



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHWARZ LEMMASI VE BİRİM DİSKTEKİ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZİF KANDEMİR

HAZİRAN

SCHWARZ LEMMASI VE BİRİM DİSKTEKİ UYGULAMALARI

Nazif KANDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

Doç. Dr. Tuğba AKYEL

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Nazif KANDEMİR tarafından hazırlanan “Schwarz Lemması ve Birim Diskteki Uygulamaları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan: Prof. Dr. Ali YAKAR

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye: Prof. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 12/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nazif KANDEMİR

(12.06.2025)

SCHWARZ LEMMASI VE BİRİM DİSKTEKİ UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Nazif KANDEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, klasik Schwarz lemmasının, birim disk üzerinde tanımlanan belirli bir analitik fonksiyon sınıfına uygulamalarını genişleterek geliştirilmiş bir versiyonunu sunulmuştur. Çalışma, belirli koşullar altında bu fonksiyonların $z=1$ sınır noktasındaki açısal türevleri için kesin eşitsizlikler kuran Schwarz lemmasının yeni sınır versiyonlarını içerir. Bu eşitsizlikler $p(z)$ 'nin Taylor açılımının ilk birkaç katsayısı için elde edilir ve kesinlikleri örnekler verilerek gösterilmiştir.

Sayfa Adedi : 26
Anahtar Kelimeler : Analitik fonksiyon, Schwarz lemma, Taylor açılımı, Açısal türev
Danışman : Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

SCHWARZ'S LEMMA AND ITS APPLICATIONS ON UNIT DISK
(M. Sc. Thesis)

Nazif KANDEMİR

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2025

ABSTRACT

In this thesis, an improved version of the classical Schwarz lemma is presented, extending its applications to a certain class of analytic functions defined on the unit disk. The study includes new limit versions of the Schwarz lemma, which establish exact inequalities for the angular derivatives of these functions at the boundary point $z=1$ under certain conditions. These inequalities are obtained for the first few coefficients of the Taylor expansion of $p(z)$ and their exactness is demonstrated by giving examples.

Number of pages : 26
Keywords : Analytic function, Schwarz lemma, Taylor expansion, Angular derivative
Supervisor : Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca engin tecrübe ve bilgi birikimiyle beni yönlendiren ve destek olan değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK ve Doç. Dr. Tuğba AKYEL'e yardımlarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Tez jürimde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini ayırdıkları için Sayın Prof. Dr. Süleyman Dirik ve Sayın Prof. Dr. Ali YAKAR'a çok teşekkür ederim.

Beni her daim maddi ve manevi olarak destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. SCHWARZ LEMMASININ UYGULAMALARI	6
3. SINIRDA SCHWARZ LEMMASININ UYGULAMALARI	11
4. SONUÇLAR	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	26

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
U	Birim disk
∂U	Birim diskin sınırı
$p(z)$	Analitik fonksiyon
d_2	Taylor açılımının katsayısı
d_3	Taylor açılımının katsayısı
$p'(z)$	Açısal türev
$B(z)$	Blaschke Çarpım

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonlar teorisi, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin temel dallarından biri olup, matematiksel araştırmalarda geniş bir etki alanına sahiptir. Bu fonksiyonlar yapısı itibariyle önemli özellikler taşımaktadırlar. Örneğin sonsuz mertebeden türevlenebilir olmaları ve kuvvet serileri ile temsil edilebilmeleri en önemli özellikleri arasındadır. Sahip oldukları özellikler matematik, fizik, bilgisayar, elektronik vb. birçok alanda kritik rol oynamalarında etkilidir. Bu kapsamda birim diskte analitik olan fonksiyonların sınırdeki davranışlarının analizi verimli bir alan olarak karşımıza çıkmaktadır. Riemann Tasvir Teoremi, Hardy Uzayları ve bu tezin ana kaynağı olan Schwarz Lemması gibi önemli teorik sonuçların araştırıldığı birim disk, analitik fonksiyonların incelenmesi için önemli bir bölge konumundadır. Sınır davranışlarını karakterize eden maksimum modül prensibinin bir sonucu olan Schwarz Lemması, birim disk üzerinde tanımlı olan ve orijinde sıfıra dönüşen bir analitik fonksiyonun kendisinin ve türevinin modülünün değerlendirildiği, başka bir deyişle analitik fonksiyonun büyüme kısıtlamalarını veren sonuçları içeren önemli bir sonuçtur. Bu lemma, sadece analitik fonksiyonların değerlendirilmesinde değil, aynı zamanda da açısız koruma ve sabit noktaların karakterizasyonu gibi diğer önemli konuların incelenmesinde de bir temel teşkil etmektedir.

Bu tezde birim disk üzerindeki analitik fonksiyonların belirli bir sınıfı için yeni sonuçlar elde edilmektedir. Özellikle, bu fonksiyonların büyüklük, açısız koruma ve sabit noktalar gibi temel özellikleri üzerine odaklanılmıştır. Schwarz Lemması'nın sunduğu sonuçlar göz önünde bulundurularak, tezde farklı sınırlamalar altında elde edilen yeni sonuçlar ele alınmaktadır. Çalışmada, ifade edilen sınıfa ait analitik fonksiyonlar üzerindeki büyüme sınırlamalarının yapıları analiz edilmiştir. Schwarz Lemması'ndan ilham alınarak, bu fonksiyonların belirli dönüşümler altında nasıl davrandıkları ve bu dönüşümlerin etkileri üzerinde durulmaktadır. Bu yaklaşımlar hem teorik hem de uygulamalı matematikte geniş bir kullanım potansiyeline sahiptir ve gelecekteki çalışmalara önemli bir temel oluşturmaktadır.

