

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHREIER 2-KATEGORİLERİ

Sema YILMAZ

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL

JÜRİ ÜYELERİ

Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR

RİZE-2020

Her Hakkı Saklıdır

ÖNSÖZ

Bu çalışmada gruplar üzerindeki çaprazlanmış modül ve monoidler üzerindeki çaprazlanmış yarımodül kavramları ele alınmış olup bu bilgiler ışığında kategori, grupoid, iç kategori, 2-kategori, 2-grupoid tanım ve özellikleriyle birlikte kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımodüllerin Schreier 2-kategorilere doğal olarak denkliği elde edilmiştir.

Bu çalışmanın, planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı şekillendiren çok kıymetli hocam sayın Dr.Öğr.Üyesi Sedat TEMEL'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca moral ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Sema YILMAZ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Schreier 2-Kategorileri” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 20/07/2020

Sema YILMAZ

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SCHREIER 2-KATEGORİLERİ

Sema YILMAZ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde grupların ve monoidlerin etkimeleri, kategori, iç kategori, grupoid, çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış yarımmodül gibi bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde yapılan çalışmalar başlığı altında monoidler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin kategorisi ile monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategorilerin kategorisinin doğal denkliği gösterilmiş olup daha sonra kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodül ve Schreier 2-kategori tanımları verilmiş ve bunların kategorileri arasındaki doğal dönüşüm ispat edilmiştir. Üçüncü bölümde diğer çalışmalar için bazı sonuçlar, dördüncü bölümde de bu çalışmalar için öneriler verilmiştir.

2020, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Monoid, Kategori, 2-Kategori, Schreier 2-Kategori, Çaprazlanmış Yarımmodül, Çaprazlanmış Modül.

ABSTRACT

SCHREIER 2-CATEGORIES

Sema YILMAZ

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sedat TEMEL**

This thesis consists of four chapter. In the first chapter some fundamental notions such as actions of groups and of monoids, category, internal category, grupoid, crossed module and crossed semimodule were given. In the second chapter the natural equivalence between the category of crossed semimodules over monoids and the category of Schreier internal categories in the category of monoids was shown, and then the definitions of crossed semimodule over categories and of Schreier 2-category were given and the natural transformation between their categories was proved. In the third chapter, some results, in the fourth chapter, some suggestions for further works were given.

2020, 45 pages

Keywords: Monoid, Category, 2-Category, Schreier 2-Category, Crossed Semimodule, Crossed Module

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Temel Tanım ve Teoremler.....	2
1.2.1. Cebirsel İfadeler	2
1.2.2. Kategori ve Grupoid	6
1.2.3. İç Kategori.....	12
1.2.4. Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Yarımodüller	15
1.2.5. 2-Kategoriler ve 2-Grupoidler.....	18
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	26
2.1. Monoidlerin Kategorisindeki Schreier İç Kategorileri	26
2.2. Kategoriler Üzerindeki Çaprazlanmış Yarımodüller ve Schreier 2-Kategorileri..	31
2.3. Tek Objeli Schreier 2-Kategorileri	40
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	41
4. ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$G \ltimes H$	G ile H Gruplarının Yarı Direkt Çarpımı
$t _{\text{Kers}}$	t Dönüşümünün s Dönüşümünün Çekirdeğine Kısıtlaması
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$	Kategoriler
GPD	Grupoidlerin Kategorisi
$\bullet$	Etkime
2CAT	2-Kategorilerin Kategorisi
2GPD	2-Grupoidlerin Kategorisi
SIC	Monoidlerin Kategorisindeki Schreier İç Kategorilerin Kategorisi
CSM	Monoidlerin Kategorisindeki Çaprazlanmış Yarımodüllerin Kategorisi
S2CAT	Schreier 2-Kategorilerin Kategorisi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kategori alanındaki çalışmaların tarihçesi çok eski olmamakla birlikte matematik ve fiziğin birçok alanında kullanım sahası bulunmaktadır. Bu alanda küme kavramını yerini kategoriler, elemanların yerini objeler ve objeler arasındaki oklar olarak da adlandırılan morfizmler, kümeler arasındaki fonksiyonların yerini ise fonktörler almaktadır. Morfizmler arasında değişmeli kısmi bileşke işlemi mevcuttur. Özel olarak her monoid tek objeli bir kategori olarak ele alınabilir (Forrester-Barker, 2002). Burada monoidin işlemi kategoride kısmi bileşke işlemine dönüşür. Her morfizmi izomorfizm olan kategoriye ise grupoid denir.

Bir kategori içindeki bazı objeler arasında bir kategori yapısı teşkil edilebilir. Böylece iç kategori kavramı ortaya çıkar (Forrester-Barker, 2002; McLane, 1971). Örneğin grupların kategorisindeki iç kategoriler 2-gruplar (veya grup-grupoidler) olarak adlandırılırlar (Baez, 2004). Whitehead tarafından tanımlanan (Whitehead, 1946) çaprazlanmış modül kavramı ise iki grup arasında bir etkiye ile bazı özel şartları sağlayan bir grup homomorfizminden oluşan cebirsel bir yapıdır. 2-grupların kategorik anlamda çaprazlanmış modüllere doğal olarak denk olduğu Brown ve Spencer tarafından ispat edilmiştir (Brown ve Spencer, 1976). Böylece karmaşık yapılar olan 2-gruplardaki bazı işlemler, daha basit cebirsel yapılar olan çaprazlanmış modüllerin kategorisinde çözülebilme imkânı bulmuştur. Gruplar üzerinde tanımlı bu yapılar ve aralarındaki doğal denklik, Patchkoria tarafından monoidlere genellenmiştir (Patchkoria, 1998). Monoidlerin kategorisinde Schreier şartı olarak adlandırılan özel bir şartı sağlayan iç kategoriler, monoidler üzerindeki çaprazlanmış yarımodüllere kategorik anlamda doğal olarak denktir.

2-kategoriler, kategoriler üzerindeki çaprazlanmış modüller ve katlı (çift) kategoriler gibi yapılar, 2-boyutlu kategoriler olarak düşünülebilir. İçinde üç tane kategori yapısı barındıran 2-kategoriler, objeler, objeler arasında morfizmler ve bu morfizmler arasında 2-morfizmler olarak adlandırılan özel morfizmlerden oluşur. Bu yapıda 2-morfizmler arasında hem yatay hem de düşey bileşke işlemi birleşmeli olacak şekilde mevcut olup, 2-morfizmlerin yatay ve düşey tersleri mevcut olan 2-kategori bir 2-grupoid olarak adlandırılır. 2-grupoidlerin grupoidler üzerindeki çaprazlanmış

modüllere doğal denkliği İçen tarafından ispat edilmiştir (İçen, 2000). Bu denklik, Temel tarafından kategorilere genellenmiş, 2-morfizmleri Schreier şartı olarak adlandırılan özel bir şartı sağlayan 2-kategoriler Schreier 2-kategorileri olarak adlandırılmıştır (Temel, 2018). Bu şekilde adlandırılma sebebi ise tek objeli bir Schreier 2-kategorinin, monoidlerin kategorisinde bir Schreier iç kategori olmasıdır. Bu tez çalışmasında (Temel, 2018) referansında gösterilen Schreier 2-kategorilerin kategorisi ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımodüllerin kategorisi arasındaki doğal denklik incelenmiştir.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

1.2.1. Cebirsel İfadeler

Tanım 1.2.1.1. G bir grup ve X boştan farklı bir cümle olsun.

$$\begin{aligned}\rho: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \rho(g, x) = g \bullet x\end{aligned}$$

dönüşümü için

- i. Her $x \in X$ ve $g, g_1 \in G$ için $g \bullet (g_1 \bullet x) = (gg_1) \bullet x$
- ii. Her $x \in X$ ve birim eleman olan $e \in G$ için $e \bullet x = x$

şartları sağlanıyorsa **G grubu X cümlesi üzerine (soldan) etkir** ve bu ρ dönüşümüne de **soldan etkime** denir. Bu etkime ile X bir **G –cümle** olarak adlandırılır (Brown, 2006). Etkime şartları değişmeli diyagramlar cinsinden aşağıdaki gibi ele alınabilir (Forrester-Barker, 2002).

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{1_G \times \rho} & G \times X \\ m \times 1_X \downarrow & & \downarrow \rho \\ G \times X & \xrightarrow{\rho} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 \times X & \xrightarrow{e \times 1_X} & G \times X \\ & \searrow \cong & \downarrow \rho \\ & & X \end{array}$$

Örnek 1.2.1.1. Herhangi bir G grubunun X cümlesi üzerinde $g \in G$ ve $x \in X$ olmak üzere $g \cdot x = x$ biçimindeki etkimesi aşıkâr etkimedir (Eie ve Chang, 2010).

Tanım 1.2.1.2. G ve H iki grup olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho: G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\mapsto \rho(g, h) = g \cdot h\end{aligned}$$

dönüşümü

- i. Her $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için $g \cdot (g_1 \cdot h) = (gg_1) \cdot h$
- ii. Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için $g \cdot (hh_1) = (g \cdot h)(g \cdot h_1)$
- iii. Her $h \in H$ ve $e_G \in G$ birim elemanı için $e_G \cdot h = h$
- iv. $g \cdot e_H = e_H$

şartlarını sağlıyorsa G grubu H grubu üzerinde **soldan etkir** ve bu dönüşüme de **soldan etkime** denir. Bununla birlikte H bir **G -grup** olarak adlandırılır. İlk üç şart ile dördüncü şart kolayca elde edilebileceğinden bazı kaynaklarda yer almaz (Brown vd., 2011).

Örnek 1.2.1.2. Her grup kendi üzerinde **eşlenik etkime** olan

$$\begin{aligned}G \times G &\longrightarrow G \\ (g, g_1) &\mapsto g \cdot g_1 = gg_1g^{-1}\end{aligned}$$

etkimesi ile etkir (Eie ve Chang, 2010). Gerçekten $g, g_1, g_2 \in G$ için

- i.
$$\begin{aligned}g \cdot (g_1 \cdot g_2) &= g \cdot (g_1g_2g_1^{-1}) \\ &= g(g_1g_2g_1^{-1})g^{-1} \\ &= (gg_1)g_2(g_1^{-1}g^{-1}) \\ &= (gg_1)g_2(gg_1)^{-1} \\ &= (gg_1) \cdot g_2\end{aligned}$$
- ii.
$$(g \cdot g_1)(g \cdot g_2) = (gg_1g^{-1})(gg_2g^{-1}) = gg_1g_2g^{-1} = g \cdot (g_1g_2)$$
- iii.
$$e \in G \text{ birim eleman olmak üzere } e \cdot g = ege^{-1} = g$$

olup etkime şartları sağlanır ki böylece G bir G -grup olmuş olur.

Örnek 1.2.1.3. G grubunun herhangi bir N normal alt grubu için

$$\begin{aligned} G \times N &\longrightarrow N \\ (g, n) &\mapsto g \bullet n = gng^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü bir etkiye olup N bir G -grup olur. Böylece her grubun normal alt grubu üzerine eşlenik etkimesi ile etkidiği sonucuna varılabilir (Eie ve Chang, 2010).

Örnek 1.2.1.4. G bir grup, H de G nin bir alt grubu olsun.

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\mapsto h \bullet g = hgh^{-1} \end{aligned}$$

etkimesi ile G nin bir H -grup olduğu aşikârdır. Böylece her alt grubun kendi grubu üzerinde etkir.

Tanım 1.2.1.3. G ve H iki grup olmak üzere $G \times H \longrightarrow H$, $(g, h) \mapsto g \bullet h$ bir etkiye olsun.

$$\begin{aligned} (G \times H) \times (G \times H) &\longrightarrow G \times H \\ ((g, h), (g_1, h_1)) &\mapsto (gg_1, h(g \bullet h_1)) \end{aligned}$$

işlemi ile oluşan gruba G ile H gruplarının **yarıdirekt çarpım grubu** denir ve $G \rtimes H$ ile gösterilir. Bu grubun birim elemanı $e = (e_G, e_H)$ ve herhangi bir $(g, h) \in G \rtimes H$ için ters eleman ise $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1} \bullet h^{-1})$ dir (Forrester-Barker, 2002).

