



**SCHUR KOMPLEMENT
TEOREMİ VE UYGULAMALARI**
Yüksek Lisans Tezi

İpek Cafer ISMAYILOV

Eskişehir 2025

SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ VE UYGULAMALARI

İpek Cafer ISMAYILOV

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Mayıs 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İpek Cafer ISMAYILOV'un "SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ VE UYGULAMALARI" başlıklı tezi 27/05/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Doç. Dr. Murat KOPARAN	

Prof. Dr. Harun BÖCÜK
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

27/05/2025

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans đrencisi İpek Cafer ISMAYILOV “SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ VE UYGULAMALARI” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Prof. Dr. Taner BüYüKKöROğLU

ÖZET

SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ VE UYGULAMALARI

İpek Cafer ISMAYILOV

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mayıs 2025

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Matris kuadratik Riccati eşitsizliği, mutlak kararlılık, lineer kuadratik optimizasyon ve optimal tahmin gibi problemlerde ortaya çıkmaktadır. Bu tez çalışmasında, blok matrislerin pozitif belirliliği ile ilgili Schur Teoremi'nin literatürde bilinen kanıtı verilmiş olup, bu teorem yardımıyla lineer olmayan matris Riccati eşitsizliği boyut artımıyla lineer matris eşitsizliğine dönüştürülmüştür. Ortaya çıkan lineer eşitsizliği çözmek için daha genel bir problem olan maksimum fonksiyonun minimizasyonu ile ilgili teorem kanıtlanmıştır. Elde edilen sonuç, Riccati eşitsizliğinin yanı sıra tek matris için Lyapunov eşitsizliği, ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonu ve özdeğerlerin minimizasyonu problemlerine uygulanmıştır. Genel minimizasyon probleminin çözümünde kullanılan sınırlı fonksiyonların norm sınırları, çeşitli problemler için Lyapunov eşitsizliği, Ortak Lyapunov fonksiyonu, Riccati eşitsizliği ve özdeğerlerin minimizasyonu gibi çeşitli problemler için hesaplanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Schur teoremi, Matris Riccati eşitsizliği, Lineer matris eşitsizliği, Maksimum fonksiyonu, Ortak Lyapunov fonksiyonu.

ABSTRACT

SCHUR COMPLEMENT THEOREM AND ITS APPLICATION

İpek Cafer ISMAYILOV

Department of Mathematics
Programme in Applied Mathematics

Eskişehir Technical University, Graduate School of Sciences, May 2025

Supervisor: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

The quadratic matrix Riccati inequality arises in problems such as absolute stability, linear quadratic optimization, and optimal estimation. In this thesis, a known proof of Schur's Theorem concerning the positive definiteness of block matrices is presented, and using this theorem, the nonlinear matrix Riccati inequality is transformed into a linear matrix inequality by increasing the dimension. To solve the resulting inequality, a theorem related to the minimization of a maximum function – a more general problem – is proven. The obtained result is then applied not only to the Riccati inequality, but also to the Lyapunov inequality for a single matrix, the common quadratic Lyapunov function, and eigenvalue minimization problems. In solving the general minimization problem, norm bounds for the bounded functions involved are computed for various cases including the Lyapunov inequality, common Lyapunov function, Riccati inequality, and eigenvalue minimization problems.

Keywords: Schur's theorem, Matrix Riccati inequality, Linear matrix inequality, Maximum function, Common Lyapunov function.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgilerini ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Taner BÜYÜKÖROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans sürecimde 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkür ederim.

Son olarak her zaman desteğini hissettiğim bana koşulsuz inanan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İpek Cafer ISMAYILOV
2025

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

İpek Cafer ISMAYILOV

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ.....	15
3. BİR SINIF MAKSİMUM FONKSİYONLARIN MİNİMİZASYONU	23
4. LYAPUNOV EŞİTSİZLİĞİ.....	35
5. ORTAK P PROBLEMİ	43
6. RICCATI EŞİTSİZLİĞİ	47
7. ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU	55
8. FONKSİYON SINIRLARININ HESAPLANMASI	61
9. SONUÇ	65
KAYNAKÇA.....	66
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 3.1.	Örnek 3.1'in iterasyon sonuçları	30
Tablo 3.2.	Örnek 3.2'deki iterasyon sonuçları	31
Tablo 3.3.	Örnek 3.3'ün iterasyon sonuçları	32
Tablo 3.4.	Örnek 3.4'ün iterasyon sonuçları	34
Tablo 4.1.	Örnek 4.1'in iterasyon sonuçları	40
Tablo 4.2.	Örnek 4.2'nin iterasyon sonuçları	42
Tablo 5.1.	Örnek 5.1'in iterasyon sonuçları	45
Tablo 5.2.	Örnek 5.2'nin iterasyon sonuçları	46
Tablo 6.1.	Örnek 6.1'in iterasyon sonuçları	51
Tablo 7.1.	Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 1$)	57
Tablo 7.2.	Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 100$)	58
Tablo 7.3.	Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 10^6$)	58
Tablo 7.4.	Örnek 7.2'nin iterasyon sonuçları	58
Tablo 7.5.	Örnek 7.3'ün iterasyon sonuçları	59
Tablo 7.6.	Örnek 7.4'ün iterasyon sonuçları	60

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1.	Yaya bağlı kütlenin sürtünmesiz dikey hareketi.....	10
Şekil 1.2.	Sarkaç sistemi	10
Şekil 7.1.	$g(x) = \lambda_{\max}(A(x))$ fonksiyonunun grafiği ve bazı iterasyon noktaları ...	60



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu kompleks vektörler uzayı
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu gerçel matrisler ailesi
$\mathcal{H}_n$	: $n \times n$ boyutlu Hurwitz matrisler kümesi
$\mathcal{S}_n$	: $n \times n$ boyutlu simetrik matrisler kümesi
A^{-1}	: A kare matrisinin tersi
A^T	: A matrisinin transpozu
$\det(A)$	: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin determinanı
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	: Köşegen elemanları $d_1, \dots, d_n$ olan köşegen matris
$\text{iz}(A)$	: A matrisinin izi
$\langle x, y \rangle$	: x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\ A\ $	: A matrisinin Frobenius normu
$\lambda_{\max}(A)$	: A simetrik matrisinin maksimal (en büyük) özdeğeri
$\lambda_{\min}(A)$	: A simetrik matrisinin minimal (en küçük) özdeğeri
$P > 0$	: P simetrik matrisinin pozitif belirliliği
$\text{Re}(\lambda)$	: $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısının gerçel kısmı
∇F	: Vektör değişkenli F skalar fonksiyonunun gradyanı
$\partial f(x_0)$	: f konveks fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli
$[-a, a]^d$	: $[-a, a] \times [-a, a] \times \dots \times [-a, a] \subset \mathbb{R}^d$ kutusu
x^k	: k 'nci iterasyondaki nokta
LME	: Lineer Matris Eşitsizliği
LP	: Lineer Programlama

1. GİRİŞ

Kontrol teorisinde sürekli ve kesikli zamanlı dinamik sistemlerin kararlılık, performans ve kontrol gibi problemleri ele alınmaktadır. Bir sistemin çıktısı (output), girdisinin (input) lineer bir fonksiyonu ise böyle sistemlere lineer sistemler denir. Lineer sistemlerin araştırılmasında matrisler teorisinin önemli bir yeri vardır [5, 13, 17, 21].

$\mathbb{R}^n$, n boyutlu gerçel sütun vektörlerinin oluşturduğu uzayı ifade eder. $n \times n$ boyutlu gerçel matrislerin oluşturduğu uzay ise $\mathbb{R}^{n \times n}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için, eğer $A^T = A$ ve her $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ ise A matrisine pozitif belirli matris denir ve $A > 0$ ile gösterilir. Eğer $-A > 0$ ise A matrisine negatif belirli matris denir ve bu durum $A < 0$ şeklinde gösterilir. Son olarak, her $x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T A x \geq 0$ ise A matrisine pozitif yarı belirli matris denir ve $A \geq 0$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Burada $A^T = A$ 'dır. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$x^T A x = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2$$

elde edilir. Son ifade, her $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ için pozitifdir ve dolayısıyla $A > 0$ 'dır.

Tanım 1.2. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinde aynı indis numaralı birkaç satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen $k \times k$ boyutlu kare matrislerin determinantına, matrisin $k \times k$ boyutlu baş minörü (principal minor) denir. $n \times n$ boyutlu bir matris için, ilk k satır ve ilk k sütundan oluşan kare alt matrisin determinantına, matrisin k 'nci esas baş minörü (leading principal minor) denir. Bir $n \times n$ boyutlu matrisin toplamda n tane esas baş minörü vardır.

Örnek 1.2. Aşağıdaki matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisin esas baş minörleri sırasıyla:

$$3, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \quad \text{ve} \quad \det(A) = 11$$

şeklindedir.

Teorem 1.1 ([14]). Simetrik bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin ($A^T = A$) pozitif belirli olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm esas baş minörlerinin pozitif olmasıdır.

Tanım 1.3. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. λ bir kompleks (veya gerçel) sayı ve x sıfırdan farklı kompleks (veya gerçel) bir vektör olmak üzere, eğer

$$Ax = \lambda x$$

denklemi sağlanıyorsa λ sayısına A matrisinin bir özdeğeri, x vektörüne de A matrisinin bu λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü denir.

A matrisinin n tane özdeğeri,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

karakteristik denkleminde ortaya çıkan n 'inci dereceden monik polinomun (karakteristik polinomun) kökleridir.

Özellikle 2×2 boyutlu bir A matrisinin karakteristik polinomu

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{iz}(A) \lambda + \det(A)$$

biçimindedir. Buradaki $\text{iz}(A)$ sayısı matrisin köşegen elemanlarının toplamıdır.

Örnek 1.3.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

şeklindedir. Bu polinomun kökleri ise $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ biçimindedir.

Görüldüğü gibi gerçel bir matrisin özdeğerleri kompleks olabilir. Ancak simetrik matrislerin (kompleks matrisler için Hermit matrislerin) tüm özdeğerleri gerçeldir.

Matrislerin özdeğerlerinin gerçel kısımlarının işareti, kontrol teorisinde sistemlerin kararlılığını incelemek açısından önemlidir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 1.4. Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçel kısımları negatif ise, A matrisine Hurwitz matrisi denir.

Yukarıdaki Örnek 1.3'te verilen A matrisi Hurwitz matrisidir: $\text{Re}(\lambda) = -1 < 0$.

Şimdi, $n \times n$ boyutlu Hurwitz matrislerin kümesini $\mathcal{H}_n$ ile gösterelim. Bu kümenin bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir [13]:

- $\mathcal{H}_n$ konveks bir küme değildir.
- $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere $A \in \mathcal{H}_n$ ise, $\alpha A \in \mathcal{H}_n$ ve $A - \beta I \in \mathcal{H}_n$ olur.
- $\mathcal{H}_n$ kümesi $-I$ matrisine büzülebilir (contractible) bir kümedir.
- $A, B \in \mathcal{H}_n$ ise A ile B matrislerini birleştiren iki parçalı $L \subset \mathcal{H}_n$ kırık doğru parçası vardır.

Gerçel katsayılı polinomların köklerinin özelliklerinden dolayı, λ kompleks özdeğerinin eşleniği olan $\bar{\lambda}$ sayısı da matrisin bir özdeğeridir. Dolayısıyla özdeğerler kompleks düzlemde gerçel eksene (x - eksenine) göre simetriktir.

Tanım 1.5. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathcal{S}_n$, $Q > 0$ bilinen matrisler ve $P \in \mathcal{S}_n$ ise bilinmeyen bir matris olmak üzere,

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.1)$$

matris denkleminin Lyapunov denklemi denir.

Teorem 1.2 ([17]). A matrisinin Hurwitz olması için gerek ve yeter koşul (1.1) Lyapunov denkleminin bir tek $P > 0$ çözümünün var olmasıdır.

Örnek 1.4.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu ve bu polinomun kökleri sırasıyla

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 5, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} < 0$$

şeklindedir.

Lyapunov denklemini

$$Q = I, \quad P = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, \quad A^T P + P A = -I$$

olarak alalım. Bu matris denklemi, üç bilinmeyenli üç denkleme dönüşür:

$$\begin{cases} -6x + 2y = -1 \\ x - 5y + z = 0 \\ 2y - 4z = -1. \end{cases}$$

Bu denklem çözülürse, çözüm

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{10}, \quad z = \frac{3}{10}$$

olarak bulunur. Bu değerlere karşılık gelen çözüm matrisi

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

pozitif belirlidir: matrisin esas baş minörleri sırasıyla

$$\frac{1}{5} > 0, \quad \det(P) = \frac{1}{20} > 0.$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Optimizasyon problemi, $f(x)$ fonksiyonunun X kümesi üzerinde en küçük (en büyük) değerini ve bu değeri veren $x_* \in X$ vektörünün bulunması problemidir. Bu tür problemlerde, $f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir veya türevlenemez, konveks ya da konveks olmayan türlerde olabilir [8, 30]. Benzer şekilde, X kümesi bazen doğrudan geometrik olarak verilebilirken, çoğu zaman bu küme

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) < 0, i = 1, 2, \dots, N\}$$

gibi de tanımlanabilmektedir. Buradaki $g_i(x)$ fonksiyonları ise ya türevlenebilir ya da konveks fonksiyonlardır.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ verilsin. Bir $\gamma \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \gamma, x - x_0 \rangle$$

eşitsizliği her $x \in X$ için sağlanıyorsa γ vektörüne $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki bir subdiferansiyeli denir [27]. x_0 noktasındaki tüm subdiferansiyeller kümesi $\partial f(x_0)$ ile gösterilir ve $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi konveks optimizasyon problemleri için bir yakınsama teoremi ifade edelim.

Teorem 1.3 ([8]). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve konveks bir fonksiyon, X ise konveks ve

kompakt bir küme olsun. $\{\lambda_k\}$ dizisi

$$\lambda_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = +\infty$$

koşullarını sağlasın. Keyfi $x^0 \in X$ alınsın ve her adımda $\gamma^k \in \partial f(x^k)$ keyfi olarak seçilsin. Bu durumda

$$x^{k+1} = Pr \Big|_X \left(x^k - \lambda_k \frac{\gamma^k}{\|\gamma^k\|} \right)$$

biçiminde tanımlanan $\{x^k\}$ dizisinin, minimal (optimal) noktaya yakınsayan bir altdizisi vardır. Burada $Pr \Big|_X (a)$ gösterimi, a noktasının X kümesi üzerine izdüşümünü göstermektedir.

Eğer hem $f(x)$ amaç fonksiyonu lineer olup hem de X kümesi lineer eşitsizlikle veriliyorsa bu çeşit optimizasyon problemlerine lineer programlama (LP) problemi denir [22, 28]. $c, b \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere LP problemi

$$c^T x \rightarrow \min, \quad Ax \leq b$$

biçiminde yazılabilir. Burada vektörler arasındaki eşitsizlik koordinatlar arasındaki eşitsizliktir. LP probleminin çözümü için simplex yöntemi en yaygın yöntemdir [10].

Tanım 1.6 ([7]). Bir lineer matris eşitsizliği (LME), kanonik biçimde

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_m F_m = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad (1.2)$$

matris eşitsizliği gibi ifade edilmektedir. Burada $F_i \in \mathcal{S}_n$, $(i = 0, 1, 2, \dots, m)$ bilinen matrisler, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ise bilinmeyen karar değişkenleridir.

Bununla birlikte,

$$F(x) > 0, \quad F(x) \leq 0, \quad F(x) \geq 0$$

biçimindeki matris eşitsizlikleri de LME çeşitleridir. Denklem (1.2)'yi sağlayan x vektörlerinin oluşturduğu kümeye tanım kümesi (feasible küme) denir. Bu küme boş, sınırlı veya sınırsız olabilmektedir. Ancak küme boş küme değilse konvektir.

Lineer eşitsizlikler, konveks kuadratik eşitsizlikler, matris norm eşitsizlikleri, kontrol teorisindeki Lyapunov matris eşitsizlikleri ve konveks kuadratik matris eşitsizlikleri LME formunda yazılabilmektedir.

Eğer LME sayısı denklem (1.2)'deki gibi tek olmayıp sonlu tane ise, onları da blok

köşegen matrisler yardımıyla tek bir LME'ye dönüştürmek mümkündür. Örneğin,

$$F^{(1)}(x) < 0, \quad \dots, \quad F^{(p)}(x) < 0$$

eşitsizlikleri, tek bir eşitsizlikle verilen

$$\text{diag} [F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)] < 0$$

LME formuna dönüşmektedir. Örneğin, iki tane

$$F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m < 0, \quad G_0 + y_1 G_1 + \dots + y_k G_k < 0$$

eşitsizliği

$$\begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + x_m \begin{bmatrix} F_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} + \dots + y_k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_k \end{bmatrix} < 0$$

gibi (1.2) formuna dönüşmektedir.

Eğer (1.2) eşitsizliğinde verilen F_i matrisleri köşegen matrisler ise, bu eşitsizlik bir doğrusal denklem sistemine dönüşür.