$U = \{z : |z| < 1\}$ birim disk ve $\partial U = \{z : |z| = 1\}$ birim diskin sınırı olsun. $f: U \rightarrow U$ bir analitik fonksiyon olsun ve $f(0) = 0$ koşulunu sağlasın. O halde her $z \in U$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca eğer $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ eşitlikleri

sağlanıyorsa bu taktirde $f(z) = ze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir dönme fonksiyonu vardır (Ahlfors, 1979; Dineen, 1989; Markushevich, 2005).

Schwarz Lemması'nda $f(0) = 0$ koşulu esnetildiğinde, özellikle hiperbolik geometride, mesafelerin korunmasına dair uygulamalar içeren Schwarz-Pick Lemması elde edilir (Ahlfors, 1979; Beardon ve Carne, 1992; Osserman 1999; Beardon ve Minda, 2004; Mercer, 2006).

Schwarz Lemması'nın koşulları altında İç Schwarz Lemması olarak isimlendirilen

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|}, \quad |z| < 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, eşitlik hali, z pozitif reel eksen üzerinde olmak üzere $f(z) = z \frac{z+a}{1+az}$, $0 \leq a < 1$ fonksiyonu için gerçekleşmektedir (Mercer, 1997; Osserman, 2000).

Schwarz Lemması uygulama alanlarında da yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin Elektrik Mühendisliği literatüründe yaygın olarak kullanılan empedans fonksiyonlarının pozitif reel fonksiyonlara karşı geldiği bilinmektedir. Schwarz Lemması baz alınarak ve uygun tasvirler kullanılarak süren nokta empedans fonksiyonlarının türevleri ve kendileri arasındaki ilişkiyi ifade eden eşitsizlikler elde edilmiştir (Reza, 1962; Richards, 1947).

Birim diski birim diske $f(0) = 0$ koşulu altında tasvir eden analitik bir fonksiyonun yarıçapı 1'den küçük olan bir diski kendisine tasvir ettiğini; tasvir rotasyon değil ise yarıçapı 1'den küçük olan her bir diski kendisinden kesin olarak daha küçük yarıçaplı bir diske tasvir ettiğini ifade eden Schwarz lemmasının sınır versiyonu da mevcuttur. Sınırdaki Schwarz lemması olarak bilinen bu lemma aşağıdaki şekilde verilir.

1.1. Lemma $f(z)$ fonksiyonu U diskinde analitik, $f(0) = 0$ ve $|z| < 1$ için $|f(z)| < 1$ olsun. Varsayalım ki $f(z)$ fonksiyonu $|f(b)| = 1$ olmak üzere $b \in \partial U$ noktasına sürekli devam ettiriliyor ve $f'(b)$ mevcut olsun. Bu takdirde

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \quad (1.1)$$

ve

$$|f'(b)| \geq 1 \quad (1.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (1.2)'de eşitlik hali sadece $f(z) = ze^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ olduğunda mümkündür. Ayrıca (1.1) eşitsizliğinde eşitlik hali ($z = 1$ olduğunda) $f(z) = z \frac{z+d}{1+dz}, 0 \leq d \leq 1$ fonksiyonu için gerçekleşir (Unkelbach, 1938; Osserman, 2000).

Schwarz Lemması'nın koşullarına ek olarak sınır noktasına sürekli devam koşulu eklenerek geometrik fonksiyonlar teorisinde geniş yer tutan (1.1) ve (1.2) eşitsizlikleri elde edilmiştir (Osserman, 2000). V. N. Dubinin tarafından (1.1) eşitsizliği kuvvetlendirilmiştir (Dubinin, 2004). Ayrıca birim diskle sınırlı kalmaksızın, bir bölgenin sınır noktalarında Schwarz Lemması'nın farklı versiyonlarının incelendiği ve fonksiyonun türevine ilişkin değerlendirmelerin ele alındığı önemli çalışmalar da mevcuttur (Burns ve Krantz, 1994; Chelst, 2001; Krantz, 2011). Özellikle Krantz'ın 2011 yılındaki çalışmasında, çeşitli yazarların çalışmaları da gözden geçirildiği için bu çalışma önemli bir kaynak durumdadır. Bununla birlikte Boas'ın birim diskin sınırında Schwarz Lemması'nın klasik versiyonlarının ele alındığı, uygulamalarla birlikte Schwarz Lemması'nın tarihçesinin sunulduğu çalışma da literatürde önemli bir yer tutmaktadır (Boas, 2017). Sürekli devam koşulu yerine sınır noktasında açılal limitin mevcudluğu koşulu konularak belirli analitik fonksiyon sınıflarında fonksiyonun açılal türevinin değerlendirildiği sonuçlar edilmiştir. (Örnek, 2013; Akyel ve Örnek, 2016; Akyel, 2017; Çatal, 2019; Aydınoglu, 2020; Atlı, 2021; Akyel, 2022).