Buraya kadar gruplar üzerinde tanımlanan etkiye ve yarıdirekt çarpım tanımları benzer şekilde monoidler için de aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 1.2.1.4. G ve H iki monoid olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho: G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\mapsto \rho(g, h) = g \bullet h \end{aligned}$$

dönüşümü

- i. Her $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için $g \bullet (g_1 \bullet h) = (gg_1) \bullet h$
- ii. Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için $g \bullet (hh_1) = (g \bullet h)(g \bullet h_1)$
- iii. Her $h \in H$ ve $e_G \in G$ birim elemanı için $e_G \bullet h = h$
- iv. $g \bullet e_H = e_H$

şartlarını sağlıyorsa G monoidi H monoidi üzerinde **soldan etkir** ve bu dönüşüme de **soldan etkime** denir. Bununla birlikte H bir **G -monoid** olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.1.5. G ve H iki monoid olmak üzere $G \times H \rightarrow H$, $(g, h) \mapsto g \bullet h$ bir etkime olsun.

$$\begin{aligned} (G \times H) \times (G \times H) &\rightarrow G \times H \\ ((g, h), (g_1, h_1)) &\mapsto (gg_1, h(g \bullet h_1)) \end{aligned}$$

işlemi ile oluşan monoidine G ile H monoidlerinin **yarıdirekt çarpım monoidi** denir ve $G \ltimes H$ ile gösterilir.

Şimdi yarıdirekt çarpımın bir monoid olduğunu gösterelim;

- i. Kapalılık özelliği tanımdan aşikârdır.
- ii. $[(g, h)(g_1, h_1)](g_2, h_2) = (g, h)[(g_1, h_1)(g_2, h_2)]$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} [(g, h)(g_1, h_1)](g_2, h_2) &= [gg_1, h(g \bullet h_1)](g_2, h_2) \\ &= ((gg_1)g_2, h(g \bullet h_1)[(gg_1) \bullet h_2]) \\ &= (g(g_1g_2), h(g \bullet h_1)[g \bullet (g_1 \bullet h_2)]) \\ &= (g(g_1g_2), h[g \bullet (h_1(g_1 \bullet h_2))]) \\ &= (g, h)[g_1g_2, h_1(g_1 \bullet h_2)] \\ &= (g, h)[(g_1, h_1)(g_2, h_2)] \end{aligned}$$

- iii. $(e_G, e_H) = e$ dir. Gerçekten

$$(e_G, e_H)(g, h) = (e_Gg, e_H(e_G \bullet h)) = (g, h)$$

ve

$$(g, h)(e_G, e_H) = (ge_G, h(g \bullet e_H)) = (g, he_H) = (g, h)$$

olacaktır.

1.2.2. Kategori ve Grupoid

Tanım 1.2.2.1. $X, Y, Z \dots$ gibi objelerin sınıfı C_0 , $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ şeklindeki objeler arasındaki morfizmlerin sınıfı C_1 olan $\mathcal{C} = (C_0, C_1, s, t, \varepsilon, \circ)$ yapısına aşağıdaki dönüşümlerle birlikte bir **kategori** denir (Awodey, 2006; Mucuk, 2010).

[C1] $s: C_1 \rightarrow C_0$, $s(f) = X$, $s(g) = Y$ şeklindeki başlangıç dönüşümü,

[C2] $t: C_1 \rightarrow C_0$, $t(f) = Y$, $t(g) = Z$ şeklindeki bitiş dönüşümü,

[C3] $C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(g, f) \in C_1 \times C_1 \mid t(f) = s(g)\}$ olmak üzere birleşmeli olacak şekilde tanımlı $\circ: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$ şeklinde kısmi bileşke işlemi,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \xrightarrow{g \circ f} Z$$

[C4] Her objeyi $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$ ve $s\varepsilon = t\varepsilon = 1_{C_0}$ şartını sağlayacak şekilde birim morfizmine dönüştüren $\varepsilon: C_0 \rightarrow C_1$, $\varepsilon(X) = 1_X$, $\varepsilon(Y) = 1_Y$ birim morfizm dönüşümü.

$$1_X \circlearrowleft X \xrightarrow{f} Y \circlearrowright 1_Y$$

Yapı dönüşümleri olarak ifade edilen bu dönüşümler aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir.

$$C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\circ} C_1 \xrightleftharpoons[t]{s} C_0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\varepsilon}$

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde X ve Y objeleri için X den Y ye tüm morfizmlerin sınıfı $\mathcal{C}(X, Y)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.2.1. Objeleri tüm cümlelerin sınıfı, morfizmleri cümleler arasındaki fonksiyonlar olan, bilinen bileşke işlemiyle birlikte **SET** ile gösterilen bir kategori oluşturulabilir. Burada her bir A cümlesi için birim morfizm $1_A: A \rightarrow A$ birim fonksiyonudur.

Örnek 1.2.2.2. Objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve bileşke işlemi ise grup homomorfizmlerinin bileşkesi olan kategori **GP** ile ifade edilir.

Örnek 1.2.2.3. Her monoid tek objeli bir kategori olarak düşünülebilir (McLane, 1971). Monoid elemanları morfizmler, monoid işlemi de kısmi bileşke işlemi olarak düşünüldüğünde bu monoid bir kategoriye dönüşür.

$$\star \xrightarrow{n} \star \xrightarrow{m} \star = \star \xrightarrow{m+n} \star$$

Burada her $m \in M$ için $s(m) = t(m) = \star$ ve $\varepsilon(\star) = e$ şeklindedir.

Örnek 1.2.2.4. Objeleri monoidler, morfizmleri monoid homomorfizmleri olarak ele alınan kategori **MON** ile ifade edilir.

Tanım 1.2.2.2. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir **alt kategorisi** denir (Mucuk, 2010).

- i. D_0 sınıfı C_0 sınıfının bir alt sınıfıdır.
- ii. Her bir $X, Y \in D_0$ için $D(X, Y) \subseteq C(X, Y)$ dir.
- iii. $\mathcal{D}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi ile $\mathcal{C}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi aynıdır.
- iv. Her bir $X \in D_0$ için $\mathcal{D}$ deki 1_X birim morfizmi ile $\mathcal{C}$ deki birim morfizmi aynıdır.

Örnek 1.2.2.5. Abelyan grupların kategorisi, grupların kategorisi **GP** de bir alt kategoridir (Mucuk, 2010).

Tanım 1.2.2.3. $\mathcal{C}$ kategorisinde $f: X \rightarrow Y$ morfizmi için $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde $\mathcal{C}$ kategorisinde $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f morfizmine **izomorfizm**, X ile Y objelerine de **izomorftur** denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir (Mucuk, 2010).

Tanım 1.2.2.4. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $A \in C_0$ olsun. Her $X \in C_0$ objesi için bir $A \rightarrow X$ morfizmi varsa A objesine **başlangıç objesi** denir (Mucuk, 2010).

Örnek 1.2.2.6. **SET** de boş küme, **GP** de tek elemanlı grup, **CAT** de tek objeli ve tek morfizimli kategori başlangıç objesi örnekleridir (Mucuk, 2010).

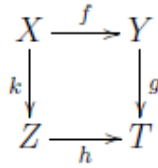
Tanım 1.2.2.5. $\mathcal{C}$ kategorisi için $A \in C_0$ olsun. Her $X \in C_0$ objesi için bir $X \rightarrow A$ morfizmi varsa A objesine **bitiş objesi** denir (Mucuk, 2010).

Örnek 1.2.2.7. SET de tek elemanlı küme, GP de tek elemanlı grup, CAT de tek objeli ve tek morfizimli kategori bitiş objesidir (Mucuk, 2010).

Tanım 1.2.2.6. $\mathcal{C}$ kategorisi için $A \in C_0$ olmak üzere A objesi hem başlangıç hem de bitiş objesi ise **sıfır objesi** olarak adlandırılır (Mucuk, 2010).

Örnek 1.2.2.8. GP de tek elemanlı grup, CAT de tek objeli ve tek morfizimli kategori sıfır objesidir (Mucuk, 2010).

Tanım 1.2.2.7. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi için

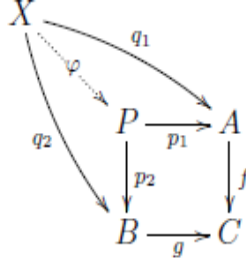


şeklinde morfizmlerin bir diyagramı verilsin. Başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizmleri eşit yani; $g \circ f = h \circ k$ eşitliği varsa bu diyagram **değişmeli diyagram** olarak adlandırılır (Mucuk, 2010).

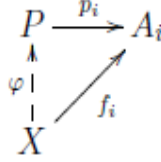
Tanım 1.2.2.8. $\mathcal{C}$ bir kategori ve bu kategori için $f: A \rightarrow C, g: B \rightarrow C$ şeklinde morfizmler verilsin. $P \in C_0$ objesi ve $p_1: P \rightarrow A, p_2: P \rightarrow B$ morfizmleri için

- i. $fp_1 = gp_2$,
- ii. Her $X \in C_0$ objesi ve $f q_1 = g q_2$ eşitliği gereği her $q_1: X \rightarrow A$ ve $q_2: X \rightarrow B$ morfizmleri için $p_1 \varphi = q_1$ ve $p_2 \varphi = q_2$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow P$ morfizmi vardır.

şartlarını sağlıyorsa (P, p_1, p_2) üçlüsüne **f nin g üzerinden geri çekilmesi** denir (Mucuk, 2010).



Tanım 1.2.2.9. $\mathcal{C}$ kategorisi ve herhangi bir I indis kümesi için $\{A_i\}_{i \in I}$ $\mathcal{C}$ de objelerin sınıfı olsun. $P \in \mathcal{C}_0$ objesi ve her $i \in I$ olmak üzere $p_i: P \rightarrow A_i$ morfizmleri için bir $X \in \mathcal{C}_0$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: X \rightarrow A_i$ morfizmleri verildiğinde $p_i \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow P$ morfizmi varsa $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ yapısına $\{A_i\}_{i \in I}$ obje sınıfının **çarpımı** denir (Mucuk, 2010).



SET kategorisinde iki objenin çarpımı bilinen anlamda kartezyen çarpım, grupların kategorisi **GP** de ise direkt çarpımdır. Monoidlerin kategorisinde de iki monoidin çarpımı direkt çarpımdır. Ayrıca bir kategoride herhangi iki objenin çarpımı varsa bu kategoriye **sonlu çarpıma sahip kategori** denir.

Tanım 1.2.2.10. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri için $\mathcal{C}$ kategorisinin her bir X objesini $\mathcal{C}'$ kategorisinin bir $F(X)$ objesine, $\mathcal{C}$ nin her $f: X \rightarrow Y$ morfizmini $\mathcal{C}'$ nin bir $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{C}'$ kategorisine bir **funktor** denir ve $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ şeklinde ifade edilir (Awodey, 2006; Mucuk, 2010).

$$[F1] F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z & \mapsto & F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g \circ f} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)} \end{array}$$

$$[F2] F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Tanım 1.2.2.11. Objelerdeki yapıyı ihmal eden funktora **unutkan fonktor** denir.

Tanım 1.2.2.12. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fonktor olmak üzere $\mathcal{C}$ nin her bir objesini $\mathcal{D}$ nin bir morfizmine dönüştüren bir S morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ S_A \downarrow & & \downarrow S_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise S ye **doğal dönüşüm** denir ve $S: F \rightarrow G$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2.2.13. $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fonktor olmak üzere ve $S: F \rightarrow G$ doğal dönüşüm olmak üzere her bir $A \in \mathcal{C}_0$ için $S_A: F(A) \rightarrow G(A)$ dönüşümü $\mathcal{D}$ kategorisinde bir izomorfizm ise S ye **doğal izomorfizm**, F ile G fonktorlarına da **doğal olarak denktir** denir ve $F \approx G$ ile gösterilir (Mucuk, 2010). Başka bir ifadeyle $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonktoru için $GF = 1_{\mathcal{C}}$ ve $FG = 1_{\mathcal{D}}$ olacak şekilde $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktoru varsa bu kategorilere **doğal olarak denktir** denir ve $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2.2.14. Objelerin sınıfı G_0 , morfizmlerin sınıfı G_1 ve $x, y \in G_0$ için $G(x, y)$, x den y ye morfizmlerin sınıfı olmak üzere $G = (G_0, G_1, s, t, \varepsilon, \eta, \circ)$ kategorisi $\bar{f} \circ f = 1_{s(f)}$, $f \circ \bar{f} = 1_{t(f)}$ şartını sağlayan

$$\eta: G_1 \rightarrow G_1, f \mapsto \eta(f) = \bar{f}$$

şeklinde tanımlı **ters eleman dönüşümü** olarak ifade edilen dönüşümle birlikte **bir grupoid** olarak adlandırılır (Mackenzie, 1987). Kısaca her morfizmi izomorfizm olan kategori **grupoid** olarak adlandırılır.

