \begin{aligned} & \eta(R(\xi, Y)U)\eta(W)Z - \eta(R(\xi, Y)Z)\eta(W)U \\ & + \eta(R(\xi, Y)W)\eta(U)Z - \eta(R(\xi, Y)W)\eta(Z)U \end{aligned} \right\} \\
& - f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(Y, R(Z, U)W)\xi - \eta(R(Z, U)W)Y \\ & - g(Y, Z)R(\xi, U)W + \eta(Z)R(Y, U)W \\ & - g(Y, U)R(Z, \xi)W + \eta(U)R(Z, Y)W \\ & - g(Y, W)R(Z, U)\xi + \eta(W)R(Z, U)Y \end{aligned} \right\} \tag{3.2.18} \\
& + \frac{Af^2}{2} \{g(Y, U)\eta(W)Z - g(Y, Z)\eta(W)U\} \\
& + \frac{Bf^2}{2} \left\{ \begin{aligned} & \eta(Z)\eta(Y)\eta(W)U - \eta(U)\eta(Y)\eta(W)Z \\ & + g(Y, W)\eta(U)Z - g(Y, W)\eta(Z)U \\ & - \eta(W)\eta(Y)\eta(U)Z + \eta(W)\eta(Y)\eta(Z)U \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

denkleminde ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \eta(R(\xi, Y)R(Z, U)W) - \eta(R(R(\xi, Y)Z, U)W) \\
& - \eta(R(Z, R(\xi, Y)U)W) - \eta(R(Z, U)R(\xi, Y)W) \\
& = \frac{B}{2} \{\eta(R(\xi, Y)U)\eta(W)\eta(Z) - \eta(R(\xi, Y)Z)\eta(W)\eta(U)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(Y, R(Z, U)W) - \eta(R(Z, U)W)\eta(Y) \\ & -g(Y, Z)\eta(R(\xi, U)W) + \eta(Z)\eta(R(Y, U)W) \\ & -g(Y, U)\eta(R(Z, \xi)W) + \eta(U)\eta(R(Z, Y)W) \\ & +\eta(W)\eta(R(Z, U)Y) \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{Af^2}{2} \{g(Y, U)\eta(W)\eta(Z) - g(Y, Z)\eta(W)\eta(U)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere son denklemde $Y = Z = e_i$ alırsak

$$\begin{aligned}
& \eta(R(\xi, e_i)R(e_i, U)W) - \eta(R(R(\xi, e_i)e_i, U)W) \\
& - \eta(R(e_i, R(\xi, e_i)U)W) - \eta(R(e_i, U)R(\xi, e_i)W) \\
& = \frac{B}{2} \{ \eta(R(\xi, e_i)U)\eta(W)\eta(e_i) - \eta(R(\xi, e_i)e_i)\eta(W)\eta(U) \} \\
& - f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(e_i, R(e_i, U)W) - \eta(R(e_i, U)W)\eta(e_i) \\ & -g(e_i, e_i)\eta(R(\xi, U)W) + \eta(e_i)\eta(R(e_i, U)W) \\ & -g(e_i, U)\eta(R(e_i, \xi)W) + \eta(U)\eta(R(e_i, e_i)W) \\ & +\eta(W)\eta(R(e_i, U)e_i) \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{Af^2}{2} \{g(e_i, U)\eta(W)\eta(e_i) - g(e_i, e_i)\eta(W)\eta(U)\},
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \eta(R(\xi, e_i)R(e_i, U)W) - \eta(R(R(\xi, e_i)e_i, U)W) \\
& - \eta(R(e_i, R(\xi, e_i)U)W) - \eta(R(e_i, U)R(\xi, e_i)W) \\
& = \frac{-B}{2} \eta(R(\xi, e_i)e_i)\eta(W)\eta(U) - Af^2\eta(W)\eta(U) \\
& - f^2 \left\{ \begin{aligned} & g(e_i, R(e_i, U)W) - g(e_i, e_i)\eta(R(\xi, U)W) \\ & -g(e_i, U)\eta(R(e_i, \xi)W) + \eta(W)\eta(R(e_i, U)e_i) \end{aligned} \right\},
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. (3.2.20) denkleminde ($\tilde{C} = -f^2$ alınarak) (3.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -\tilde{C}S(U, W) - \tilde{C}^2g(U, W) + \tilde{C}^2\eta(W)\eta(U) \\
& + \tilde{C}^2g(U, W) + 2\tilde{C}\eta(W)\eta(U) + 2\tilde{C}\eta(W)\eta(U) \\
& = B\tilde{C}\eta(W)\eta(U) - Af^2\eta(W)\eta(U) \\
& - f^2\{S(U, W) - 4\tilde{C}g(U, W) + 2\tilde{C}\eta(W)\eta(U)\}
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

ve

$$S(U, W) = -f^2g(U, W) - f^2\eta(W)\eta(U),$$

elde edilir. Böylece M , Levi-Civita koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur.

Ayrıca bu son denklem (3.1.4) de kullanılırsa

$$\tilde{S}(U, W) = f^2g(U, W) - f^2\eta(W)\eta(U),$$

elde edilir. Böylece M S.v.K. koneksiyonuna göre de bir η -Einstein manifoldudur.

(3.2.17) de $X = \xi$ alınarak

$$\begin{aligned}
0 &= R(\xi, Y)P(Z, U)W - P(R(\xi, Y)Z, U)W \\
& - P(Z, R(\xi, Y)U)W - P(Z, U)R(\xi, Y)W \\
& + f^1 \left\{ \begin{aligned}
& g(P(Z, U)W, Y)\xi - \eta(P(Z, U)W)\eta(Y)\xi \\
& + \eta(P(Z, U)W)\eta(Y)\xi - \eta(P(Z, U)W)Y \\
& - g(Y, Z)\eta(P(\xi, U)W)\xi + \eta(Z)\eta(P(Y, U)W)\xi \\
& - \eta(Y)\eta(Z)P(\xi, U)W + \eta(Z)P(Y, U)W \\
& - g(Y, U)\eta(P(Z, \xi)W)\xi + \eta(U)\eta(P(Z, Y)W)\xi \\
& - \eta(Y)\eta(U)P(Z, \xi)W + \eta(U)P(Z, Y)W \\
& - g(Y, W)\eta(P(Z, U)\xi)\xi + \eta(W)\eta(P(Z, U)Y)\xi \\
& - \eta(Y)\eta(W)P(Z, U)\xi + \eta(W)P(Z, U)Y
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$+f^2 \left\{ \begin{array}{l} g(Y, P(Z, U)W)\xi - \eta(P(Z, U)W)Y \\ -g(Y, Z)P(\xi, U)W + \eta(Z)P(Y, U)W \\ -g(Y, U)P(Z, \xi)W + \eta(U)P(Z, Y)W \\ -g(Y, W)P(Z, U)\xi + \eta(W)P(Z, U)Y \end{array} \right\},$$

ve

$$\begin{aligned} 0 = & R(\xi, Y)P(Z, U)W - P(R(\xi, Y)Z, U)W \\ & - P(Z, R(\xi, Y)U)W - P(Z, U)R(\xi, Y)W \\ & + (f^2 + f') \left\{ \begin{array}{l} g(Y, P(Z, U)W)\xi - g(\xi, P(Z, U)W)Y \\ -g(Y, Z)P(\xi, U)W + g(\xi, Z)P(Y, U)W \\ -g(Y, U)P(Z, \xi)W + g(\xi, U)P(Z, Y)W \\ -g(Y, W)P(Z, U)\xi + g(\xi, W)P(Z, U)Y \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Son denklemde $Z = W = \xi$ alınır

$$(f^2 + f')\{(f^2 + f')g(Y, U)\xi - (f^2 + f')\eta(Y)\eta(U)\xi\} = 0,$$

dir. Dolayısıyla

$$(f^2 + f')^2 g(\phi Y, \phi U) = 0,$$

elde edilir. $g(\phi Y, \phi U) \neq 0$ olduğundan $f^2 + f' = 0$ dir. □

Teorem 3.2.4. *Bir konharmonik semi-simetrik S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f-Kenmotsu manifold M olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar sağlanır:*

i) *f sabit ($f \neq 0$) ise M bir konharmonik pseudosimetrik α -Kenmotsu manifolddudur. Aynı zamanda M Levi-Civita ve S.v.K. koneksiyonlarına göre bir η -Einstein manifolddudur.*

ii) *Eğer f sabit değilse M non-regüler manifoldu Levi-Civita koneksiyonuna göre Ricci-flat manifolddudur.*

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu f -Kenmotsu manifold M olsun. (2.1.3) den M nin $\tilde{K}$ konharmonik eğrilik tensör alanı

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X, Y)Z &= \tilde{R}(X, Y)Z \\ &- \{\tilde{S}(Y, Z)X - \tilde{S}(X, Z)Y + g(Y, Z)\tilde{Q}X - g(X, Z)\tilde{Q}Y\},\end{aligned}\tag{3.2.22}$$

ile verilir. (3.2.22) denkleminde (3.1.2), (3.1.4) ve (3.1.5) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X, Y)Z &= K(X, Y)Z \\ &- (3f^2 + 2f')\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\},\end{aligned}\tag{3.2.23}$$

elde edilir. $\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{K} = 0$ ise M S.v.K. koneksiyonuna göre bir *konharmonik semi-simetrik* manifolddur. Bu durumda