Uygulamalı bilimlerde de Sınırdaki Schwarz Lemması'nın etkinliğini görmekteyiz. Yapay sinir ağlarında nöronların çıktılarını belirlemede aktivasyon fonksiyonları önemli rol oynamaktadır. Sinir ağının performansını etkileyen aktivasyon fonksiyonu belirleme ve en uygun aktivasyon fonksiyonunu önerme işlemi literatürde önemli bir yere sahiptir. Sınırdaki Schwarz Lemması ile ilişkilendirilerek, belirli veri setleri için iyi sonuçlar veren aktivasyon fonksiyonu elde edilmiştir (Örnek, 2022). Yine Sınırdaki Schwarz Lemması kullanılarak elde edilen pozitif reel fonksiyonların, Elektrik Mühendisliği alanında devre sistemlerinde aktif rol alan empedans fonksiyonları olarak kullanıldığı çalışmalar yapılmıştır (Örnek ve

Düzenli, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b).

Tezdeki sonuçlarda f fonksiyonunun 1 noktasında açısallığının var olması koşulu konularak, f fonksiyonunun 1 noktasında açısallığı incelenmiştir. Bu incelemeler için kullandığımız tanım ve teoremler aşağıda verilmektedir.

1.1. Tanım Köşe noktası 1 hariç, kapanışı birim disk içerisinde yer alan ve $[0,1]$ aralığına göre simetrik olan U 'daki herhangi bir üçgene $1 \in \partial U$ noktasında Stolz açısı denir ve Δ ile gösterilir.

$1 \in \partial U$ olsun. Eğer 1 noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} f(z)$$

mevcut ise o halde f fonksiyonu 1 noktasında $f(1)$ açısallığına sahiptir denir.

Eğer 1 noktasındaki her Stolz açısı için açısallık limiti $f(1)$ ve

$$f'(1) = \lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

mevcut ise o halde f fonksiyonu 1 noktasında $f'(1)$ açısallık türevine sahiptir denir (Pommerenke, 1992).

1.2. Tanım (Blaschke Çarpımı) Blaschke çarpımı, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde birim diskte analitik olan fonksiyonların davranışlarını anlamada, diskin içerisinde sıfırları verilen iç (inner) fonksiyonları karakterize eden güçlü bir araçtır ve Operator Teorisi, Hardy uzayları gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir. Blaschke çarpımı, birim disk içinde sıfırlara sahip ve sınırda modülü 1 olan analitik bir fonksiyon olarak tanımlanır. $|c_k| < 1$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere sonlu bir Blaschke çarpımı

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon birim daireyi kendisine dönüştüren analitik bir fonksiyon olup, sadece $c_1, \dots, c_n$ noktalarında sıfıra sahiptir. $|z| = 1$ için ise $|B(z)| = 1$ eşitliğinin

sağlandığı açıktır. Bu c_k 'ların bazıları tekrarlanabilir. Örneğin bir c_k , m kez tekrar ediyorsa bu durumda $B(z)$ fonksiyonu bu c_k noktasında m . mertebeden sıfıra sahiptir denir. Çoğu zaman c_k noktaları $|c_1| \leq |c_2| \leq \dots \leq |c_n|$ olacak şekilde sıralandırılırlar. Açıktır ki birim dairede analitik olup $c_1, \dots, c_n$ noktalarında sıfıra sahip ve $|f(z)| < 1$ koşulunu sağlayan fonksiyon

$$|f(z)| \leq |B(z)|, \quad |z| < 1 \quad (1.3)$$

ilişkisini sağlar, burada $B(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\bar{c}_k z}$ şeklindedir. (1.3) eşitsizliği maksimum prensibinin bir sonucudur (Markushevich, 2005).

Birim diskte sabit bir noktaya sahip olan analitik fonksiyonların sınır davranışlarını incelemeye olanak sağlayan ve Schwarz-Pick Lemması ile de yakından ilişkili olan Julia-Wolff Lemma olarak bilenen aşağıdaki lemma bu tez çalışmasının en önemli araçlarından biridir. Ayrıca bu lemma Blaschke çarpımlarında, Hardy uzaylarında, iç (inner) fonksiyonlarda ve operatör teorisi gibi alanlarda kritik rol oynamaktadır.

1.2. Lemma (Julia-Wolff Lemma) $f: U \rightarrow U$ analitik fonksiyonu $1 \in \partial U$ noktasında $f(1) \in \partial U$ açısız limitine sahip ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde $f'(1)$ açısız türevi mevcuttur ve $1 \leq |f'(1)| \leq \infty$ sağlanır (Pommerenke, 1992).

Tezde, aşağıdaki bölümde ayrıntılarını vereceğimiz belirli özelliklere sahip analitik fonksiyonlar için Schwarz Lemması uygulanmış ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için Schwarz Lemması'nın sınır versiyonları incelenmiştir.

2. SCHWARZ LEMMASININ UYGULAMALARI

Bu bölümde özel bir sınıfa ait olan analitik fonksiyonun açılımındaki ikinci katsayı için bir üst sınır belirlenecektir. Ayrıca fonksiyonun sıfırdan farklı sıfırlarının göz önüne alındığı durum için de ikinci katsayı üstten değerlendirilecektir.

$p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re\left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}\right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir.

$$w(z) := \frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = 1 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$h(z) = \frac{1 - w(z)}{1 + w(z)} \quad (2.2)$$

fonksiyonunu ele alalım. Açıktır ki $h(z)$ fonksiyonu U birim diskinde analitiktir; $z \in U$ için $|h(z)| < 1$ ve $h(0) = 0$ sağlanır. Bu taktirde Schwarz Lemması'ndan $|h'(0)| \leq 1$ eşitsizliği elde edilir. $w(z)$ fonksiyonunun açılımını $h(z)$ fonksiyonunda göz önüne alırsak

$$h(z) = -\frac{d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots},$$

$$\frac{h(z)}{z} = -\frac{d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots}$$

yazarız. Son eşitlikte $z \rightarrow 0$ koşulunda limite geçilirse ve Schwarz Lemması'nın hükmü göz önüne alınırsa

$$|h'(0)| = \left| \frac{(r+s)d_2}{2} \right| \leq 1$$

ve buradan da

$$|d_2| \leq \frac{2}{|r+s|}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin kesinliğini gösterelim.