Önerme 1.2.2.1. Bir G grupoidinde bir $f \in G(x, y)$ morfizmi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. Her $x \in G_0$ için 1_x birim morfizmi tektir.

- ii. Her $f \in G_1$ için $\bar{f}$ tektir.
- iii. $g \circ f = f$ ise $g = 1_y$ dir.
- iv. $f \circ h = f$ ise $h = 1_x$ dir.
- v. $g \circ f = 1_x$ ise $g = \bar{f}$ dir.
- vi. $f \circ h = 1_y$ ise $h = \bar{f}$ dir (Mucuk, 2010).

Örnek 1.2.2.9. Objeleri tüm cümleler, morfizmleri birebir ve örten fonksiyonlar olan kategori bir grupoiddir.

Örnek 1.2.2.10. Herhangi bir X cümlesi ve G grubu ele alındığında $x, y, z \in X$ ve $g, h \in G$ için (x, g, y) üçlüsü x den y ye bir morfizm olup bileşke işlemi

$$(y, h, z) \circ (x, g, y) = (x, hg, z)$$

şeklinde tanımlanırsa $(X, X \times G \times X)$ yapısı bir grupoid olur. Burada (x, g, y) morfizmi için yapı dönüşümleri $s(x, g, y) = x$, $t(x, g, y) = y$, $1_x = (x, e, x)$, $\eta(x, g, y) = (y, g^{-1}, x)$ şeklinde olup bu grupoide **aşikâr grupoid** denir (Mackenzie, 1987; Mucuk, 2010).

Örnek 1.2.2.11. X bir cümle, G bir grup ve $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \bullet x$ işlemi G nin X üzerine bir etkimesi olmak üzere başlangıç ve bitiş dönüşümleri $s(g, x) = x$, $t(g, x) = g \bullet x$ olan, kısmi bileşke işlemi $y = g \bullet x$ ve $z = h \bullet y$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (h, y) \circ (g, x) &= (hg, y(h \bullet x)) \\ &= (hg, (g \bullet x)(h \bullet x)) \\ &= (hg, (gh) \bullet x) \\ &= (hg, x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $(X, G \times X)$ ikilisi bir grupoid olur. Bu grupoide **etkime grupoidi** denir. Burada bir x objesi için birim morfizm $1_x = (e, x)$ ve (g, x) morfizminin ters morfizmi $\eta(g, x) = (g^{-1}, g \bullet x)$ şeklindedir. Böylece her G -cümleden bir etkime grupoidi elde edilmiş olur (Mucuk, 2010).

Önerme 1.2.2.2. Bir G grupoidinde bir $x \in G_0$ için x den x e giden tüm morfizmlerin sınıfı $G(x)$ olmak üzere morfizmlerin bileşke işlemiyle birlikte $(G(x), \circ)$ ikilisi bir gruptur. Bu gruba x noktasındaki **obje grubu** denir. Grubun birim elemanı 1_x ve her $f \in G(x)$ için ters eleman $f^{-1} = \bar{f}$ dir (Brown, 2006; Mucuk, 2010).

Tanım 1.2.2.15. G ve H birer grupoid olmak üzere G ve H nin kategori yapıları üzerinde $F: G \rightarrow H$ bir fonktor ise F ye **grupoid morfizmi** denir (Brown, 1987). Buradan objeleri tüm grupoidler, morfizmleri grupoidler arasındaki fonktörler olan bir kategori elde edilir. Bu kategoriye **grupoidlerin kategorisi** denir ve **GPD** ile gösterilir (Brown, 1987).

Tanım 1.2.2.16. G ve H birer grupoid olmak üzere objelerin sınıfı $G_0 \times H_0$, morfizmlerin sınıfı $G_1 \times H_1$ olan $G \times H$ yapısı bir grupoid olup **çarpım grupoidi** olarak adlandırılır. Yapı dönüşümleri ise $g \in G_1, h \in H_1$ olmak üzere $x \xrightarrow{g} x_1, y \xrightarrow{h} y_1$ obje ve morfizmleri için $G \times H$ çarpım grupoidinin obje ve morfizmleri

$$(x, y) \xrightarrow{(g, h)} (x_1, y_1)$$

şeklinde olup bileşke işlemi ise $(g, h), (g_1, h_1) \in G_1 \times H_1$ olmak üzere

$$(g_1, h_1) \circ (g, h) = (g_1 \circ g, h_1 \circ h)$$

olarak tanımlıdır. Bir (g, h) morfizminin tersi ise $\overline{(g, h)} = (\bar{g}, \bar{h})$ şeklindedir. Bir $(x, y) \in G_0 \times H_0$ objesi için birim morfizm $1_{(x, y)} = (1_x, 1_y)$ dir (Mucuk, 2010). İki kategorinin çarpımı da buna benzer şekilde elde edilir.

1.2.3. İç Kategori

Bir kategori içindeki bazı objeler kendi aralarında bir kategori yapısı oluşturabilirler. Bununla birlikte iç kategori ifadesine ihtiyaç duyulmuştur.

Tanım 1.2.3.1. Sonlu çarpımlara sahip kategori $\mathcal{C}$ olsun. $A, B \in \mathcal{C}_0$ objeleri için bu

objeler arasında tanımlı aşağıdaki dönüşümler $\mathcal{C}$ nin morfizmleri olarak ele alınsın.

- i. $s: A \rightarrow B$ başlangıç dönüşümü,
- ii. $t: A \rightarrow B$ bitiş dönüşümü,
- iii. $A \times_B A = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid t(a_1) = s(a_2)\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A & \xrightarrow{p_2} & A \\ p_1 \downarrow & & \downarrow s \\ A & \xrightarrow{t} & B \end{array}$$

geri çekilme diyagramı üzerinde tanımlı ve

$$\begin{array}{ccc} A \times_B A \times_B A & \xrightarrow{m \times 1_A} & A \times_B A \\ 1_A \times m \downarrow & & \downarrow m \\ A \times_B A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $m: A \times_B A \rightarrow A$ kısmi bileşke işlemi,

- iv. $s\varepsilon = t\varepsilon = 1_B$ ve

$$\begin{array}{ccccc} B_{1_B} \times_s A & \xrightarrow{\varepsilon \times 1_A} & A \times A & \xleftarrow{1_A \times \varepsilon} & A_t \times_{1_B} B \\ & \searrow \cong & \downarrow m & \swarrow \cong & \\ & & A & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\varepsilon: B \rightarrow A$ birim morfizm dönüşümü olmak üzere bu dönüşümlerle A **okların objesi**, B de **objelerin objesi** olarak ifade edilir. Böylece $\mathcal{D} = (B, A, s, t, \varepsilon, m)$ yapısı bir kategori oluşturur ve bu kategori **iç kategori** olarak adlandırılır (Forrester-Barker, 2002; McLane, 1971). Her morfizminin tersi olan iç kategoriye **iç grupoid** denir.

Örnek 1.2.3.1. Herhangi bir X kümesi için $x, y, z \in X$ olmak üzere (x, y) sıralı ikilisi x den y ye tanımlı morfizmi için bileşke işlemi $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$ dönüşümü ile $(X, X \times X)$ ikili yapısı bir grupoid olup **SET** de bir iç grupoid olur.

Örnek 1.2.3.2. Grupların kategorisindeki iç kategoriler **2-grup** veya **grup-grupoid**

olarak adlandırılırlar.

Örnek 1.2.3.3. Monoidlerin kategorisi **MON** da bir $(M, N, s, t, \varepsilon, m)$ iç kategorisi ele alınsın. Bu durumda yapı dönüşümleri s, t, ε, m birer monoid homomorfizmi olup, objeler ve morfizmler üzerinde monoid işlemleri aşağıda gösterildiği gibi olacaktır.

$$x \xrightarrow{f} y + x' \xrightarrow{f'} y' = x + x' \xrightarrow{f+f'} y + y'$$

Böylece M monoidinin birim elemanı e ile gösterilirse, N monoidinin birim elemanı

$$e \xrightarrow{1_e} e$$

şeklinde e deki birim morfizm olacaktır. Diğer taraftan morfizmlerin bileşke işlemi olan m de bir monoid homomorfizmi olduğundan $f, f', g, g' \in N$ ve $t(f) = s(g)$, $t(f') = s(g')$ olmak üzere

$$m((f, g) + (f', g')) = m(f, g) + m(f', g') = (g \circ f) + (g' \circ f')$$

ve

$$m((f, g) + (f', g')) = m(f + f', g + g') = (g + g') \circ (f + f')$$

elde edilir ki böylece morfizmler arasındaki monoid işlemi ile morfizmlerin bileşke işlemi arasında yerdeğişim kuralı olarak adlandırılan

$$(g \circ f) + (g' \circ f') = (g + g') \circ (f + f')$$

eşitliği bulunur.

Tanım 1.2.3.2. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ sonlu çarpımlara sahip birer iç kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ kategorisinin her bir X objesini $\mathcal{D}$ kategorisinin bir $F(X)$ objesine, $\mathcal{C}$ nin her $f: X \rightarrow Y$ morfizmini $\mathcal{D}$ kategorisinin $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine bir **iç funktor** denir (McLane, 1971).

$$[F1] F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$[F2] F(1_X) = 1_{F(X)} .$$

1.2.4. Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Yarımodüller

Tanım 1.2.4.1. M ve N grupları ve $\partial: M \rightarrow N$ sınır dönüşümü olarak adlandırılan grup homomorfizmi verilsin. N nin M üzerinde (sol) etkimesi

$$\begin{aligned} \rho: N \times M &\rightarrow M \\ (n, m) &\mapsto n \bullet m \end{aligned}$$

olmak üzere eğer

$$[CM1] \text{ her } m \in M, n \in N \text{ için } \partial(n \bullet m) = n\partial(m)n^{-1} \text{ ve}$$

$$[CM2] \text{ her } m, m_1 \in M \text{ için } \partial(m) \bullet m_1 = mm_1m^{-1}$$

şartları sağlanıyorsa $(M, N, \partial, \bullet)$ yapısına **gruplar üzerinde çaprazlanmış modül** denir. Ayrıca $(M, N, \partial, \bullet)$ dörtlüsü (M, N, ∂, ρ) veya (M, N, ∂) şeklinde de gösterilebilir (Whitehead, 1946, Brown vd., 2011).

Örnek 1.2.4.1. G grup ve N , G nin bir normal alt grubu olsun. G nin N üzerindeki konjugasyon etkimesi

$$G \times N \rightarrow N, (g, n) \mapsto g \bullet n = gng^{-1}$$

ve $\partial: N \rightarrow G$, $\partial(n) = n$ şeklindeki grup homomorfizmi ile birlikte (N, G, ∂) üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı teşkil eder. Gerçekten

$$[CM1] \text{ her } g \in G, n \in N \text{ için } \partial(g \bullet n) = \partial(gng^{-1}) = gng^{-1} = g\partial(n)g^{-1} \text{ ve}$$

$$[CM2] \text{ her } n, n_1 \in N \text{ için } \partial(n) \bullet n_1 = n \bullet n_1 = nn_1n^{-1}$$

olup (N, G, ∂) **eşlenik çaprazlanmış modül** olarak adlandırılır (Brown vd., 2011).

Örnek 1.2.4.2. M grup ve M grubunun $f_n(m) = nm n^{-1}$ tipindeki otomorfizmlerinin sınıfı $Aut(M)$ olsun.

$$\begin{aligned}\rho: Aut(M) \times M &\longrightarrow M \\ (f_n, m) &\mapsto f_n \bullet m = f_n(m) = nm n^{-1}\end{aligned}$$

etkimesi ve

$$\partial: M \longrightarrow Aut(M), n \mapsto f_n$$

grup homomorfizmi ile birlikte $(M, Aut(M), \partial)$ yapısı bir çaprazlanmış modül olur. Burada

[CM1] her $f_n \in Aut(M), m \in M$ için

$$\partial(f_n \bullet m) = \partial(f_n(m)) = \partial(nmn^{-1}) = f_{nmn^{-1}} = f_n f_m f_n^{-1} = f_n \partial(m) f_n^{-1}$$

ve

[CM2] her $m, m_1 \in M$ için $\partial(m) \bullet m_1 = f_n \bullet m_1 = f_n(m_1) = nm_1 n^{-1}$

olduğundan etkime şartları sağlanır ki bu yapıya M nin **otomorfizm çaprazlanmış modülü** denir (Brown vd., 2011).