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{K})(Z, U)W = 0,\tag{3.2.24}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)\tilde{K}(Z, U)W &- \tilde{K}(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ &- \tilde{K}(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - \tilde{K}(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0,\end{aligned}\tag{3.2.25}$$

dir. (3.2.25) de (3.2.23) kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)K(Z, U)W &- K(\tilde{R}(X, Y)Z, U)W \\ &- K(Z, \tilde{R}(X, Y)U)W - K(Z, U)\tilde{R}(X, Y)W = 0,\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

dir. (3.2.26) de (3.1.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}0 &= R(X, Y)K(Z, U)W - K(R(X, Y)Z, U)W \\ &- K(Z, R(X, Y)U)W - K(Z, U)R(X, Y)W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f^2 \left\{ \begin{array}{l} g(Y, K(Z, U)W)X - g(X, K(Z, U)W)Y \\ -g(Y, Z)K(X, U)W + g(X, Z)K(Y, U)W \\ -g(Y, U)K(Z, X)W + g(X, U)K(Z, Y)W \\ -g(Y, W)K(Z, U)X + g(X, W)K(Z, U)Y \end{array} \right\} \\
& + f^1 \left\{ \begin{array}{l} g(K(Z, U)W, Y)\eta(X)\xi - g(K(Z, U)W, X)\eta(Y)\xi \\ +\eta(K(Z, U)W)\eta(Y)X - \eta(K(Z, U)W)\eta(X)Y \\ -g(Y, Z)\eta(K(X, U)W)\xi + g(X, Z)\eta(K(Y, U)W)\xi \\ -\eta(Y)\eta(Z)K(X, U)W + \eta(X)\eta(Z)K(Y, U)W \\ -g(Y, U)\eta(K(Z, X)W)\xi + g(X, U)\eta(K(Z, Y)W)\xi \\ -\eta(Y)\eta(U)K(Z, X)W + \eta(X)\eta(U)K(Z, Y)W \\ -g(Y, W)\eta(K(Z, U)X)\xi + g(X, W)\eta(K(Z, U)Y)\xi \\ -\eta(Y)\eta(W)K(Z, U)X + \eta(X)\eta(W)K(Z, U)Y \end{array} \right\},
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla $0 \neq f = \alpha$ sabit ise $f^1 = 0$ olacağından $R \cdot K = -\alpha^2 Q(g, K)$ olup M konharmonik pseudosimetrik α -Kenmotsu manifoldudur. Son denklemde (2.1.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= R(X, Y)R(Z, U)W - R(R(X, Y)Z, U)W \\
&- R(Z, R(X, Y)U)W - R(Z, U)R(X, Y)W \\
&+ S(R(X, Y)U, W)Z + S(U, R(X, Y)W)Z \\
&- S(R(X, Y)Z, W)U - S(R(X, Y)ZW)U \\
&- A \left\{ \begin{array}{l} 2g(U, W)R(X, Y)Z - 2g(Z, W)R(X, Y)U \\ -g(R(X, Y)Z, W)U + g(Z, R(X, Y)W)U \\ +g(R(X, Y)U, W)Z - g(R(X, Y)W, U)Z \end{array} \right\} \\
&+ B \left\{ \begin{array}{l} g(U, W)\eta(Z)R(X, Y)\xi - g(Z, W)\eta(U)R(X, Y)\xi \\ +g(U, W)\eta(R(X, Y)Z)\xi - 2g(R(X, Y)Z, W)\eta(U)\xi \\ +2g(R(X, Y)U, W)\eta(Z)\xi - g(Z, W)\eta(R(X, Y)U)\xi \end{array} \right\},
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

ve

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)R(Z, U)W - R(R(X, Y)Z, U)W \\
& - R(Z, R(X, Y)U)W - R(Z, U)R(X, Y)W \\
& - 2A\{g(U, W)R(X, Y)Z - g(Z, W)R(X, Y)U \\
& - g(R(X, Y)Z, W)U + g(R(X, Y)U, W)Z\} \\
& + B\{g(U, W)\eta(Z)R(X, Y)\xi - g(Z, W)\eta(U)R(X, Y)\xi \\
& + g(U, W)\eta(R(X, Y)Z)\xi - g(Z, W)\eta(R(X, Y)U)\xi \\
& + 2g(R(X, Y)U, W)\eta(Z)\xi - 2g(R(X, Y)Z, W)\eta(U)\xi\} \\
& + \eta(W)\eta(R(X, Y)Z)U + \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)U \\
& - \eta(W)\eta(R(X, Y)U)Z - \eta(U)\eta(R(X, Y)W)Z = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

elde edilir. Son denklemde $X = \xi$ alınırsa ($\tilde{C} = -f^2$)

$$\begin{aligned}
& + B\tilde{C} \left\{ \begin{aligned} & g(U, W)\eta(Z)\eta(Y)\xi - g(U, W)\eta(Z)Y \\ & - g(Z, W)\eta(U)\eta(Y)\xi + g(Z, W)\eta(U)Y \\ & + g(U, W)g(Y, Z)\xi - g(U, W)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\ & - g(Z, W)g(Y, U)\xi + g(Z, W)\eta(Y)\eta(U)\xi \\ & - g(Y, U)\eta(W)Z + \eta(Y)\eta(U)\eta(W)Z \\ & - g(Y, W)\eta(U)Z + \eta(Y)\eta(U)\eta(W)Z \\ & + g(Y, Z)\eta(W)U - \eta(W)\eta(Y)\eta(Z)U \\ & + g(Y, W)\eta(Z)U - \eta(Z)\eta(Y)\eta(W)U \end{aligned} \right\} \\
& - 2A\tilde{C} \left\{ \begin{aligned} & g(U, W)g(Y, Z)\xi - g(U, W)\eta(Z)Y \\ & - g(Z, W)g(Y, U)\xi + g(Z, W)\eta(U)Y \\ & - g(Y, Z)\eta(W)U + g(Y, W)\eta(Z)U \\ & + g(Y, U)\eta(W)Z - g(Y, W)\eta(U)Z \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{C} \left\{ \begin{array}{l} g(Y, R(Z, U)W)\xi - \eta(R(Z, U)W)Y \\ -g(Y, Z)R(\xi, U)W + \eta(Z)R(Y, U)W \\ -g(Y, U)R(Z, \xi)W + \eta(U)R(Z, Y)W \\ -g(Y, W)R(Z, U)\xi + \eta(W)R(Z, U)Y \end{array} \right\} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

olup elde edilen (3.2.30) denklemine ξ ile iç çarpım uygulandığında

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}[\{g(Y, R(Z, U)W) - \eta(R(Z, U)W)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(R(\xi, U)W) \\
& + \eta(Z)\eta(R(Y, U)W) - g(Y, U)\eta(R(Z, \xi)W) + \eta(U)\eta(R(Z, Y)W) \\
& - g(Y, W)\eta(R(Z, U)\xi) + \eta(W)\eta(R(Z, U)Y)\} \\
& - 2A\{g(U, W)g(Y, Z) - g(U, W)\eta(Z)\eta(Y) - g(Z, W)g(Y, U) \\
& + g(Z, W)\eta(U)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(W)\eta(U) + g(Y, U)\eta(W)\eta(Z)\} \\
& + B\{g(U, W)g(Y, Z) - g(U, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
& - g(Z, W)g(Y, U) + g(Z, W)\eta(Y)\eta(U) - g(Y, U)\eta(W)\eta(Z) \\
& + g(Y, Z)\eta(W)\eta(U)\}] = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

elde edilir. $\tilde{C} \neq 0$ olduğu için (3.2.31) denkleminde

$$\begin{aligned}
& g(Y, R(Z, U)W) - \eta(R(Z, U)W)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(R(\xi, U)W) \\
& + \eta(Z)\eta(R(Y, U)W) - g(Y, U)\eta(R(Z, \xi)W) + \eta(U)\eta(R(Z, Y)W) \\
& - g(Y, W)\eta(R(Z, U)\xi) + \eta(W)\eta(R(Z, U)Y) \\
& - 2A\{g(U, W)g(Y, Z) - g(U, W)\eta(Z)\eta(Y) - g(Z, W)g(Y, U) \\
& + g(Z, W)\eta(U)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(W)\eta(U) + g(Y, U)\eta(W)\eta(Z)\} \\
& + B\{g(U, W)g(Y, Z) - g(U, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
& - g(Z, W)g(Y, U) + g(Z, W)\eta(Y)\eta(U) - g(Y, U)\eta(W)\eta(Z) \\
& + g(Y, Z)\eta(W)\eta(U)\}] = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, M manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere (3.2.32) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$S(U, W) = \left(\frac{r}{2} + 3f^2\right)g(U, W) - \left(\frac{r}{2} + 5f^2\right)\eta(U)\eta(W),$$

bulunur. Böylece M Levi-Civita koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur. Ayrıca bu son denklem (3.1.4) de kullanılırsa

$$\tilde{S}(U, W) = \left(\frac{r}{2} + 5f^2\right)g(U, W) - \left(\frac{r}{2} + 5f^2\right)\eta(U)\eta(W),$$

bulunur. Böylece M S.v.K. koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur. f sabit değil ise (3.2.27) denkleminde $X = \xi$ alınarak

$$\begin{aligned} & R(\xi, Y)K(Z, U)W - K(R(\xi, Y)Z, U)W - K(Z, R(\xi, Y)U)W \\ & - K(Z, U)R(\xi, Y)W + f^2\{g(Y, K(Z, U)W)\xi - g(\xi, K(Z, U)W)Y \\ & - g(Y, Z)K(\xi, U)W + g(\xi, Z)K(Y, U)W - g(Y, U)K(Z, \xi)W \\ & + g(\xi, U)K(Z, Y)W - g(Y, W)K(Z, U)\xi + g(\xi, W)K(Z, U)Y\} \\ & + f'\{g(K(Z, U)W, Y)\xi - g(K(Z, U)W, \xi)\eta(Y)\xi \\ & + \eta(K(Z, U)W)\eta(Y)\xi - \eta(K(Z, U)W)Y \\ & - g(Y, Z)\eta(K(\xi, U)W)\xi + g(\xi, Z)\eta(K(Y, U)W)\xi \\ & - \eta(Y)\eta(Z)K(\xi, U)W + \eta(Z)K(Y, U)W \\ & - g(Y, U)\eta(K(Z, \xi)W)\xi + g(\xi, U)\eta(K(Z, Y)W)\xi \\ & - \eta(Y)\eta(U)K(Z, \xi)W + \eta(U)K(Z, Y)W \\ & + g(X, W)\eta(K(Z, U)Y)\xi \\ & - \eta(Y)\eta(W)K(Z, U)\xi + \eta(W)K(Z, U)Y\} = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde $Z = W = \xi$ alınarak

$$f'\{(f^2 + f')g(Y, U)\xi - 3(f^2 + f')\eta(Y)\eta(U)\xi - S(U, Y)\xi\} = 0,$$

elde edilir. f sabit olmadığından $f' \neq 0$ dir. Buradan

$$S(U, Y) = (f^2 + f')\{g(U, Y) - 3\eta(U)\eta(Y)\},$$

elde edilir. Dolayısıyla $f^2 + f' = 0$ ise $S(U, Y) = 0$ olduğu gösterilir. $\square$



4. S.V.K. KONEKSİYONLU 3-BOYUTLU Q.S.MANİFOLDLARI

Bu bölümde, S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldları incelenmiştir. İlk olarak bu tip manifoldların üzerinde S.v.K. koneksiyonu denklemi verilip ona bağlı eğrilik tensörü, Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğrilik tanımlanmıştır. Daha sonra bu tip manifoldların projektif flat, konharmonik flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ile ilgili ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar sunulmuştur. Daha sonra S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldları üzerinde D_a -homotetik deformasyon incelenmiştir. Bunun sonucunda bu tip manifoldların semi-simetrik, projektif flat, konsirküler flat, lokal ϕ -simetrik olma durumları ve Ricci tensörünün η -paralel olması durumu ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Bölüm sonunda ise S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldlarına iki örnek verilmiştir.