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1-z}{1+z}$$

olsun. Son eşitlikte (2.1) açılımını göz önüne alırsak

$$1 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = \frac{1-z}{1+z},$$

$$d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = -\frac{2z}{1+z}$$

ve

$$d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots = -\frac{2}{1+z}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitlikte $z \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerse

$$|d_2| = \frac{2}{|r+s|}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Re\left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}\right) = \Re\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \frac{\frac{1-z}{1+z} + \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}}{2} = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} \geq 0$$

olduğundan başlangıçta aldığımız hipotezin sağlandığı görülür.

Böylece aşağıdaki lemmayı elde etmiş olduk.

2.1. Lemma $p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re\left(\frac{p(rz)-p(sz)}{(r-s)z}\right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. Bu takdirde

$$|d_2| \leq \frac{2}{|r+s|} \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1-z}{1+z}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

Schwarz Lemması, Blaschke çarpımlarıyla doğrudan ilişkilidir. Blaschke çarpımları, birim diskte analitik fonksiyonların sıfırlarını düzenlerken, Schwarz Lemması ise bu sıfırların davranışını incelemekte ve fonksiyonun sınır değerlerine ilişkin sonuçlar sağlamada kullanılmaktadır. Sonlu Blaschke çarpımını kullanarak fonksiyonun sıfırdan farklı sıfırlarını dahil edelim ve $p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ açılımındaki d_2 katsayısının modülünü üstten değerlendirelim.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ birim diskte $1 - \frac{p(rz)-p(sz)}{(r-s)z}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları olsunlar.

$$\vartheta(z) = \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\vartheta(z)$ fonksiyonu U diskinde analiktir; $z \in U$ için $|\vartheta(z)| < 1$ ve $\vartheta(0) = 0$ sağlanır. Bu durumda $\vartheta(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlamaktadır. O halde

$$\vartheta(z) = \frac{1-w(z)}{1+w(z)} = -\frac{d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}},$$

$$\frac{\vartheta(z)}{z} = -\frac{d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{z - c_k}{\bar{c}_k z}},$$

$$|\vartheta'(0)| = \frac{|d_2||r+s|}{2 \prod_{k=1}^n |c_k|} \leq 1$$

ve buradan da

$$|d_2| \leq \frac{2}{|r+s|} \prod_{k=1}^n |c_k|$$

sonucunu elde edilir. Şimdi elde edilen eşitsizliğin eşitlik halini gösterelim.

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1 - z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}$$

fonksiyonunu ele alalım. Sol tarafın açılımını göz önüne alırsak

$$1 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = \frac{1 - z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}},$$

$$d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = -\frac{2z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}$$

ve

$$d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots = -\frac{2 \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \bar{c}_k z}}$$

elde ederiz. Son eşitlikte $z \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerse

$$|d_2| = \frac{2}{|r+s|} \prod_{k=1}^n |c_k|$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bununla birlikte

$$\Re \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) = \Re \left(\frac{1 - z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}} \right) = \frac{1 - \left| z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z} \right|^2}{\left| 1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z} \right|^2} \geq 0$$

olduğundan eşitliği sağlayan fonksiyonun ele alınan sınıfa ait bir fonksiyon olduğu da gösterilmiş olur.

Böylece aşağıdaki lemmayı elde etmiş olduk.

2.2. Lemma $p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir.

Ayrıca $c_1, c_2, \dots, c_n$ birim diskte $1 - \frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları olsunlar. Bu takdirde

$$|d_2| \leq \frac{2}{|r+s|} \prod_{k=1}^n |c_k| \quad (2.4)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1 - z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}$$

fonksiyonu ile elde edilir.

3. SINIRDA SCHWARZ LEMMASININ UYGULAMALARI

Bu bölümde, yukarıda tanımlamış olan analitik fonksiyon için sınırda Schwarz Lemması'nın bir varyantı elde edilecektir. Ayrıca birim diskin sınırında $rp'(r) - sp'(s)$ ifadesinin modülü için bir alt sınır bulunacaktır. Bu sonuçlar (Örnek ve Kandemir, 2024) çalışmasında yer almaktadır.

3.1. Teorem $p(z) = z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re\left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}\right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. Ayrıca $1 \in \partial U$ noktasında $p(z)$ fonksiyonu $p(1)$ açılal limitine sahip ve $p(r) = p(s)$ olsun. O halde

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{|r - s|}{2} \quad (3.1)$$

elde edilir. Eşitlik hali

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r - s)z} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. (2.2)'deki $h(z)$ fonksiyonunu ele alalım. $h(z)$ fonksiyonu Lemma 1.1'in koşullarını sağladığından $1 \leq |h'(1)|$ eşitsizliği doğrudur. O halde

$$1 \leq |h'(1)| = \frac{2|w'(1)|}{|1 + w'(1)|^2} = \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|}$$

ve

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{|r - s|}{2}$$

elde edilir. Bu son ifadenin eşitlik halini gösterelim. Bunun için

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1-z}{1+z}$$

eşitliğinin iki tarafının z değişkenine göre türevini alalım. Bu taktirde

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1-z}{1+z} \right),$$

$$\frac{(rp'(rz) - sp'(sz))(r-s)z - (p(rz) - p(sz))(r-s)}{(r-s)^2 z^2} = \frac{2z}{(1+z)^2}$$

bulunur. $z = 1$ için $p(r) = p(s)$ koşuluyla birlikte

$$|rp'(rz) - sp'(sz)| = \frac{|r-s|}{2}$$

eşitliği elde edilir.