Bazı lineer olmayan matris eşitsizlikleri de LME formuna dönüştürülebilir. Örneğin $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ ve $S(x)$ matrisleri için

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

lineer matris eşitsizliği

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad R(x) > 0$$

gibi lineer olmayan iki matris eşitsizliğine eşdeğerdir.

Diğer bir örnek olarak, $Z(x)$ matrisi $p \times q$ boyutlu olup x ile afin-lineer bağımlı ise

$$\|Z(x)\| < 1$$

matris norm eşitsizliği

$$I - Z(x)Z(x)^T > 0$$

matris eşitsizliğine eşdeğer olup sonuncu eşitsizlik de

$$\begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z(x)^T & I \end{bmatrix} > 0$$

gibi bir LME'ye eşdeğerdir.

LME'nin kontrol teorisindeki rolünün tarihsel gelişimi şöyledir:

- 1890: İlk LME Lyapunov tarafından ortaya atıldı. Lyapunov, kendi adıyla anılan Lyapunov LME'yi Lyapunov denklemi yardımıyla analitik olarak çözdü.
- 1940: Lyapunov yöntemi yardımıyla mühendislikte kontrol problemleri çözülmeye başlandı. Küçük boyutlu LME'ler "el yordamıyla" çözülmeye başlandı.
- 1960'ların sonları: Projeksiyon lemması (PR) yardımıyla birçok LME'lerin grafik yöntemleriyle çözümü elde edilmiş oldu.
- 1980'lerin başı: Birçok LME'lerin bilgisayarlar yardımıyla konveks optimizasyon yöntemleriyle çözülebildiği anlaşıldı.
- 1980'lerin sonları: LME'lerin çözümleri için çeşitli algoritmalar geliştirildi.

Kararlılık teorisinde önemli bir eşitsizlik olan

$$A^T P + P A < 0$$

matris eşitsizliği de (1.2) formuna dönüştürülebilir. Burada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sabit, $P = P^T$ ise değişkendir.

Genelliği bozmaksızın $n = 3$ alalım. $\mathcal{S}_3$ uzayında

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gibi bir taban seçelim.

O zaman P bilinmeyen matrisini

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \cdots + x_6 S_6$$

gibi yazarsak yukarıdaki eşitsizlik $F_0 = 0$ ve $F_i = A^T S_i + S_i A$, ($i = 1, 2, \dots, 6$) olmak üzere (1.2) formunda bir LME'ye dönüşmektedir.

Genel durumda S_n uzayında seçilen taban matrislerinin sayısı $d = \frac{n(n+1)}{2}$ tane olmaktadır.

Şimdi

$$A_1^T P + P A_1 < 0, \quad A_2^T P + P A_2 < 0, \quad P > 0$$

eşitsizliklerini (1.1)'e dönüştürelim:

$$\text{diag} [A_1^T P + P A_1, A_2^T P + P A_2, -P] < 0.$$

Bu eşitsizliği S_i taban matrisleri cinsinden yazarsak

$$\begin{aligned} & x_1 \text{diag} [A_1^T S_1 + S_1 A_1, A_2^T S_1 + S_1 A_2, -S_1] + \\ & x_2 \text{diag} [A_1^T S_2 + S_2 A_1, A_2^T S_2 + S_2 A_2, -S_2] + \dots + \\ & x_d \text{diag} [A_1^T S_d + S_d A_1, A_2^T S_d + S_d A_2, -S_d] < 0 \end{aligned}$$

gibi (1.2) formunda yazılabilmektedir.

Bazı problemlerde

$$A^T P + P A < 0, \quad P > 0, \quad \text{iz}(P) = 1$$

gibi eşitlik kısıtı da verilebilir. Burada eşitlik kısıtı yok edilerek (1.2) formu elde edilebilir.

Eğer $P_1, P_2, \dots, P_m$ matrisleri izi sıfır olan simetrik matrisler uzayında bir taban ve

$$P_0 = \text{diag}[0, \dots, 0, 1]$$

olarak seçilirse, P matrisi

$$P = P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_m P_m$$

olacağından yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{bmatrix} A^T P_0 + P_0 A & 0 \\ 0 & -P_0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} A^T P_1 + P_1 A & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix} + \dots + x_m \begin{bmatrix} A^T P_m + P_m A & 0 \\ 0 & -P_m \end{bmatrix} < 0$$

(1.2) biçimine dönüşür.

LME'nin çözümü için en yaygın yöntemlerden biri elipsoid yöntemidir [7]. Birinci adımda, problemin çözüm noktasını içeren büyük bir elipsoid bulunur. Sonra, LME'nin çözüm kümesiyle kesişmeyen bir kapalı yarıuzay belirlenir ve bu kapalı yarıuzayın tüm-

leyeni olan açık yarıuzayın elipsoidle kesişimi, birinci adımın sonunda ortaya çıkan küme olan yarım elipsoidi verir. İkinci adımda, yukarıdaki yarım elipsoidi içeren minimal hacimli yeni bir elipsoid bulunarak işleme devam edilir. Ortaya çıkan elipsoidler dizisinin hacimleri sıfıra yaklaşmakta olup, bu elipsoidler LME'nin çözümünü (eğer varsa) içermektedir.

Şimdi, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.3)$$

otonom sistemi verilsin. Varlık, teklik ve devam koşullarının sağlandığını varsayalım.

Tanım 1.7. Eğer $f(x_*) = 0$ ise x_* noktasına (1.3) sisteminin bir denge noktası denir. $y = x - x_*$ değişken değişimi kullanılırsa,

$$\dot{y} = \dot{x} = f(y + x_*) = g(y)$$

ve $g(0) = 0$ olacağından genelliği bozmaksızın (1.3) sisteminde $f(0) = 0$ alınabilir.

Tanım 1.8 ([17]). Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x(0)| < \delta$ iken tüm $t \geq 0$ için $|x(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde öyle bir $\delta > 0$ varsa $x = 0$ denge noktası kararlıdır denir. Eğer $x = 0$ noktası kararlı ve öyle $\delta_0 > 0$ varsa ki $|x(0)| < \delta_0$ iken $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ise $x = 0$ denge noktasına asimptotik kararlı denir.

Örnek 1.5. Dikey salınlı bir yay sistemini ele alalım. Bu sistem, Şekil 1.1'de gösterildiği gibi yaya bağlı bir m kütleinin yerçekimi etkisi altında gerçekleştirdiği sürtünmesiz dikey salınım hareketidir. Sistemin hareket denklemi:

$$mx'' + kx = 0$$

şeklindedir. Burada $a^2 = \frac{k}{m}$ alınırsa denklem

$$x'' + a^2x = 0$$

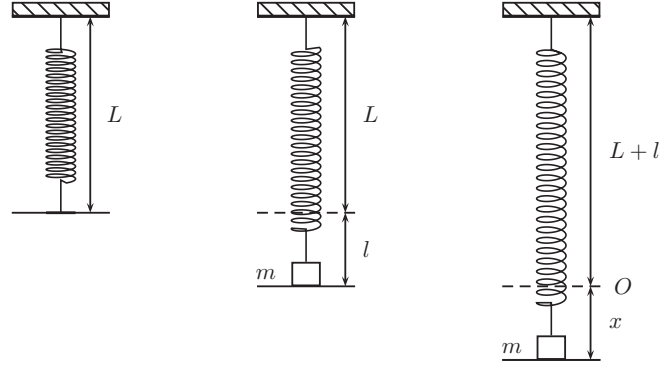
biçiminde yazılabilir. Bu ikinci mertebeden diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde birinci mertebeden bir sisteme dönüştürülebilir:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a^2x_1. \end{cases}$$

Bu sistemin denge noktası

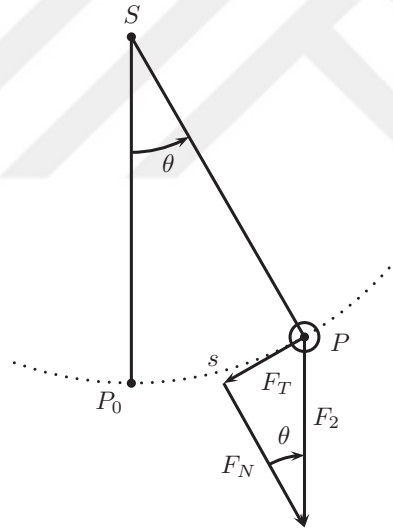
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

noktasıdır ve bu denge noktası kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir.



Şekil 1.1. Yaya bağlı kütlenin sürtünmesiz dikey hareketi

Örnek 1.6. Sarkaç sistemini ele alalım. Bu sistem, Şekil 1.2’de gösterildiği gibi, uzunluğu l olan ve ağırlığı ihmal edilebilir bir çubuğun ucuna bağlı m kütlesinin yerçekimi etkisi altında yaptığı sürtünmeli salınım hareketidir. Sisteme etki eden kuvvetler; yerçekimi



Şekil 1.2. Sarkaç sistemi

minden kaynaklanan $F_T = mg \sin \theta$ kuvveti ile harekete zıt yönde olan $F_s = kl \theta'$ sürtünme kuvvetidir. Bu durumda sistemin diferansiyel denklemi:

$$ml \theta'' = -mg \sin \theta - kl \theta'$$

şeklinde ifade edilir. Burada $a = \frac{g}{l}$ ve $b = \frac{k}{m}$ alınırsa, bu diferansiyel denklem

$$\theta'' = -a \sin \theta - b \theta'$$

biçimini alır. Bu ikinci mertebeden diferansiyel denklem, aşağıdaki şekilde birinci mertebeden sisteme dönüştürülebilir:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2 \end{cases}.$$

Bu sistemin iki farklı denge noktası vardır:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ asimptotik olarak kararlıdır,}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ise kararsız denge noktasıdır.}$$

Şimdi, yukarıdaki türden sistemlerin kararlılığını incelemek için gerekli bazı kavramları ve Lyapunov teoremini verelim.

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{D}$ ve $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} x'_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x)$$

ifadesine V fonksiyonunun (1.3) denkleminin $x(t)$ yörüngesi boyunca türevi denir.

Teorem 1.4 (Lyapunov). (1.3) sistemi verilsin ve $x = 0$ bir denge noktası olsun.

Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir V fonksiyonu varsa:

- 1) $V(0) = 0$ ve her $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ için $V(x) > 0$,
- 2) Her $x \in \mathcal{D}$ için $\dot{V}(x) \leq 0$

o zaman $x = 0$ denge noktası kararlıdır. Ayrıca,

- 2') Her $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ için $\dot{V}(x) < 0$

ise $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 1.7. (Sarkaç Denklemleri) Yukarıda incelediğimiz sarkaç sistemini ele alalım:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2. \end{cases}$$

Bu sistemin $x = 0$ denge noktasının kararlılığını Lyapunov yöntemiyle inceleyelim.

Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki gibi seçelim:

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x^T Px, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad P > 0.$$

Burada $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ 'dır. $p_1 = \frac{b^2}{2}$, $p_2 = \frac{b}{2}$, $p_3 = 1$ seçilirse

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2$$

elde edilir.

Şimdi, $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi\}$ bölgesini alalım. Bu durumda her $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ için $\dot{V}(x) < 0$ olur. Böylece, $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

$\dot{x} = Ax$ biçimindeki (1.3) sistemi için

$$V(x) = x^T P x, \quad (P > 0)$$

fonksiyonu bir Lyapunov fonksiyon adayıdır. Bu fonksiyonun gradiyenti:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Px$$

şeklindedir. $V(x)$ fonksiyonun yörünge boyunca türevi:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T Ax = (2Px)^T Ax = 2x^T P Ax \\ &= x^T P Ax + x^T P Ax \\ &= (x^T P Ax)^T + x^T P Ax \\ &= x^T A^T P x + x^T P Ax \\ &= x^T (A^T P + P A)x \end{aligned}$$

olur. $A^T P + P A = -Q$ dersek, Q simetrik bir matristir ve

$$x \neq 0 \text{ için } \dot{V}(x) < 0 \iff Q > 0$$

sağlanır.

Teorem 1.5. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $\dot{x} = Ax$ sistemi verilsin.

- 1) $x = 0$ denge noktası kararlıdır $\iff$ her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ 'dır. Ayrıca $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ olan her bir λ_i özdeğeri için cebirsel katlılık $q_i \geq 2$ ise,

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$$

koşulu sağlanır.

- 2) $x = 0$ denge noktası (global) asimptotik kararlıdır $\iff A$ Hurwitz matrisidir.

Teorem 1.6. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verilsin.

1) A Hurwitz matrisidir $\iff$ her $Q > 0$ için

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.4)$$

olacak şekilde bir $P > 0$ matrisi vardır.

2) Eğer A Hurwitz matrisi ise, her $Q > 0$ için (1.4) Lyapunov denkleminin çözümü tektir ve bu çözüm

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

biçimindedir.

Teorem 1.7. (1.3) sistemi verilsin. $x = 0$ bir denge noktası ve

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

matrisi de $x = 0$ noktasındaki Jacobi matrisi olsun. Bu durumda:

- 1) Eğer A matrisinin tüm λ_i özdeğerleri için $\text{Re } \lambda_i < 0$ ise, $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
- 2) Eğer A matrisinin herhangi bir λ_i özdeğeri için $\text{Re } \lambda_i > 0$ ise, $x = 0$ denge noktası kararsızdır.

Örnek 1.8. Sarkaç denklemini tekrar ele alalım. Bu denklem için

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \sin x_1 - b x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

olur. Sistemin denge noktalarını ayrı ayrı inceleyelim:

- $x = (0, 0)^T$ denge noktası için Jacobi matrisi

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=(0,0)^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

olup, $\text{Re } \lambda_1 < 0$ ve $\text{Re } \lambda_2 < 0$ 'dır. Dolayısıyla $(0, 0)^T$ noktası asimptotik kararlıdır.

- $x = (\pi, 0)^T$ denge noktası için Jacobi matrisi ise

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=(\pi,0)^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

olur. Burada $\sqrt{b^2 + 4a} > b$ olduğundan matrisin $\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$ özdeğeri pozitiftir. Bu nedenle $(\pi, 0)^T$ denge noktası kararsızdır.

Bu tez çalışmasında kontrol teorisinde ortaya çıkan minimizasyon problemlerinin çözümü için yeni bir yöntem ele alınmıştır. Bu yöntemde her adımda bir LP problemi çözülerek hızlı biçimde sonuca varılmaktadır. Tez çalışması toplam sekiz bölümden ve kaynaklar kısmından oluşmaktadır.

İkinci Bölümde Schur Teoremi ve kanıtı verilmektedir. Bu teorem yardımıyla lineer olmayan matris eşitsizliği daha yüksek boyutlu lineer matris eşitsizliğine dönüşmektedir. Kanıt için bir kuadratik konveks fonksiyonun minimumu için gradiyent koşulu kullanılmaktadır.

Üçüncü Bölümde afin fonksiyonlar ailesinin maksimumu ile ifade edilen konveks bir fonksiyonun kompakt küme üzerinde minimizasyonu için yeni bir sonuç verilmektedir. Bu sonuç kullanılarak minimum değer ve optimal noktanın hızlı bir biçimde bulunmasına yönelik bir algoritma sunulmaktadır.

Dördüncü ve Beşinci Bölümlerde, elde edilen teorik sonuçların uygulamalarına yer verilmektedir. Bu uygulamalar tek matris için Lyapunov eşitsizliğinin çözümü ve anahtarlamalı sistemler için ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonlarının bulunması problemlerini içermektedir.

Altıncı Bölümde matris Riccati eşitsizliğinin çözümü ele alınmaktadır. Bu çeşit eşitsizlikler mutlak kararlılık, H_∞ kontrol, lineer kuadratik optimizasyon, optimal tahmin problemlerinde ortaya çıkmaktadır. Schur teoremi yardımıyla Riccati eşitsizliği bir LME'ye dönüştürülmekte ve minimizasyon algortiması uygulanmaktadır. Bu bölümde homojen olmayan LME'nin bazı çözümleri ele alınmaktadır.

Yedinci Bölümde dinamik sistemlerin kararlılık analizinde, kombinatorik uygulamalarda ve diğer uygulamalarda karşımıza çıkan simetrik matrislerin lineer kombinasyonlarının maksimal özdeğerlerinin minimizasyonu problemi ele alınmaktadır.

Sekizinci Bölümde ise Lyapunov eşitsizliği, ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonları, Riccati matris eşitsizliği ve özdeğerlerin minimizasyonu problemleri için genel teoremden kullanılan sınırlı fonksiyonların norm sınırları hesaplanmaktadır.

Tez boyunca ele alınan konularla ilgili sayısal örnekler verilmiştir.

2. SCHUR KOMPLEMENT TEOREMİ

A matrisi $n \times n$, D matrisi ise $m \times m$ boyutlu kare matrisler olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

blok matrisini ele alalım. Burada B ve C matrisleri uygun boyutlu dikdörtgen matrislerdir. Eğer

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

aynı boyutlu başka bir blok matris ise,

$$XX_1 = \begin{bmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

çarpım kuralı geçerlidir. Bu çarpım kuralı, $x = [u, v]^T$ ve $y = [u_1, v_1]^T$ gibi iki kısma bölünmüş x ve y vektörlerinin iç çarpımları için

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \langle u, u_1 \rangle + \langle v, v_1 \rangle$$

eşitliğinden elde edilmektedir. (u ve u_1 'in, v ve v_1 'in boyutları aynıdır.)