Örnek 1.2.4.3. G ve M birer abelyan grup olmak üzere

$$\rho: G \times M \longrightarrow M, (g, m) \mapsto g \bullet m = m$$

etkimesi ve $\partial: M \longrightarrow G$ grup homomorfizmi ele alınsın. Bu durumda her $g \in G, m \in M$ için

$$\partial(g \bullet m) = \partial(m) = g g^{-1} \partial(m) = g \partial(m) g^{-1}$$

ve her $m, m_1 \in M$ için

$$\partial(m) \bullet m_1 = m_1 = m m^{-1} m_1 = m m_1 m^{-1}$$

olduğundan (M, G, ∂) üçlüsü bir çaprazlanmış modül olacaktır (Brown vd., 2011).

Örnek 1.2.4.4. Her grubun, kendi üzerinde konjugasyon etkimesi olan

$$\rho: G \times G \rightarrow G, (g, g_1) \mapsto g \cdot g_1 = g g_1 g^{-1}$$

etkimesi ve $\partial = 1_G$ grup homomorfizmi ele alınsın. Bu durumda her $g, g_1 \in G$ için

$$[\text{CM1}] \partial(g \cdot g_1) = 1_G(g \cdot g_1) = g \cdot g_1 = g g_1 g^{-1} = g 1_G(g_1) g^{-1},$$

$$[\text{CM2}] \partial(g) \cdot g_1 = 1_G(g) \cdot g_1 = g \cdot g_1 = g g_1 g^{-1}$$

şartları sağlandığından $(G, G, 1_G)$ çaprazlanmış modülü elde edilmiş olur.

Tanım 1.2.4.2. M ve N birer monoid ve $\partial: M \rightarrow N$ monoid homomorfizmi verilsin. N nin M üzerinde

$$\rho: N \times M \rightarrow M, (n, m) \mapsto n \cdot m$$

etkimesi ile birlikte

$$[\text{CSM1}] \text{ her } m \in M, n \in N \text{ için } \partial(n \cdot m) + n = n + \partial(m)$$

$$[\text{CSM2}] \text{ her } m, m_1 \in M \text{ için } (\partial(m) \cdot m_1) + m = m + m_1$$

şartları sağlanıyorsa $K = (M, N, \partial, \rho)$ yapısına monoidler üzerinde bir **çaprazlanmış yarımmodül** denir. Burada ρ ya N nin M üzerindeki **monoid etkimesi** denir (Patchkoria, 1998).

Örnek 1.2.4.5. M ve N birer değişmeli monoid ve $\partial: M \rightarrow N$ monoid homomorfizmi verilsin.

$$\rho: N \times M \rightarrow M, (n, m) \mapsto n \cdot m = m$$

şeklindeki etkimesi ile (M, N, ∂, ρ) yapısı bir çaprazlanmış yarımmodül olur. Gerçekten

$$[\text{CSM1}] \text{ her } m \in M, n \in N \text{ için } \partial(n \cdot m) + n = \partial(m) + n = n + \partial(m) \text{ ve}$$

$$[\text{CSM2}] \text{ her } m, m_1 \in M \text{ için } (\partial(m) \cdot m_1) + m = m_1 + m = m + m_1$$

olup çaprazlanmış yarımmodül şartları sağlanır.

Tanım 1.2.4.3. $(M, N, \partial, \cdot)$ ve $(M', N', \partial', \cdot')$ iki çaprazlanmış yarımmodül ve $f_1: M \rightarrow M'$ ve $f_2: N \rightarrow N'$ iki monoid homomorfizmi olmak üzere

i. $f_2 \partial = \partial' f_1$

ii. $f_1(n \bullet m) = f_2(n) \bullet' f_1(m)$

şartlarını sağlayan $\langle f_1, f_2 \rangle$ ikilisine **çaprazlanmış yarımodül morfizmi** denir ve $\langle f_1, f_2 \rangle: (M, N, \partial) \rightarrow (M', N', \partial')$ şeklinde gösterilir (Patchkoria, 1998).

$$\begin{array}{ccccc} N \times M & \xrightarrow{\bullet} & M & \xrightarrow{\partial} & N \\ f_2 \times f_1 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ N' \times M' & \xrightarrow{\bullet'} & M' & \xrightarrow{\partial'} & N' \end{array}$$

Böylece objeleri çaprazlanmış yarımodüller, morfizmleri çaprazlanmış yarımodül morfizmleri olan kategoriye **çaprazlanmış yarımodüllerin kategorisi** denir ve **CSM** ile gösterilir (Patchkoria, 1998).

1.2.5. 2-Kategoriler ve 2-Grupoidler

2-Kategori yapısı, içerisinde birbiriyle uyumlu üç kategori yapısı barındıran özel bir yapıdır. Bu yapıda objeler, objeler arasında bilinen kategorilerde olduğu gibi morfizmler (bundan sonra 1-morfizmler olarak adlandırılacak), 1-morfizmler arasındaki 2-morfizmler ve yapı dönüşümleri yer alır. (Baez vd., 2012) referansında verildiği gibi 2-kategori tanımını verelim.

Tanım 1.2.5.1. $x, y, z, \dots$ gibi objelerin sınıfı C_0 , $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ şeklinde objeler arasındaki 1-morfizmlerin sınıfı C_1 ve

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y \\ & \Downarrow \alpha & \\ & g & \end{array}$$

şeklinde 1-morfizmlerin arasında tanımlı 2-morfizmlerin sınıfı C_2 olmak üzere aşağıdaki dönüşümlerle birlikte $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2)$ yapısı **2-kategori** olarak adlandırılır.

[C1] $s: C_1 \rightarrow C_0$, $s(f) = x$, $s_h: C_2 \rightarrow C_0$, $s_h(\alpha) = x$, $s_v: C_2 \rightarrow C_1$, $s_v(\alpha) = f$ şeklindeki başlangıç dönüşümleri

[C2] $t: C_1 \rightarrow C_0$, $t(f) = y$, $t_h: C_2 \rightarrow C_0$, $t_h(\alpha) = y$, $t_v: C_2 \rightarrow C_1$, $t_v(\alpha) = g$ şeklindeki bitiş dönüşümleri

[C3] $C_2 \times_{C_0} C_2 = \{(\beta, \alpha) \in C_2 \times C_2 \mid t_h(\alpha) = s_h(\beta)\}$ olmak üzere birleşmeli olacak şekilde tanımlı $\circ_h: C_2 \times_{C_0} C_2 \rightarrow C_2$ yatay bileşke işlemi

$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} z = x \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 \circ f} \\ \Downarrow \beta \circ_h \alpha \\ \xrightarrow{g_1 \circ g} \end{array} z \end{array}$$

[C4] $C_2 \times_{C_1} C_2 = \{(\delta, \alpha) \in C_2 \times C_2 \mid t_v(\alpha) = s_v(\delta)\}$ olmak üzere birleşmeli olacak şekilde tanımlı $\circ_v: C_2 \times_{C_1} C_2 \rightarrow C_2$ düşey bileşke işlemi

$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{h} \end{array} y = x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \delta \circ_v \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \end{array}$$

[C5] Tüm objeleri $f \circ 1_x = f = 1_y \circ f$ ve $s\varepsilon = t\varepsilon = 1_{C_0}$ şartları sağlanacak şekilde birim 1-morfizme dönüştüren $\varepsilon: C_0 \rightarrow C_1$, $\varepsilon(x) = 1_x$, $\varepsilon(y) = 1_y$ şeklinde tanımlı birim 1- morfizm dönüşümü

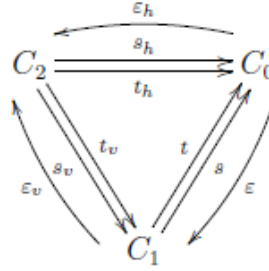
[C6] Bütün objeleri $\alpha \circ_h 1_{1_x} = \alpha = 1_{1_y} \circ_h \alpha$ ve $s_h \varepsilon_h = t_h \varepsilon_h = 1_{C_0}$ şartları sağlanacak şekilde birim 2-morfizmine dönüştüren $\varepsilon_h: C_0 \rightarrow C_2$, $\varepsilon_h(x) = 1_{1_x}$ ve $\varepsilon_h(y) = 1_{1_y}$ şeklinde tanımlı yatay birim 2- morfizm dönüşümü

$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{1_x} \\ \Downarrow 1_{1_x} \\ \xrightarrow{1_x} \end{array} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f'} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{1_y} \\ \Downarrow 1_{1_y} \\ \xrightarrow{1_y} \end{array} y \end{array}$$

[C7] Bütün 1-morfizmleri $\alpha \circ_v 1_f = \alpha = 1_g \circ_v \alpha$ ve $s_v \varepsilon_v = t_v \varepsilon_v = 1_{C_1}$ şartları sağlanacak şekilde birim 2-morfizmine dönüştüren $\varepsilon_v: C_1 \rightarrow C_2$, $\varepsilon_v(f) = 1_f$ ve $\varepsilon_v(g) = 1_g$ şeklinde tanımlı düşey birim 1-morfizm dönüşümü.

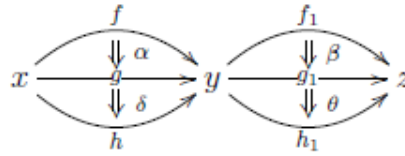
$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow 1_f \\ \xrightarrow{g} \end{array} y = x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y = x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \end{array}$$

Yapı dönüşümleri olarak ifade edilen bu dönüşümler aşağıdaki diyagramda kısmen gösterilmiştir.

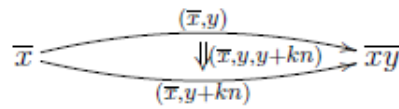


Ayrıca yatay ve düşey bileşke işlemleri birer funktor olup aralarında aşağıda ifade edilen yerdeğişim kuralı sağlanmalıdır.

$$(\theta \circ_v \beta) \circ_h (\delta \circ_v \alpha) = (\theta \circ_h \delta) \circ_v (\beta \circ_h \alpha).$$



Örnek 1.2.5.1. $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoidi ele alınsın. $C_0 = \mathbb{Z}_n$, $C_1 = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$, $C_2 = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olsun. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(\bar{x}, y)$, $(\bar{x}, y + kn)$ sıralı ikilileri 1-morfizmler ve $(\bar{x}, y, y + kn)$ üçlüsü bu 1-morfizmler arasında aşağıdaki gibi bir 2-morfizm olarak ele alınsın.



$k, k_1 \in \mathbb{Z}$ için 1-morfizmlerin bileşkesi

$$(\overline{xy}, z) \circ (\bar{x}, y) = (\bar{x}, yz)$$

şeklinde, 2-morfizmlerin düşey bileşkesi

$$(\bar{x}, y + kn, y + k_1n) \circ_v (\bar{x}, y, y + kn) = (\bar{x}, y, y + k_1n)$$

ve yatay bileşke işlemi

$$(\bar{x}\bar{y}, z, z + k_1n) \circ_h (\bar{x}, y, y + kn) = (\bar{x}, yz, yz + (kz + k_1y + kk_1n)n)$$

şeklinde tanımlansın. $\bar{x} \in C_0$ olmak üzere $1_{\bar{x}} = (\bar{x}, 1)$ ve $1_{1_{\bar{x}}} = (\bar{x}, 1, 1)$ ve $(\bar{x}, y)$ 1-morfizmi için $1_{(\bar{x}, y)} = (\bar{x}, y, y)$ şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2)$ bir 2-kategori olarak elde edilir (Temel, 2016a).

Tanım 1.2.5.2. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$, 2-kategoriler olmak üzere $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü $\mathcal{C}$ nin her bir x objesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(x)$ objesine $\mathcal{C}$ nin her $f, g: x \rightarrow y$, 1-morfizmini $\mathcal{D}$ nin $F(f), F(g): F(x) \rightarrow F(y)$ 1-morfizmine ve $\mathcal{C}$ nin her bir $\alpha: f \rightarrow g$, 2-morfizmini $\mathcal{D}$ nin $F(\alpha): F(f) \rightarrow F(g)$ 2-morfizmine dönüştürüyor ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa F dönüşümüne $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir **2-funktor** denir (Baez, 1997; Noohi, 2007).

$$\begin{array}{ccc} x & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} & y \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} F(x) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F(f)} \\ \Downarrow F(\alpha) \\ \xrightarrow{F(g)} \end{array} & F(y) \end{array}$$

Bileşke işlemleri tanımlı olduğunda

- [i] $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$,
- [ii] $F(\beta \circ_v \alpha) = F(\beta) \circ_v F(\alpha)$,
- [iii] $F(\delta \circ_h \alpha) = F(\delta) \circ_h F(\alpha)$,
- [iv] $F(1_f) = 1_{F(f)}$ ve $F(1_x) = 1_{F(x)}$ dir.