3.2. Teorem $p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. Ayrıca $1 \in \partial U$ noktasında $p(z)$ fonksiyonu $p(1)$ açısallı limitine sahip ve $p(r) = p(s)$ olsun. Bu taktirde

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{2|r-s|}{2 + |r+s||d_2|} \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik hali

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1-z^2}{1+2az+z^2}$$

fonksiyonu için sağlanır. Burada $0 < a = \frac{|d_2||r+s|}{2} \leq 1$ 'dir.

İspat. (2.2)'deki $h(z)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon sınırda Schwarz lemmasının koşullarını sağladığından $\frac{2}{1+|h'(0)|} \leq |h'(1)|$ eşitsizliği doğrudur. Bu taktirde

$$\frac{2}{1 + |h'(0)|} \leq |h'(1)| = \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|}$$

elde edilir. Ayrıca

$$|h'(0)| = \frac{|d_2||r + s|}{2}$$

olduğundan

$$\frac{2}{1 + \frac{|d_2||r + s|}{2}} \leq \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|}$$

ve

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{2|r - s|}{2 + |r + s||d_2|}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliğin kesinliğini gösterelim.

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r - s)z} = \frac{1 - z^2}{1 + 2az + z^2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 3.1'in ispatında yapılabilecek benzer olarak her iki tarafın türevini alıp türevin $z = 1$ noktasındaki değerine bakalım. Bu durumda

$$\frac{|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|} = \frac{1}{1 + a}$$

sonucuna ulaşırız. $0 < a = \frac{|d_2||r + s|}{2} \leq 1$ olduğu için $|rp'(r) - sp'(s)| = \frac{2|r - s|}{2 + |r + s||d_2|}$ eşitliği sağlanır.

3.3. Teorem $p(z) = z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re\left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r - s)z}\right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. Ayrıca

$1 \in \partial U$ noktasında $p(z)$ fonksiyonu $p(1)$ açısall limitine sahip ve $p(r) = p(s)$ olsun. Bu takdirde

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{|r-s|}{2} \left(1 + \frac{2(2 - |d_2||r+s|)^2}{4 - (|d_2||r+s|)^2 + |2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2|} \right) \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.1'de verilen eşitlik fonksiyonu (3.3) için de eşitlik verir.

İspat. (2.2)'deki $h(z)$ fonksiyonunu yeniden çağıralım. Ayrıca $s(z) = z$ olsun. Maksimum prensibine göre her $z \in U$ için $|h(z)| \leq |s(z)|$ doğrudur. Böylece

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{h(z)}{s(z)} = \frac{1 - w(z)}{(1 + w(z))z} = - \frac{d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots}{(2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots)z} \\ &= - \frac{d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots} \end{aligned}$$

fonksiyonu U diskinde analitiktir ve $z \in U$ için $|q(z)| < 1$ eşitsizliği sağlanır. Özel halde

$$|q(0)| = \frac{|d_2||r+s|}{2} \leq 1 \quad (3.4)$$

ve

$$|q'(0)| = \frac{|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2|}{4} \quad (3.5)$$

elde edilir.

$$\theta(z) = \frac{q(z) - q(0)}{1 - \overline{q(0)}q(z)} \quad (3.6)$$

fonksiyonunu dahil edelim. Açıktır ki $\theta(z)$ fonksiyonu sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. O halde $\frac{2}{1+|\theta'(0)|} \leq |\theta'(1)|$ doğrudur ve (3.6)'dan hareketle

$$|\theta'(1)| = \frac{1 - |q(0)|^2}{|1 - \overline{q(0)}q(1)|^2} |q'(1)| \leq \frac{(1 + |q(0)|)(1 - |q(0)|)}{(1 - |q(0)|)^2} |q'(1)| \leq \frac{1 + |q(0)|}{1 - |q(0)|} |q'(1)|$$

elde edilir.

$$\frac{h'(1)}{h(1)} = \left| \frac{h'(1)}{h(1)} \right| = |h'(1)|$$

ve

$$|h'(1)| \geq |s'(1)|$$

olduğundan

$$\frac{2}{1 + |\theta'(0)|} \leq \frac{1 + |q(0)|}{1 - |q(0)|} |q'(1)| \leq \frac{1 + |q(0)|}{1 - |q(0)|} (|h'(1)| - |s'(1)|) \quad (3.7)$$

elde edilir (Golusin, 1966).

$$|\theta'(0)| = \frac{|q'(0)|}{1 - |q(0)|^2} \quad (3.8)$$

olduğundan (3.4) ve (3.5)'i (3.8)'de yerine yazarsak

$$|\theta'(0)| = \frac{\frac{|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2|}{4}}{1 - \left(\frac{|d_2||r + s|}{2}\right)^2} = \frac{|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2|}{4 - (|d_2||r + s|)^2} \quad (3.9)$$

bulunur. (3.9)'u da (3.7)'de göz önüne alırsak

$$\frac{2}{1 + \frac{|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2|}{4 - (|d_2||r + s|)^2}} \leq \frac{2 + |d_2||r + s|}{2 - |d_2||r + s|} \left\{ \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|} - 1 \right\},$$

$$\frac{2(4 - (|d_2||r+s|)^2)}{4 - (|d_2||r+s|)^2 + |2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2|} \frac{2 - |d_2||r+s|}{2 + |d_2||r+s|} + 1 \leq \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r-s|}$$

ve buradan da

$$\left(\frac{2(2 - |d_2||r+s|)^2}{4 - (|d_2||r+s|)^2 + |2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2|} + 1 \right) \frac{|r-s|}{2} \leq |rp'(r) - sp'(s)|$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin kesin olduğunu gösterelim.