Önerme 2.1. (2.1) matrisinde $C = 0$ (sıfır matrisi) olsun. O zaman

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad \det(X) = (\det A)(\det D) \quad (2.3)$$

eşitliği sağlar.

Kanıt. Determinantın tanımına göre, $k \times k$ boyutlu $Y = [y_{ij}]$ matrisinin determinanı

$$\det(Y) = \sum (-1)^\sigma y_{1j_1} y_{2j_2} \dots y_{kj_k}$$

toplamına eşittir. Burada σ sayısı, $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ dizisindeki inversiyon sayısıdır.

Basitlik için $n = 3$, $m = 2$ olarak devam edelim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} \\ b_{24} & b_{25} \\ b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}.$$

Bu durumda,

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{14} & b_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{24} & b_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{34} & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & d_{45} \\ 0 & 0 & 0 & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}$$

matrisi oluşur.

$\det(X)$ açılımındaki beşli çarpımlara herhangi bir b_{ij} elemanı girerse, bu çarpıma zorunlu olarak sıfır elemanları da girer. Örneğin, çarpımda b_{14} elemanı varsa, a_{ij} 'lerden iki tane, d_{ij} 'lerden bir tane olabileceğinden, toplam eleman sayısının beşe tamamlanabilmesi için en az bir sıfır elemanı da girmelidir.

Dolayısıyla determinant ifadesi:

$$\begin{aligned} \det(X) &= \sum (-1)^\sigma a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} d_{4j_1} d_{5j_2} \\ &= d_{44} d_{55} \left(\sum (-1)^{\sigma_1} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \right) - d_{45} d_{54} \left(\sum (-1)^{\sigma_1} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \right) \\ &= \det(A)(d_{44} d_{55} - d_{45} d_{54}) \\ &= \det(A) \det(D) \end{aligned}$$

şeklinde olur. □

Önerme 2.2. $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A matrisinin tersi varsa,

$$\det(X) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. (2.2) eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= X \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Bu üçlü çarpımın birinci ve üçüncü matrisleri üçgensel matrisler olup determinant-

ları 1'dir. Bu durumda (2.3)'den dolayı

$$\det(X) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \cdot 1 = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

bulunur. □

Önerme 2.3. A ve $S = D - CA^{-1}B$ matrisleri tersinir olsun. O zaman X blok matrisi de tersinirdir ve

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Kanıt.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m)$$

lineer sistemini ele alalım. Bu sistem,

$$Ax + By = u,$$

$$Cx + Dy = v$$

biçimindedir. Buradan,

$$x + A^{-1}By = A^{-1}u, \quad v = CA^{-1}u + Sy,$$

$$C(A^{-1}u - A^{-1}By) + Dy = v, \quad y = S^{-1}(v - CA^{-1}u)$$

bulunur. Elde ettiğimiz y değerini birinci denklemde yazarsak,

$$x = (A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1})u - A^{-1}BS^{-1}v,$$

$$y = -S^{-1}CA^{-1}u + S^{-1}v$$

elde edilir. Buradan da (2.5) eşitliği bulunmuş olur. □

Şimdi X blok matrisinin simetrik olduğunu varsayalım. Yani (2.1)'de $C = B^T$ olup A ile D matrisleri simetrik olsun. Ayrıca A matrisinin tersinir olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

blok matrisinin pozitif belirliliği ve yarı belirliliği ele alınacaktır.

Şimdi Schur Komplement teoremini ifade edelim:

Teorem 2.1 ([8]). $S = D - B^T A^{-1} B$ olsun. O zaman:

1. $X > 0 \iff A > 0, S > 0$,
2. $A > 0$ olsun. Bu durumda $X \geq 0 \iff S \geq 0$.

Bu teoremi kanıtlamak için aşağıdaki önermeyi kullanacağız.

Önerme 2.4. $A > 0$ olsun. D simetrik bir $m \times m$ matris, $u \in \mathbb{R}^n$ değişken sütun vektör ve $v \in \mathbb{R}^m$ sabit sütun vektör olmak üzere,

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = u^T A u + 2v^T B^T u + v^T D v$$

fonksiyonunun minimizasyonu problemini ele alalım. Bu durumda, $F(u)$ fonksiyonunu minimum yapan u_0 vektörü,

$$u_0 = -A^{-1} B v$$

biçimindedir.

Kanıt. $F(u)$ fonksiyonu konvektir. Çünkü Hessian matrisi pozitif belirlidir:

$$H = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \right] = 2A > 0.$$

$\nabla F(u)$ gradiyentin sıfır olduğu u noktasını bulalım:

$$\nabla F(u) = 0, \quad 2Au + 2Bv = 0, \quad Au = -Bv.$$

Buradaki son eşitliği soldan A^{-1} ile çarparsak, fonksiyonu minimum yapan u_0 noktası

$$u_0 = -A^{-1} B v$$

olarak elde edilir. □

Minimumun tanımına göre her $u \in \mathbb{R}^n$ için $F(u) \geq F(u_0)$ eşitsizliği geçerlidir. $F(u_0)$ değerini açıkça yazalım:

$$\begin{aligned} F(u_0) &= (-A^{-1} B v)^T A (-A^{-1} B v) + 2v^T B^T (-A^{-1} B v) + v^T D v \\ &= v^T B^T A^{-1} A A^{-1} B v - 2v^T B^T A^{-1} B v + v^T D v \\ &= v^T [D - B^T A^{-1} B] v = v^T S v. \end{aligned}$$

Buradan, her (u, v) için $F(u) = u^T A u + 2v^T B^T u + v^T D v \geq v^T S v$ eşitsizliğini elde ederiz.

Öte yandan, eşitsizliğin sol tarafını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Au + Bv \\ B^T u + Dv \end{bmatrix} \\
&= u^T Au + u^T Bv + v^T B^T u + v^T Dv.
\end{aligned}$$

Buradan tüm (u, v) için,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq v^T S v \quad (2.6)$$

elde edilir ve buradan da

$$\min \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : u \in \mathbb{R}^n \right\} = v^T S v \quad (2.7)$$

olur.

Teorem 2.1'in Kanıtı.

1. $\Rightarrow$ $X > 0$ olsun.

Her $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \neq 0$ için

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} > 0$$

olduğundan, burada $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$ ($u \neq 0$) alalım. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} u^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \implies \begin{bmatrix} u^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Au \\ B^T u \end{bmatrix} > 0 \implies u^T Au > 0$$

olur. Yani $A > 0$ sağlanmaktadır.

$X > 0$ ise $A > 0$ olduğunu gösterdik. $X > 0$ ise $S > 0$ olduğunu gösterelim.

$X > 0$ ise her $(u, v) \neq (0, 0)$ için

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u^T A u + 2v^T B^T u + v^T D v > 0$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $v \neq 0$ olmak üzere, $\tilde{u} = -A^{-1}Bv$ alalım. Bu durumda,

$$\tilde{u}^T A \tilde{u} + 2v^T B^T \tilde{u} + v^T D v > 0$$

eşitsizliğinin sol tarafı $v^T S v$ 'ye eşit olduğundan her $v \neq 0$ için $v^T S v > 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu da $S > 0$ olduğunu gösterir.

$\Leftrightarrow A > 0, S > 0$ ise $X > 0$ olduğunu gösterelim.

Her $u \neq 0$ için $u^T A u > 0$ ve her $v \neq 0$ için $v^T S v > 0$ 'dır. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitsizliğin her $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ için sağlandığını göstermemiz yeterlidir:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} > 0. \quad (2.8)$$

Burada iki durum söz konusudur: $v = 0$ ve $v \neq 0$.

i) $v = 0$ ise $u \neq 0$ olmalıdır ve

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = u^T A u > 0$$

bulunur.

ii) $v \neq 0$ ise (2.6)'ya göre

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq v^T S v > 0$$

olduğundan (2.8) ve dolayısıyla $X > 0$ sağlanmaktadır.

2. $A > 0$ olduğunu varsayalım.

$\Rightarrow X \geq 0$ olsun.

$A > 0$ olduğu için (2.6) ve (2.7) sağlanmaktadır. Her (u, v) için

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.9)$$

olur. $v \in \mathbb{R}^m$ keyfi vektör olmak üzere, (2.9)'da $u = -A^{-1}Bv$ alalım. Bu durumda,

$$0 \leq \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Big|_{u=-A^{-1}Bv} = v^T S v$$

elde edilir. Yani $S \geq 0$ olur.

$\Leftrightarrow S \geq 0$ olsun. (2.6)'ya göre her (u, v) için

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq v^T S v \geq 0$$

eşitsizliğinden $X \geq 0$ çıkmaktadır. $\square$

Örnek 2.1. Schur Komplement Teoremi'nin uygulamasına yönelik bir örnek olarak aşağıdaki Riccati eşitsizliğini ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 45 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^T P + P A - P B Q^{-1} B^T P + R > 0. \quad (2.10)$$

Schur Teoremi'ne göre bu eşitsizlik

$$X = \begin{bmatrix} A^T P + P A + R & P B \\ B^T P & Q \end{bmatrix} > 0$$

lineer matris eşitsizliğine eşdeğerdir.

Bu eşitsizliğin pozitif belirli bir çözümü

$$P = \begin{bmatrix} 1.6930 & 0.5165 \\ 0.5165 & 1.7391 \end{bmatrix}$$

matrisidir.

Bu çözüm, Riccati eşitsizliklerinin çözümü için Bölüm 6'da verilen yöntem kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.0215 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0215 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0215 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.2182 & -0.8268 & -0.2704 \\ -0.8268 & -0.7394 & 1.5150 \\ -0.2704 & 1.5150 & 1.2430 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (2.10) Riccati eşitsizliğini ele alalım. Teorem 2.1'e göre bu eşitsizliğe eşdeğer olan $X > 0$ LME'nin bir çözümü olarak

$$P = \begin{bmatrix} 0.1042 & 0.0631 & -0.1328 \\ 0.0631 & 0.0848 & -0.1250 \\ -0.1328 & -0.1250 & 0.2564 \end{bmatrix}$$

pozitif belirli matrisi verilebilir.

Bu çözüm de önceki örnekte olduğu gibi Bölüm 6'de verilen algoritma yardımıyla hesaplanmıştır.

3. BİR SINIF MAKSİMUM FONKSİYONLARIN MİNİMİZASYONU

Bu bölümde, afin fonksiyonların maksimumu şeklinde tanımlanmış konveks bir fonksiyonun kompakt bir küme üzerindeki minimizasyonu problemi ele alınmaktadır.

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt bir küme ve Y keyfi bir küme olmak üzere,

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} (\langle x, a(y) \rangle + b(y)) \quad (3.1)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $a(y) : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$ ve $b(y) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ bilinen ve sınırlı fonksiyonlardır.

Varsayım. Her $x \in X$ için (3.1) denklemindeki maksimum değer vardır ve bu maksimumu sağlayan y noktası basit hesaplamalarla bulunabilmektedir.

Bu bölümdeki amacımız, $\varphi(x)$ fonksiyonunun X kümesi üzerinde alacağı minimum değeri ve bu değeri veren noktayı bulmaktır.

Önerme 3.1. Keyfi bir $\hat{x} \in X$ noktası verilsin. $\hat{y} \in Y$ noktası, (3.1) denklemindeki

$$\langle \hat{x}, a(y) \rangle + b(y)$$

fonksiyonunun maksimum değerini veren nokta olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlik sağlanır:

$$\varphi(\hat{x}) = \langle \hat{x}, a(\hat{y}) \rangle + b(\hat{y}), \quad (3.2)$$

$$\varphi(x) \geq \langle x, a(\hat{y}) \rangle + b(\hat{y}). \quad (3.3)$$

Kanıt. $\varphi(x)$ fonksiyonunun tanımından elde edilir. $\square$

Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak, monoton artan bir $\{s_k\}$ sayı dizisi tanımlayalım:

Herhangi bir $x^1 \in X$ başlangıç noktası seçelim.

$$\langle x^1, a(y) \rangle + b(y)$$

ifadesine maksimum veren nokta $y^1 \in Y$ olsun. Bu durumda $\varphi(x^1) = \langle x^1, a(y^1) \rangle + b(y^1)$ elde edilir. Şimdi,

$$s_1 = \min_{x \in X} (\langle x, a(y^1) \rangle + b(y^1)) \quad (3.4)$$

tanımlayalım. (3.4) denkleminde minimumu veren noktaya $x^2 \in X$ diyelim. Bu noktada

$$\langle x^2, a(y) \rangle + b(y)$$

ifadesini maksimum yapan $y^2 \in Y$ noktası bulunsun.

Sonra,

$$s_2 = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq 2} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \quad (3.5)$$

tanımlanır ve (3.5) denkleminde minimumu veren noktaya da $x^3 \in X$ diyelim. Benzer biçimde

$$\langle x^3, a(y) \rangle + b(y)$$

ifadesini maksimum yapan $y^3 \in Y$ noktası belirlensin. Bu süreci devam ettirerek genel olarak

$$s_k = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \quad (3.6)$$

biçiminde bir dizi tanımlayalım. (3.6) denkleminde minimumu veren noktaya $x^{k+1} \in X$ dersek, X kümesinde bir

$$x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots$$

dizisi elde ederiz. Her $x \in X$ için

$$\max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \leq \max_{1 \leq i \leq k+1} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

eşitsizliği sağlanır. Burada her iki tarafın X kümesi üzerinde minimumunu alırsak,

$$s_k \leq s_{k+1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece $\{s_k\}$ dizisinin monoton artan olduğu görülür. Öte yandan, X kompakt, $a(y)$ ve $b(y)$ fonksiyonları da sınırlı olduğundan $\{s_k\}$ dizisi üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, monoton artan ve üstten sınırlı olan bu dizinin limiti vardır:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s. \quad (3.7)$$

Önerme 3.2. X kompakt bir küme, $\varphi_1(x), \varphi_2(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve her $x \in X$ için $\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\varphi_1(x) \geq \min_{x \in X} \varphi_2(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonlarının tanımı gereği

$$\min_{x \in X} \varphi_1(x) = \varphi_1(\tilde{x}) \geq \varphi_2(\tilde{x}) \geq \min_{x \in X} \varphi_2(x)$$

olur. Bu eşitsizliğe göre, her $x \in X$ için

$$\varphi_1(x) \geq \min_{x \in X} \varphi_1(x) \geq \min_{x \in X} \varphi_2(x)$$

eşitsizliği sağlanır. □

Şimdi, herhangi bir $i = 1, 2, 3, \dots$ ve $x \in X$ için

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} (\langle x, a(y) \rangle + b(y)) \geq \langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)$$

eşitsizliğinden,

$$\varphi(x) \geq \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

sonucunu elde ederiz.

Önerme 3.2’de,

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

seçersek, her $x \in X$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\varphi(x) \geq \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = s_k. \quad (3.8)$$

Önerme 3.3. Her $x \in X$ ve $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\varphi(x) \geq s_k$.

Şimdi, keyfi seçilen bir $x^1 \in X$ noktasıyla yukarıda tanımlandığı biçimde oluşturulan $\{x^k\}$ dizisinin, $\varphi(x)$ fonksiyonunun minimumunu veren noktaya yakınsayan bir $\{x^{k_m}\}$ altdizisinin olduğunu ve fonksiyonun minimum değerinin de s olduğunu göstereceğiz. Başka bir ifadeyle, öyle bir $\{x^{k_m}\}$ altdizisi vardır ki $x^{k_m} \rightarrow x_*$ ve

$$\min_{x \in X} \varphi(x) = \varphi(x_*) = s \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1. Keyfi bir $x^1 \in X$ noktası için yukarıdaki yöntemle oluşturulan $\{x^k\}$ dizisinin, $x_* \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x^{k_m}\}$ altdizisi vardır ve bu limit noktası için (3.9) eşitliği sağlanır.

Kanıt. Öncelikle $q > p$ olmak üzere p ve q doğal sayılarını ele alalım. Tanım gereği,

$$s_q = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq q} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = \max_{1 \leq i \leq q} (\langle x^{q+1}, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

olduğundan,

$$s_q \geq \langle x^{q+1}, a(y^i) \rangle + b(y^i), \quad (1 \leq i \leq q)$$

sağlanır. Burada $i = p$ seçilirse

$$s_q \geq \langle x^{q+1}, a(y^p) \rangle + b(y^p)$$

ve böylece limitten dolayı

$$s \geq \langle x^{q+1}, a(y^p) \rangle + b(y^p) \quad (3.10)$$

elde edilir.