2-funktorların bileşkesi de bir 2-funktor olur ki böylece objeleri küçük 2-kategoriler, morfizmleri 2-funktorlar olan **2-kategorilerin kategorisi** elde edilir ve **2CAT** ile gösterilir (Noohi, 2007).

Tanım 1.2.5.3. Objelerin sınıfı G_0 , 1-morfizmlerin sınıfı G_1 ve 2-morfizmlerin sınıfı G_2 olmak üzere $\mathcal{G} = (G_0, G_1, G_2)$ 2-kategorisi aşağıdaki dönüşümlerle bir **2-grupoid** olarak adlandırılır (Noohi, 2007).

- [i] $\bar{\alpha} \circ \alpha = 1_x$, $\alpha \circ \bar{\alpha} = 1_y$ olmak üzere $\eta: G_1 \rightarrow G_1$, $\eta(\alpha) = \bar{\alpha}$
- [ii] $\bar{\alpha}^h \circ \alpha = 1_x$, $\alpha \circ \bar{\alpha}^h = 1_y$ olmak üzere $\eta_h: G_2 \rightarrow G_2$, $\eta_h(\alpha) = \bar{\alpha}^h$

$$\begin{array}{c}
x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{f}} \\ \Downarrow \bar{\alpha}^h \\ \xrightarrow{\bar{g}} \end{array} x = x \begin{array}{c} \xrightarrow{1_x} \\ \Downarrow 1_{1_x} \\ \xrightarrow{1_x} \end{array} x
\end{array}$$

[iii] $\bar{\alpha}^v \circ_v \alpha = 1_f$, $\alpha \circ_v \bar{\alpha}^v = 1_g$ olmak üzere $\eta_v: G_2 \rightarrow G_2$, $\eta_v(\alpha) = \bar{\alpha}^v$

$$\begin{array}{c}
x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha^v \\ \xrightarrow{f} \end{array} y = x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow 1_f \\ \xrightarrow{f} \end{array} y
\end{array}$$

Kısaca her bir 1-morfizmin tersi ve her bir 2-morfizmin yatay ve düşey anlamda tersi bulunan 2-kategoriye bir **2-grupoid** denir. Burada $x, y \in G_0$ olmak üzere $G(x, y)$ ile x den y ye tüm 1-morfizmlerin sınıfı, $G'(x, y)$ ile x den y ye tüm 2-morfizmlerin sınıfı, $f, g \in G_1$ için $G(f, g)$ ile f den g ye tüm 2-morfizmlerin sınıfı gösterilir.

Önerme 1.2.5.1. Bir $\mathcal{G}$ 2-grupoidinde bir $\alpha \in G'(x, y)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i. Her $x \in G_0$ için birim 1-morfizmi olan 1_{1_x} tektir.
- ii. Her $\alpha \in G_2$ 2-morfizmi için $\bar{\alpha}^h$ tektir.
- iii. $\beta \circ_h \alpha = \alpha$ ise $\beta = 1_{1_y}$
- iv. $\alpha \circ_h \theta = \alpha$ ise $\theta = 1_{1_x}$
- v. $\beta \circ_h \alpha = 1_{1_x}$ ise $\beta = \bar{\alpha}^h$
- vi. $\alpha \circ_h \theta = 1_{1_y}$ ise $\theta = \bar{\alpha}^h$ dir (Temel, 2016a).

Önerme 1.2.5.2. Bir $\mathcal{G}$ 2-grupoidinde $\alpha \in G(f, g)$ için aşağıdakiler sağlanır.

- i. Her $f \in G_1$ için birim 1-morfizmi olan 1_f tektir.
- ii. Her $\alpha \in G_2$ 2-morfizminde $\bar{\alpha}^v$ tektir.
- iii. $\beta \circ_v \alpha = \alpha$ ise $\beta = 1_g$
- iv. $\alpha \circ_v \theta = \alpha$ ise $\theta = 1_f$
- v. $\beta \circ_v \alpha = 1_f$ ise $\beta = \bar{\alpha}^v$
- vi. $\alpha \circ_v \theta = 1_g$ ise $\theta = \bar{\alpha}^v$ dir (Temel, 2016a).

Örnek 1.2.5.2. G bir grup, X de herhangi bir cümle olmak üzere $x, y, z \in X$ ve $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 \in G$ için x den y ye 1-morfizmler (x, g_1, y) , (x, g_2, y) şeklinde ele alınsın. (x, g_1, y) den (x, g_2, y) ye 2-morfizmleri de (x, g_1, g_2, y) dörtlüsü ile gösterilsin.

$$\begin{array}{ccc} & (x, g_1, y) & \\ x & \begin{array}{c} \Downarrow (x, g_1, g_2, y) \\ \Downarrow (x, g_2, y) \end{array} & y \end{array}$$

Burada başlangıç dönüşümleri

$$s(x, g_1, y) = x, s_h(x, g_1, g_2, y) = x, s_v(x, g_1, g_2, y) = (x, g_1, y),$$

bitiş dönüşümleri

$$t(x, g_1, y) = y, t_h(x, g_1, g_2, y) = y, t_v(x, g_1, g_2, y) = (x, g_2, y),$$

bileşke işlemleri

$$(y, h_1, z) \circ (x, g_1, y) = (x, h_1 g_1, z),$$

$$(y, h_1, h_2, z) \circ_h (x, g_1, g_2, y) = (x, h_1 g_1, h_2 g_2, z)$$

$$\begin{array}{ccc} x & \begin{array}{c} (x, g_1, y) \\ \Downarrow (x, g_1, g_2, y) \\ (x, g_2, y) \end{array} & y \end{array} \begin{array}{ccc} & (y, h_1, y) \\ y & \begin{array}{c} \Downarrow (y, h_1, h_2, z) \\ \Downarrow (y, h_2, y) \end{array} & z \end{array} = \begin{array}{ccc} & (x, h_1 g_1, z) \\ x & \begin{array}{c} \Downarrow (x, h_1 g_1, h_2 g_2, z) \\ \Downarrow (x, h_2 g_2, z) \end{array} & z \end{array}$$

ve

$$(x, g_2, g_3, y) \circ_v (x, g_1, g_2, y) = (x, g_1, g_3, y),$$

birim morfizm dönüşümleri

$$\varepsilon(x) = (x, e, x), \varepsilon_h(x) = (x, e, e, x), \varepsilon_v(x, g, x) = (x, g, g, x)$$

ve ters morfizm dönüşümleri

$$\eta(x, g, y) = (y, g^{-1}, x), \eta_h(x, g_1, g_2, y) = (y, g_1^{-1}, g_2^{-1}, x),$$

$$\eta_v(x, g_1, g_2, y) = (x, g_1, g_2, y)$$

ile birlikte $\mathcal{G} = (X, X \times G \times X, X \times G \times G \times X)$ yapısı bir 2-grupoid olacaktır. Bu 2-grupoide **aşık 2-grupoid** denir (Temel, 2016a).

Tanım 1.2.5.4. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ 2-grupoidleri ele alınsın. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ın 2-kategorileri üzerinde $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 2-funktor ise F ye **2-grupoid morfizmi** denir (Noohi, 2007). Böylece objeleri tüm 2-grupoidler, morfizmleri 2-grupoidler arasındaki 2-grupoid morfizmleri olan 2-grupoidlerin kategorisi elde edilir ve **2GPD** ile gösterilir (Noohi, 2007).

Önerme 1.2.5.3. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$, 2-grupoidler ve $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, 2-grupoid morfizmi olmak üzere her $\alpha \in G_2$ için $F(\bar{\alpha}^h) = \overline{F(\alpha)}^h$ ve $F(\bar{\alpha}^v) = \overline{F(\alpha)}^v$ dir.

İspat: α herhangi bir 2-morfizm olsun.

$$F(\bar{\alpha}^h) \circ_h F(\alpha) = F(\bar{\alpha}^h \circ_h \alpha) = F(1_{s_h(\alpha)}) = 1_{F(s_h(\alpha))}$$

ve

$$F(\alpha) \circ_h F(\bar{\alpha}^h) = F(\alpha \circ_h \bar{\alpha}^h) = F(1_{t_h(\alpha)}) = 1_{F(t_h(\alpha))}$$

olup $F(\bar{\alpha}^h) = \overline{F(\alpha)}^h$ dir. Benzer şekilde

$$F(\bar{\alpha}^v) \circ_v F(\alpha) = F(\bar{\alpha}^v \circ_v \alpha) = F(1_f) = 1_{F(f)}$$

ve

$$F(\alpha) \circ_v F(\bar{\alpha}^v) = F(\alpha \circ_v \bar{\alpha}^v) = F(1_g) = 1_{F(g)}$$

olur ki böylece $F(\bar{\alpha}^v) = \overline{F(\alpha)}^v$ dir.

Tanım 1.2.5.5. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ 2-grupoidlerini ele alalım. $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ kartezyen çarpımı, objelerin sınıfı $G_0 \times H_0$, 1-morfizmlerin sınıfı $G_1 \times H_1$ ve 2-morfizmlerin sınıfı $G_2 \times H_2$ olan bir 2-grupoiddir.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} & x_1, \quad y & \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} & y_1 \quad \Rightarrow \quad (x, y) & \begin{array}{c} \xrightarrow{(g_1, h_1)} \\ \Downarrow (\alpha, \beta) \\ \xrightarrow{(g_2, h_2)} \end{array} & (x_1, y_1)
 \end{array}$$

$(g, h), (g_1, h_1) \in G_1 \times H_1$ olmak üzere 1-morfizmlerin bileşke işlemi

$$(g_1, h_1) \circ (g, h) = (g_1 \circ g, h_1 \circ h)$$

şeklinde, 2-morfizmlerin yatay bileşke işlemi

$$(\alpha_1, \beta_1) \circ_h (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \circ_h \alpha, \beta_1 \circ_h \beta)$$

ve düşey bileşke işlemi

$$(\theta, \delta) \circ_v (\alpha, \beta) = (\theta \circ_v \alpha, \delta \circ_v \beta)$$

şeklinde tanımlıdır. Buna göre bir (g, h) 1-morfizminin tersi $\overline{(g, h)} = (\bar{g}, \bar{h})$, bir (α, β) 2-morfizminin yatay tersi $\overline{(\alpha, \beta)}^h = (\bar{\alpha}^h, \bar{\beta}^h)$ ve düşey tersi $\overline{(\alpha, \beta)}^v = (\bar{\alpha}^v, \bar{\beta}^v)$ olup, buna göre $(x, y) \in G_0 \times H_0$ için birim 1-morfizm $1_{(x, y)} = (1_x, 1_y)$ ve birim 2-morfizm $1_{1_{(x, y)}} = (1_{1_x}, 1_{1_y})$, $(g, h) \in G_1 \times H_1$ için birim 2-morfizm $1_{(g, h)} = (1_g, 1_h)$ biçimindedir.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Monoidlerin Kategorisindeki Schreier İç Kategorileri

Bu bölümde monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategorileri ile monoidler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin kategorik anlamda doğal olarak denk oldukları gösterilecektir. Bir Schreier iç kategorisi, monoidlerin kategorisinde Schreier şartını sağlayan bir iç kategoridir. Bu bölümde elde edeceğimiz sonuçlar (Patchkoria, 1998) referansında elde edilen sonuçlardır. Bu sonuçların topolojik hâli için (Temel, 2016b) referansına bakılabilir. Ayrıca (Taşbaş, 2014) yüksek lisans tezi de incelenebilir.

Tanım 2.1.1. Monoidlerin kategorisinde bir $\mathcal{M} = (M_0, M_1, s, t, \varepsilon, \circ)$ iç kategorisi verilsin. Eğer her $f \in M_1$ için

$$f = \tilde{f} + \varepsilon s(f)$$

olacak şekilde bir tek $\tilde{f} \in Kers$ varsa $\mathcal{M}$ ye monoidlerin kategorisinde bir **Schreier iç kategori**, bu şarta da **Schreier şartı** denir (Patchkoria, 1998). $s(f) = x$ olmak üzere bu şartı

$$f = \tilde{f} + 1_x$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

Lemma 2.1.1. Monoidlerin kategorisinde $\mathcal{M} = (M_0, M_1)$ Schreier iç kategorisi ele alınsın. Bu durumda bileşke işlemi ile monoid çarpımı arasında yerdeğişim kuralı olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlik vardır. $s(g) = t(f), s(g') = t(f')$ olmak üzere

$$(g \circ f) + (g' \circ f') = (g + g') \circ (f + f')$$

dir (Patchkoria, 1998).