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

fonksiyonunu ele alalım. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevini alıp türevin $z = 1$ noktasındaki değerine bakarsak

$$\frac{|rp'(r) - sp'(s)|}{|r-s|} = 1 \quad (3.10)$$

bulunur. Diğer yandan

$$1 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

eşitliğinden

$$d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = -\frac{2z^2}{1 + z^2}$$

elde edilir. Böylece

$$d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots = -\frac{2z}{1 + z^2}$$

eşitliğinden $d_2 = 0$ ve $d_3 = \frac{-2}{r^2 + rs + s^2}$ olduğu aşıkardır. Bu değerleri (3.3)'te yerine yazarsak

eşitsizliğin sağ tarafı

$$\left(\frac{2(2 - |d_2||r + s|)^2}{4 - (|d_2||r + s|)^2 + |2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2|} + 1 \right) \frac{|r - s|}{2} = |r - s|$$

olur. (3.10) ve son eşitlikle gerekini alırız.

3.4. Teorem $p(z) = z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. $1 \in \partial U$ noktasında $p(z)$ fonksiyonu $p(1)$ açısıl limitine sahip ve $p(r) = p(s)$ olsun. Varsayalım ki $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'ler $1 - \frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırlarıdır. Bu taktirde

$$|rp'(r) - sp'(s)| \geq \frac{|r - s|}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|1 - c_k|^2} + \frac{2A^2}{B + C} \right) \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır; burada

$$A = 2 \prod_{k=1}^n |c_k| - |r + s||d_2|, \quad B = 4 \prod_{k=1}^n |c_k|^2 - |r + s|^2 |d_2|^2,$$

$$C = \prod_{k=1}^n |c_k| \left| 2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2 + 2d_2(r + s) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{c_k} \right|$$

şeklindedir. Bu eşitsizlikte eşitlik hali

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r - s)z} = \frac{1 - z^2 \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z^2 \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}$$

fonksiyonu ile sağlanır. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'ler pozitif reel sayılardır.

İspat. $B(z) = z \prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}$ olsun. Maksimum prensibine göre $z \in U$ için $|h(z)| \leq |B(z)|$ eşitsizliği sağlanır.

$$G(z) = \frac{h(z)}{B(z)} = \left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right) \frac{1}{z \prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}}$$

yardımcı fonksiyonunu dahil edelim. $w(z)$ fonksiyonunun açılımını $G(z)$ fonksiyonunda göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(-\frac{d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots} \right) \frac{1}{z \prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}} \\ &= \left(-\frac{d_2(r+s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots}{2 + d_2(r+s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots} \right) \frac{1}{\prod_{k=1}^n \frac{z-c_k}{1-\overline{c_k}z}} \end{aligned}$$

elde edilir. Özel halde

$$|G(0)| = \frac{|r+s||d_2|}{2} \frac{1}{\prod_{k=1}^n |c_k|} \quad (3.12)$$

ve

$$|G'(0)| = \frac{\left| 2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2 + 2d_2(r+s) \sum_{k=1}^n \frac{1-|c_k|^2}{c_k} \right|}{4 \prod_{k=1}^n |c_k|} \quad (3.13)$$

eşitlikleri sağlanır.

$$T(z) = \frac{G(z) - G(0)}{1 - \overline{G(0)}G(z)} \quad (3.14)$$

analitik fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon sınırdaki Schwarz lemmasının koşullarını sağladığından $\frac{2}{1+|T'(0)|} \leq |T'(1)|$ doğrudur. Buradan gerekli hesaplamalarla

$$\frac{2}{1 + |T'(0)|} \leq |T'(1)| = \frac{1 - |G(0)|^2}{\left|1 - \overline{G(0)}G(1)\right|} |G'(1)| \leq \frac{1 + |G(0)|}{1 - |G(0)|} (|h'(1)| - |B'(1)|) \quad (3.15)$$

elde edilir. Ayrıca (3.14)'ten hareketle $|T'(0)| = \frac{|G'(0)|}{1 - |G(0)|^2}$ elde edilir. (3.12) ve (3.13)'ü son eşitlikte yerine yazarsak

$$\begin{aligned} |T'(0)| &= \frac{\left| \frac{2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2 + 2d_2(r + s) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{c_k}}{4 \prod_{k=1}^n |c_k|} \right|}{1 - \left(\frac{|r + s||d_2|}{2} \frac{1}{\prod_{k=1}^n |c_k|} \right)^2} \\ &= \prod_{k=1}^n |c_k| \frac{\left| \frac{2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2 + 2d_2(r + s) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{c_k}}{(2 \prod_{k=1}^n |c_k|)^2 - (|r + s||d_2|)^2} \right|}{|c_k|} \end{aligned}$$

alırız.