Önerme 3.1'deki denklem (3.2)'e göre,

$$\varphi(x^p) = \langle x^p, a(y^p) \rangle + b(y^p) \quad (3.11)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi (3.10) ve (3.11) denklemlerini taraf tarafa çıkarılır, Önerme 3.3 dikkate alınır,

$$0 \geq s - \varphi(x^p) \geq \langle x^{q+1} - x^p, a(y^p) \rangle \quad (3.12)$$

eşitsizliği elde edilir.

Öte yandan, X kompakt küme olduğundan $\{x^k\}$ dizisinin yakınsak bir $\{x^{k_m}\}$ alt dizisi vardır; yani $x^{k_m} \rightarrow x_* \in X$ sağlanır. (3.12) denkleminde $p = k_m$, $q + 1 = k_{m+1}$ seçilirse,

$$0 \geq s - \varphi(x^{k_m}) \geq \langle x^{k_{m+1}} - x^{k_m}, a(y^{k_m}) \rangle \quad (3.13)$$

elde edilir.

$m \rightarrow \infty$ için (3.13) denkleminin sağ tarafı sıfıra yakınsar. Böylece,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(x^{k_m}) = s = \varphi(x_*) \quad (3.14)$$

sonucunu buluruz.

Ayrıca, önceki önermeye göre her $x \in X$ için

$$\varphi(x) \geq s \quad (3.15)$$

sağlanır.

Son olarak, (3.14) ve (3.15) denklemlerinden,

$$\min_{x \in X} \varphi(x) = \varphi(x_*) = s$$

eşitliği elde edilir. □

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} (\langle x, a(y) \rangle + b(y)), \quad \|a(y)\| \leq K_1, \quad |b(y)| \leq K_2, \quad x \in X = [-\alpha, \alpha]^d$$

olduğunu varsayalım. Ele alacağımız problem: $\min_{x \in X} \varphi(x) = ?$

Bu problemin çözümü için

$$s_k = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \quad (3.16)$$

değerini kullanacağız. Denklem (3.16)'deki s_k değerini ve minimumu veren noktayı bulmak amacıyla lineer programlama (LP) yönteminden yararlanabiliriz.

Teorem 3.2. Aşağıdaki LP problemini ele alalım:

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -\alpha \leq x_j \leq \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, d \\ -\sigma \leq t \leq \sigma, \quad \sigma = \alpha\sqrt{d}K_1 + K_2 \\ \langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i) \leq t, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Eğer (x^*, t^*) bu LP probleminin optimal çözümü ise,

$$s_k = c(x^*, t^*) = t^*$$

eşitliği sağlanır ve x^* noktası, (3.16) denkleminde minimumu veren noktadır.

Kanıt.

$$A = \{(x, t) : -\sigma \leq t \leq \sigma, \langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i) \leq t, x \in [-\alpha, \alpha]^d, i = 1, 2, \dots, k\}$$

kümesini alalım.

Herhangi bir $\tilde{x} \in [-\alpha, \alpha]^d$ için

$$\tilde{t} = \max_{1 \leq i \leq k} (\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = \langle \tilde{x}, a(y^{i_0}) \rangle + b(y^{i_0})$$

diyelim.

Bu durumda, $|\tilde{t}| \leq \sigma$ ve

$$\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i) \leq \tilde{t}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olacağından, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in A$ elde edilir. Buradan, LP probleminin optimal çözümü nedeniyle

$$t^* = c(x^*, t^*) \leq c(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{t} \quad (3.17)$$

sağlanır.

Öte yandan,

$$(x^*, t^*) \in A \quad \Rightarrow \quad t^* \geq \langle x^*, a(y^i) \rangle + b(y^i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olduğundan,

$$t^* \geq \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x^*, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.17) ve (3.18) denklemlerinden,

$$\max_{1 \leq i \leq k} (\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = \tilde{t} \geq t^* \geq \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x^*, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

sonucunu buluruz.

Burada $\tilde{x}$ keyfi seçildiği için,

$$\min_{\tilde{x} \in X} \max_{1 \leq i \leq k} (\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x^*, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \quad (3.19)$$

elde edilir. Böylece, x^* noktası (3.16) denkleminde minimumu veren noktadır.

Ayrıca (3.19) denkleminin sol tarafı s_k 'dir. (3.18) ve (3.19) denklemlerinden,

$$s_k = \max_{1 \leq i \leq k} (\langle x^*, a(y^i) \rangle + b(y^i)) \leq t^* \quad (3.20)$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$t^* \leq \tilde{t} = \max_{1 \leq i \leq k} (\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i))$$

eşitsizliği, her $\tilde{x} \in X$ için sağlanacağından,

$$t^* \leq \min_{\tilde{x} \in X} \max_{1 \leq i \leq k} (\langle \tilde{x}, a(y^i) \rangle + b(y^i)) = s_k \quad (3.21)$$

elde edilir.

Son olarak, (3.20) ve (3.21) denklemlerinden $s_k = t^*$ bulunur. $\square$

Örnek 3.1. Aşağıdaki maksimum fonksiyonunun $[-100, 100]$ aralığında minimum değerini ve bu minimumu veren noktayı hesaplayalım:

$$\varphi(x) = \max_{-10 \leq y \leq 10} (x \sin y + e^{-y^2}).$$

Burada $a : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $a(y) = \sin(y)$ ve $b : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $b(y) = e^{-y^2}$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Böylece,

$$\langle x, a(y) \rangle + b(y) = x \sin y + e^{-y^2}$$

olur. Ayrıca

$$\alpha = 100, \quad d = 1, \quad K_1 = \max_{y \in [-10, 10]} |\sin(y)| = 1, \quad K_2 = \max_{y \in [-10, 10]} |e^{-y^2}| = 1$$

olduğundan, $\sigma = \alpha \sqrt{d} K_1 + K_2 = 101$ olarak hesaplanır.

Şimdi, algoritmanın ilk adımını ayrıntılı olarak verelim:

$x^1 = 10$ başlangıç noktası için,

$$\varphi(x^1) = \max_{y \in [-10, 10]} (10 \sin y + e^{-y^2}) = 10 \sin(1.54219986) + e^{-1.54219986^2} = 10.08861208$$

olduğundan $y^1 = 1.54219986$ 'dir. Buradan,

$$a(y^1) = \sin(1.54219986) = 0.999591, \quad b(y^1) = e^{-1.54219986^2} = 0.092700$$

değerleri hesaplanır.

s_1 değerini ve x^2 noktasını hesaplamak için, aşağıdaki LP problemini çözeriz:

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -100 \leq x \leq 100 \\ -101 \leq t \leq 101 \\ 0.999591x + 0.092700 \leq t \end{cases}$$

Bu LP probleminin çözümünden,

$$s_1 = -99.86641430, \quad x^2 = -100$$

bulunur.

Algoritmanın sonraki adımları ise aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Durma koşulu için $\varepsilon = 10^{-6}$ olmak üzere $\varphi(x^k) - s_k < \varepsilon$ alınmıştır.

Böylece, verilen maksimum fonksiyonunun minimum değeri yaklaşık olarak

$$\min_{-100 \leq x \leq 100} \varphi(x) \approx \varphi(x^{12}) = 1.00000001$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.2. Aşağıdaki maksimum fonksiyonunun $[-100, 100]$ aralığında minimum

Tablo 3.1. Örnek 3.1'in iterasyon sonuçları

k	x^k	y^k	$\varphi(x^k)$	s_k	$ \varphi(x^k) - s_k $
1	10.00000000	1.54219986	10.08861208	-99.86641430	109.95502640
2	-100.00000000	-1.56811418	100.08516226	0.08911200	99.99605026
3	-0.00359006	-0.00179503	1.00000322	0.99837041	0.00163281
4	0.90604025	0.51369579	1.21329074	0.99915263	0.21413811
5	0.47026822	0.24205391	1.05581523	0.99957381	0.05624142
6	0.23563291	0.11864667	1.01391310	0.99978801	0.01412509
7	0.11630144	0.05824940	1.00338342	0.99989556	0.00348786
8	0.05638954	0.02820599	1.00079505	0.99994938	0.00084567
9	0.02640371	0.01320301	1.00017429	0.99997630	0.00019799
10	0.01140726	0.00570372	1.00003253	0.99998976	0.00004277
11	0.00390864	0.00195432	1.00000382	0.99999649	0.00000733
12	0.00015929	0.00007964	1.00000001	0.99999986	0.00000015

değerini ve bu minimumu veren noktayı hesaplayalım:

$$\varphi(x) = \max_{-10 \leq y \leq 10} \left(x \sin y + \frac{y^2 - y}{\sqrt{1 + y^4}} \right).$$

Burada $a(y) = \sin(y)$, $b(y) = \frac{y^2 - y}{\sqrt{1 + y^4}}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Böylece,

$$\langle x, a(y) \rangle + b(y) = x \sin y + \frac{y^2 - y}{\sqrt{1 + y^4}}$$

olur. Ayrıca,

$$\alpha = 100, \quad d = 1, \quad K_1 = \max_{y \in [-10, 10]} |\sin(y)| = 1, \quad K_2 = \max_{y \in [-10, 10]} \left| \frac{y^2 - y}{\sqrt{1 + y^4}} \right| = 1.52702948$$

elde edilir ve buradan $\sigma = \alpha \sqrt{d} K_1 + K_2 = 101.52702948$ bulunur.

Başlangıç noktası olarak $x^1 = 10$ alalım. Bu noktada maksimum veren y^1 değerini bulmak için,

$$\begin{aligned} \varphi(x^1) &= \max_{y \in [-10, 10]} \left(10 \sin y + \frac{y^2 - y}{\sqrt{1 + y^4}} \right) \\ &= 10 \sin(1.61237625) + \frac{(1.61237625)^2 - (1.61237625)}{\sqrt{1 + (1.61237625)^4}} = 10.34583473 \end{aligned}$$

hesabından, $y^1 = 1.61237625$ elde edilir. Buna göre,

$$a(y^1) = \sin(1.61237625) = 0.99913568,$$

$$b(y^1) = \frac{(1.61237625)^2 - (1.61237625)}{\sqrt{1 + (1.61237625)^4}} = 0.35447793$$

olarak bulunur.

Şimdi s_1 değerini ve x^2 noktasını bulmak için aşağıdaki LP problemini çözeriz:

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -100 \leq x \leq 100 \\ -101.52702948 \leq t \leq 101.52702948 \\ 0.99913568x + 0.35447793 \leq t \end{cases}$$

Bu LP probleminin çözümünden,

$$s_1 = -99.55909003, \quad x^2 = -100$$

bulunur.

Algoritmanın sonraki adımları ise aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Durma koşulu için $\varepsilon = 10^{-6}$ olmak üzere $\varphi(x^k) - s_k < \varepsilon$ alınmıştır.

Tablo 3.2. Örnek 3.2'deki iterasyon sonuçları

k	x^k	y^k	$\varphi(x^k)$	s_k	$ \varphi(x^k) - s_k $
1	10.00000000	1.61237625	10.34583473	-99.55909003	109.90492476
2	-100.00000000	-1.56976875	101.51683652	0.93543250	100.58140402
3	0.58145713	2.03649365	1.01431707	0.97709302	0.03722405
4	0.53979659	2.06175250	0.97732845	0.97721812	0.00011033
5	0.53967148	2.06183302	0.97721813	0.97721812	0.00000000

Sonuç olarak, verilen maksimum fonksiyonunun minimum değeri yaklaşık olarak

$$\min_{-100 \leq x \leq 100} \varphi(x) \approx \varphi(x^5) = 0.97721813$$

biçiminde hesaplanır.

Örnek 3.3. Aşağıdaki maksimum fonksiyonunun $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ kümesi üzerinde minimum değerini ve bu minimumu veren noktayı hesaplayalım:

$$\varphi(x) = \max_{-1 \leq y_1, y_2 \leq 1} [x_1(y_1 + y_2) + x_2 y_2 - (y_1^2 + y_2^2)].$$

Burada $a(y) = (y_1 + y_2, y_2)$ ve $b(y) = -(y_1^2 + y_2^2)$ tanımlayalım. Böylece

$$\langle x, a(y) \rangle + b(y) = x_1(y_1 + y_2) + x_2 y_2 - (y_1^2 + y_2^2)$$

olur. Ayrıca

$$\alpha = 0.5, \quad d = 2, \quad K_1 = \max_{y \in [-1, 1]^2} \|a(y)\| = \sqrt{2}, \quad K_2 = \max_{y \in [-1, 1]^2} |b(y)| = 2$$

olduğundan, $\sigma = \alpha\sqrt{d}K_1 + K_2 = 3$ olarak hesaplanır.

$x^1 = (0.1, -0.1)$ başlangıç noktası için

$$\varphi(x^1) = \max_{y \in [-1,1]^2} (0.1(y_1 + y_2) - 0.1y_2 - (y_1^2 + y_2^2)) = 0.0025$$

olup maksimum $y^1 = (0.0500, 0.0000)$ noktasında alınmaktadır. Buradan,

$$a(y^1) = (0.0500, 0.0000), \quad b(y^1) = -0.0025$$

olur.

s_1 değerini ve x^2 noktasını hesaplamak için aşağıdaki LP problemi çözülür:

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -0.5 \leq x_1, x_2 \leq 0.5 \\ -3 \leq t \leq 3 \\ 0.0500x_1 + 0.0000x_2 - 0.0025 \leq t. \end{cases}$$

Bu LP probleminin çözümünden

$$s_1 = -0.0275, \quad x^2 = (-0.5, -0.5)$$

bulunur.

Algoritmanın sonraki adımları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Durma koşulu için $\varepsilon = 10^{-6}$ olmak üzere $|\varphi(x^k) - s_k| < \varepsilon$ alınmıştır.

Tablo 3.3. Örnek 3.3'ün iterasyon sonuçları

k	x^k	y^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(0.1000, -0.1000)	(0.0500, 0.0000)	0.00250000	-0.02750382
2	(-0.5000, -0.5000)	(-0.2500, -0.5000)	0.31250000	-0.02750239
3	(-0.5000, 0.1800)	(-0.2500, -0.1600)	0.08809839	-0.02049959
4	(-0.3600, 0.5000)	(-0.1800, 0.0700)	0.03729685	-0.01250098
5	(-0.2000, 0.0400)	(-0.1000, -0.0800)	0.01639709	-0.00899953
6	(-0.1300, 0.2000)	(-0.0650, 0.0350)	0.00544953	-0.00500018
7	(-0.0500, -0.0300)	(-0.0250, -0.0400)	0.00222374	-0.00324935
8	(-0.0150, 0.0500)	(-0.0075, 0.0175)	0.00036263	-0.00124999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	(0.0014, -0.0028)	(0.0007, -0.0007)	0.00000097	-0.00000152
19	(0.0001, 0.0008)	(0.0001, 0.0005)	0.00000024	-0.00000067

Verilen maksimum fonksiyonunun minimum değeri yaklaşık olarak

$$\min_{x \in [-0.5, 0.5]^2} \varphi(x) \approx \varphi(x^{19}) = 0.00000024$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.4. Aşağıdaki maksimum fonksiyonunun $[-10, 10] \times [-10, 10]$ kümesi üzerinde minimum değerini ve bu minimumu veren noktayı hesaplayalım:

$$\varphi(x) = \max_{(y_1, y_2) \in [-5, 5] \times [-5, 5]} \left(x_1 \sin(y_1 - y_2) + x_2 \cos(y_1 + y_2) + y_1^2 - y_2^2 \right).$$

Burada,

$$a(y) = \begin{bmatrix} \sin(y_1 - y_2) \\ \cos(y_1 + y_2) \end{bmatrix}, \quad b(y) = y_1^2 - y_2^2$$

olmak üzere,

$$\langle x, a(y) \rangle + b(y) = x_1 \sin(y_1 - y_2) + x_2 \cos(y_1 + y_2) + y_1^2 - y_2^2$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca $\alpha = 10$, $d = 2$, $K_1 = 1.413778$, $K_2 = 24.997449$ olduğundan,

$$\sigma = \alpha \sqrt{d} K_1 + K_2 = 44.991296$$

olarak bulunur. Başlangıç noktası $x^1 = (-2, 1)$ için

$$\varphi(x^1) = \max_{y \in [-5, 5]^2} \left(-2 \sin(y_1 - y_2) + \cos(y_1 + y_2) + y_1^2 - y_2^2 \right) = 27.46893514$$

ve maksimumu veren $y^1 = (5.0000, 0.3454)$ noktası bulunur. Bu bilgilerle ilk iterasyondaki LP problemi,

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -10 \leq x_j \leq 10, \quad j = 1, 2 \\ -44.991296 \leq t \leq 44.991296 \\ -0.5196x_1 + 0.9952x_2 + 24.8807 \leq t \end{cases}$$

şeklinde dir. Bu LP probleminin çözümünden,

$$s_1 = 8.98180473, \quad x^2 = (10.0000, -10.0000)$$

bulunur. Algoritmanın diğer iterasyonları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Durma koşulu $\varepsilon = 10^{-4}$ 'dir.