Lemma 2.1.2. Monoidlerin kategorisinde $\mathcal{M} = (M_0, M_1)$ Schreier iç kategorisi ve

$s(g) = t(f)$ olacak şekilde $f, g \in M_1$ verilsin. Bu durumda bileşke işlemi monoid işlemi cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$(g \circ f) = \tilde{g} + \tilde{f} + \varepsilon s(f) = \tilde{g} + f$$

İspat: Schreier şartı gereği ve $t\varepsilon = 1_{M_0}$ olduğundan

$$\begin{aligned} g &= \tilde{g} + \varepsilon s(g) \\ &= \tilde{g} + \varepsilon t(f) \\ &= \tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f} + \varepsilon s(f)) \\ &= \tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f}) + \varepsilon t\varepsilon s(f) \\ &= \tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f}) + \varepsilon s(f) \end{aligned}$$

olup, yerdeğişim kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} (g \circ f) &= (\tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f}) + \varepsilon s(f)) \circ (\tilde{f} + \varepsilon s(f)) \\ &= ((\tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f})) \circ \tilde{f}) + (\varepsilon s(f) \circ \varepsilon s(f)) \\ &= ((\tilde{g} + \varepsilon t(\tilde{f})) \circ (1_e + \tilde{f})) + \varepsilon s(f) \\ &= ((\tilde{g} \circ 1_e) + (\varepsilon t(\tilde{f}) \circ \tilde{f})) + \varepsilon s(f) \\ &= \tilde{g} + \tilde{f} + \varepsilon s(f) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.1. $(M, +)$ bir değişmeli monoid olsun. $x, y \in M$ olmak üzere (x, y) ikilisi x den $x + y$ ye

$$x \xrightarrow{(x,y)} x + y$$

şeklinde morfizmler olarak ele alınırsa, $M \times M$ direkt çarpımı,

$$s(x, y) = x, t(x, y) = x + y, \varepsilon(x) = (x, e)$$

şeklinde tanımlı yapı dönüşümleri ve

$$(x + y, z) \circ (x, y) = (x, y + z)$$

şeklinde tanımlı bileşke işlemi ile $\mathcal{M} = (M, M \times M, s, t, \varepsilon, \circ)$ yapısı bir Schreier iç kategori oluşturur. Gerçekten her (x, y) ikilisi için

$$(x, y) = (e, y) + (x, e)$$

yazılabileceğinden ve $(e, y) \in Kers$ olduğundan tüm morfizmler Schreier şartını sağlar.

Tanım 2.1.2. $\mathcal{M} = (M_0, M_1)$ ve $\mathcal{M}' = (M'_0, M'_1)$ monoidlerin kategorisinde iki Schreier iç kategori olsun. $\gamma_0: M_0 \rightarrow M'_0$, $\gamma_1: M_1 \rightarrow M'_1$ monoid homomorfizmleri olmak üzere $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1): M \rightarrow M'$ iç fonktörüne **Schreier iç kategorilerin bir morfizmi** denir (Patchkoria, 1998). Böylece monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategorileri ve morfizmleri **SIC** ile göstereceğimiz bir kategori oluştururlar.

Aşağıdaki teorem (Patchkoria, 1998) referansında ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.1. Monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategorilerin kategorisi **SIC** ile çaprazlanmış yarımodüllerin kategorisi **CSM** doğal olarak denktirler.

İspat: Monoidlerin kategorisinde bir $\mathcal{M} = (M_0, M_1)$ Schreier iç kategori verilsin. Bir $\delta: \mathbf{SIC} \rightarrow \mathbf{CSM}$ fonktörünü $\partial = t|_{Kers}$ kısıtlaması olmak üzere $\delta(M) = (Kers, M_0, \partial)$ olacak şekilde tanımlayalım. M_0 monoidinin $Kers$ üzerine etkimesini $x \in M_0, f \in Kers$ olmak üzere

$$(x \bullet f) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + f$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu şekilde tanımladığımız $\bullet$ işleminin bir monoid etkimesi olduğunu gösterelim. $x, y \in M_0, f, g \in Kers$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\text{[i]} \quad & ((x + y) \bullet f) + \varepsilon(x + y) = \varepsilon(x + y) + f \\
& = \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + f \\
& = \varepsilon(x) + (y \bullet f) + \varepsilon(y) \\
& = (x \bullet (y \bullet f)) + \varepsilon(x) + \varepsilon(y) \\
& = (x \bullet (y \bullet f)) + \varepsilon(x + y)
\end{aligned}$$

olup Schreier şartı gereği

$$(x + y) \bullet f = x \bullet (y \bullet f)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{[ii]} \quad & (x \bullet (f + g)) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + f + g \\
& = (x \bullet f) + \varepsilon(x) + g \\
& = (x \bullet f) + (x \bullet g) + \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

olup Schreier şartı gereği

$$x \bullet (f + g) = (x \bullet f) + (x \bullet g)$$

elde edilir.

$$\text{[iii]} \quad e \bullet f = (e \bullet f) + \varepsilon(e) = \varepsilon(e) + f = f \text{ dir.}$$

$x \in M_0$ $f, f_1 \in Kers$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\text{[CSM1]} \quad & \partial(x \bullet f) + x = t(x \bullet f) + t \varepsilon(x) \\
& = t((x \bullet f) + \varepsilon(x)) \\
& = t(\varepsilon(x) + f) \\
& = t\varepsilon(x) + t(f) \\
& = x + \partial(f),
\end{aligned}$$

[CSM2] $x \in M_0$ $f, f_1 \in Kers$ için

$$\begin{aligned}
(\partial(f) \bullet f_1) + f &= [(\partial(f) \bullet f_1 \circ 1_e)] + [\varepsilon \partial(f) \circ f] \\
&= [\partial(f) \bullet f_1 + \varepsilon \partial(f)] \circ [1_e + f] \\
&= [\varepsilon \partial(f) + f_1] \circ [f + 1_e] \\
&= [\varepsilon \partial(f) \circ f] + [f_1 \circ 1_e] \\
&= f + f_1
\end{aligned}$$

elde edilir ki böylece çaprazlanmış yarımmodül şartlarının sağlanır.

Tersine bir $\theta: \mathbf{CSM} \rightarrow \mathbf{SIC}$ fonktörünü, $(M, N, \partial, \bullet)$ bir çaprazlanmış yarımmodül olmak üzere

$$\theta(M, N, \partial) = (N, N \ltimes M, s, t, \varepsilon, \circ)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada $n \in N, m \in M$ olmak üzere

$$s(n, m) = n, t(n, m) = \partial(m) + n, \varepsilon(n) = (n, e)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümlerin monoid homomorfizması oldukları açıktır. Bileşke işlemi ise $m, m_1 \in M$ ve $n \in N$ olmak üzere

$$(\partial(m) + n, m_1) \circ (n, m) = (n, m_1 + m)$$

şeklinde tanımlanır. Bileşke işlemi ile yarıdirekt çarpımın monoid işlemi arasında yerdeğişim kuralının sağlandığı kolayca görülebilir.

Bu teoremin kısıtlamaları olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir. M bir grup olmak üzere (M, N, ∂) şeklinde çaprazlanmış yarımmodüllerin kategorisi $\mathbf{CSM}^*$ olsun.

Teorem 2.1.2. Monoidlerin kategorisindeki Schreier iç grupoidlerin kategorisi ile $\mathbf{CSM}^*$ doğal olarak denktirler (Patchkoria, 1998).

Bu teorem (Porter, 1985) referansının ana teoreminin özel bir hali olarak ele alınabilir.

Teorem 2.1.3. 2-grupların (grup-grupoidlerin) kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin kategorisi denk kategorilerdir (Brown ve Spencer, 1976).

2.2. Kategoriler Üzerindeki Çaprazlanmış Yarımodüller ve Schreier 2-Kategorileri

Bu bölümde Schreier 2-kategorilerin kategorisi ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımodüllerin kategorisinin doğal olarak denk olduğu gösterilecektir. Bir Schreier 2-kategori (Porter, 1985) referansında (B) şartı olarak verilen ve bizim Schreier şartı olarak adlandırdığımız koşulu sağlayan özel bir 2-kategoridir. Bu şekilde isimlendirme yapmamızın sebebi ise ilerde göstereceğimiz gibi tek objeli bir Schreier 2-kategorinin, monoidlerin kategorisinde Schreier iç kategori olmasıdır. Dolayısıyla bu bölümde elde edeceğimiz sonuçlar (Temel, 2018) referansından alınmış olup (Porter, 1985) ve (Patchkoria, 1998) referanslarında elde edilen sonuçların bir genelleştirilmesidir. Kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımodül tanımını yapabilmek için öncelikle kategoriler üzerindeki etkiye tanımını, grupoidlerdekine benzer şekilde yapmalıyız.

Tanım 2.2.1. Her x, y objeleri için $x \neq y$ olmak üzere x den y ye tüm morfizmlerin sınıfı olan $C(x, y)$ boş kümeye eşitse bu kategoriye **tamamen bağlantısız** denir.

Tanım 2.2.2. $\mathcal{C} = (X, C)$ ve $\mathcal{D} = (X, D)$ aynı obje kümesi X üzerinde iki kategori ve $\mathcal{D}$ tamamen bağlantısız olsun. Eğer

$$\bullet : C \times D \longrightarrow D, \quad (c, d) \mapsto c \bullet d$$

şeklinde tanımlı dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüm **$\mathcal{C}$ nin $\mathcal{D}$ üzerinde bir etkimesi** olarak adlandırılır.

[AC1] $c \bullet d$ tanımlıdır $\Leftrightarrow t(d) = s(c)$ ve $t(c \bullet d) = t(c)$ dir.

[AC2] $(c_2 \circ c_1) \bullet d = c_2 \bullet (c_1 \bullet d)$,

[AC3] $d_1, d_2 \in D(x, x)$ ve $c \in C(x, y)$ için $c \bullet (d_2 \circ d_1) = (c \bullet d_2) \circ (c \bullet d_1)$,

[AC4] $d \in D(x, x)$ için $1_x \bullet d = d$ dir.

Aşağıdaki tanım (Porter, 1985) referansındaki tanıma benzer şekilde yapılmıştır.

Tanım 2.2.3. $\mathcal{C} = (X, C)$ ve $\mathcal{D} = (X, D)$ aynı obje kümesi X üzerinde iki kategori ve $\mathcal{D}$ kategorisi tamamen bağlantısız olsun. Objeler üzerinde birim olan bir $\partial : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$

funktoru ve $\bullet : C \times D \rightarrow D$ etkimesi ile aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{K} = (\mathcal{D}, \mathcal{C}, \partial, \bullet)$ yapısına **kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodül** denir.

$$[\text{CSC1}] \partial(c \bullet d) \circ c = c \circ \partial(d)$$

$$[\text{CSC2}] d, d_1 \in D(x, x) \text{ ve } c \in C(x, y) \text{ için } (\partial(d) \bullet d_1) \circ d = d \circ d_1 \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.4. Kategoriler üzerindeki $\mathcal{K} = (\mathcal{D}, \mathcal{C}, \partial, \bullet)$, $\mathcal{K}' = (\mathcal{D}', \mathcal{C}', \partial', \bullet')$ çaprazlanmış yarımmodüller ve $(\lambda_0, \lambda_1): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, $(\lambda_0, \lambda_2): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ birer fonktor olmak üzere

$$\lambda = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0): \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$$

dönüşümü ele alınsın. Eğer, $c \in C$, $d \in D$ olmak üzere

$$\text{i. } \lambda_2 \partial = \partial' \lambda_1,$$

$$\text{ii. } \lambda_1(c \bullet d) = \lambda_2(c) \bullet' \lambda_1(d)$$

şartları sağlanıyorsa λ dönüşümüne **kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin bir morfizmi** denir (Temel, 2018). Böylece kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüller ve morfizmleri **CSC** ile göstereceğimiz bir kategori oluştururlar.

Tanım 2.2.5. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2)$ bir 2-kategori olsun. Eğer her bir $\alpha \in C_2$ için Schreier şartı olarak adlandırılan

$$\alpha = \tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)$$

şartı sağlanacak şekilde dikey başlangıcı aşağıdaki gösterildiği gibi birim 1-morfizm olan bir tek $\tilde{\alpha} \in Kers_v$ 2-morfizmi varsa, $\mathcal{C}$ ye bir **Schreier 2-kategori** denir (Temel, 2018).