4.1 S.v.K. Koneksiyonlu 3-Boyutlu Q.S. Manifoldları

Bir 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. M üzerinde S.v.K. koneksiyonu, (2.6.4) kullanılarak

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \beta\eta(Y)\phi X + \beta g(X, \phi Y)\xi, \quad (4.1.1)$$

dir. (2.3.7) denklemi yardımıyla $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$ dir. ∇ Levi-Civita koneksiyonuna ve $\tilde{\nabla}$ S.v.K. koneksiyonuna göre eğrilik tensörleri R ve $\tilde{R}$

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}, \quad \tilde{R}(X, Y) = [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] - \tilde{\nabla}_{[X, Y]},$$

denklemleri ile ifade edilir. Riemann eğrilik tensörünün tanımı ve (2.6.4) denklemi yardımıyla

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad (4.1.2)$$

dır. (4.1.2) denkleminde (4.1.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \beta\eta(Z)\phi Y + \beta g(Y, \phi Z)\xi) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \beta\eta(Z)\phi X + \beta g(X, \phi Z)\xi) \\ &\quad - (\nabla_{[X, Y]}Z + \beta\eta(Z)\phi[X, Y] + \beta g([X, Y], \phi Z)\xi,\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

elde edilir. (4.1.3) denkleminde (2.3.8) ve (2.3.16) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y\} \\ &\quad - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi X\} \\ &\quad + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X\},\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

elde edilir. Şimdi (4.1.4) denkleminin her iki tarafına W vektör alanı ile iç çarpım uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\eta(W) + g(\phi Y, W)\eta(Z)\} \\ &\quad - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\eta(W) + g(\phi X, W)\eta(Z)\} \\ &\quad + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) \\ &\quad + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W)\},\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

dir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere (4.1.5) denkleminde $X = W = e_i$ alırsak

$$\tilde{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + (\phi Y)[\beta]\eta(Z) - 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z),\tag{4.1.6}$$

elde edilir. Burada $\tilde{S}$ ve S sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve ∇ koneksiyonlarına göre Ricci tensörleridir. (4.1.6) nın bir sonucu olarak, $\tilde{Q}$ Ricci operatörü

$$\tilde{Q}Y = QY + (\phi Y)[\beta]\xi - 2\beta^2\eta(Y)\xi,$$

dir. Ayrıca (4.1.6) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$\tilde{r} = r - 2\beta^2, \quad (4.1.7)$$

dır. Burada $\tilde{r}$ ve r sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve ∇ koneksiyonlarına göre skalar eğrilikleridir. (4.1.4) ve (4.1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z + \tilde{R}(Y, X)Z &= 0, \\ g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) + g(\tilde{R}(X, Y)W, Z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

ve

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(X, Y)Z + \tilde{R}(Y, Z)X + \tilde{R}(Z, X)Y \\ &= X[\beta]\{2g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y - \eta(Y)\phi Z\} \\ &\quad + Y[\beta]\{2g(Z, \phi X)\xi + \eta(X)\phi Z - \eta(Z)\phi X\} \\ &\quad + Z[\beta]\{2g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y\}, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

dir.

Lemma 4.1.1. *Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. Eğer β sabit ise I. Bianchi özdeşliği sağlanır. Yani*

$$\tilde{R}(X, Y)Z + \tilde{R}(Y, Z)X + \tilde{R}(Z, X)Y = 0,$$

dir.

Teorem 4.1.1. *Bir projektif flat S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. Eğer β sabit değil ise M S.v.K. koneksiyonuna göre skalar flattır ($\tilde{r} = 0$). Ayrıca aşağıdaki durumlar denktir:*

- i) β sabit fonksiyondur,
- ii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir Ricci flat manifolddur,
- iii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir flat manifolddur.

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. (2.1.1) denkleminde M nin $\tilde{P}$ projektif eğrilik tensör alanı

$$\tilde{P}(X, Y)Z = \tilde{R}(X, Y)Z - \frac{1}{2}\{\tilde{S}(Y, Z)X - \tilde{S}(X, Z)Y\}, \quad (4.1.10)$$

denklemini ile verilir. M bir projektif flat manifold (yani $\tilde{P} = 0$) ise

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \frac{1}{2}\{\tilde{S}(Y, Z)X - \tilde{S}(X, Z)Y\}, \quad (4.1.11)$$

olduğu açıktır. (4.1.3) ve (4.1.6) denklemleri (4.1.11) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y\} \\ & - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi X\} \\ & + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y \\ & - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X\} \\ & = \frac{1}{2}\{S(Y, Z)X + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)X - 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z)X \\ & - S(X, Z)Y + (\phi X)[\beta]\eta(Z)Y - 2\beta^2\eta(X)\eta(Z)Y\}, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Z, W) + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\eta(W) + g(\phi Y, W)\eta(Z)\} \\ & - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\eta(W) + g(\phi X, W)\eta(Z)\} \\ & + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\ & - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W)\} \\ & = \frac{1}{2}\{S(Y, Z)g(X, W) + g(X, W)(\phi Y)[\beta]\eta(Z) - 2\beta^2g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\ & - S(X, Z)g(Y, W) - g(Y, W)(\phi X)[\beta]\eta(Z) + 2\beta^2g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dir. (4.1.12) de $W = \xi$ alınır

$$\begin{aligned}
& -g(R(X, Y)Z, \xi) + X[\beta]g(Y, \phi Z) - Y[\beta]g(X, \phi Z) \\
& + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\} \\
& = \frac{1}{2}\{S(Y, Z)\eta(X) + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)\eta(X) \\
& - S(X, Z)\eta(Y) - (\phi X)[\beta]\eta(Z)\eta(Y)\},
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

dir. (4.1.13) de (2.3.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 & = S(Y, Z)\eta(X) + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)\eta(X) \\
& - S(X, Z)\eta(Y) - (\phi X)[\beta]\eta(Z)\eta(Y),
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Bu son denklemde $X = \xi$ alınır ve (2.3.15) denklemi kullanılırsa

$$S(Y, Z) = 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z) - (\phi Y)[\beta]\eta(Z) - (\phi Z)[\beta]\eta(Y), \tag{4.1.15}$$

elde edilir. (4.1.6) de (4.1.15) kullanılarak

$$\tilde{S}(Y, Z) = -(\phi Z)[\beta]\eta(Y), \tag{4.1.16}$$

elde edilir. β sabit ise (4.1.16) den $\tilde{S} = 0$ bulunur. $\tilde{S} = 0$ ise (4.1.11) den $\tilde{R} = 0$ elde edilir. Tersine $\tilde{R} = 0$ ise $\tilde{S} = 0$ ve (4.1.10) den $\tilde{P} = 0$ dir. Ayrıca β sabit değil ise (4.1.16) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınır

$$\tilde{r} = 0,$$

dir. □

Teorem 4.1.2. *Bir konharmonik flat S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Eğer β sabit değil ise M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre skalar flattır ($\tilde{r} = 0$). Ayrıca aşağıdaki durumlar denktir:*

- i) β sabit bir fonksiyondur,
- ii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir Ricci flat manifolddur,
- iii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir flat manifolddur.

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. (2.1.3)

denkleminde M nin $\tilde{K}$ konharmonik eğrilik tensör alanı

$$\tilde{K}(X, Y)Z = \tilde{R}(X, Y)Z - \left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}(Y, Z)X - \tilde{S}(X, Z)Y \\ +g(Y, Z)\tilde{Q}X - g(X, Z)\tilde{Q}Y \end{array} \right\}, \quad (4.1.17)$$

denklemini ile verilir. M bir konharmonikal flat manifold (yani $\tilde{K} = 0$) ise

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{S}(Y, Z)X - \tilde{S}(X, Z)Y + g(Y, Z)\tilde{Q}X - g(X, Z)\tilde{Q}Y, \quad (4.1.18)$$

olduğu açıktır. (4.1.18) de (4.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Z, W) + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi Y, W)\} \\ & - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi X, W)\} \\ & + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + \eta(X)\eta(Z)g(Y, W) \\ & - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W)\} \\ & = S(Y, Z)g(X, W) + g(X, W)(\phi Y)[\beta]\eta(Z) - 2\beta^2g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\ & + S(X, W)g(Y, Z) + g(Y, Z)(\phi X)[\beta]\eta(W) - 2\beta^2g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) \\ & - S(Y, W)g(X, Z) - g(X, Z)(\phi Y)[\beta]\eta(W) + 2\beta^2g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\ & - S(X, Z)g(Y, W) - g(Y, W)(\phi X)[\beta]\eta(Z) + 2\beta^2g(Y, W)\eta(X)\eta(Z), \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

dır. (4.1.19) de $W = \xi$ alınır

$$\begin{aligned} & -g(R(X, Y)\xi, Z) + X[\beta]g(Y, \phi Z) - Y[\beta]g(X, \phi Z) \\ & + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X)\} \\ & = S(Y, Z)\eta(X) + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)\eta(X) + S(X, \xi)g(Y, Z) \\ & + g(Y, Z)(\phi X)[\beta] - 2\beta^2g(Y, Z)\eta(X) - S(Y, \xi)g(X, Z) \\ & - g(X, Z)(\phi Y)[\beta] + 2\beta^2g(X, Z)\eta(Y) - S(X, Z)\eta(Y) \\ & - (\phi X)[\beta]\eta(Z)\eta(Y), \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