Tablo 3.4. Örnek 3.4'ün iterasyon sonuçları

k	x^k	y^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(-2.000, 1.000)	(5.000, 0.345)	27.4689352	8.9817384
2	(10.000, -10.000)	(-4.382, 0.707)	36.6120351	20.2355678
3	(10.000, 9.024)	(-5.000, -0.676)	41.2090678	22.2390053
4	(0.591, -3.469)	(5.000, -1.265)	26.2648955	24.1001205
5	(0.278, -0.851)	(5.000, -0.514)	24.7337094	24.3825189
6	(0.897, -1.205)	(-5.000, 0.339)	25.6736464	24.8343304
7	(-0.076, -0.206)	(5.000, -0.087)	25.0217622	24.8944183
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
22	(0.000, -0.578)	(5.000, -0.289)	24.9172722	24.9172712
23	(0.000, -0.579)	(-5.000, 0.290)	24.9172969	24.9172758
24	(0.000, -0.574)	(5.000, -0.287)	24.9172766	24.9172762

Sonuç olarak verilen maksimum fonksiyonunun minimum değeri yaklaşık olarak

$$\min_{x \in [-10, 10]^2} \varphi(x) \approx \varphi(x^{15}) = 24.91110936$$

şeklinde bulunmuştur.

4. LYAPUNOV EŞİTSİZLİĞİ

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. Eğer bu matrisin tüm özdeğerlerinin gerçel kısımları negatif ise bu matrise Hurwitz matrisi denir. Lyapunov Teoremi'ne göre aşağıdakiler birbirine denktir:

- i) A matrisi Hurwitz matrisidir.
- ii) Bir $Q > 0$ matrisi için,

$$A^T P + PA = -Q$$

matris denkleminin bir tek $P > 0$ çözümü vardır.

- iii) $A^T P + PA < 0$ olacak biçimde bir $P > 0$ matrisi vardır.
- iv) $\dot{x} = Ax$ lineer sistemi için $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Yapılacak işlemler için aşağıdaki önerme kullanılacaktır:

Önerme 4.1. T_1 ve T_2 kompakt kümeler, $f(\xi, \eta) : T_1 \times T_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. O zaman

$$\max_{\xi \in T_1} \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta) = \max_{\eta \in T_2} \max_{\xi \in T_1} f(\xi, \eta) = \max_{(\xi, \eta) \in T_1 \times T_2} f(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt. Kompaktlık ve süreklilikten dolayı (4.1)'deki tüm maksimumlar vardır. Herhangi bir $(\xi_*, \eta_*) \in T_1 \times T_2$ noktası için

$$f(\xi_*, \eta_*) \leq \max_{\eta \in T_2} f(\xi_*, \eta) \leq \max_{\xi \in T_1} \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta)$$

sağlanmaktadır. (ξ_*, η_*) keyfi olduğundan,

$$\max_{(\xi, \eta) \in T_1 \times T_2} f(\xi, \eta) \leq \max_{\xi \in T_1} \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta) \quad (4.2)$$

bulunur. Öte yandan, (4.1)'in sağ tarafındaki maksimumu veren çift $(\xi_0, \eta_0) \in T_1 \times T_2$ olsun. O zaman

$$\max_{(\xi, \eta) \in T_1 \times T_2} f(\xi, \eta) = f(\xi_0, \eta_0) \quad (4.3)$$

olur. Bu durumda, her $(\xi, \eta) \in T_1 \times T_2$ için $f(\xi_0, \eta_0) \geq f(\xi, \eta)$ eşitsizliği sağlanır. Buradan da her $\xi \in T_1$ ve her $\eta \in T_2$ için,

$$f(\xi_0, \eta_0) \geq \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta) \geq \max_{\xi \in T_1} \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.3) ve (4.4) birlikte değerlendirildiğinde,

$$\max_{(\xi, \eta) \in T_1 \times T_2} f(\xi, \eta) \geq \max_{\xi \in T_1} \max_{\eta \in T_2} f(\xi, \eta)$$

bulunur. Bu sonuç ile (4.2)'den istenilen eşitliklerin tamamı elde edilir. $\square$

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin ve

$$Y = \{(i, v) : i = 1, 2; \|v\| = 1, v \in \mathbb{R}^n\}$$

tanımlansın.

Önerme 4.2.

$$\max_{(i, v) \in Y} v^T A_i v < 0 \iff A_1 < 0 \text{ ve } A_2 < 0.$$

Kanıt. $\Rightarrow$

$$\max_{(i, v) \in Y} v^T A_i v = \max_{i \in \{1, 2\}} \max_{\|v\|=1} v^T A_i v, \quad \max_{\|v\|=1} v^T A v = \lambda_{\max}(A)$$

bu eşitliklerden

$$\max_{i \in \{1, 2\}} \lambda_{\max}(A_i) < 0 \implies \lambda_{\max}(A_1) < 0 \text{ ve } \lambda_{\max}(A_2) < 0$$

elde edilir. Böylece,

$$A_1 < 0, \quad A_2 < 0$$

sonucu bulunur.

$$\Leftrightarrow A_1 < 0, A_2 < 0 \text{ ise,}$$

$$\lambda_{\max}(A_1) < 0, \quad \lambda_{\max}(A_2) < 0$$

olacağından, yine

$$\max_{\|v\|=1} v^T A_1 v < 0, \quad \max_{\|v\|=1} v^T A_2 v < 0$$

ve buradan da

$$\max_{i \in \{1, 2\}} \max_{\|v\|=1} v^T A_i v < 0$$

elde edilir. $\square$

$A^T P + P A < 0, P > 0$ matris eşitsizliklerini sağlayan P matrisinin varlığı problemini, önceki ünite de ele aldığımız minimizasyon problemi formuna dönüştürebiliriz.

Simetrik P matrisini, $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ vektörüne göre

$$P = P(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n-1} & \dots & x_d \end{bmatrix}, \quad d = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4.5)$$

gibi yazabiliriz.

Burada matris eşitsizlikleri homojen olduğundan

$$-1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

eşitsizliklerinin sağlandığını varsayabiliriz.

Verilen matris eşitsizlikleri

$$\lambda_{\max}(A^T P + P A) < 0, \quad \lambda_{\max}(-P) < 0 \quad (4.6)$$

eşitsizliklerine denktir.

Burada

$$f_1(P(x)) = A^T P + P A, \quad f_2(P(x)) = -P \quad (4.7)$$

gösterimini kullanırsak, yukarıdaki eşitsizlikler $v \in \mathbb{R}^n$ birim vektör olmak üzere

$$\max_{\|v\|=1} v^T f_1(P(x)) v < 0, \quad \max_{\|v\|=1} v^T f_2(P(x)) v < 0$$

biçiminde yazılır.

Burada $P(x)$ 'in yukarıdaki ifadesi göz önünde bulundurulursa, (4.6) eşitsizlikleri

$$\max_{\|v\|=1} [a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_d x_d] < 0, \quad \max_{\|v\|=1} [\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + \dots + \tilde{a}_d x_d] < 0 \quad (4.8)$$

biçimindedir. Bu ifadelerdeki a_i katsayıları, v vektörüne kuadratik biçimde bağlıdır.

Şimdi,

$$Y = \{y = (i, v) : i \in \{1, 2\}, \|v\| = 1, v \in \mathbb{R}^n\}$$

kümesini tanımlayalım. Yukarıdaki (4.8)'deki eşitsizlikler, tek bir eşitsizlik olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\max_{y \in Y} \langle x, a(y) \rangle < 0. \quad (4.9)$$

Buradaki $a(y) : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır: Herhangi bir

$y_* = (i_*, v_*) \in Y$ için,

$$i_* = 1 \text{ ise, } a(y_*) = (a_1, a_2, \dots, a_d)|_{v=v_*},$$

$$i_* = 2 \text{ ise, } a(y_*) = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_d)|_{v=v_*}$$

olarak belirlenir.

Ayrıca, v vektörü birim vektörler kümesinde olduğundan, $a(y)$ fonksiyonu Y kümesi üzerinde sınırlı olacaktır.

Herhangi bir $x_* \in X = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] = [-1, 1]^d$ için, (4.9) ifadesinde maksimumu veren y_* noktası aşağıdaki şekilde belirlenir:

Öncelikle, $f_1(P(x_*))$ ve $f_2(P(x_*))$ simetrik matrislerinin maksimal özdeğerleri hesaplanır ve bu özdeğerler karşılaştırılır:

- Eğer birinci matrisin maksimal özdeğeri daha büyükse, $i_* = 1$ olarak seçilir.
- İkinci matrisin maksimal özdeğeri daha büyükse, $i_* = 2$ olarak seçilir.
- Maksimal özdeğerler eşit ise, $i_* \in \{1, 2\}$ keyfi olarak seçilir.

Daha sonra, seçilen matrisin maksimal özdeğerine karşılık gelen birim özvektör v_* belirlenir. Böylece, verilen $x = x_*$ için, (4.9) eşitsizliğinde maksimumu veren nokta

$$y_* = (i_*, v_*) \in Y$$

olarak bulunmuş olur.

Artık X ve Y kümeleri ile

$$a(y) : Y \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad b(y) : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(y) = 0$$

fonksiyonları tanımlandıktan sonra, önceki bölümde ele alınan minimizasyon problemi,

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} \langle x, a(y) \rangle \quad (4.10)$$

formuna dönüşmüş olur.

Sonuç olarak, Lyapunov eşitsizliğini sağlayan bir $P > 0$ matrisinin varlığı problemi,

$$\varphi(x) < 0$$

eşitsizliğini sağlayan $x \in X$ vektörünün varlığı problemine dönüşmektedir. Eğer (4.10) ile tanımlanan $\varphi(x)$ fonksiyonunun X kümesi üzerindeki minimum değeri negatif ise, böyle bir vektör x daima vardır.

Örnek 4.1.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Bu matris için Lyapunov eşitsizliğini sağlayan $P > 0$ matrisinin varlığını bu bölümde verdiğimiz yöntemle araştıralım.

Burada $n = 3$ olduğundan $d = \frac{n(n+1)}{2} = 6$ olur ve

$$P(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad x \in X = [-1, 1]^6.$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \max\{\lambda_{\max}(A^T P(x) + P(x)A), \lambda_{\max}(-P(x))\}$$

şeklindedir.

Burada iki sorunun cevabını araştıracağız:

- 1) $\varphi(x) < 0$ olacak biçimde $x \in X$ var mıdır?
- 2) $\min_{x \in X} \varphi(x)$ kaçtır?

Bu örnekte

$$Y = \{y = (i, v) : i \in \{1, 2\}, \|v\| = 1, v \in \mathbb{R}^3\}, \quad b(y) = 0, \quad \varphi(x) = \max_{y \in Y} \langle x, a(y) \rangle$$

olarak tanımlanır.

$i = 1$ ise $a(y)$ ifadesi $v^T (A^T P(x) + P(x)A)v$ açılımından, $i = 2$ ise $v^T (-P(x))v$ açılımından gelmektedir.

Örneğin,

$$v^T (-P(x))v = -x_1 v_1^2 - 2x_2 v_1 v_2 - 2x_3 v_1 v_3 - x_4 v_2^2 - 2x_5 v_2 v_3 - x_6 v_3^2$$

olduğundan

$$a(y) = \begin{bmatrix} -v_1^2 & -2v_1 v_2 & -2v_1 v_3 & -v_2^2 & -2v_2 v_3 & -v_3^2 \end{bmatrix}^T$$

şeklindedir. Burada sabitler

$$M = \|A\| = \sqrt{78}, \quad K_1 = \max\{2\sqrt{2}\sqrt{78}, \sqrt{2}\} = 2\sqrt{156}, \quad K_2 = 0$$

olarak bulunur.

Başlangıç olarak $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktasını alalım. Bu noktada

$$\varphi(x^1) = \lambda_{\max}(A^T P(x^1) + P(x^1)A) = 2.38516481$$

maksimum değerini vermekte ve maksimal özdeğere karşılık gelen birim özvektör

$$v^1 = \begin{bmatrix} -0.4706 \\ 0.3946 \\ -0.7892 \end{bmatrix}, \quad i = 1$$

olarak elde edilir. Böylece $y^1 = (1, v^1)$ noktası bulunur ve $a(y^1)$ fonksiyonu elde edilir.

s_1 ve x^2 değerlerini bulmak için

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 6 \\ -6\sqrt{468} \leq t \leq 6\sqrt{468} \\ \langle x, a(y^1) \rangle \leq t \end{cases}$$

LP problemi çözülür.

Bu LP probleminin çözümünden

$$s_1 = -22.41048877, \quad x^2 = (-1, -1, -1, 1, -1, 1)$$

elde edilir.

Sonraki adımlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Durma koşulu için $\varepsilon = 10^{-6}$ alınmıştır.

Tablo 4.1. Örnek 4.1'in iterasyon sonuçları

k	x^k	i^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	1	2.38516481	-22.41048877
2	(-1, -1, -1, 1, -1, 1)	1	7.20630033	-8.02435393
3	(1, 1, 0.099, 1, -1, 1)	1	4.54534170	-5.57828662
4	(1, 0.669, -1, 1, -0.166, 1)	1	4.53000188	-2.72787498
5	(1, 0.048, -1, 0.499, -1, 1)	1	2.65060882	-1.27594930
6	(1, -0.539, 1, 0.991, -0.071, 1)	1	2.23756023	-1.21094463
7	(1, -0.496, 0.721, 0.833, -0.041, 1)	2	-0.11439377	-0.93718196
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31	(1, -0.191, 0.393, 0.700, -0.191, 1)	1	-0.60695500	-0.60695525

$$\min_{x \in X} \varphi(x) \approx \varphi(x^{31}) = -0.606955 < 0$$

olduğundan verilen matris için Lyapunov eşitsizliğini sağlayan bir $P > 0$ matrisi vardır ve bu P matrisi

$$P = P(x^{31}) = \begin{bmatrix} 1 & -0.191 & 0.393 \\ -0.191 & 0.7 & -0.191 \\ 0.393 & -0.191 & 1 \end{bmatrix}$$

için $A^T P + P A < 0$ olduğundan A matrisi Hurwitz kararlıdır.

Burada P matrisi olarak $\varphi(x^k) < 0$ olacak şekilde herhangi bir x^k için $P = P(x^k)$ alınabilir.

Örnek 4.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Bu matris için Lyapunov eşitsizliğini sağlayan $P > 0$ matrisinin var olup olmadığını araştıralım.

Burada $n = 3$ olduğundan bir Örnek 4.1'deki gibi başlangıç olarak $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktasını alalım. Bu noktada

$$\varphi(x^1) = \lambda_{\max}(A^T P(x^1) + P(x^1) A) = 4.74165739$$

maksimum değeri ve maksimal özdeğere karşılık gelen $v^1 = [1, 0, 0]^T$, $i = 1$ birim özvektörü elde edilir. Böylece $y^1 = (1, v^1)$ noktası bulunur.

s_1 ve x^2 değerlerini bulmak için aşağıdaki LP problemi çözülür:

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 6 \\ -24.7386 \leq t \leq 24.7386 \\ \langle x, a(y^1) \rangle \leq t. \end{cases}$$

Bu LP probleminin çözümünden

$$s_1 = -11.03616043, \quad x^2 = (-1, -1, -1, -1, -1, 1)$$

elde edilir.

Bu işlemlerin devamındaki veriler aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Durma koşulu için $\varepsilon = 10^{-6}$ alınmıştır.

Tablo 4.2. Örnek 4.2'nin iterasyon sonuçları

k	x^k	i^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	1	4.74165739	-11.03616043
2	(-1, -1, -1, -1, -1, 1)	2	2.56155281	-1.64522433
3	(-1, 0.624, 1, 1, 1, 1)	1	7.99389445	-1.10591577
4	(0.050, -0.525, 1, 1, 1, 1)	2	1.07207835	-0.76466536
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
104	(0.563, -0.749, 0.064, 1, -0.137, 1)	1	0.00000026	-0.00000007
105	(0.540, -0.734, 0.356, 1, -0.525, 1)	2	0.00000000	-0.00000004

İşlemlere devam edildiğinde, artan k değerleri için $\varphi(x^k)$, pozitif değerlerle sıfıra yaklaşmaktadır. Herhangi bir adımda $\varphi(x^k) < 0$ koşulu sağlanmadığından, verilen matris için Lyapunov eşitsizliğini sağlayan bir $P > 0$ matrisi yoktur. Bu durum, A matrisinin Hurwitz olmadığını gösterir. Gerçekten de A matrisinin özdeğerleri

$$3.184955391, \quad -3.092477696 \pm 2.476971683i$$

şeklinde olup, pozitif gerçel kısmı bir özdeğeri vardır.

5. ORTAK P PROBLEMİ

Bu bölümde, $A_1, A_2, \dots, A_N$ Hurwitz kararlı $n \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\} \quad (5.1)$$

anahtarlama sistemini kararlılığı ele alınacaktır. Buradaki A matrisi, $A_1, A_2, \dots, A_N$ matrislerinden biridir ve bir matristen diğerine geçiş zamanı belli olmayıp keyfidir.