$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \end{array} = \begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow 1_f \\ \xrightarrow{f} \end{array} y \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{1_y} \\ \Downarrow \tilde{\alpha} \\ \xrightarrow{\tilde{g}} \end{array} y$$

Örnek 2.2.1. $(M, +)$ monoidi ve $(G, \cdot)$ grubu ele alınsın. $m, n \in M$ ve $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere (m, g_1, n) ve (m, g_2, n) üçlüleri m den $m + n$ ye 1- morfizmler (m, g_1, g_2, n)

dörtlüsü ise (m, g_1, n) den (m, g_2, n) ye bir 2-morfizm olarak ele alınsın.

$$\begin{array}{ccc} & (m, g_1, n) & \\ \nearrow & \Downarrow (m, g_1, g_2, n) & \searrow \\ m & & m + n \\ \searrow & (m, g_2, n) & \nearrow \end{array}$$

Aşağıda tanımlı bileşke işlemleri ile $(M, M \times G \times M, M \times G \times G \times M)$ yapısı bir Schreier 2-kategoridir (Temel, 2018).

- $(m + n, h_1, p) \circ (m, g_1, n) = (m, h_1 \cdot g_1, n + p)$
- $(m + n, h_1, h_2) \circ_h (m, g_1, g_2, n) = (m, h_1 \cdot g_1, h_2 \cdot g_2, n + p)$
- $(m, g_2, g_3, n) \circ_v (m, g_1, g_2, n) = (m, g_1, g_3, n)$

Burada

$$(m, g_1, g_2, n) = (m + n, e_G, g_2 \cdot g_1^{-1}, e_M) \circ_h (m, g_1, g_1, n)$$

yazılabileceğinden tüm 2-morfizmler Schreier şartını sağlar.

Önerme 2.2.1. Bir Schreier 2-kategoride 2-morfizmlerin düşey bileşke işlemi, yatay bileşke cinsinden $s_v(\beta) = t_v(\alpha)$ olmak üzere

$$\beta \circ_v \alpha = \tilde{\beta} \circ_h \tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)$$

şeklinde ifade edilebilir (Temel, 2018).

İspat: $s_v(\beta) = t_v(\alpha)$ olsun. Schreier şartı gereği

$$\begin{aligned} \beta &= \tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v s_v(\beta) \\ &= \tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\alpha) \\ &= \tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)) \\ &= \tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha}) \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha) \end{aligned}$$

olup yatay ve düşey bileşkeler arasında yerdeğişim kuralı uygulanırsa

$$\beta \circ_v \alpha = (\tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha}) \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)) \circ_v (\tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha))$$

$$\begin{aligned}
&= (\tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha}) \circ_v \tilde{\alpha}) \circ_h (\varepsilon_v s_v(\alpha) \circ_v \varepsilon_v s_v(\alpha)) \\
&= \left((\tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha})) \circ_v (\varepsilon_h t_h(\tilde{\alpha}) \circ_h \tilde{\alpha}) \right) \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha) \\
&= \left((\tilde{\beta} \circ_v \varepsilon_h t_h(\tilde{\alpha})) \circ_h (\varepsilon_v t_v(\tilde{\alpha}) \circ_v \tilde{\alpha}) \right) \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha) \\
&= \tilde{\beta} \circ_h \tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.6. Schreier 2-kategorilerin morfizmleri basitçe Schreier 2-kategorileri arasındaki 2-funktorlardır. Böylece **S2CAT** ile göstereceğimiz Schreier 2-kategorilerin kategorisi elde edilir (Temel, 2018).

Teorem 2.2.1. Schreier 2-kategorilerin kategorisi **S2CAT** ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin kategorisi **CSC** doğal olarak denk kategorilerdir (Temel, 2018).

İspat: Bir $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2)$ Schreier 2-kategorisi verildiğinde bu yapı içeriğinde uyumlu kategori yapıları barındırdığından $\mathcal{N} = (C_0, C_1, s, t, \varepsilon \circ)$ kategorisi elde edilir. Diğer yandan her $x \in C_0$ objesi için $M(x) = \{\alpha \in C_2 \mid s_v(\alpha) = \varepsilon(x)\}$ ve $M = \{M(x)\}_{x \in C_0}$ olmak üzere $\mathcal{M} = (C_0, M, s_h, t_h, \varepsilon_h, \circ_h)$ yapısı bir kategoridir. Buna göre $f \in C_1, \alpha \in M$ olmak üzere $\bullet: C_1 \times M \rightarrow M$ etkimesi

$$(f \bullet \alpha) \circ_h \varepsilon_v(f) = \varepsilon_v(f) \circ_h \alpha$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{f} & y \\
\Downarrow 1_f & & \Downarrow f \bullet \alpha \\
x & \xrightarrow{f} & y
\end{array}
\end{array}
:=
\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{1_x} & x \\
\Downarrow \alpha & & \Downarrow 1_f \\
x & \xrightarrow{f} & y
\end{array}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan dönüşümün etkime şartlarını sağladığını gösterelim.

[AC1] Tanımdan açıktır.

[AC2] $f_1 \circ f$ tanımlı olduğunda

$$\begin{aligned}
((f_1 \circ f) \bullet \alpha) \circ_h 1_{f_1 \circ f} &= 1_{f_1 \circ f} \circ_h \alpha \\
&= 1_{f_1} \circ_h 1_f \circ_h \alpha \\
&= 1_{f_1} \circ_h (f \bullet \alpha) \circ_h 1_f \\
&= (f_1 \bullet (f \bullet \alpha)) \circ_h 1_{f_1} \circ_h 1_f \\
&= (f_1 \bullet (f \bullet \alpha)) \circ_h 1_{f_1 \circ f}
\end{aligned}$$

olup Schreier şartı altında $(f_1 \circ f) \bullet \alpha = f_1 \bullet (f \bullet \alpha)$ elde edilir.

[AC3] $s_v(\beta) = s_v(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f \bullet (\beta \circ_h \alpha) \circ_h 1_f &= 1_f \circ_h \beta \circ_h \alpha \\
&= (f \bullet \beta) \circ_h 1_f \circ_h \alpha \\
&= (f \bullet \beta) \circ_h (f \bullet \alpha) \circ_h 1_f
\end{aligned}$$

olup Schreier şartı altında $f \bullet (\beta \circ_h \alpha) = (f \bullet \beta) \circ_h (f \bullet \alpha)$ elde edilir.

[AC4] $(1_x \bullet \alpha) \circ_h 1_{1_x} = 1_{1_x} \circ_h \alpha = \alpha \circ_h 1_{1_x}$ olduğundan $1_x \bullet \alpha = \alpha$ dir.

Şimdi $\partial: M \rightarrow N$ dönüşümünü $\partial(\alpha) = t_v(\alpha)$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $(M, N, \partial, \bullet)$ yapısının kategoriler üzerinde bir çaprazlanmış yarımmodül yapısı teşkil ettiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
[\text{CSC1}] \quad \partial(f \bullet \alpha) \circ f &= t_v(f \bullet \alpha) \circ t_v(1_f) \\
&= t_v((f \bullet \alpha) \circ_h 1_f) \\
&= t_v(1_f \circ_h \alpha) \\
&= t_v(1_f) \circ t_v(\alpha) \\
&= f \circ \partial(\alpha)
\end{aligned}$$

[CSC2] $s_v(\alpha_1) = 1_x$ ve $s_h(\alpha) = x$ olsun. Bu durumda $\partial(\alpha) \bullet \alpha_1$ tanımlı olup yatay ve düşey bileşke işlemleri arasında yerdeğişim kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned}
(\partial(\alpha) \bullet \alpha_1) \circ_h \alpha &= [(\partial(\alpha) \bullet \alpha_1) \circ_v 1_{1_x}] \circ_h [1_{\partial(x)} \circ_v \alpha] \\
&= [(\partial(\alpha) \bullet \alpha_1) \circ_h 1_{\partial(x)}] \circ_v [1_{1_x} \circ_v \alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [1_{\partial(x)} \circ_h \alpha_1] \circ_v [\alpha \circ_h 1_{1_x}] \\
&= [1_{\partial(x)} \circ_v \alpha] \circ_h [\alpha_1 \circ_v 1_{1_x}] \\
&= \alpha \circ_h \alpha_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Kategoriler arasında denkliği sağlayacak $\gamma: \mathbf{S2CAT} \rightarrow \mathbf{CSC}$ fonktörünü $\gamma(\mathcal{C}) = (\mathcal{M}, \mathcal{N}, \partial, \bullet)$ olacak şekilde ve Schreier 2-kategorilerin bir morfizmi $F = (F_0, F_1, F_2)$ olmak üzere $\gamma(F) = (F_1, F_2|_M, F_0)$ olacak şekilde tanımlayalım. Burada $\gamma(F)$ dönüşümünün kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımodüllerin bir morfizmi olduğunu göstermeliyiz.

i. $F_1 t_v = t'_v F_2$ eşitliğinden $F_1 \partial = \partial' F_2$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{ii. } F_2(f \bullet \alpha) \circ_h 1_{F_1(f)} &= F_2(f \bullet \alpha) \circ_h F_2(1_f) \\
&= F_2((f \bullet \alpha) \circ_h 1_f) \\
&= F_2(1_f \circ_h \alpha) \\
&= F_2(1_f) \circ_h F_2(\alpha) \\
&= 1_{F_1(f)} \circ_h F_2(\alpha) \\
&= (F_1(f) \bullet F_2(\alpha)) \circ_h 1_{F_1(f)}
\end{aligned}$$

olup göre Schreier şartı gereği $F_2((f \bullet \alpha)) = F_1(f) \bullet F_2(\alpha)$ olacaktır.

Diğer taraftan kategoriler üzerinde bir $K = (\mathcal{M}, \mathcal{N}, \partial, \bullet)$ çaprazlanmış yarımodülü verildiğinde aynı obje kümesi X üzerinde 2-morfizmlerin sınıfı $N \bowtie M$ yarıdirekt çarpımı olan bir 2-kategori şu yolla elde edilir: $n \in N_1$, $m \in M_1$ olmak üzere

$$x \xrightarrow{n} y \quad , \quad y \xrightarrow{m} y \quad ,$$

morfizmleri verildiğinde (n, m) ikilisi

$$\begin{array}{ccc}
& n & \\
x & \xrightarrow{\quad} & y \\
& \Downarrow (n, m) & \\
& \partial(m) \circ n &
\end{array}$$

şeklinde bir 2-morfizm olarak ele alınsın. Bu durumda yapı dönüşümleri

- $s_v(n, m) = n$, $t_v(n, m) = \partial(m) \circ n$
 $s_h(n, m) = s(n)$, $t_h(n, m) = t(n)$
- $\varepsilon_v(n) = (n, \varepsilon t(n))$, $\varepsilon_h(x) = (\varepsilon(x), \varepsilon(x))$

şeklinde tanımlanırken bileşke işlemleri de

- $((\partial(m) \circ n), m') \circ_v (n, m) = (n, m' \circ m)$
- $(n_1, m_1) \circ_h (n, m) = (n_1 \circ n, m_1 \circ (n_1 \bullet m))$

şeklinde tanımlanır. Bileşke işlemleri için

$$\begin{aligned}
 (n_2, m_2) \circ_h ((n_1, m_1) \circ_h (n, m)) &= (n_2, m_2) \circ_h (n_1 \circ n, m_1 \circ (n_1 \bullet m)) \\
 &= (n_2 \circ (n_1 \circ n), m_2 \circ (n_2 \bullet (m_1 \circ (n_1 \bullet m)))) \\
 &= ((n_2 \circ n_1) \circ n, m_2 \circ (n_2 \bullet m_1) \circ ((n_2 \bullet ((n_1 \bullet m)))))) \\
 &= ((n_2 \circ n_1), m_2 \circ (n_2 \bullet m_1)) \circ_h (n, m) \\
 &= ((n_2, m_2) \circ_h (n_1, m_1)) \circ_h (n, m)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (\partial(m' \circ m) \circ n, m'') \circ_v [((\partial(m) \circ n), m') \circ_v (n, m)] \\
 &= (\partial(m' \circ m) \circ n, m'') \circ_v (n, m' \circ m) \\
 &= (n, m'' \circ m' \circ m) \\
 &= (\partial(m) \circ n, m'' \circ m') \circ_v (n, m) \\
 &= [(\partial(m' \circ m) \circ n, m'') \circ_v ((\partial(m) \circ n), m')] \circ_v (n, m)
 \end{aligned}$$

olup birleşme özelliğini sağladıkları görülür. Yatay ve düşey bileşke işlemleri arasında yerdeğişim kuralının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
 &[((\partial(m_1) \circ n_1), m_1') \circ_h (\partial(m) \circ n, m')) \circ_v ((n_1, m_1) \circ_h (n, m))] \\
 &= [\partial(m_1) \circ n_1 \circ \partial(m) \circ n, m_1' \circ ((\partial(m_1) \circ n_1) \bullet m')] \circ_v [n_1 \circ n, m_1 \circ ((n_1 \bullet m))] \\
 &= (n_1 \circ n, m_1' \circ (\partial(m_1) \bullet (n_1 \bullet m'))) \circ m_1 \circ (n_1 \bullet m) \\
 &= (n_1 \circ n, m_1' \circ m_1 \circ (n_1 \bullet m) \circ (n_1 \bullet m))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n_1 \circ n, m_1' \circ m_1 \circ (n_1 \bullet (m' \circ m))) \\
&= (n_1, m_1' \circ m_1) \circ_h (n, m' \circ m) \\
&= [((\partial(m_1) \circ n_1), m_1') \circ_v (n_1 m_1)] \circ_h [(\partial(m) \circ n, m') \circ_v (n, m)].
\end{aligned}$$

Şimdi bir $\theta: \mathbf{CSC} \rightarrow \mathbf{S2CAT}$ fonktörünü $\mathbf{CSC}$ nin bir objesi $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, \mathcal{N}, \partial, \bullet)$ olmak üzere

$$\theta(\mathcal{K}) = (X, N, N \ltimes M)$$

ve $\lambda = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0)$ dönüşümü kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin bir morfizmi olmak üzere

$$\theta(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \times \lambda_1)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada $\theta(\lambda)$ nın bir 2-funktor olduğu açıktır.