$$|B'(1)| = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|1 - c_k|^2}$$

ve tüm bu belirlenen ifadeleri (3.15)'da göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 + \prod_{k=1}^n |c_k|} \frac{\left| \frac{2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2 + 2d_2(r + s) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{c_k}}{(2 \prod_{k=1}^n |c_k|)^2 - (|r + s||d_2|)^2} \right|}{|c_k|} \\ &\leq \frac{2 \prod_{k=1}^n |c_k| + |r + s||d_2|}{2 \prod_{k=1}^n |c_k| - |r + s||d_2|} \left(\frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|} - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|1 - c_k|^2} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{2(2 \prod_{k=1}^n |c_k| - |r + s||d_2|)^2}{4 \prod_{k=1}^n |c_k|^2 - |r + s|^2 |d_2|^2 + \prod_{k=1}^n |c_k|} \left| \frac{2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2 + 2d_2(r + s) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{c_k}}{c_k} \right|$$

$$\leq \frac{2|rp'(r) - sp'(s)|}{|r - s|} - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|1 - \overline{c_k}z|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (3.11) eşitsizliğinin eşitlik halini gösterelim.

$$\frac{p(rz) - p(sz)}{(r - s)z} = \frac{1 - z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}} = -1 + \frac{2}{1 + z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}$$

fonksiyonunu alalım. Her iki tarafın türevini alıp türevin $z = 1$ noktasındaki değerine bakarsak

$$|rp'(r) - sp'(s)| = \frac{|r - s|}{2} \left(2 + \prod_{k=1}^n \frac{1 + c_k}{1 - \overline{c_k}} \right) \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'ler pozitif reel sayıdır. Diğer yandan

$$1 + d_2(r + s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = 1 - \frac{2z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}},$$

$$d_2(r + s)z + d_3(r^2 + rs + s^2)z^2 + \dots = - \frac{2z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}$$

ve

$$d_2(r + s) + d_3(r^2 + rs + s^2)z + \dots = - \frac{2z \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}{1 + z^2 \sum_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z}}$$

elde edilir. Son eşitlikte $z \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerse $d_2 = 0$ ve benzer şekilde

$d_3(r^2 + rs + s^2) = 2 \prod_{k=1}^n |c_k|$ sonucunu elde ederiz. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'ler pozitif reel sayılar

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{|r-s|}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1-|c_k|^2}{|1-c_k|^2} + \frac{2A^2}{B+C} \right) = \frac{|r-s|}{2} \\ & \times \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1-|c_k|^2}{|1-c_k|^2} + \frac{2(2 \prod_{k=1}^n |c_k|^2)^2}{(2 \prod_{k=1}^n |c_k|)^2 + \prod_{k=1}^n |c_k| |2d_3(r^2 + rs + s^2)|} \right) \\ & = \frac{|r-s|}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1-|c_k|^2}{|1-c_k|^2} + \frac{2(2 \prod_{k=1}^n |c_k|^2)^2}{(2 \prod_{k=1}^n |c_k|)^2 + 4(\prod_{k=1}^n |c_k|)^2} \right) \\ & = \frac{|r-s|}{2} \left(2 + \prod_{k=1}^n \frac{1+c_k}{1-c_k} \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son elde edilen eşitlik ve (3.16) ile gereken alınır.

3.5. Teorem $p(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu birim diskte analitik olsun ve $z \in U$ için $\Re \left(\frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z} \right) \geq 0$ koşulu sağlansın. Burada $r, s \in \mathbb{C}, r \neq s, |r| \leq 1, |s| \leq 1$ 'dir. $1 \in \partial U$ noktasında $p(z)$ fonksiyonu $p(1)$ açısallı limitine sahip ve $p(r) = p(s)$ olsun. Varsayalım ki $1 - \frac{p(rz) - p(sz)}{(r-s)z}$ fonksiyonu birim diskte sıfırdan farklı sıfırlara sahip olmasın ve $d_2 > 0$ olsun. Bu takdirde

$$|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r+s)^2| \leq 4 \left| d_2(r+s) \ln \left(\frac{d_2|r+s|}{2} \right) \right| \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $d_2 > 0$ ve $q(z)$ fonksiyonu Teorem 3.3'deki gibi olsun. $\ln q(z)$ fonksiyonunun analitik bir dalını seçelim ve (3.4) eşitliğini göz önüne alalım. O halde

$$\ln q(0) = \ln \left(\frac{d_2 |r + s|}{2} \right) < 0$$

olur.

$$R(z) = \frac{\ln q(z) - \ln q(0)}{\ln q(z) + \ln q(0)}$$

yardımcı fonksiyonunu dahil edelim. Bu fonksiyon Schwarz lemmasının koşullarını sağladığından dolayı $1 \geq |R'(0)|$ eşitsizliği doğrudur. O halde

$$\begin{aligned} 1 \geq |R'(0)| &= \frac{|2 \ln q(0)|}{|\ln q(0) + \ln q(0)|^2} \left| \frac{q'(0)}{q(0)} \right| = \frac{-1}{2 \ln q(0)} \left| \frac{q'(0)}{q(0)} \right| \\ &= - \frac{\frac{|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2|}{4}}{2 \ln \left(\frac{d_2 |r + s|}{2} \right) \frac{d_2 |r + s|}{2}} \end{aligned}$$

ve buradan da

$$|2d_3(r^2 + rs + s^2) - d_2^2(r + s)^2| \leq 4 \left| d_2(r + s) \ln \left(\frac{d_2 |r + s|}{2} \right) \right|$$

sonucu elde edilir.