elde edilir. (4.1.20) de $X = \xi$ alındığında

$$\begin{aligned}
& -g(R(\xi, Y)\xi, Z) + \beta^2\{\eta(Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\} \\
& = S(Y, Z) + g(Y, Z)S(\xi, \xi) - 2\beta^2g(Y, Z) \\
& - S(Y, \xi)\eta(Z) + 2\beta^2\eta(Z)\eta(Y) - S(\xi, Z)\eta(Y),
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

elde edilir. (4.1.21) de (2.3.9) ve (2.3.15) kullanılırsa

$$0 = S(Y, Z) - 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z) + d\beta(\phi Y)\eta(Z) + d\beta(\phi Z)\eta(Y),$$

ve buradan

$$S(Y, Z) = 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z) - (\phi Y)[\beta]\eta(Z) - (\phi Z)[\beta]\eta(Y), \tag{4.1.22}$$

elde edilir. (4.1.6) de (4.1.22) denklemi kullanılırsa

$$\tilde{S}(Y, Z) = -(\phi Z)[\beta]\eta(Y), \tag{4.1.23}$$

dir. β sabit ise (4.1.23) den $\tilde{S} = 0$ ve (4.1.18) den $\tilde{R} = 0$ dir. Tersine $\tilde{R} = 0$ ise $\tilde{S} = 0$ ve (4.1.23) den β sabit elde edilir. Ayrıca β sabit değil ise (4.1.23) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$\tilde{r} = 0,$$

dir. □

Teorem 4.1.3. *Bir lokal ϕ -simetrik S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q .S. manifoldu M olsun. Eğer β sabit değilse M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre skalar flattır ($\tilde{r} = 0$). Ayrıca aşağıdaki durumlar denktir:*

- i) $\beta \neq 0$ sabit bir fonksiyondur,
- ii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir flat manifolddur,
- iii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir Ricci-flat manifolddur.

İspat. Bir lokal ϕ -simetrik S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Bu durumda (2.3.18) denkleminde dolayı ξ ye ortogonal her W, X, Y, Z vektör alanı için

$$\phi^2(\tilde{\nabla}_W \tilde{R})(X, Y)Z = 0, \quad (4.1.24)$$

dır. (4.1.24) denkleminde

$$\phi^2 \begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_W \tilde{R}(X, Y)Z - \tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z \\ -\tilde{R}^a(X, \tilde{\nabla}_W Y)Z - \tilde{R}(X, Y)\tilde{\nabla}_W Z \end{bmatrix} = 0,$$

olup (2.2.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= -\tilde{\nabla}_W \tilde{R}(X, Y)Z + \eta(\tilde{\nabla}_W \tilde{R}(X, Y)Z)\xi \\ &\quad + \tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z - \eta(\tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z)\xi \\ &\quad + \tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z - \eta(\tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z)\xi \\ &\quad + \tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z - \eta(\tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X, Y)Z)\xi \\ &= \beta X[\beta] \{g(Y, \phi Z)\phi W - g(\phi Y, W)\phi Z\} \\ &\quad - \beta Y[\beta] \{g(X, \phi Z)\phi W - g(\phi X, W)\phi Z\} \\ &\quad - \beta W[\beta^2] \{g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X\} \\ &\quad - \beta(\phi X)[\beta]g(Y, Z)\phi W + \beta(\phi Y)[\beta]g(X, Z)\phi W \\ &\quad - \beta^2 \left\{ \begin{array}{l} g(\nabla_W Y, \phi Z)\phi X + g(Y, \phi \nabla_W Z)\phi X \\ -g(\nabla_W X, \phi Z)\phi Y - g(\phi \nabla_W Z, X)\phi Y \end{array} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{r}{2} - 2\beta^2\right) \left\{ \begin{array}{l} g(\nabla_W Y, Z)X - g(\nabla_W X, Z)Y \\ -g(\nabla_W Z, X)Y + g(\nabla_W Z, Y)X \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

elde edilir. (4.1.25) denkleminde $Z = \xi$ alınarak

$$0 = \beta^3 \{g(X, W)\phi Y - g(Y, W)\phi X\},$$

denklemini ve $\beta \neq 0$ için

$$g(X, W)\phi Y - g(Y, W)\phi X = 0, \quad (4.1.26)$$

elde edilir. (4.1.4) denkleminde (4.1.26) kullanılarak

$$\tilde{R}(X, Y)Z = -(\phi X)[\beta]g(Y, Z)\xi + (\phi Y)[\beta]g(X, Z)\xi, \quad (4.1.27)$$

dir. Bu denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = -(\phi X)[\beta]g(Y, Z)\eta(W) + (\phi Y)[\beta]g(X, Z)\eta(W),$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere son denklemde $X = W = e_i$ alınır

$$\tilde{S}(Y, Z) = -(\phi Y)[\beta]\eta(Z), \quad (4.1.28)$$

elde edilir. (4.1.28) denkleminde dolayı β sabit ise $\tilde{S}(Y, Z) = 0$ olup M Ricci flatdır. Tersine M Ricci flat ise $(\phi Y)[\beta]\eta(Z) = 0$ olup β sabittir. (4.1.27) denkleminde dolayı β sabit ise $\tilde{R}(X, Y)Z = 0$ olup M flatdır. Tersine M flat ise $(\phi X)[\beta] = (\phi Y)[\beta] = 0$ olup β sabittir. Dolayısıyla (i), (ii), (iii) durumları denktir. Ayrıca β sabit değil ise (4.1.28) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınır

$$\tilde{r} = 0, \quad (4.1.29)$$

dir. □

Teorem 4.1.4. *Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Bu durumda M manifoldunun $\tilde{S}$ Ricci tensörünün η -parallel olması için gerek ve yeter şart $\tilde{r}$ skalar eğriliğinin sabit olmasıdır.*

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M ve M manifoldunun $\tilde{S}$ Ricci tensörü η -parallel olsun. Bu durumda (2.3.17) denkleminde dolayı

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{S})(\phi Y, \phi Z) = 0,$$

dır. Dolayısıyla

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{S}(\phi Y, \phi Z) - \tilde{S}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) - \tilde{S}(\phi Y, \tilde{\nabla}_X \phi Z) = 0,$$

dir. (4.1.7) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}_X \tilde{S}(\phi Y, \phi Z) - \tilde{S}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) - \tilde{S}(\phi Y, \tilde{\nabla}_X \phi Z) \\
&= \frac{1}{2} X [\tilde{r}] g(\phi Y, \phi Z) \\
&+ \frac{\tilde{r}}{2} \{g(\nabla_X \phi Y, \phi Z) + g(\phi Y, \nabla_X \phi Z)\} \\
&+ \frac{\tilde{r}}{2} \{g(Y, \phi \nabla_X \phi Z) + g(\phi \nabla_X \phi Y, Z)\} = 0,
\end{aligned}$$

dir. Bu son denklemden

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{S})(\phi Y, \phi Z) = \frac{1}{2} X [\tilde{r}] g(\phi Y, \phi Z) = 0, \quad (4.1.30)$$

elde edilir. $g(\phi Y, \phi Z) \neq 0$ olduğundan

$$X [\tilde{r}] = 0, \quad (4.1.31)$$

dır. Dolayısıyla $\tilde{r}$ sabittir. Tersine M manifoldunun $\tilde{r}$ skalar eğriliği sabit olsun. (4.1.30) denkleminden

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{S})(\phi Y, \phi Z) = 0,$$

olduğu gösterilir. □

4.2 3-Boyutlu Q.S. Manifoldlarında D_a -Homotetik Deformasyon

Bu bölümde, M bir 3-boyutlu q.S. manifoldu olmak üzere, D_a -homotetik deformasyonun M manifoldunun eğrilik tensörünü nasıl etkilediğine bakılacak ve daha sonra bu manifoldun S.v.K. koneksiyonlu olması durumu incelenecektir.

Lemma 4.2.1. *Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. M de her X, Y için ∇^a ve ∇ koneksiyonları arasındaki ilişki*

$$\nabla_X^a Y = \nabla_X Y - (a-1)\beta\{\eta(X)\phi Y + \eta(Y)\phi X\}, \quad (4.2.1)$$

dir.

İspat. M , $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu için Kozsul formülünü kullanırsak, her X, Y, Z vektör alanı için,

$$\begin{aligned} 2g^a(\nabla_X^a Y, Z) &= Xg^a(Y, Z) + Yg^a(X, Z) - Zg^a(X, Y) \\ &\quad - g^a(X, [Y, Z]) - g^a(Y, [X, Z]) + g^a(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

olup (2.6.6) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} &2\{ag(\nabla_X^a Y, Z) + a(a-1)\eta(\nabla_X^a Y)\eta(Z)\} \\ &= X\{ag(Y, Z) + a(a-1)\eta(Y)\eta(Z)\} \\ &\quad + Y\{ag(X, Z) + a(a-1)\eta(X)\eta(Z)\} \\ &\quad - Z\{ag(X, Y) + a(a-1)\eta(X)\eta(Y)\} \\ &\quad - a\{g(X, [Y, Z]) + (a-1)\eta(X)\eta([Y, Z])\} \\ &\quad - a\{g(Y, [X, Z]) + (a-1)\eta(Y)\eta([X, Z])\} \\ &\quad + a\{g(Z, [X, Y]) + (a-1)\eta(X)\eta([X, Y])\}, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} &2\{ag(\nabla_X^a Y, Z) + a(a-1)\eta(\nabla_X^a Y)\eta(Z)\} \\ &= a\{g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\} \\ &\quad + a(a-1)\{X(\eta(Y)\eta(Z)) + Y(\eta(X)\eta(Z)) \\ &\quad - Z(\eta(X)\eta(Y)) - \eta(X)\eta(\nabla_Y Z) + \eta(X)\eta(\nabla_Z Y) \\ &\quad - \eta(Y)\eta(\nabla_X Z) + \eta(Y)\eta(\nabla_Z X) \\ &\quad + \eta(Z)\eta(\nabla_X Y) - \eta(Z)\eta(\nabla_Y X)\}, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
& 2\{ag(\nabla_X^a Y, Z) + a(a-1)\eta(\nabla_X^a Y)\eta(Z)\} \\
& = 2ag(\nabla_X Y, Z) + 2a(a-1)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \\
& + a(a-1)\{g(Y, \nabla_X \xi)\eta(Z) + g(Z, \nabla_X \xi)\eta(Y) \\
& + g(X, \nabla_Y \xi)\eta(Z) + g(Z, \nabla_Y \xi)\eta(X) \\
& - g(X, \nabla_Z \xi)\eta(Y) - g(Y, \nabla_Z \xi)\eta(X)\}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.4) denkleminde (2.3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& 2\{ag(\nabla_X^a Y, Z) + a(a-1)\eta(\nabla_X^a Y)\eta(Z)\} \\
& = 2ag(\nabla_X Y, Z) + 2a(a-1)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \\
& - a(a-1)\beta\{g(Y, \phi X)\eta(Z) + g(Z, \phi X)\eta(Y) \\
& + g(\phi Y, X)\eta(Z) + g(Z, \phi Y)\eta(X) \\
& - g(X, \phi Z)\eta(Y) - g(Y, \phi Z)\eta(X)\},
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& g(\nabla_X^a Y, Z) + (a-1)\eta(\nabla_X^a Y)\eta(Z) \\
& = g(\nabla_X Y, Z) + (a-1)\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \\
& - (a-1)\beta\{g(Z, \phi X)\eta(Y) + g(Z, \phi Y)\eta(X)\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_X^a Y = \nabla_X Y - (a-1)\beta\{\eta(X)\phi Y + \eta(Y)\phi X\},$$

dir. □

Önerme 4.2.1. *M bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu $q.S.$ manifold olsun.*