Kategorilerin doğal olarak denk olduğunu göstermek için $\mathbf{1}_{\mathbf{S2CAT}} \simeq \theta\gamma$ ve $\mathbf{1}_{\mathbf{CSC}} \simeq \gamma\theta$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bir $S: \mathbf{1}_{\mathbf{S2CAT}} \rightarrow \theta\gamma$ doğal dönüşümü, $\mathcal{C}$ bir Schreier 2-kategori ve $\alpha \in \mathcal{C}_2$ olmak üzere objeler ve morfizmler üzerinde birim olan

$$S_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \theta\gamma(\mathcal{C}), S_{\mathcal{C}}(\alpha) = (s_v(\alpha), \tilde{\alpha})$$

2-funktoru ile tanımlanır. $S_{\mathcal{C}}$ nin birebir ve örten olduğu açıktır. $S_{\mathcal{C}}$ nin bileşke işlemlerini koruduğunu gösterelim. $s(\beta) = t(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{C}}(\beta \circ_h \alpha) &= S_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta} \circ_h \varepsilon_v s_v(\beta) \circ_h \tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)) \\
&= S_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta} \circ_h (s_v(\beta) \bullet \tilde{\alpha}) \circ_h \varepsilon_v s_v(\beta) \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)) \\
&= (s_v(\beta \circ_h \alpha), \tilde{\beta} \circ_h (s_v(\beta) \bullet \tilde{\alpha})) \\
&= (s_v(\beta), \tilde{\beta}) \circ_h (s_v(\alpha), \tilde{\alpha}) \\
&= S_{\mathcal{C}}(\beta) \circ_h S_{\mathcal{C}}(\alpha)
\end{aligned}$$

ve $s_v(\delta) = t_v(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{C}}(\delta \circ_v \alpha) &= S_{\mathcal{C}}(\tilde{\delta} \circ_h \tilde{\alpha} \circ_h \varepsilon_v s_v(\alpha)) \\
&= (s_v(\alpha), \tilde{\delta} \circ_h \tilde{\alpha}) \\
&= (s_v(\delta), \tilde{\delta}) \circ_v (s_v(\alpha), \tilde{\alpha}) \\
&= S_{\mathcal{C}}(\delta) \circ_v S_{\mathcal{C}}(\alpha)
\end{aligned}$$

olup bileşke işlemleri korunur. Diğer taraftan $T: \mathbf{1}_{CSC} \rightarrow \gamma\theta$ doğal dönüşümü, kategoriler üzerinde bir $\mathcal{K} = (\mathcal{M}, \mathcal{N}, \partial)$ çaprazlanmış yarımmodülü ve $m \in M$ verildiğinde, objeler ve N üzerinde birim olan

$$T_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \gamma\theta(\mathcal{K}), \quad T_{\mathcal{K}}(m) = (s(m), m)$$

çaprazlanmış yarımmodül morfizmi ile tanımlanır. $T_{\mathcal{K}}$ nın birebir ve örten olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{K}}(m_1 \circ m) &= (s(m_1 \circ m), m_1 \circ m) \\
&= (s(m_1) \circ s(m), m_1 \circ m) \\
&= (s(m_1), m_1) \circ (s(m), m) \\
&= T_{\mathcal{K}}(m_1) \circ T_{\mathcal{K}}(m)
\end{aligned}$$

olduğundan $T_{\mathcal{K}}$ bileşke işlemini korur ki böylece Schreier 2-kategorilerin kategorisi **S2CAT** ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin kategorisi **CSC** doğal olarak denktirler.

İçen tarafından (İçen, 2000) referansında ispat edilen aşağıdaki teorem, bu teoremin bir kısıtlaması olarak ele alınabilir.

Teorem 2.2.2. 2-grupoidlerin kategorisi **2GPD** ile grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi **CMG** doğal olarak denk kategorilerdir.

İspat: Burada bir (n, m) 2-morfizminin dikey ve yatay tersi Teorem 2.2.1 in ispatı ışığında

$$\overline{(n, m)}^v = (\partial(m) \circ n, \overline{m}), \quad \overline{(n, m)}^h = (\overline{n}, \overline{n} \bullet \overline{m})$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. Tek Objeli Schreier 2-Kategorileri

Bir Schreier iç kategorisinin monoidlerin kategorisi **MON** da bir iç kategori olduğunu belirtmiştik. Ancak **MON** da Schreier iç kategorilerine farklı ve daha güçlü bir yaklaşım bu yapıları, (Baez, 2012) referansında 2-grupların (grup-grupoidlerin) tek objeli 2-grupoidler olarak ele alındığı gibi benzer yöntemle tek objeli 2-kategoriler olarak ele almaktır. Bir monoidin tek objeli bir kategori olarak ele alınabileceğini göstermiştik. Bu yaklaşımda monoid elemanları aşağıda gösterilen şekilde morfizmler olarak ele alınır.

$$\star \xrightarrow{x} \star \xrightarrow{x'} \star = \star \xrightarrow{x' \cdot x} \star$$

Buna benzer şekilde **MON** da her Schreier iç kategorisi aşağıda gösterilen şekilde tek objeli 2-kategori olarak ele alınabilir. Burada 2-morfizmler, morfizmler olarak ele alınır ve böylece 2-morfizmlerin yatay bileşke işlemi morfizmlerin monoid çarpımına, düşey bileşke işlemi de morfizmlerin bileşke işlemine dönüşür.

$$\begin{array}{c} \star \xrightarrow{x} \star \xrightarrow{x'} \star \\ \Downarrow f \quad \Downarrow f' \\ \star \xrightarrow{y} \star \xrightarrow{y'} \star \end{array} = \begin{array}{c} \star \xrightarrow{x' \cdot x} \star \\ \Downarrow f' \cdot f \\ \star \xrightarrow{y' \cdot y} \star \end{array}$$

Bu durumda 2-kategorilerde 2-morfizmler için $f = \tilde{f} \circ_h \varepsilon_v s_v(f)$ şeklinde ifade edilen Schreier koşulu $f = \tilde{f} \cdot \varepsilon_v s_v(\alpha)$ şekline dönüşmüş olacak ve monoidlerin kategorisinde Schreier iç kategorileri için ifade edilen Schreier şartı sağlanmış olacaktır.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Kategori sahasında yapılan çalışmalarda kategori denklikleri önemli bir yer tutar. Örneğin, grupların kategorisindeki iç kategoriler olan 2-grupların daha basit cebirsel yapılar olan çaprazlanmış modüllere doğal denkliği sayesinde 2-gruplarda çözülemeyen bazı problemler çaprazlanmış modüllere aktarılıp çözülebilir. 2-grupların ve çaprazlanmış modüllerin yüksek boyutlu durumları olan 2-grupoidler ve grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller arasındaki doğal denklik, bu tezde incelenen Schreier 2-kategoriler ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış modüller arasındaki doğal denkliğin bir kısıtlaması olarak ele alınabilir.



4. ÖNERİLER

Monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategoriler ile çaprazlanmış yarımmodüllerin topolojik versiyonları olan topolojik monoidlerin kategorisindeki Schreier iç kategoriler ile topolojik çaprazlanmış yarımmodüller arasındaki doğal denklik (Temel, 2016b) referansında ispatlanmıştır. Benzer şekilde bu tezde incelenen Schreier 2-kategoriler ile kategoriler üzerindeki çaprazlanmış yarımmodüllerin topolojik durumları da incelenebilir ve doğal denklik varsa ispat edilebilir.



KAYNAKLAR

- Awodey, S. (2006). Category Theory, Oxford University Press, 269 s.
- Baez, J. C. (1997). An introduction to n-categories, *Category Theory and Computer Science*, 1290(6): 1-33.
- Baez, J. C. and Lauda, A. D. (2004). Higher-dimensional algebra V: 2-Groups. *Theory and Applications of Categories*, 12: 423-491.
- Brown, R. and Spencer, C. B. (1976). G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Indagat Mathematics*. 79(4), 296-302.
- Brown, R. (1987). From groups to groupoids: a brief survey, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19: 113-134.
- Brown, R. (2006). Topology and Groupoids, BookSurge LLC, North Carolina, 538 s.
- Brown, R., Higgins, P. J. and Sivera, R. (2011). Nonabelian Algebraic Topology: Filtered spaces, crossed complexes and cubical homotopy grupoids, *European Mathematical Society Tracts in Mathematics*, 15.
- Eie, M. and Chang, S. T. (2010). A Course on Abstract Algebra, *World Scientific Publishing*, 665.
- Forrester-Barker, M. (2002). Group objects and internal categories, arxiv:math/0212065v1[mathCT].
- İçen, İ. (2000). The Equivalence of 2-Groupoids and Crossed Modules, Commun Faculty. Science. University. Ankara Series A1, Vol: 49, 39-48.
- Mackenzie, K. C. H. (1987). Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 344 s, 327.
- McLane, S. (1971). Categories for the Working Mathematician, Graduate Text in Mathematics, Volume 5, Springer-Verlag, New York, 132 s.
- Mucuk, O. (2010). Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 472 s.
- Noohi, B. (2007). Notes on 2-Groupoids, 2-Groups and Crossed Modules, *Homology Homotopy and Applications*, Volume 9, Number 1, 75-106.
- Patchkoria, A., 1998. Crossed Semimodules and Schreier Internal Categories in the Category of Monoids, *Georgian Mathematical Journal*, Vol.5, No.6, 575-581.
- Porter, T. (1985). Crossed Modules in Cat and a Brown-Spencer Theorem for 2-Categories, *Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques*, Vol.XXVI-4.

- Porter, T. (1987). Extensions, Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Groups with Operations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 30, 371-381.
- Taşbaş, B. (2014). Grup-Grupoidler, Çapraz Modüller ve Schreier Grupoidleri, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 69 s.
- Temel, S. (2016a). Topolojik Grup-2-grupoidler, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 125 s.
- Temel, S. (2016b). Topological Crossed Semimodules and Schreier Internal Categories in the Category of Topological Monoids, *Gazi University Journal of Science*, 29(4) 915-921.
- Temel, S. (2018). Crossed Semimodules of Categories and Schreier 2-Categories, *Tbilisi Mathematical Journal*, 11(2): 47-57.
- Whitehead, J. H. C. (1946). Note on a previous paper entitled “On adding relations to homotopy group”, *Annals of Mathematics*, 47(4): 806-810.

ÖZGEÇMİŞ

Sema YILMAZ 27.08.1993 tarihinde RİZE iline bağlı İyidere ilçesinde doğdu. İlköğretimini 2007 yılında Rize/İyidere’de İyidere Merkez İlköğretim Okulu’nda ve Ortaöğretimini 2011 yılında Rize/İyidere’de İyidere Lisesi’nde tamamladı. 2011 yılında başladığı lisans eğitimini 11.06.2015 Konya Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. Üniversite eğitimi sırasında Konya Selçuk Üniversitesi’nde Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifikası aldı. 2017 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başlayan tezli yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. 2018 yılında Rize Yükseliş Özel Öğretim Kursu’nda Matematik Öğretmeni olarak başladığı görevine halen devam etmektedir.