Sistemin (5.1) kararlılığı için yeterli koşul,

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.2)$$

eşitsizliğini sağlayan ortak $P > 0$ matrisinin bulunmasıdır. Bu durumda

$$V(x) = x^T P x$$

fonksiyonu ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonu olur ve (5.1) sistemine kuadratik kararlı sistem denir. Ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonu problemi, literatürde ayrıntılı biçimde incelenmiştir (bkz. [3, 5, 6, 11, 23, 29]).

(5.2) eşitsizliğinden dolayı, P matrisini simetrik matris olarak (pozitif belirlilik koşulu koymadan) aramak yeterlidir. Gerçekten de, P simetrik olup

$$A_1^T P + P A_1 < 0$$

koşulunu sağlıyorsa, Lyapunov Teoremi'nden dolayı $P > 0$ 'dır.

P simetrik matrisini (4.5)'teki gibi

$$P = P(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d = \frac{n(n+1)}{2}$$

biçiminde parametrize edip (5.2) koşulunu

$$\varphi(x) = \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_{\max}(A_i^T P(x) + P(x) A_i) < 0 \quad (5.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece, P matrisinin bulunması problemi (5.3) eşitsizliğini sağlayan $x \in \mathbb{R}^d$ vektörünün bulunması problemine dönüşmektedir. (5.2) eşitsizliğinin P 'ye göre homojen olmasından dolayı,

$$x \in X = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] = [-1, 1]^d$$

almak yeterlidir. O zaman (5.3) problemi,

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} \langle x, a(y) \rangle \quad (5.4)$$

fonksiyonunun X kümesi üzerinde minimizasyonuna dönüşür. Burada

$$Y = \{(i, v) : i \in \{1, 2, \dots, N\}, \|v\| = 1, v \in \mathbb{R}^n\},$$

$b(y) = 0$ ve $a(y)$ fonksiyonu ise sistem matrislerinin girdilerine, i 'ye ve $v = (v_1, \dots, v_n)$ vektörüne kuadratik olarak bağlı sınırlı fonksiyonlardır.

Keyfi bir $x^1 \in X$, $x^1 \neq 0$ ile başlanarak, matrislerin $A_i^T P(x^1) + P(x^1) A_i$ en büyük özdeğerlerinin maksimumu hesaplanır ve buna karşılık gelen birim özvektör v^1 bulunarak, (5.4) eşitliğinde maksimumu veren y^1 elde edilir. Herhangi bir $k \geq 1$ için

$$s_k = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} \langle x, a(y^i) \rangle$$

tanımında minimumu veren vektör $x^{k+1} \in X$ olur ve bu değer LP ile bulunabilir. Eğer $P(x_*) < 0$ olacak şekilde bir $x_* \in X$ mevcutsa, $P(x_*)$ matrisi problemin çözümüdür.

Örnek 5.1. Üç tane Hurwitz kararlı

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 0 & -8 & 0 \\ -5 & -2 & -20 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -8 & 17 & -27 \\ 9 & -44 & 27 \\ 22 & -41 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -2 \\ -6 & -8 & 4 \\ 1 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisleri için ortak $P > 0$ matrisinin varlığı problemini ele alalım. Normlar ve sabitler aşağıdaki gibidir:

$$\|A_1\| = 3\sqrt{62}, \quad \|A_2\| = \sqrt{5997}, \quad \|A_3\| = \sqrt{354}, \quad M = \sqrt{5997},$$

$$K_1 = 2\sqrt{2}M = 219.034, \quad K_2 = 0, \quad \sigma = 536.522.$$

Burada $n = 3$ olduğundan $d = \frac{n(n+1)}{2} = 6$,

$$P(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$$

ve $X = [-1, 1]^6$ olur. Ayrıca $\varphi(x)$ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_{\max}(A_i^T P(x) + P(x) A_i)$$

şeklindedir.

$x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \in X$ noktasıyla başlandığında Tablo 5.1'deki veriler elde edilir.

Tablo 5.1. Örnek 5.1'in iterasyon sonuçları

k	x^k	i^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	2	24.8937684	-144.3735912
2	(-1, 1, 1, 1, -1, -1)	2	190.2717608	-54.8887331
3	(-1, -1, -0.372, 1, -1, 1)	2	39.4685918	-45.1558821
4	(-1, -0.529, 1, 1, 0.543, 1)	2	60.9666850	-28.5059404
5	(0.944, -0.951, 1, 1, -0.491, 1)	2	28.6658390	-20.4621257
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	(0.973, 0.782, -0.052, 1, -0.038, 0.208)	1	0.6000277	-0.4535386
20	(0.709, 0.665, -0.111, 1, -0.117, 0.158)	2	0.2644377	-0.4417241
21	(0.705, 0.660, -0.101, 1, -0.125, 0.166)	3	-0.0254164	-0.4400915
22	(0.822, 0.711, -0.098, 1, -0.103, 0.215)	2	-0.1120943	-0.4336802
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
70	(0.839, 0.694, -0.099, 1, -0.130, 0.300)	3	-0.3595785	-0.3595793

$\varphi(x)$ fonksiyonunun X üzerindeki minimum değeri, $\varepsilon = 10^{-6}$ yaklaşıklıkla 70 adımda hesaplanmıştır ve bu değer negatiftir. $\varphi(x^{21}) < 0$ olduğundan

$$P = P(x^{21}) = \begin{bmatrix} 0.705 & 0.660 & -0.100 \\ 0.660 & 1.000 & -0.124 \\ -0.100 & -0.124 & 0.166 \end{bmatrix}$$

pozitif belirli matrisi, A_1, A_2, A_3 matrisleri için (5.2) Lyapunov eşitsizliklerini sağlayan ortak P matrisidir:

$$A_1^T P + P A_1 = \begin{bmatrix} -1.820 & -2.255 & -2.860 \\ -2.255 & -8.904 & -1.320 \\ -2.860 & -1.320 & -5.440 \end{bmatrix} < 0,$$

$$A_2^T P + P A_2 = \begin{bmatrix} -3.800 & -11.963 & 2.321 \\ -11.963 & -55.392 & 6.378 \\ 2.321 & 6.378 & -1.960 \end{bmatrix} < 0,$$

$$A_3^T P + P A_3 = \begin{bmatrix} -2.480 & -1.419 & 2.340 \\ -1.419 & -1.640 & 1.856 \\ 2.340 & 1.856 & -2.584 \end{bmatrix} < 0.$$

Örnek 5.2 ([9]). Dört tane Hurwitz kararlı

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.6 & -2.5 \\ 2.5 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.3 & 2 \\ -1.0 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3.3 \\ -4.0 & -3.5 \end{bmatrix}$$

matrisleri için ortak $P > 0$ matrisinin varlığı problemini ele alalım. Bu örnek için: $d = 3$, $M = 6.3206$, $K_1 = 17.8773$, $K_2 = 0$ ve $\sigma = 30.9644$. Burada $n = 2$ olduğundan $d = \frac{n(n+1)}{2} = 3$ ve

$$P(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \quad x \in X = [-1, 1]^3$$

olur. Ayrıca $\varphi(x)$ fonksiyonu,

$$\varphi(x) = \max_{1 \leq i \leq 4} \lambda_{\max}(A_i^T P(x) + P(x) A_i)$$

şeklindedir. Başlangıç olarak $x^1 = (1, 0, 0) \in X$ noktasıyla başlandığında Tablo 5.2'deki veriler elde edilir:

Tablo 5.2. Örnek 5.2'nin iterasyon sonuçları

k	x^k	i^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(1.000000, 0.000000, 0.000000)	4	4.3205263	-15.4822479
2	(-1.000000, 0.920929, 1.000000)	1	9.5311631	-2.3580394
3	(1.000000, 0.046874, 1.000000)	1	1.9657435	-1.6431180
4	(1.000000, 0.547295, 0.490280)	3	1.0603764	-0.4873922
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	(1.000000, 0.5871924, 1.000000)	2	-0.1231330	-0.1232134
12	(1.000000, 0.5872273, 1.000000)	1	-0.1232114	-0.1232126
13	(1.000000, 0.5872270, 1.000000)	2	-0.1232126	-0.1232126

$\varphi(x)$ fonksiyonunun X üzerindeki minimum değeri, $\varepsilon = 10^{-6}$ yaklaşıklıkla 13 adımda hesaplanmıştır ve bu değer negatiftir. $\varphi(x^5) < 0$ olduğundan,

$$P = P(x^5) = \begin{bmatrix} 0.955 & 0.538 \\ 0.538 & 1.000 \end{bmatrix}$$

pozitif belirli matrisi, A_1, A_2, A_3, A_4 matrisleri için (5.2) Lyapunov eşitsizliklerini sağlayan ortak P matrisidir:

$$A_1^T P + P A_1 = \begin{bmatrix} -0.366 & -0.157 \\ -0.157 & -0.490 \end{bmatrix} < 0, \quad A_2^T P + P A_2 = \begin{bmatrix} -0.242 & -0.628 \\ -0.628 & -1.848 \end{bmatrix} < 0,$$

$$A_3^T P + P A_3 = \begin{bmatrix} -1.649 & 0.049 \\ 0.049 & -0.448 \end{bmatrix} < 0, \quad A_4^T P + P A_4 = \begin{bmatrix} -2.585 & -2.247 \\ -2.247 & -3.449 \end{bmatrix} < 0.$$

6. RICCATI EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde, Teorem 3.1'in bir uygulaması olarak Riccati matris eşitsizliğinin çözümü ele alınacaktır.

$A, P, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q > 0$ ve $P > 0$ olmak üzere Riccati eşitsizliği

$$A^T P + PA - PBQ^{-1}B^T P + R > 0 \quad (6.1)$$

biçimindedir. Burada P matrisi bilinmeyendir, diğer matrisler ise bilinmektedir. (6.1) ile verilen lineer olmayan matris eşitsizliğini sağlayan P matrisinin varlığı araştırılmaktadır. Bu tür eşitsizlikler, kuadratik amaç fonksiyonlu optimal kontrol problemlerinde, mutlak kararlılık, H_∞ kontrol, lineer kuadratik optimizasyon ve optimal tahmin problemlerinde ortaya çıkmaktadır [4, 18, 20, 26].

Schur Komplement Teoremi'ne göre (Teorem 2.1), (6.1) eşitsizliği aşağıdaki LME'ye eşdeğerdir:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (6.2)$$

Şimdi

$$f_1(P) = - \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad f_2(P) = -P$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (6.2) eşitsizliğinin çözümü,

$$f_1(P) < 0, \quad f_2(P) < 0 \quad (6.3)$$

eşitsizliklerini sağlayan P matrisinin bulunması problemine dönüşür.

$f_1(P)$ ve $f_2(P)$ simetrik matrisler olduklarından, (6.3) eşitsizlikleri,

$$\lambda_{\max}(f_1(P)) < 0, \quad \lambda_{\max}(f_2(P)) < 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada birinci eşitsizlikteki matris $(m + n)$ boyutlu, ikincideki ise n boyutludur. Bu eşitsizlikler ayrıca,

$$\max_{\|u\|=1} u^T f_1(P) u < 0, \quad u \in \mathbb{R}^{m+n}$$

ve

$$\max_{\|v\|=1} v^T f_2(P)v < 0, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde de ifade edilebilir.

$x \in \mathbb{R}^d$, $d = \frac{n(n+1)}{2}$ olmak üzere, P matrisinin $P = P(x)$ parametrizasyonu dikkate alındığında, yukarıdaki eşitsizlikler

$$\varphi(x) = \max_{i=1,2} \{\lambda_{\max}[f_i(P(x))]\} < 0 \quad (6.4)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(f_1(P(x))) &= \max_{\|u\|=1} \left(u^T \begin{bmatrix} -A^T P(x) - P(x)A & -P(x)B \\ -B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} u + u^T \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix} u \right) \\ &= \max_{\|u\|=1} \left((a_1 x_1 + \dots + a_d x_d) + u^T \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix} u \right), \\ \lambda_{\max}(f_2(P(x))) &= \max_{\|v\|=1} (\tilde{a}_1 x_1 + \dots + \tilde{a}_d x_d) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, (6.4) eşitliği

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} \{\langle x, a(y) \rangle + b(y)\} \quad (6.5)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Burada

$$Y = \{(i, u, v) : i \in \{1, 2\}, \|u\| = 1, \|v\| = 1, u \in \mathbb{R}^{m+n}, v \in \mathbb{R}^n\}$$

olup, bir $y_* = (i_*, u_*, v_*) \in Y$ verildiğinde $a(y_*)$ ve $b(y_*)$ şöyle belirlenmektedir:

Eğer $i_* = 1$ ise

$$\begin{aligned} u_*^T \begin{bmatrix} -A^T P(x) - P(x)A & -P(x)B \\ -B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} u_* + u_*^T \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix} u_* = \\ a_1^* x_1 + \dots + a_d^* x_d + b(y_*) = \langle x, a(y_*) \rangle + b(y_*). \end{aligned}$$

Eğer $i_* = 2$ ise

$$v_*^T (-P(x)) v_* = \tilde{a}_1 x_1 + \dots + \tilde{a}_d x_d = \langle x, a(y_*) \rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla, $i_* = 1$ ise $a(y_*)$ ve $b(y_*)$ sadece u_* 'ya bağlıdır; $i_* = 2$ ise $a(y_*)$ sadece v_* 'ye bağlı olup $b(y_*) = 0$ 'dır.

u ve v vektörleri birim yuvar üzerinde, A, B, R ve Q matrisleri ise önceden verilmiş sabit matrisler oldukları için, $a(y)$ ve $b(y)$ fonksiyonları Y kümesi üzerinde sınırlıdır. Başka bir deyişle, öyle K_1 ve K_2 sayıları vardır ki, her $y \in Y$ için

$$\|a(y)\| \leq K_1, \quad |b(y)| \leq K_2$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. Buradaki K_1 ve K_2 sabitleri, yukarıdaki matrislerin girdilerine ve d sayısına bağlı olarak kolayca hesaplanabilir.

Herhangi bir $x_* \in \mathbb{R}^d$ verilsin. (6.4)'te maksimum veren vektör, yani

$$y \mapsto \langle x_*, a(y) \rangle + b(y)$$

fonksiyonunu Y kümesi üzerinde maksimum yapan $y_* = (i_*, u_*, v_*)$ vektörü şöyle bulunur:

Öncelikle $f_1(P(x_*))$ ve $f_2(P(x_*))$ matrislerinin en büyük özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen birim özvektörleri hesaplanır. Daha sonra bu özdeğerler karşılaştırılır. Eğer birinci özdeğer daha büyük ise $i_* = 1$, ikinci özdeğer daha büyük ise $i_* = 2$ olarak seçilir. Özdeğerlerin eşit olması durumunda ise $i_* \in \{1, 2\}$ keyfi olarak seçilebilir.

i_* belirlendikten sonra, ona karşılık gelen birim özvektör u_* ya da v_* ile birlikte üçlü (i_*, u_*, v_*) elde edilir. Bu durumda $i_* = 1$ ise üçlü, v_* vektöründen; $i_* = 2$ ise üçlü, u_* vektöründen bağımsızdır. Başka bir deyişle, birinci durumda v_* , ikinci durumda ise u_* vektörü keyfi birim vektör olarak seçilebilir.

Üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1'i uygulayabilmemiz için, x vektörünü $\mathbb{R}^d$ uzayında kompakt bir kümeye kısıtlamamız gerekmektedir. Örneğin, yeterince büyük bir $\alpha > 0$ sayısı seçilerek

$$x \in X = [-\alpha, \alpha] \times \cdots \times [-\alpha, \alpha] = [-\alpha, \alpha]^d$$

şeklinde kompakt bir küme alınabilir.

Riccati eşitsizliği için genel algoritmayı tekrar edelim:

1. Keyfi bir $x^1 \in X$ seçilip, $f_1(P(x^1))$ ve $f_2(P(x^1))$ matrisleri oluşturulur. Bu matrislerin en büyük özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen birim özvektörler hesaplanarak $a(y^1)$ ve $b(y^1)$ elde edilir. Ardından

$$s_1 = \min_{x \in X} [\langle x, a(y^1) \rangle + b(y^1)] \quad (6.6)$$

tanımlanır ve lineer programlama (LP) yöntemi ile çözülerek minimumu veren $x^2 \in X$ vektörü bulunur.

2. Yukarıdaki işlem x^2 için tekrarlanır ve

$$s_2 = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq 2} [\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)] \quad (6.7)$$

tanımlanır. (6.7) LP yöntemi ile çözülerek, minimumu veren $x^3 \in X$ vektörü bulunur.

3. Genel olarak, k 'inci adımda

$$s_k = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} [\langle x, a(y^i) \rangle + b(y^i)] \quad (6.8)$$

tanımlanıp, (6.8) LP yöntemi ile çözülür. Böylece, (6.8) ifadesinde minimumu veren $x^{k+1} \in X$ vektörü bulunur.

Bu prosedür sonucunda, monoton artan ve üstten sınırlı bir s_k dizisi ile $x^k \in X$ vektör dizisi elde edilir. Üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1'e göre, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi $\{x^{k_m}\}$ vardır ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$s_k \rightarrow s = \min_{x \in X} \varphi(x), \quad x^{k_m} \rightarrow x_*$$

olur. Buradaki x_* noktası, $\varphi(x)$ fonksiyonu için optimal (minimum veren) noktadır.