M de her X, Y için R^a eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
R^a(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&- (a-1)X[\beta]\{\eta(Y)\phi Z + \eta(Z)\phi Y\} \\
&+ (a-1)Y[\beta]\{\eta(X)\phi Z + \eta(Z)\phi X\} \\
&- (a-1)^2\beta^2\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&+ (a-1)\beta^2\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\
&- 2\eta(X)\eta(Z)Y + 2\eta(Y)\eta(Z)X - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
&- g(X, \phi Z)\phi Y + g(Y, \phi Z)\phi X\}, \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R^a(X, Y)Z = \nabla_X^a \nabla_Y^a Z - \nabla_Y^a \nabla_X^a Z - \nabla_{[X, Y]}^a Z,$$

ile verilir. Bu denklem (4.2.1) denklemini kullanılarak açılırsa

$$\begin{aligned}
R^a(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&- (a-1)\beta[\eta(X)\phi \nabla_Y Z - \eta(X)\nabla_Y \phi Z - \eta(Y)\phi \nabla_X Z \\
&+ \eta(Y)\nabla_X \phi Z - \eta(Z)\phi \nabla_X Y + \eta(Z)\nabla_X \phi Y \\
&+ \eta(Z)\phi \nabla_Y X - \eta(Z)\nabla_Y \phi X \\
&+ a\beta\{2g(X, \phi Y)\phi Z + g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X\} \\
&+ (a-1)\beta\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&- (a-1)\{(X(\beta))(\eta(Y)\phi Z + \eta(Z)\phi Y) \\
&- (Y(\beta))(\eta(X)\phi Z + \eta(Z)\phi X)\}. \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (2.3.8) yardımıyla

$$\begin{aligned}
R^a(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&- (a-1)X[\beta]\{\eta(Y)\phi Z + \eta(Z)\phi Y\} \\
&+ (a-1)Y[\beta]\{\eta(X)\phi Z + \eta(Z)\phi X\} \\
&- (a-1)^2\beta^2\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&+ (a-1)\beta^2\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\
&- 2\eta(X)\eta(Z)Y + 2\eta(Y)\eta(Z)X - 2g(X, \phi Y)\phi Z \\
&- g(X, \phi Z)\phi Y + g(Y, \phi Z)\phi X\},
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

olduğu gösterilir. □

Ayrıca bu önerme yardımıyla

$$\begin{aligned}
R^a(X, Y)Z + R^a(Y, X)Z &= 0, \\
R^a(X, Y)Z + R^a(Y, Z)X + R^a(Z, X)Y &= 0,
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.2.2. *Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. M de her X, Y için $\tilde{\nabla}^a$ ve ∇ koneksiyonları arasındaki ilişki*

$$\tilde{\nabla}_X^a Y = \nabla_X Y - (a-1)\beta\eta(X)\phi Y + \beta\eta(Y)\phi X + \beta g(X, \phi Y)\xi, \tag{4.2.9}$$

dir.

İspat. Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. (2.6.4) ve (4.2.1) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X^a Y &= \nabla_X Y - \beta\eta^a(Y)\phi^a X + \beta g^a(X, \phi Y)\xi^a \\
&= \nabla_X Y - (a-1)\beta\{\eta(X)\phi Y + \eta(Y)\phi X\} - \beta a\eta(Y)\phi X \\
&+ \beta a[g(X, \phi Y) + (a-1)\eta(X)\eta(\phi Y)]\frac{1}{a}\xi,
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\tilde{\nabla}_X^a Y = \nabla_X Y - (a-1)\beta\eta(X)\phi Y + \beta\eta(Y)\phi X + \beta g(X, \phi Y)\xi,$$

dir. □

Önerme 4.2.2. *Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. M de her X, Y için R^a eğrilik tensörü*

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ &+ X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y - (a-1)\eta(Y)\phi Z\} \\ &- Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi X - (a-1)\eta(X)\phi Z\} \quad (4.2.10) \\ &+ \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + g(X, \phi Z)\phi Y \\ &- g(Y, \phi Z)\phi X + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\ &- 2(a-1)\beta^2 g(X, \phi Y)\phi Z, \end{aligned}$$

dir.

İspat. Bir $\mathcal{D}_a$ -homotetik deformasyonlu S.v.K. koneksiyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. (2.6.6), (4.1.4) ve (4.2.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a(X, Y)Z &= R^a(X, Y)Z + X[\beta]\{g^a(Y, \phi^a Z)\xi^a + \eta^a(Z)\phi^a Y\} \\ &- Y[\beta]\{g^a(X, \phi^a Z)\xi^a + \eta^a(Z)\phi^a X\} \\ &+ \beta^2\{g^a(X, Z)\eta^a(Y)\xi^a - g^a(Y, Z)\eta^a(X)\xi^a \\ &+ \eta^a(X)\eta^a(Z)Y - \eta^a(Y)\eta^a(Z)X \\ &+ g^a(X, \phi^a Z)\phi^a Y - g^a(Y, \phi^a Z)\phi^a X\}, \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^a(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&+ X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y - (a-1)\eta(Y)\phi Z\} \\
&- Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi X - (a-1)\eta(X)\phi Z\} \\
&+ \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + g(X, \phi Z)\phi Y \\
&- g(Y, \phi Z)\phi X + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&- 2(a-1)\beta^2g(X, \phi Y)\phi Z,
\end{aligned}$$

dir. □

(4.2.10) denkleminde W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&g(\tilde{R}^a(X, Y)Z, W) \\
&= X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi Y, W) - (a-1)\eta(Y)g(\phi Z, W)\} \\
&- Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi X, W) - (a-1)\eta(X)g(\phi Z, W)\} \\
&+ g(R(X, Y)Z, W) \\
&+ \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) \\
&- g(Y, \phi Z)g(\phi X, W) + \eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W)\} \\
&- 2(a-1)\beta^2g(X, \phi Y)g(\phi Z, W),
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere, (4.2.11) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınır

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^a(X, W) &= S(X, W) + (\phi X)[\beta]\eta(W) \\
&+ (a-1)(\phi W)[\beta]\eta(X) - 2\beta^2\eta(X)\eta(W),
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

elde edilir. Burada $\tilde{S}^a$ ve S , sırasıyla $\tilde{\nabla}^a$ ve ∇ koneksiyonlarına göre Ricci

tensörleridir. (4.2.12) de (2.3.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{S}^a(X, W) &= \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right)g(X, W) + \left(3\beta^2 - \frac{r}{2}\right)\eta(X)\eta(W) \\ &\quad - (\phi X)[\beta]\eta(W) - (\phi W)[\beta]\eta(X) \\ &\quad + (\phi X)[\beta]\eta(W) + (a-1)(\phi W)[\beta]\eta(X) \\ &\quad - 2\beta^2\eta(X)\eta(W),\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\tilde{S}^a(X, W) &= \left(\frac{r}{2} - \beta^2\right)\{g(X, W) - \eta(X)\eta(W)\} \\ &\quad + (a-2)(\phi W)[\beta]\eta(X),\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

elde edilir.

Ayrıca (4.2.13) denkleminde $X = W = e_i$ alınarak, $\tilde{\nabla}^a$ ve ∇ koneksiyonlarına göre $\tilde{r}^a$ ve r skalar eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\tilde{r}^a = r - 2\beta^2,\tag{4.2.14}$$

dir.

Teorem 4.2.1. *Bir semi-simetrik S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. Eğer β sabit değil ise M nin skalar eğriliği $\tilde{r}^a = r - (4a-2)\beta^2$ denklemi ile verilir. Eğer β sabit ise M S.v.K. koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur.*