4. SONUÇLAR

Temel kaynağı Schwarz Lemması ve Sınırdaki Schwarz Lemması olan bu çalışmada, birim diskte analitik olan ve belirli koşulları sağlayan bir analitik fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, bu sınıfa ait bir fonksiyonun Taylor açılımındaki ikinci katsayısı Schwarz Lemması kullanılarak üstten sınırlandırılmıştır. Bu eşitsizliğin eşitlik halini sağlayan ekstremal bir fonksiyon önerilmiş, bu fonksiyonun sınıfa ait olduğu gösterilmiş ve eşitliğin sağlandığı ispatlanmıştır. Ayrıca, sıfırdan farklı sıfır noktalarının dikkate alındığı bir başka durumda da aynı sınıfa ait fonksiyonun ikinci katsayısı için bir üst sınır elde edilmiştir. Bu durumda da eşitliği sağlayan bir fonksiyon örneği verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, belirlenen sınıfa ait analitik fonksiyona bağlı olarak tanımlanan ve iki farklı parametreye bağlı olan bir fark fonksiyonunun birim dairenin bir sınır noktasında açısıl türevinin modülü için bir alt sınır elde edilmiştir. Bu bağlamda dört ayrı sonuç sunulmuş ve her bir eşitsizlik için eşitlik durumları önerilen fonksiyonlar aracılığıyla gösterilmiştir.

Son olarak, çalışmada ele alınan analitik fonksiyonun Taylor açılımındaki ikinci ve üçüncü katsayılar arasındaki ilişkiyi veren bir sonuç elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company Inc.
- Akyel, T. (2022). Estimates for λ -spirallike function of complex order on the boundary, *Ukrainian Mathematical Journal*, 74(1), 3-13.
- Akyel, T. and Örnek, B. N. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary, *Proceedings-Mathematical Sciences*, 126(1), 69-78.
- Akyel, T. and Örnek, B. N. (2017). Some remarks on Schwarz lemma at the boundary, *Filomat*, 31(13), 4139-4151.
- Atli, G. and Örnek, B. N. (2021). Some Results Concerned with Hankel Determinant For $N(\alpha)$ Class. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 36(4), 715-727.
- Aydinoğlu, S. (2020). *Applications of the Jack's lemma for the holomorphic functions*, Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Beardon, A. and Minda, D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, 92(1), 81-104.
- Beardon, A. F. and Carne, T. K. (1992). A strengthening of the Schwarz-Pick inequality, *American Mathematical Monthly*, 99(3), 216-217.
- Boas, H. P. (2010). Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz lemma, *The American Mathematical Monthly*, 117(9), 770-785.
- Burns, D. M. and Krantz, S. G. (1994). Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary. *Journal of The American Mathematical Society*, 7, 661-676.
- Çatal, B. (2019). *Birim dairede holomorfik fonksiyonların sınır davranışı*, Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Dineen, S. (1989). *The Schwarz Lemma*. Oxford University Press.
- Chelst, D. (2001). Generalized Schwarz Lemma at The Boundary, *Proceeding of Mathematical Society*, 129(11), 3275–3278.
- Dubinin, V. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3623-3629.
- Golusin, G. M. (1966). *Geometric Theory of Functions of Complex Variable*, 2nd edn., Moscow.
- Krantz, S. G. (2011). The Schwarz lemma at the boundary, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(5), 455-468.

- Markushevich, A. I. (2005). *Theory of Functions of a Complex Variable*, Part 11. Volume 296 of AMS Chelsea Publishing Series.
- Mercer, P. R. (1997). Sharpened versions of the Schwarz lemma, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 205(2), 508-511.
- Mercer, P. R. (2006). Schwarz-Pick-type estimates for the hyperbolic derivative, *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, 1-6.
- Osserman, R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors lemma. *Manuscripta Mathematica*, 100(2), 123-129.
- Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(12), 3513-3517.
- Örnek, B., Aydemir, S., Düzenli, T. and Ozak, B. (2022). Some remarks on activation function design in complex extreme learning using Schwarz lemma. *Neurocomputing*, 492, 23- 33.
- Örnek, B. and Düzenli, T. (2018a). Bound Estimates for the Derivative of Driving Point. *Filomat*, 32(18), 6211-6218.
- Örnek, B. and Düzenli, T. (2018b). Boundary Analysis for the Derivative of Driving. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 65(9), 1149-1153.
- Örnek, B. and Düzenli, T. (2019a). On boundary analysis for derivative of driving point impedance functions and its circuit applications. *IET Circuits Devices & Systems*, 13(2), 145-152.
- Örnek, B. and Düzenli, T. (2019b). Schwarz lemma for driving point impedance functions and its circuit applications, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 47(6), 813-824.
- Örnek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(6), 2053-2059.
- Örnek, B.N. and Kandemir, N. (2024). Schwarz lemma and its applications on the unit disc, *Gulf Journal of Mathematics* 16(1), 96-108.
- Pommerenke, C. (1992). Boundary behaviour of conformal maps, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 299.
- Reza, F. (1962). A bound for the derivative of positive real functions, *SIAM Review*, 4(1), 40-42.
- Richards, P. I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane, *Duke Mathematical Journal*, 14(3), 777-786.
- Unkelbach, H. (1938). Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, *Mathematische Zeitschrift*, 43(1), 739-742.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Nazif KANDEMİR

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Örnek, B.N. ve Kandemir, N. (2024). Schwarz lemma and its applications on the unit disc, *Gulf Journal of Mathematics* 16(1), 96-108.