Örnek 6.1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. Burada $Q > 0$, $\lambda_{\min}(R) < 0$, $\lambda_{\max}(R) > 0$ 'dır.

Bu matrisler için (6.1) veya ona denk olan (6.2) eşitsizliğini sağlayan pozitif belirli bir $P = P(x)$ matrisinin, $x \in X$ olacak şekilde varlığını araştıralım. $n = 3$ olduğundan $d = 6$ ve $X = [-10, 10]^6$ 'dir. Ayrıca Y kümesi,

$$Y = \{y = (i, u, v) : i \in \{1, 2\}, \|u\| = 1, \|v\| = 1, u \in \mathbb{R}^5, v \in \mathbb{R}^3\}$$

olarak tanımlanır. Sabitler: $K_1 = 4\sqrt{10} + \sqrt{2}$, $K_2 = 4\sqrt{3}$, $\sigma = 351.4078$ olarak hesaplanır.

Başlangıç noktası olarak $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \in X$ alalım. Bu noktada

$$\varphi(x^1) = 0, \quad i^1 = 2, \quad u^1 = [0, -0.707, -0.707, 0, 0]^T, \quad v^1 = [0, 1, 0]^T$$

olur ve $y^1 = (2, u^1, v^1)$ elde edilir.

s_1 ve x^2 değerlerini bulmak için

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -10 \leq x_j \leq 10, \quad j = 1, \dots, 6 \\ -351.4078 \leq t \leq 351.4078 \\ \langle x, a(y^1) \rangle + b(y^1) \leq t. \end{cases}$$

LP probleminin çözümünden

$$s_1 = -351.4078870, \quad x^2 = (0, 0, 0, 10, 0, 10)$$

bulunur.

İşlemlere devam edildiğinde Tablo 6.1'deki iterasyon sonuçları elde edilir. $\varphi(x)$

Tablo 6.1. Örnek 6.1'in iterasyon sonuçları

k	x^k	i^k	$\varphi(x^k)$	s_k
1	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	2	0.0000000	-10.0000000
2	(0, 0, 0, 10, 0, 10)	1	6.9567002	-10.0000000
3	(-0.860, -0.186, 0.091, 10, -4.313, -10)	1	45.4782411	-10.0000000
4	(6.113, -0.553, 2.336, 10, -10, 3.698)	1	14.5091411	-10.0000000
5	(10, -7.105, -10, 10, -3.928, -2.138)	1	27.6846723	-9.1844035
6	(10, -10, -2.915, 9.184, -10, 7.287)	1	12.5639101	-5.9990222
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	(0, -7.648, -5.357, 4.529, -0.524, 7.727)	1	1.4938670	-0.1734467
20	(0, -7.740, -5.508, 4.591, -0.543, 7.716)	1	0.1391736	-0.0492437
21	(0, -7.753, -5.514, 4.591, -0.529, 7.718)	1	-0.0340820	-0.0428996
22	(0, -7.746, -5.511, 4.591, -0.526, 7.719)	1	-0.0382727	-0.0411703
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
108	(10, -7.110, 0.977, 5.892, -1.173, 2.781)	1	-0.4882805	-0.4882817
109	(10, -7.110, 0.977, 5.892, -1.173, 2.781)	2	-0.4882808	-0.4882816

fonksiyonunun minimum değeri $\varepsilon = 10^{-6}$ yaklaşıklıkla

$$\min_{x \in X} \varphi(x) \approx -0.4882800$$

olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, $k = 21$ adımında $\varphi(x^{21}) = -0.0340820 < 0$ olduğundan bulunan P matrisi eşitsizliği sağlar. $\varphi(x^{21}) = -0.0340820 < 0$ olduğundan

$$P = P(x^{21}) = \begin{bmatrix} 10.000 & -7.753 & 0.944 \\ -7.753 & 7.178 & -0.529 \\ 0.944 & -0.529 & 1.110 \end{bmatrix}$$

pozitif belirli matrisi için,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.506 & -50.134 & 14.058 & 0.359 & -6.809 \\ -50.134 & 46.276 & -12.348 & 0.483 & 6.649 \\ 14.058 & -12.348 & 6.498 & -1.805 & 0.581 \\ 0.359 & 0.483 & -1.805 & 4.000 & -2.000 \\ -6.809 & 6.649 & 0.581 & -2.000 & 3.000 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri ise

$$0.034, \quad 0.685, \quad 2.236, \quad 7.169, \quad 106.154$$

şeklinde ve tüm özdeğerleri pozitif olduğundan, matris pozitif belirlidir.

Şimdi, $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ lineer matris fonksiyonu ve $C \in \mathcal{S}_n$ sabit bir matris olmak üzere, aşağıdaki eşitsizliği ele alalım:

$$f(P) + C < 0. \quad (6.9)$$

Bu matris eşitsizliğinin $P > 0$ koşulunu sağlayan bir çözümünün varlığı için bazı yeter koşullar verilecektir. Özel olarak, eşitsizliğin $C = 0$ olduğu durumdaki $f(P) < 0$ eşitsizliğinin pozitif belirli çözümünün varlığı [3, 11] çalışmalarında incelenmiştir.

Teorem 6.1. Eğer $f(P) < 0$ eşitsizliğinin $P > 0$ olan bir çözümü varsa, (6.9) eşitsizliğinin de pozitif belirli bir çözümü vardır.

Kanıt. Varsayıma göre, öyle bir $P_* > 0$ matrisi vardır ki,

$$f(P_*) < 0 \quad \text{veya eşdeğer olarak} \quad \lambda_{\max}(f(P_*)) < 0$$

sağlanmaktadır. Şimdi, pozitif k sayısını

$$k \lambda_{\max}(f(P_*)) < -\lambda_{\max}(C)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçelim. Bu durumda

$$k \lambda_{\max}(f(P_*)) + \lambda_{\max}(C) < 0$$

$$\lambda_{\max}[f(kP_*) + C] \leq \lambda_{\max}(f(kP_*)) + \lambda_{\max}(C) < 0$$

elde edilir. Böylece, $f(kP_*) + C < 0$ olur. Sonuç olarak, $kP_* > 0$ matrisi (6.9) eşitsizliğinin pozitif belirli bir çözümüdür. $\square$

Teorem 6.2. Eğer $C > 0$ ise ve $f(P) < 0$ eşitsizliğinin pozitif belirli bir çözümü

yoksa, (6.9) eşitsizliğinin de pozitif belirli bir çözümü yoktur.

Kanıt. Olmayana ergi yöntemiyle; bir $P_* > 0$ için

$$f(P_*) + C < 0$$

olduğunu varsayalım. Buradan,

$$f(P_*) < -C < 0$$

sonucu çıkar. Bu ise, $f(P) < 0$ eşitsizliğinin pozitif belirli çözümü olmadığı varsayımına aykırıdır. Dolayısıyla, varsayımımız yanlıştır ve (6.9) eşitsizliğinin pozitif belirli bir çözümü yoktur. $\square$

Teorem 6.3. Eğer $C < 0$ ise, (6.9) eşitsizliğinin daima bir çözümü vardır.

Kanıt. I birim matris, $k > 0$ ve $P_* = \frac{1}{k}I$ olarak alalım. Ayrıca,

$$a = \lambda_{\max}(f(I))$$

olsun. İki durum inceleyelim:

1. $a \leq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lambda_{\max}(f(I)) + \lambda_{\max}(C) < 0$$

$$\lambda_{\max}(f(I) + C) \leq \lambda_{\max}(f(I)) + \lambda_{\max}(C) < 0$$

elde edilir. Böylece, $P_* = I$ matrisi (6.9) eşitsizliğinin bir çözümüdür.

2. $a > 0$ olsun. Bu durumda,

$$k > \frac{\lambda_{\max}(f(I))}{-\lambda_{\max}(C)}$$

olarak seçersek, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\lambda_{\max}(f(I)) + k \lambda_{\max}(C) < 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\left(f\left(\frac{1}{k}I\right) + C\right) &\leq \lambda_{\max}\left(f\left(\frac{1}{k}I\right)\right) + \lambda_{\max}(C) \\ &= \frac{1}{k}\lambda_{\max}(f(I)) + \lambda_{\max}(C) < 0. \end{aligned}$$

Buradan, $P_* = \frac{1}{k}I$ matrisinin (6.9) eşitsizliğinin çözümü olduğu sonucu çıkar.

Her iki durumda da çözüm bulunduğundan, $C < 0$ koşulunda (6.9) eşitsizliğinin her zaman çözümü vardır. $\square$

Örnek 6.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} < 0$$

matrisleri verilsin. $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{5 \times 5}$,

$$f(P) = \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$a = \lambda_{\max}(f(I)) = 9.611730 > 0, \lambda_{\max}(C) = -0.644392 \text{ ve}$$

$$\frac{\lambda_{\max}(f(I))}{-\lambda_{\max}(C)} = 14.915956$$

olduğundan $k = 15$ için $P = \frac{1}{k}I = \text{diag}[1/15, 1/15, 1/15]$ alınırsa Teorem 6.3'e göre $f(P) + C < 0$ 'dır.

$f(P) + C$ matrisi ve özdeğerleri:

$$f(P) + C = \begin{bmatrix} -2.8667 & 1.2000 & 0.2000 & -0.8667 & -0.8667 \\ 1.2000 & -4.2667 & 1.3333 & 1.9333 & 0.2667 \\ 0.2000 & 1.3333 & -5.0000 & 0.8667 & 1.2000 \\ -0.8667 & 1.9333 & 0.8667 & -3.0000 & 1.0000 \\ -0.8667 & 0.2667 & 1.2000 & 1.0000 & -6.0000 \end{bmatrix}$$

$-7.090, -6.323, -5.014, -2.010, -0.692$ olur.

7. ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU

Simetrik matrislerin maksimal özdeğerlerini minimize etme problemi, konveks ancak türevlenemez bir optimizasyon problemidir. Bu problem; dinamik sistemlerin kararlılık analizinde, kombinatorik optimizasyon problemlerinde, yapı mühendisliğinde, elastik yapıların burkulma analizinde ve maliyet minimizasyonu gibi optimizasyon problemlerinde sıklıkla ortaya çıkar [1, 12, 16, 24, 25].

Bu tür problemlerin genel amaçlı optimizasyon yöntemleriyle doğrudan çözümü zor olduğundan, özel algoritmaların geliştirilmesi önemlidir [16]. [25]'te, maksimal özdeğer minimizasyonu problemi düzgün optimizasyon problemi hâline dönüştürülmüş olsa bile, genel amaçlı optimizasyon algoritmalarının çoğu zaman yetersiz kaldığını belirtmiş ve özel algoritmaların gerekliliğini vurgulamıştır.

Bu bölümde, simetrik matrislerin afin kombinasyonunun maksimal özdeğerinin minimizasyonu problemi için Bölüm 3'de verilen genel minimizasyon yöntemi uygulanacaktır.

$A_0, A_1, \dots, A_m$ matrisleri $n \times n$ boyutunda simetrik matrisler, $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ vektörü ve $A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m$ olmak üzere aşağıdaki optimizasyon problemini ele alalım:

$$g(x) = \lambda_{\max}(A(x)) \rightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (7.1)$$

Burada $g(x)$ fonksiyonu konveks fakat türevlenemezdir. Bu problemin optimal değerini

$$\lambda_{opt} = \inf\{g(x) : x \in \mathbb{R}^m\}$$

ile gösterelim ve varsa optimal noktayı da x_{opt} olarak belirtelim. $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{\|v\|=1} v^T (A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m) v \\ &= \max_{\|v\|=1} (\langle x, a(v) \rangle + b(v)), \end{aligned}$$

burada

$$a(v) = (v^T A_1 v, \dots, v^T A_m v), \quad b(v) = v^T A_0 v$$

olarak tanımlanmıştır.

Önerme 7.1 ([2]). Eğer $\lambda_{opt} > -\infty$ ise, bu optimal değer aşağıdaki aralıkta yer alır:

$$\lambda_{opt} \in [\lambda_{\min}(A_0), \lambda_{\max}(A_0)].$$

$X = \mathbb{R}^m$ kümesi kompakt olmadığı için, problemin çözümüne yönelik olarak

$$X_a = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i| \leq a, i = 1, \dots, m\}$$

kompakt kümesini tanımlayalım ve

$$g_a = \min\{\lambda_{\max}(A(x)) : x \in X_a\} \quad (7.2)$$

olarak belirtelim. Önerme 7.1'den şu sonuç doğrudan elde edilir:

Önerme 7.2. $a \rightarrow \infty$ iken $g_a \rightarrow \lambda_{opt}$ olur. Ayrıca, eğer bir $a_* > 0$ için

$$g_{a_*} < \lambda_{\min}(A_0)$$

ise $\lambda_{opt} = -\infty$ olur.

(7.1) problemini çözmek için a 'yı büyüterek (7.2) problemleri Bölüm 3'deki yöntemle çözülmelidir. Bu esnada, belirli bir noktadan sonra (örneğin $a \geq a_1$ için), küme genişletilmesine rağmen g_a değerinde bir değişim gerçekleşmiyorsa, optimal değer $\lambda_{opt} = g_{a_1}$ olur. Bu durumda, $\lambda_{\max}(A(x))$ fonksiyonuna X_{a_1} kümesi üzerinde minimumu veren nokta x_{opt} olur.

Örnek 7.1 ([2]).

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. Burada $\lambda_{\min}(A_0) = 0$ ve $\lambda_{\max}(A_0) = 2$ 'dir. Şimdi

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad x = (x_1, x_2) \in X = [-1, 1]^2$$

afin simetrik matris ailesini ele alalım.

$$\lambda_{opt} = \min\{\lambda_{\max}(A(x)) : x \in X\}$$

değerini bulalım. Bunun için

$$g(x) = \lambda_{\max}(A(x))$$

fonksiyonunu Bölüm 3'teki yöntemle minimize edeceğiz. Başlangıç noktası olarak

$x^1 = (1, 0) \in X$ alalım. Bu noktada

$$g(x^1) = \lambda_{\max}(A(1, 0)) = 2.41421356$$

olup, karşılık gelen birim özvektör

$$v^1 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

olur. Sonraki noktayı bulmak için

$$\begin{cases} c(x, t) = t \rightarrow \min \\ -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2 \\ -15.63728734 \leq t \leq 15.63728734 \\ \langle x, a(v^1) \rangle + b(v^1) \leq t \end{cases}$$

LP problemi çözüldüğünde $s_1 = -1.94974747$, $x^2 = (-1, -1)$ elde edilir.

İşlemlere bu şekilde devam edildiğinde Tablo 7.1'deki sonuçlar elde edilir ($\varepsilon = 10^{-6}$).

$g(x)$ 'in X üzerindeki minimum değeri 10^{-6} yaklaşıklıkla $g(x^4) = 0.66666667$ şeklinde bulunmuştur ve $x_{opt} = (0.16666667, 0.16666667)$ 'dir.

$a = 100$ ve $a = 10^6$ için aynı işlemler yapıldığında Tablo 7.2 ve 7.3'teki sonuçlar elde edilir.

Burada bulunan $\lambda_{opt} = 0.66666667$ değerinin $[\lambda_{\min}(A_0), \lambda_{\max}(A_0)] = [0, 2]$ aralığında olduğu görülmektedir. Daha çok sayıda, büyük a 'lar için hesaplamalar aynı λ_{opt} ve x_{opt} sonuçlarını vermektedir. Hem bu hem de $\lambda_{opt} \in [\lambda_{\min}(A_0), \lambda_{\max}(A_0)]$ olması λ_{opt} 'nin sonlu ve $\inf_{x \in \mathbb{R}^2} \lambda_{\max}(A(x)) = 0.66666667$ olma ihtimalini güçlendirmektedir.

Tablo 7.1. Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 1$)

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1.000, 0.000)	2.41421356	-1.94974747
2	(-1.000, -1.000)	10.00000000	-1.71291172
3	(-1.000, 0.95215195)	1.20869014	0.66666667
4	(0.16666667, 0.16666667)	0.66666667	0.66666667

Örnek 7.2.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tablo 7.2. Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 100$)

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1, 0)	2.41421356	-22426.113
2	(-10000, -10000)	80002	-20396.059
3	(-10000, 6733.009)	4646.659	0.66666667
4	(0.16666667, 0.16666667)	0.66666667	0.66666667

Tablo 7.3. Örnek 7.1'in iterasyon sonuçları ($a = 10^6$)

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1, 0)	2.41421356	-2242640.394
2	(-1000000, -1000000)	8000002	-2039638.292
3	(-1000000, 673273.382)	464592.293	0.66666667
4	(0.16666667, 0.16666667)	0.66666667	0.66666667

matrisleri için

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in X = [-1, 1]^3$$

afin simetrik matris ailesinin maksimal özdeğerinin minimumunu araştıralım.