İspat. Bir semi-simetrik S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. Bu durumda

$$(\tilde{R}^a(X, Y)\tilde{R}^a)(Z, W)U = 0,$$

$$\begin{aligned}&\tilde{R}^a(X, Y)\tilde{R}^a(Z, W)U - \tilde{R}^a\left(\tilde{R}^a(X, Y)Z, W\right)U \\ &\tilde{R}^a\left(Z, \tilde{R}^a(X, Y)W\right)U - \tilde{R}^a(Z, W)\tilde{R}^a(X, Y)U \\ &= 0,\end{aligned}$$

dır. Bu denklemde (4.2.10) denklemi kullanılır ve $Z = \xi$ alınır

$$\begin{aligned}
& aW[\beta]R(X, Y)\phi U \\
& + aW[\beta]X[\beta]\{-g(Y, U)\xi + (2 - a)\eta(Y)\eta(U)\xi + (a - 1)\eta(Y)U\} \\
& - aW[\beta]Y[\beta]\{-g(X, U)\xi + (2 - a)\eta(X)\eta(U)\xi + (a - 1)\eta(X)U\} \\
& + aW[\beta]\beta^2 \left\{ \begin{aligned} & g(X, \phi U)\eta(Y)\xi - g(Y, \phi U)\eta(X)\xi - g(X, U)\phi Y \\ & + \eta(X)\eta(U)\phi Y + g(Y, U)\phi X - \eta(Y)\eta(U)\phi X \\ & + 2(a - 1)g(X, \phi Y)(U - \eta(U)\xi) \end{aligned} \right\} \\
& - a(R(X, Y)W)[\beta]\phi U \\
& - aX[\beta]\{(\phi Y)[\beta]\eta(W)\phi U - (a - 1)(\phi W)[\beta]\eta(Y)\phi U\} \\
& + aY[\beta]\{(\phi X)[\beta]\eta(W)\phi U - (a - 1)(\phi W)[\beta]\eta(X)\phi U\} \tag{4.2.15} \\
& - a\beta^2 \left\{ \begin{aligned} & (\phi Y)[\beta]g(X, \phi W)\phi U - (\phi X)[\beta]g(Y, \phi W)\phi U \\ & + Y[\beta]\eta(X)\eta(W)\phi U - X[\beta]\eta(Y)\eta(W)\phi U \\ & - 2(a - 1)(\phi W)[\beta]g(X, \phi Y)\phi U \end{aligned} \right\} \\
& - aW[\beta]\phi(R(X, Y)U) \\
& - aW[\beta]X[\beta](a - 2)\{\eta(Y)U - \eta(Y)\eta(U)\xi\} \\
& + aW[\beta]Y[\beta](a - 2)\{\eta(X)U - \eta(X)\eta(U)\xi\} \\
& - aW[\beta]\beta^2 \left\{ \begin{aligned} & -g(X, \phi U)Y - g(Y, \phi U)(X - \eta(X)\xi) \\ & -g(X, U)\phi Y + g(X, \phi U)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(U)\phi Y \\ & -\eta(Y)\eta(U)\phi X + 2(a - 1)g(X, \phi Y)(U - \eta(U)\xi) \end{aligned} \right\} \\
& = 0, \tag{4.2.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme ξ ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \eta(R(X, Y)\phi U) - X[\beta]g(\phi Y, \phi U) + Y[\beta]g(\phi X, \phi U) \\
& \beta^2\{g(X, \phi U)\eta(Y) - g(Y, \phi U)\eta(X)\} = 0,
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$4\beta^2\{g(X, \phi U)\eta(Y) - g(Y, \phi U)\eta(X)\} - X[\beta]g(\phi Y, \phi U) \\ + Y[\beta]g(\phi X, \phi U) - \phi X[\beta]g(Y, \phi U) + \phi Y[\beta]g(X, \phi U) = 0,$$

elde edilir. Böylece

$$g(X, \phi U)\eta(Y) - g(Y, \phi U)\eta(X) = 0, \quad (4.2.17)$$

dır. (4.2.10) denkleminde (4.2.17) denklemi kullanılarak

$$\tilde{R}^a(X, Y)U = R(X, Y)U - 2(a - 1)\beta^2 g(X, \phi Y)\phi U,$$

elde edilir. Bu denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(\tilde{R}^a(X, Y)U, W) = g(R(X, Y)U, W) - 2(a - 1)\beta^2 g(X, \phi Y)g(\phi U, W)$$

olup $X = W = e_i$ alındığında

$$\tilde{S}^a(Y, U) = S(Y, U) - 2(a - 1)\beta^2 g(\phi Y, \phi U),$$

elde edilir. Bu denklemde (2.3.13) denklemi kullanılarak

$$\tilde{S}^a(Y, U) = (\frac{r}{2} + (1 - 2a)\beta^2)g(Y, U) + ((2a + 1)\beta^2 - \frac{r}{2})\eta(Y)\eta(U),$$

bulunur. Dolayısıyla M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur. β sabit değilse (4.2.15) denkleminde $W = \xi$ alınarak

$$2a\beta^2\{Y[\beta]\eta(X)\phi U - X[\beta]\eta(Y)\phi U\} = 0,$$

elde edilir. $\beta \neq 0$ ve $a \neq 0$ olduğundan

$$Y[\beta]\eta(X) - X[\beta]\eta(Y) = 0, \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.10) denkleminde (4.2.18) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \tilde{R}^a(X, Y)Z \\ &= R(X, Y)Z + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi \\ &+ g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + \eta(X)\eta(Z)Y \\ &- \eta(Y)\eta(Z)X\} - 2(a - 1)\beta^2 g(X, \phi Y)\phi Z, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& g(\tilde{R}^a(X, Y)Z, W) \\
&= g(R(X, Y)Z, W) + \beta^2 \{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\
&- g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) \\
&- g(Y, \phi Z)g(\phi X, W) + \eta(X)\eta(Z)g(Y, W) \\
&- \eta(Y)\eta(Z)g(X, W)\} - 2(a-1)\beta^2 g(X, \phi Y)g(\phi Z, W),
\end{aligned}$$

elde edilir. $X = W = e_i$ alındığında

$$\tilde{S}^a(Y, Z) = S(Y, Z) - 2\beta^2 \{(a-1)g(\phi Y, \phi Z) - \eta(Y)\eta(Z)\},$$

dir. Son denklemde $Y = Z = e_i$ alınarak

$$\tilde{r}^a = r - (4a-2)\beta^2,$$

dir. □

Teorem 4.2.2. *Bir lokal ϕ -simetrik S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Eğer β sabit değil ise M nin skalar eğriliği $\tilde{r}^a = r - (4a-2)\beta^2$ denklemi ile verilir. Eğer $\beta \neq 0$ sabit ise, M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre bir η -Einstein manifoldudur.*

İspat. Bir lokal ϕ -simetrik S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Bu durumda (2.3.18) denkleminde ξ ye ortogonal her W, X, Y, Z vektör alanı için

$$(\phi^{a2}(\tilde{\nabla}_W^a \tilde{R}^a)(X, Y)Z) = 0, \quad (4.2.19)$$

şartı sağlanır. (4.2.19) denkleminde

$$\phi^2 \left[\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_W^a \tilde{R}^a(X, Y)Z - \tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z \\ & - \tilde{R}^a(X, \tilde{\nabla}_W^a Y)Z - \tilde{R}^a(X, Y)\tilde{\nabla}_W^a Z \end{aligned} \right] = 0,$$

dir. Bu denklem, (2.2.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= -\tilde{\nabla}_W^a \tilde{R}^a(X, Y)Z + \eta(\tilde{\nabla}_W^a \tilde{R}^a(X, Y)Z)\xi \\
&+ \tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z - \eta(\tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z)\xi \\
&+ \tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z - \eta(\tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z)\xi \\
&+ \tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z - \eta(\tilde{R}^a(\tilde{\nabla}_W^a X, Y)Z)\xi \\
&= X[\beta]\beta \left\{ \begin{aligned} &g(Y, \phi Z)\phi W - (a-1)g(Y, \phi W)\phi Z \\ &+ ag(Y, \phi W)Z + g(Z, \phi W)\phi Y \end{aligned} \right\} \\
&- Y[\beta]\beta \left\{ \begin{aligned} &g(X, \phi Z)\phi W - (a-1)g(X, \phi W)\phi Z \\ &+ ag(X, \phi W)Z + g(Z, \phi W)\phi X \end{aligned} \right\} \quad (4.2.20) \\
&- W[\beta^2] \{g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X - 2(a-1)g(X, \phi Y)\phi Z\} \\
&- (\phi X)[\beta]g(Y, Z)\phi W + (\phi Y)[\beta]g(X, Z)\phi W \\
&+ \beta^2 \left\{ \begin{aligned} &g(\nabla_W X, \phi Z)\phi Y - g(\nabla_W Y, \phi Z)\phi X \\ &+ g(\nabla_W Z, \phi Y)\phi X - g(\nabla_W Z, \phi X)\phi Y \\ &- 2(a-1)[g(\nabla_W Y, \phi X)\phi Z - g(\nabla_W X, \phi Y)\phi Z] \end{aligned} \right\} \\
&+ \left(\frac{r}{2} - 2\beta^2\right) \left\{ \begin{aligned} &g(\nabla_W Y, Z)X - g(\nabla_W X, Z)Y \\ &- g(\nabla_W Z, X)Y + g(\nabla_W Z, Y)X \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

halini alır. (4.2.20) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= a\beta\{X[\beta]g(Y, \phi W)\xi - Y[\beta]g(X, \phi W)\xi\} \quad (4.2.21) \\
&+ \beta^3\{g(X, W)\phi Y - g(Y, W)\phi X\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme ξ ile iç çarpım uygulandığında

$$X[\beta]g(Y, \phi W) - Y[\beta]g(X, \phi W) = 0, \quad (4.2.22)$$

dir. (4.2.21) denkleminde (4.2.22) kullanılarak, $\beta \neq 0$ için

$$g(X, W)\phi Y - g(Y, W)\phi X = 0, \quad (4.2.23)$$

denklemleri elde edilir. (4.2.10) denkleminde, elde edilen (4.2.22) ve (4.2.23) denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{R}^a(X, Y)Z = R(X, Y)Z - 2(a-1)\beta^2 g(X, \phi Y)\phi Z,$$

bulunur. Son denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}^a(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad - 2(a-1)\beta^2 g(X, \phi Y)g(\phi Z, W), \end{aligned}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, $\{i = 1, 2, 3\}$, bu manifoldun her bir noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere son denklemden, $X = W = e_i$ alınır

$$\begin{aligned} \tilde{S}^a(Y, Z) &= S(Y, Z) - 2(a-1)\beta^2 g(\phi Y, \phi Z) \\ &= \left(\frac{r}{2} - (2a-1)\beta^2\right) \{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} \\ &\quad - (\phi Z)[\beta]\eta(Y) - (\phi Y)[\beta]\eta(Z), \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

elde edilir. β sabit alınır bu denklem

$$\tilde{S}^a(Y, Z) = \left(\frac{r}{2} - (2a-1)\beta^2\right) \{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\},$$

halini alır. Dolayısıyla M bir η -Einstein manifoldudur. Ayrıca β sabit değilse (4.2.24) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınır

$$\tilde{r}^a = r - (4a-2)\beta^2, \tag{4.2.25}$$

dir. □

Teorem 4.2.3. *Bir S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. Bu durumda M manifoldunun $\tilde{S}^a$ Ricci tensörünün η -parallel olması için gerek ve yeter şart $\tilde{r}^a$ skalar eğriliğinin sabit olmasıdır.*

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. M manifoldunun $\tilde{S}^a$ Ricci tensörü η -parallel olsun. Bu durumda (2.3.17) denkleminden dolayı

$$(\tilde{\nabla}_X^a \tilde{S}^a)(\phi Y, \phi Z) = 0,$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \tilde{\nabla}_X^a \tilde{S}^a(\phi Y, \phi Z) - \tilde{S}^a(\tilde{\nabla}_X^a \phi Y, \phi Z) - \tilde{S}^a(\phi Y, \tilde{\nabla}_X^a \phi Z) \\
&= X \left[\frac{r}{2} - \beta^2 \right] g(\phi Y, \phi Z) \\
&+ \left(\frac{r}{2} - \beta^2 \right) \{g(\nabla_X \phi Y, \phi Z) + g(\phi Y, \nabla_X \phi Z)\} \\
&+ \left(\frac{r}{2} - \beta^2 \right) \{g(Y, \phi \nabla_X \phi Z) + g(\phi \nabla_X \phi Y, Z)\},
\end{aligned}$$

dir. Son denklemden

$$(\tilde{\nabla}_X^a \tilde{S}^a)(\phi Y, \phi Z) = X \left[\frac{r}{2} - \beta^2 \right] g(\phi Y, \phi Z) = 0, \quad (4.2.26)$$

dir. $g(\phi Y, \phi Z) \neq 0$ olduğundan

$$X \left[\frac{r}{2} - \beta^2 \right] = 0,$$

elde edilir. (4.2.14) dan

$$X \left[\frac{\tilde{r}^a}{2} \right] = \frac{1}{2} X [\tilde{r}^a] = 0, \quad (4.2.27)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{r}^a$ sabittir. Tersine M manifoldunun $\tilde{r}^a$ skalar eğriliği sabit olsun. (4.2.26) denklemden

$$(\tilde{\nabla}_X^a \tilde{S}^a)(\phi Y, \phi Z) = 0,$$

olduğu gösterilir. □

Teorem 4.2.4. *Bir S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q .S. manifoldu M olsun. Eğer M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre konsirküler flat ise S.v.K. koneksiyonuna göre skalar flattır ($\tilde{r}^a = 0$).*

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q .S. manifoldu M olsun. (2.1.2) denklemden M nin $\tilde{Z}^a$ konsirküler eğrilik tensörü

$$\tilde{Z}^a(X, Y)W = \tilde{R}^a(X, Y)W - \frac{\tilde{r}^a}{6} \{g^a(Y, W)X - g^a(X, W)Y\}, \quad (4.2.28)$$

denklemleri ile verilir. M bir konsirküler flat manifold (yani $\tilde{Z}^a = 0$) ise (4.2.28) denkleminde

$$\tilde{R}^a(X, Y)W = \frac{\tilde{r}^a}{6}\{g^a(Y, W)X - g^a(X, W)Y\}, \quad (4.2.29)$$

dir. (4.2.14) ve (2.6.6) denklemleri (4.2.29) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a(X, Y)W &= \frac{\tilde{r}^a}{6}\{ag(Y, W)X - a(a-1)\eta(Y)\eta(W)X \\ &\quad - ag(X, W)Y + a(a-1)\eta(X)\eta(W)Y\}, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

elde edilir. (4.2.30) de (4.2.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} &R(X, Y)W + X[\beta]\{g(Y, \phi W)\xi + \eta(W)\phi Y - (a-1)\eta(Y)\phi W\} \\ &\quad - Y[\beta]\{g(X, \phi W)\xi + \eta(W)\phi X - (a-1)\eta(X)\phi W\} \\ &\quad + \beta^2\{g(X, W)\eta(Y)\xi - g(Y, W)\eta(X)\xi + g(X, \phi W)\phi Y \\ &\quad - g(Y, \phi W)\phi X + \eta(X)\eta(W)Y - \eta(Y)\eta(W)X\} \\ &\quad + 2(a-1)\beta^2g(X, \phi Y)\phi W \\ &= \frac{\tilde{r}^a}{6}\{ag(Y, W)X - a(a-1)\eta(Y)\eta(W)X - ag(X, W)Y \\ &\quad + a(a-1)\eta(X)\eta(W)Y\}, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme ξ ile iç çarpım uygulandığında

$$\begin{aligned} &g(R(X, Y)W, \xi) + X[\beta]g(Y, \phi W) - Y[\beta]g(X, \phi W) \\ &\quad + \beta^2\{g(X, W)\eta(Y) - g(Y, W)\eta(X)\} \\ &= \frac{\tilde{r}^a}{6}\{ag(Y, W)\eta(X) - ag(X, W)\eta(Y)\}, \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

denklemleri ve (4.2.31) denkleminde $X = \xi$ alınırsa

$$\frac{a\tilde{r}^a}{6}\{g(Y, W) - \eta(W)\eta(Y)\} = 0, \quad (4.2.32)$$

elde edilir. Bu durumda $a > 0$ ve $g(\phi X, \phi Y) = g(Y, W) - \eta(W)\eta(Y) \neq 0$ olduğundan $\tilde{r}^a = 0$ dir. □

Teorem 4.2.5. *Bir projektif flat S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifold M olsun. Eğer β sabit değilse M manifoldu S.v.K. koneksiyonuna göre skalar flattır ($\tilde{r}^a = 0$). Ayrıca aşağıdaki durumlar denktir:*

- i) β sabit ya da $a = 2$ dir,
- ii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir flat manifolddur,
- iii) M S.v.K. koneksiyonuna göre bir Ricci-flat manifolddur.

İspat. Bir S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu q.S. manifoldu M olsun. (2.1.1) denkleminde M nin $\tilde{P}^a$ projektif eğrilik tensörü

$$\tilde{P}^a(X, Y)Z = \tilde{R}^a(X, Y)Z - \frac{1}{2}\{\tilde{S}^a(Y, Z)X - \tilde{S}^a(X, Z)Y\}, \quad (4.2.33)$$

denklemini ile verilir. M bir projektif flat manifold (yani $\tilde{P}^a = 0$) ise

$$\tilde{R}^a(X, Y)Z = \frac{1}{2}\{\tilde{S}^a(Y, Z)X - \tilde{S}^a(X, Z)Y\}, \quad (4.2.34)$$

olacağı açıktır. (4.2.34) denkleminde (4.2.10) ve (4.2.12) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi Y - (a-1)\eta(Y)\phi Z\} \\ & - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\xi + \eta(Z)\phi X - (a-1)\eta(X)\phi Z\} \\ & + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X \\ & + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} + 2(a-1)\beta^2 g(X, \phi Y)\phi Z \\ & = \frac{1}{2}[S(Y, Z)X + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)X + (a-1)(\phi Z)[\beta]\eta(Y)X \\ & - 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z)X - S(X, Z)Y - (\phi X)[\beta]\eta(Z)Y \\ & - (a-1)(\phi Z)[\beta]\eta(X)Y + 2\beta^2\eta(X)\eta(Z)Y], \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme W ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& X[\beta]\{g(Y, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi Y, W) - (a-1)\eta(Y)g(\phi Z, W)\} \\
& - Y[\beta]\{g(X, \phi Z)\eta(W) + \eta(Z)g(\phi X, W) - (a-1)\eta(X)g(\phi Z, W)\} \\
& + \beta^2\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) \\
& - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W) + \eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W)\} \\
& + 2(a-1)\beta^2g(X, \phi Y)g(\phi Z, W) + g(R(X, Y)Z, W) \\
& = \frac{1}{2}[S(Y, Z)g(\phi X, W) - S(X, Z)g(Y, W) + (\phi Y)[\beta]\eta(Z)g(\phi X, W) \\
& + (a-1)(\phi Z)[\beta]\eta(Y)g(\phi X, W) - 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z)g(\phi X, W) \\
& - (\phi X)[\beta]\eta(Z)g(Y, W) - (a-1)(\phi Z)[\beta]\eta(X)g(Y, W) \\
& + 2\beta^2\eta(X)\eta(Z)g(Y, W)],
\end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde $X = W = \xi$ alındığında

$$S(Y, Z) = 2\beta^2\eta(Y)\eta(Z) - (\phi Z)[\beta]\eta(Y) - (\phi Y)[\beta]\eta(Z), \quad (4.2.35)$$

elde edilir ve (4.2.12) denkleminde (4.2.35) kullanılarak

$$\tilde{S}^a(Y, Z) = (a-2)(\phi Z)[\beta]\eta(Y), \quad (4.2.36)$$

denkleminde ulaşılır. β sabit ise (4.2.36) den $\tilde{S}^a = 0$ bulunur. $\tilde{S}^a = 0$ ise (4.2.34) den $\tilde{R}^a = 0$ bulunur. Tersine $\tilde{R}^a = 0$ ise (4.2.34) den $\tilde{S}^a = 0$ ve dolayısıyla (4.2.36) den β sabit olduğu gösterilir. Dolayısıyla (i), (ii), (iii) durumları denktir. β sabit değil ise $a = 2$ için (i), (ii), (iii) durumlarının denk olacağı benzer şekilde gösterilir. Ayrıca (4.2.36) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$\tilde{r}^a = 0,$$

dir. □

4.3 S.v.K Koneksiyonlu Manifoldlara Örnekler

Örnek 4.3.1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ 3-boyutlu bir manifold olsun. Burada (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlardır. M üzerinde $\{e_1, e_2, e_3\}$ lineer bağımsız global çatısı

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = 2\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},$$

g Riemann metriği

$$g(e_1, e_3) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1,$$

η 1-formu, her $U \in TM$,

$$\eta(U) = g(U, e_3),$$

ve ϕ (1,1) tipli tensör alanı

$$\phi e_1 = -e_2, \quad \phi e_2 = e_1, \quad \phi e_3 = 0,$$

olarak tanımlansın. Bu durumda ϕ ve g nin lineerliği kullanılarak

$$\eta(e_3) = 1, \quad \phi^2 U = -U + \eta(U)e_3,$$

ve $\forall U, W \in \chi(M)$,

$$g(\phi U, \phi W) = g(U, W) - \eta(U)\eta(W),$$

elde edilir. Böylece $e_3 = \xi$ için, M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı tanımlanır. Dolayısıyla