Önceki örnekteki yöntemle işlemler $x^1 = (1, 0, 0) \in X$ başlangıç noktasına göre yapıldığında ($\varepsilon = 10^{-6}$) aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

Tablo 7.4. Örnek 7.2'nin iterasyon sonuçları

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1, 0, 0)	2.41421356	-2.80330086
2	(-1, -1, -1)	8.68465844	-2.56130792
3	(-1, 0.994, -1)	2.52660709	-0.16666667
4	(-0.666, 0.833, 1)	-0.16666667	-0.16666667

Burada $g(x^4) = -0.16666667 < \lambda_{\min}(A_0) = 0$ olduğundan, Önerme 7.2'ye göre $\lambda_{opt} = -\infty$ olur.

Örnek 7.3.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in X = [-1, 1]^3$$

afin simetrik matris ailesi verilsin. Burada $\lambda_{\min}(A_0) = -4.117531671$, $\lambda_{\max}(A_0) =$

3.248464231.

Yine önceki örneklerdeki yöntem ile, $x^1 = (1, 0, 0) \in X = [-1, 1]^3$ başlangıç noktası için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 7.5. Örnek 7.3'ün iterasyon sonuçları

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1.000, 0.000, 0.000)	8.94380277	-10.88175477
2	(-1.000, -1.000, -1.000)	7.68513794	-0.04949189
3	(0.6511, -1.000, -1.000)	3.19670469	-0.02598261
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
26	(-0.1837, 0.3950, -0.8601)	1.67250258	1.67250116
27	(-0.1835, 0.3946, -0.8596)	1.67250172	1.67250132

Burada bulunan $\lambda_{opt} = 1.67250172 \in [-4.117531671, 3.248464231]$ ve $x_{opt} = [-0.1835, 0.3946, -0.8596]$ 'dir.

Bu örnekte de çok sayıda, büyük a değerleri için aynı λ_{opt} değeri elde edilmiştir. Bu da elde edilen bu λ_{opt} değerinin doğru olma ihtimalinin yüksek olduğunu gösterir.

Örnek 7.4.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

ve $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ olmak üzere

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad x = (x_1, x_2) \in X$$

afin simetrik matris ailesi için $g(x) = \lambda_{\max}(A(x))$ fonksiyonunun X üzerindeki minimizasyonunu, başlangıç noktası olarak $x^1 = (1, 0) \in X$ ve $\varepsilon = 10^{-6}$ seçerek yaptığımızda Tablo 7.6'daki sonuçlar elde edilmiştir:

Buna göre

$$\lambda_{opt} = 3.98494404, \quad x_{opt} = (0.0118, 0.0848)$$

olarak bulunmuştur.

$$[\lambda_{\min}(A_0), \lambda_{\max}(A_0)] = [-5.261515710, 4.208157954]$$

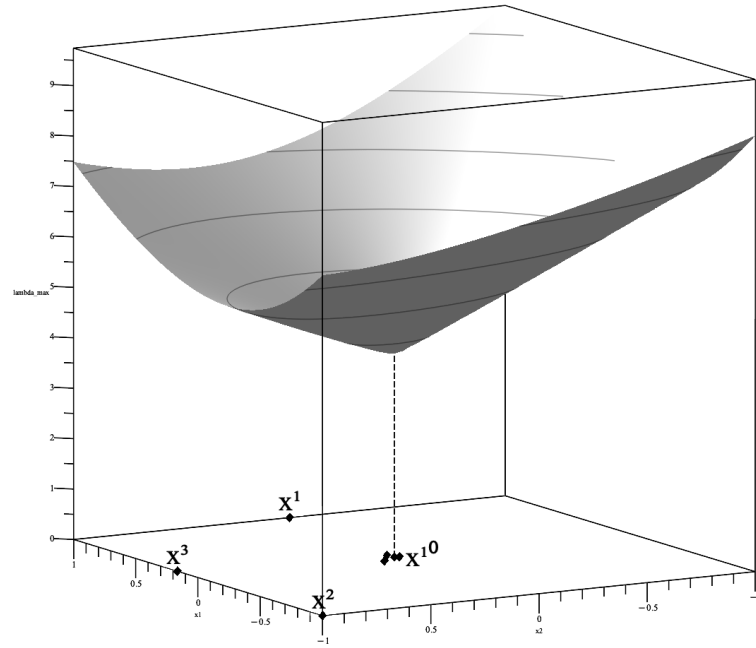
olup bulunan optimal değer $\lambda_{opt} = 3.98494404$ bu aralıktadır. Daha büyük a değerleri

Tablo 7.6. Örnek 7.4'ün iterasyon sonuçları

k	x^k	$g(x^k)$	s_k
1	(1.000000, 0.000000)	7.42808993	-1.12423610
2	(-1.000000, 1.000000)	6.72427007	3.10043825
3	(0.164893, 1.000000)	5.81760820	3.73357846
4	(0.004611, 0.065107)	4.04075050	3.87114683
5	(-0.044112, 0.162418)	4.14241969	3.90825414
6	(0.061872, 0.090504)	4.13857425	3.98451492
7	(0.011951, 0.084895)	3.98535507	3.98481381
8	(0.011756, 0.084873)	3.98513611	3.98494019
9	(0.011828, 0.084781)	3.98495759	3.98494404
10	(0.011828, 0.084786)	3.98494405	3.98494404

için yapılan hesaplamalar da aynı λ_{opt} ve x_{opt} değerlerini vermektedir.

$z = g(x_1, x_2)$ fonksiyonunun grafiği ve bazı iterasyon noktaları Şekil 7.1'de verilmiştir.



Şekil 7.1. $g(x) = \lambda_{\max}(A(x))$ fonksiyonunun grafiği ve bazı iterasyon noktaları

8. FONKSİYON SINIRLARININ HESAPLANMASI

Bu bölümde farklı problemler için temel teoremden (Teorem 3.1) kullanılmış olan $a(y)$ ve $b(y)$ fonksiyonlarının K_1 ve K_2 sınırları hesaplanmaktadır.

Ele alınan genel fonksiyon şöyle verilmiştir:

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} \{ \langle x, a(y) \rangle + b(y) \}.$$

Burada $\|a(y)\| \leq K_1$ ve $|b(y)| \leq K_2$ olduğu varsayılmaktadır. Şimdi ele aldığımız problemler için bu sabitlerin nasıl hesaplandığını görelim.

1. Tek matris için Lyapunov eşitsizliğinde,

$$\varphi(x) = \lambda_{\max}(A^T P(x) + P(x) A) = \max_{\|v\|=1} [v^T (A^T P(x) + P(x) A) v] = \max_{\|v\|=1} \langle x, a(v) \rangle$$

elde edilir. Sabit bir v için $x \mapsto \langle x, a(v) \rangle$ lineer fonksiyoneli ele alalım. Bu fonksiyonelin normu, tanımı gereği $\|a(v)\|$ sayısına eşittir [19].

Öte yandan, fonksiyonel analizden bilindiği üzere bu fonksiyonelin normu

$$\|a(v)\| = \max_{\|x\| \leq 1} |\langle x, a(v) \rangle|$$

eşitliğini sağlar. Buradan

$$\begin{aligned} \|a(v)\| &= \max_{\|x\| \leq 1} |\langle x, a(v) \rangle| = \max_{\|x\| \leq 1} |v^T (A^T P(x) + P(x) A) v| \\ &\leq 2 M \max_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \\ &\leq 2 M \sqrt{2} = 2\sqrt{2} M \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $M = \|A\|$, matrisin Frobenius normudur [14].

Benzer biçimde,

$$|v^T (-P(x)) v| \leq \max_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \sqrt{2}$$

olduğundan, fonksiyonun sınırları olarak aşağıdaki sabitler seçilebilir:

$$K_1 = \max\{2\sqrt{2}M, \sqrt{2}\}, \quad \text{veya} \quad K_1 = 2\sqrt{2}M + \sqrt{2}, \quad K_2 = 0.$$

2. Ortak P problemi için K_1 sınırının hesaplanması ($K_2 = 0$):

$A_1, A_2, \dots, A_N$ matrisleri Hurwitz matrisler olmak üzere, fonksiyonumuz

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_{\max}[A_i^T P(x) + P(x) A_i] \\
&= \max_{1 \leq i \leq N} \max_{\|v\|=1} v^T [A_i^T P(x) + P(x) A_i] v \\
&= \max_{(i,v)} v^T [A_i^T P(x) + P(x) A_i] v \\
&= \max_{(i,v)} \langle x, a(i, v) \rangle
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $y = (i, v)$ gösterimini kullanırsak,

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} \langle x, a(y) \rangle$$

elde edilir. Her $y = (i, v)$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\|a(i, v)\| = \|a(y)\| \leq 2\sqrt{2}\|A_i\| \leq 2\sqrt{2}M,$$

burada

$$M = \max_{1 \leq i \leq N} \|A_i\|$$

alınmıştır.

Sonuç olarak sabitler şu şekilde belirlenebilir:

$$K_1 = 2\sqrt{2}M, \quad K_2 = 0.$$

3. Riccati eşitsizliği problemi için K_1 ve K_2 sınırlarının hesaplanması:

Bu problemler için tanımladığımız fonksiyonlar

$$f_1(P) = - \begin{bmatrix} A^T P(x) + P(x) A & P(x) B \\ B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix},$$

$$f_2(P) = -P(x)$$

idi.

$$Y = \{(i, u) : i = 1, 2, \|u\| = 1\}$$

için $y = (1, u) \in Y$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u^T f_1(P(x))u &= -u^T \begin{bmatrix} A^T P(x) + P(x)A & P(x)B \\ B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} u + u^T \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix} u \\ &= \langle x, a(y) \rangle + b(y) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$x \mapsto \langle x, a(y) \rangle$ lineer fonksiyoneli ele alalım. Bu fonksiyonelin normunu aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \|a(y)\| &= \max_{\|x\| \leq 1} \left| -u^T \begin{bmatrix} A^T P(x) + P(x)A & P(x)B \\ B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} u \right| \\ &\leq \max_{\|x\| \leq 1} \left\| \begin{bmatrix} A^T P(x) + P(x)A & P(x)B \\ B^T P(x) & 0 \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Frobenius normunun

$$\left\| \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|M_1\|^2 + \|M_2\|^2 + \|M_3\|^2 + \|M_4\|^2$$

özellikliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|a(y)\| &\leq \max_{\|x\| \leq 1} \sqrt{\|A^T P(x) + P(x)A\|^2 + 2\|P(x)\|^2\|B\|^2 + 0^2} \\ &\leq \max_{\|x\| \leq 1} \sqrt{4\|A\|^2\|P(x)\|^2 + 2\|P(x)\|^2\|B\|^2} \\ &= \max_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \sqrt{4\|A\|^2 + 2\|B\|^2} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{4\|A\|^2 + 2\|B\|^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $f_2(P) = -P(x)$ ifadesi için benzer şekilde

$$|u^T (-P(x))u| \leq \max_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \sqrt{2}$$

olur. Ayrıca,

$$|b(y)| = |u^T \text{diag}(-R, -Q)u| \leq \sqrt{\|R\|^2 + \|Q\|^2}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak Riccati eşitsizliği problemi için sınırlar,

$$K_1 = \sqrt{2}\sqrt{4\|A\|^2 + 2\|B\|^2}, \quad K_2 = \sqrt{\|R\|^2 + \|Q\|^2}$$

biçiminde belirlenir.

4. Özdeğerlerin minimizasyonu problemi için K_1 ve K_2 sınırlarının hesaplanması:

$\{A_1, \dots, A_m\}$ simetrik matrisler ve

$$Y = \{v : \|v\| = 1\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda_{\max}(x_1 A_1 + \dots + x_m A_m + A_0) \\ &= \max_{\|v\|=1} v^T (x_1 A_1 + \dots + x_m A_m + A_0) v \\ &= \max_{\|v\|=1} (x_1 v^T A_1 v + \dots + x_m v^T A_m v + v^T A_0 v) \\ &= \max_{\|v\|=1} (\langle x, a(v) \rangle + b(v)), \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$a(v) = (v^T A_1 v, \dots, v^T A_m v), \quad b(v) = v^T A_0 v$$

olarak tanımlanmıştır.

Şimdi, $\|a(v)\|$ değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \|a(v)\| &= \sqrt{(v^T A_1 v)^2 + \dots + (v^T A_m v)^2} \\ &\leq |v^T A_1 v| + \dots + |v^T A_m v| \\ &\leq \|A_1\| + \dots + \|A_m\| \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|b(v)| = |v^T A_0 v| \leq \|A_0\|$$

olur.

Sonuç olarak özdeğerlerin minimizasyonu problemi için sınırlar

$$K_1 = \|A_1\| + \dots + \|A_m\|, \quad K_2 = \|A_0\|.$$

şeklinde belirlenir.

9. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Schur Komplement Teoremi'nin teorik ve uygulamalı yönleri ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Tez kapsamında özellikle lineer olmayan matris eşitsizliklerinin, Schur Komplement Teoremi kullanılarak lineer matris eşitsizliklerine dönüştürülmesi problemi incelenmiştir.

Tezin ilk bölümlerinde Schur Komplement Teoremi'nin teorik çerçevesi net bir şekilde ortaya konmuş, takip eden bölümlerde ise bu teoremin uygulama alanları üzerinde durulmuştur. Özellikle matris Riccati eşitsizlikleri, ortak Lyapunov fonksiyonları ve özdeğer minimizasyonu gibi problemlerin çözümünde Schur Komplement Teoremi'nin sağladığı avantajlar, teorik analiz ve sayısal örnekler üzerinde gösterilmiştir. Kullanılan yöntem ve geliştirilen algoritmaların etkinliği, tezde sunulan sayısal örneklerle doğrulanmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] Alizadeh, F. (1992). Optimization over the positive definite cone: Interior-point methods and combinatorial applications. *Advances in Optimization and Parallel Computing*, North-Holland, 1-25.
- [2] Aksoy, B. (2022). *Özdeğerlerin minimizasyonu problemlerinde iç nokta yöntemlerinin uygulanması (Application of interior point methods in minimization problems of eigenvalues)*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.
- [3] Aksoy, B., Büyükköroğlu, T. ve Dzhamfarov, V. (2025). On the numerical verification of a counterexample on parameter-dependent Lyapunov functions. *Applied Mathematics and Computation*, 492, 129246.
- [4] Barabanov, N.E. ve Ortega, R. (2004). On the solvability of extended Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 (4), 598-602.
- [5] Barmish, B.R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*. New York: Macmillan Publishing Company.
- [6] Boyd, S. ve Yang, Q. (1989). Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems. *International Journal of Control*, 49, 2215-2240.
- [7] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. ve Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM Publications.
- [8] Boyd, S. ve Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [9] Büyükköroğlu, T., Esen, Ö. ve Dzhamfarov, V. (2011). Common Lyapunov functions for some special classes of stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56 (8), 1963-1967.
- [10] Dantzig, G.B. ve Thapa, M.N. (1997). *Linear Programming, Vol. 1: Introduction*. New York: Springer-Verlag.
- [11] Dzhamfarov, V. ve Büyükköroğlu, T. (2022). On one inner point algorithm for common Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 167, 105315.
- [12] Fletcher, R. (1985). Semi-definite constraints in optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23, 493-513.
- [13] Hinrichsen, D. ve Pritchard, A.J. (2005). *Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. New York: Springer.
- [14] Horn, R.A. ve Johnson, C.R. (1994). *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [15] İsmayilov, İ.C. (2023). Riccati matris eşitsizliğinin çözümüne dair. *4th International Azerbaijan Congress on Life, Engineering, and Applied Sciences*, 15-18 Eylül, Bakü, Azerbaycan.

- [16] Jarre, F. (1993). An interior-point method for minimizing the maximum eigenvalue of a linear combination of matrices. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31 (5), 1350-1377.
- [17] Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems* (3. basım). New Jersey: Prentice Hall.
- [18] Kissi, K. (2015). Solvability of matrix Riccati inequalities. *arXiv preprint arXiv:1505.04861*.
- [19] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [20] Lancaster, P. ve Rodman, L. (1995). *The Algebraic Riccati Equation*. Oxford: Oxford University Press.
- [21] Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser.
- [22] Marty, K.G. (2000). *Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons.
- [23] Narendra, K.S. ve Balakrishnan, J. (1994). A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 2469-2471.
- [24] Overton, M.L. (1988). On minimizing the maximum eigenvalue of a symmetric matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 9 (2), 256-268.
- [25] Panier, E.R. (1989). *On the Need for Special Purpose Algorithms for Minimax Eigenvalue Problems*. Technical Report, Department of Electrical Engineering, University of Maryland, College Park, MD.
- [26] Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. ve Scherbakov, P.S. (2021). Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty. *Automation and Remote Control*, 82 (4), 1-40.
- [27] Rockafellar, R.T. (1973). *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [28] Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. New York: John Wiley & Sons.
- [29] Shorten, R. ve Narendra, K. (2002). Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16, 709-728.
- [30] Wenyu, S. ve Ya-Xiong, Y. (2010). *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*. New York: Springer.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0009-0008-0398-5219
Adı-Soyadı : İpek Cafer ISMAYILOV
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2018-2022; Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans.
- 2022-2025; Eskişehir Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans.
- 2024 yılından itibaren Marmara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.