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_3] = -e_2,$$

elde edilir. Bilindiği üzere g metriği ve ∇ Riemann koneksiyonu arasındaki bağıntıyı veren Kozsul formülü

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

ile verilir [25]. $e_3 = \xi$ için, Kozsul formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_3 &= -e_2, & \nabla_{e_2} e_3 &= e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= e_2, & \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= 0, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= -e_1, & \nabla_{e_1} e_1 &= 0,\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.3.7) den, $\beta = -1$ olmak üzere bir 3-boyutlu $q.S.$ manifolddudur. (4.3.1) denklemi (4.1.1) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_3} e_3 &= 0, \\ \tilde{\nabla}_{e_3} e_1 &= e_2, & \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= -e_3, & \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 &= e_3, \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_3} e_2 &= -e_1, & \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= 0,\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

elde edilir. Son olarak (4.1.2) denkleminde (4.3.2) denklemi kullanılarak eğrilik tensörü bileşenleri

$$\begin{aligned}\tilde{R}(e_1, e_2)e_1 &= 0, & \tilde{R}(e_1, e_2)e_2 &= 0, & \tilde{R}(e_1, e_2)e_3 &= 0, \\ \tilde{R}(e_1, e_3)e_1 &= 0, & \tilde{R}(e_1, e_3)e_2 &= 0, & \tilde{R}(e_1, e_3)e_3 &= 0, \\ \tilde{R}(e_2, e_3)e_1 &= 0, & \tilde{R}(e_2, e_3)e_2 &= 0, & \tilde{R}(e_2, e_3)e_3 &= 0,\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

olarak elde edilir. Bu durumda (4.3.3) den dolayı M 3-boyutlu $q.S.$ manifoldu, $S.v.K.$ koneksiyonuna göre flat manifolddur. Bir flat manifold aynı zamanda Ricci flat manifold olduğundan M manifoldu Teorem 4.1.1 gereği projektif flat ve Teorem 4.1.2 gereği konharmonik flat manifolddur.

Örnek 4.3.2. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ 3-boyutlu bir manifold olsun. Burada (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlardır. M üzerinde $\{e_1, e_2, e_3\}$ lineer bağımsız global çatısı

$$e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = 2\frac{\partial}{\partial x} - 4\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},\tag{4.3.4}$$

g Riemann metriği

$$\begin{aligned}g(e_1, e_3) &= g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0, \\ g(e_1, e_1) &= g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1,\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

η 1-formu, her $U \in TM$,

$$\eta(U) = g(U, e_3), \quad (4.3.6)$$

ve ϕ (1,1) tipli tensör alanı

$$\phi e_1 = e_2, \quad \phi e_2 = -e_1, \quad \phi e_3 = 0, \quad (4.3.7)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda ϕ ve g nin lineerliği kullanılarak

$$\eta(e_3) = 1, \quad \phi^2 U = -U + \eta(U)e_3,$$

ve $\forall U, W \in TM$,

$$g(\phi U, \phi W) = g(U, W) - \eta(U)\eta(W),$$

elde edilir. Böylece $e_3 = \xi$ için, M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı tanımlanır. Dolayısıyla

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Bilindiği üzere g metriği ve ∇ Riemann koneksiyonu arasındaki bağıntıyı veren Kozsul formülü

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g([X, Y], Z), \end{aligned}$$

ile verilir [25]. $e_3 = \xi$ için, Kozsul formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_3 &= -e_2, \quad \nabla_{e_2} e_3 = e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = e_3, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -e_3, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= 0, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.3.7) den, $\beta = 1$ olmak üzere M bir 3-boyutlu $q.S.$ manifoldudur. (4.2.9) denkleminde (4.3.5), (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.9) denklemleri kullanılarak, M S.v.K. koneksiyonlu D_a -homotetik deformasyonlu 3-boyutlu $q.S.$

manifoldu için

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_1}^a e_3 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_2}^a e_3 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_3}^a e_3 &= 0, \\
\tilde{\nabla}_{e_3}^a e_1 &= -ae_2, & \tilde{\nabla}_{e_1}^a e_2 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_2}^a e_1 &= 0, \\
\tilde{\nabla}_{e_2}^a e_2 &= 0, & \tilde{\nabla}_{e_3}^a e_2 &= ae_1, & \tilde{\nabla}_{e_1}^a e_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

sonuçları elde edilir. (4.3.10) ve Riemann eğrilik tensörü tanımı kullanılarak eğrilik tensörü bileşenleri

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^a(e_1, e_2)e_1 &= 2ae_2, & \tilde{R}^a(e_1, e_2)e_2 &= -2ae_2, & \tilde{R}^a(e_1, e_2)e_3 &= 0, \\
\tilde{R}^a(e_1, e_3)e_1 &= 0, & \tilde{R}^a(e_1, e_3)e_2 &= 0, & \tilde{R}^a(e_1, e_3)e_3 &= 0, \\
\tilde{R}^a(e_2, e_3)e_1 &= 0, & \tilde{R}^a(e_2, e_3)e_2 &= 0, & \tilde{R}^a(e_2, e_3)e_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.3.11) den M bir flat manifolddur. Bir flat manifold aynı zamanda Ricci flat manifold olduğundan Teorem 4.2.5 den M bir projektif flat manifolddur.

KAYNAKLAR

- [1] A. Bejancu and H. Faran, Foliations and geometric structures, Math. and its appl., Springer, Dordrecht, 2006.
- [2] S. Ianuş, Some almost product structures on manifolds with linear connection, **Kodai Math. Sem. Rep.**, 23 (1971) 305-310.
- [3] J. A. Schouten, On non-holonomic connexions, **Proc. Kon. Akad. Amsterdam**, 31 (1928) 291-299.
- [4] J. A. Schouten and E. van Kampen, Zur Einbettungs-und Krümmungsthorie nichtholonomer Gebilde, **Math. Ann.**, 103 (1930) 752-783.
- [5] A. F. Solov'ev, On the curvature of the connection induced on a hyperdistribution in a Riemannian space, **Geom. Sb.**, 19 (1978) 12-23.
- [6] A. F. Solov'ev, The bending of hyperdistributions, **Geom. Sb.**, 20 (1979) 101-112.
- [7] A. F. Solov'ev, Second fundamental form of a distribution, **Mat. Zametki**, 35 (1982) 139-146.
- [8] A. F. Solov'ev, Curvature of a distribution, **Mat. Zametki**, 35 (1984) 111-124.
- [9] Z. Olszak, The Schouten-van Kampen affine connection adapted an almost (para) contact metric structure, **Publ. De L'inst. Math.**, 94 (2013) 31-42.
- [10] A. Yildiz, f -Kenmotsu manifolds with the Schouten-van Kampen connection, **Publ. De L'inst. Math.**, 102:116 (2017) 93-105.
- [11] Z. Olszak and R. Rosca, Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, **Publ. Math. Debrecen**, 39 (1991) 315-323.
- [12] D. E . Blair, The theory of quasi-Sasakian structure, **J. Differential Geo.**,1 (1967) 331-345.
- [13] J. C. Gonzalez and D. Chinea, Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$, **Proc. Amer. Math.**, 105 (1989) 173-184.
- [14] S. Kanemaki, Quasi-Sasakian manifolds, **Tohoku Math. J.**, 29 (1977) 227-233.
- [15] S. Kanemaki, On quasi-Sasakian manifolds, **Differential Geometry Banach center publications**, 12 (1984) 95-125.

- [16] J. A. Oubina, New classes of almost contact metric structure, **Publ. Math. Debrecen**, 32 (1985) 187-193.
- [17] B. H. Kim, Fibred Riemannian spaces with quasi-Sasakian structure, **Hiroshima Math. J.**, 20 (1990) 477-513.
- [18] Z. Olszak, On three dimensional conformally flat quasi-Sasakian manifold, **Period Math. Hungar.**, 33:2 (1996) 105-113.
- [19] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, **Tohoku Math. J.**, 12 (1968) 700-712.
- [20] S. Tanno, Quasi-Sasakian structure of rank $2p+1$, **J. Differential Geom.**, 5 (1971) 317-324.
- [21] C.B. Montano and D.L. Terlizzi, D -homothetic transformations for a generalized of contact metric manifolds, **Bull. Belg. Math. Soc. Simon Steven**, 14 (2007) 277-289.
- [22] Carriazo A. and Martin-Molina V., Generalized (κ, μ) -space forms and D_α -homothetic deformations, **Balkan Journal of Geometry and Its Applications**, 16:1 (2011) 37-47.
- [23] De U.C. and Ghosh S., D -homothetic deformation of normal almost contact metric manifolds, **Ukrainian Math. J.**, 65:10 (2013) 1330-1345.
- [24] B. Şahin, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2012.
- [25] K. Yano and M. Kon, Structure on manifolds, World Scientific, 1984.
- [26] Y. Ishii, On conharmonic transformations, **Tensor N.S.**, 7 (1957), 73-80.
- [27] Deszcz R., On pseudosymmetric spaces, **Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A** , 44(1992), 1-34.
- [28] Janssens D. and Vanhecke L., Almost contact structures and curvature tensors, **Kodai Math. J.**, 4:1 (1981) 1-27.
- [29] Z. Olszak, Normal almost contact metric manifolds of dimension 3, **Ann. Polon. Math.**, 47 (1986) 41-50.
- [30] Kenmotsu K., A class of almost contact Riemannian manifolds, **Tohoku Math. J.**, 24 (1972) 93-103.
- [31] Z. Olszak, Locally conformal almost cosymplectic manifolds, **Colloq. Math.**, 57 (1989) 73-87.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ahmet SAZAK

Doğum Yeri ve Tarihi: Karasu-1988

Adres: Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Merkez/Muş

E-Posta: a.sazak@alparslan.edu.tr

Lisans: Atatürk Üniv., Fen-Edebiyat Fak., Matematik Bölümü (2005-2010)

Y. Lisans: Dumlupınar Üniv., F. B. E., Geometri Bilim Dalı (2011-2013)

Mesleki Deneyim: Muş Alparslan Üniv., Araştırma Görevlisi (2013-)

YAYINLAR

Ahmet S. and Ahmet Y., On Quasi-Sasakian Manifolds, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2:1 (2019) 33-39

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

Ahmet S. and Ahmet Y., On Quasi-Sasakian Manifolds, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2:1 (2019) 33-39