



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SCHWARZ LEMMASININ FARKLI BİR SINIF İÇİN
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURBANU TUĞÇE AKCA

HAZİRAN

**NURBANU
TUĞÇE AKCA**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2025

SCHWARZ LEMMASININ FARKLI BİR SINIF İÇİN UYGULAMALARI

Nurbanu Tuğçe AKCA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Nurbanu Tuğçe AKCA tarafından hazırlanan “Schwarz Lemmasının Farklı bir Sınıf için Uygulamaları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Prof. Dr. Ali YAKAR

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 12/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nurbanu Tuğçe AKCA
(12.06.2025)

SCHWARZ LEMMASININ FARKLI BİR SINIF İÇİN UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Nurbanu Tuğçe AKCA

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ÖZET

Bu tezde, farklı bir analitik fonksiyon sınıfını tanıtacağız ve bu sınıf hakkında yeni sonuçlar elde edeceğiz. Schwarz lemmasını kullanarak, bu sınıftaki fonksiyonlar için ikinci ve üçüncü Taylor katsayılarının üst sınırlarıyla ilgili önemli sonuçlar türetiyoruz. Çalışma, bu sınıftaki fonksiyonların sınır davranışlarını analiz etmek için Julia-Wolff lemmasını uygulayarak daha da zenginleştirilmiştir. Bu bulgular, özellikle açılal limitleri ve sınır türevleri açısından analitik fonksiyonların ve geometrik özelliklerinin daha geniş bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunur.

Sayfa Adedi : 21
Anahtar Kelimeler : Analitik fonksiyon, Schwarz lemma, Taylor açılımı, Açılal türev
Danışman : Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

APPLICATIONS OF SCHWARZ'S LEMMA TO A DIFFERENT CLASS

(M. Sc. Thesis)

Nurbanu Tuğçe AKCA

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2025

ABSTRACT

In this thesis, we will introduce a different class of analytic functions and obtain new results on this class. Utilizing the Schwarz lemma, we derive important results concerning the upper bounds of the second and third Taylor coefficients for functions within this class. The study is further enriched by applying the Julia-Wolff lemma to analyze the boundary behavior of functions in this class. These findings contribute to the broader understanding of analytic functions and their geometric properties, especially regarding their angular limits and boundary derivatives.

Number of pages : 21

Keywords : Analytic function, Schwarz lemma, Taylor expansion, Angular derivative

Supervisor : Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca engin tecrübe ve bilgi birikimiyle beni yönlendiren ve destek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e yardımlarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Tez jürimde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini ayırdıkları için Sayın Prof. Dr. Süleyman DİRİK ve Sayın Prof. Dr. Ali YAKAR'a çok teşekkür ederim.

Beni her daim maddi ve manevi olarak destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Tez sürecimde, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) tarafından yürütülen 2210-Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programları ile desteklenen bir bursiyer olarak TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. SCHWARZ LEMMASI’NIN FARKLI BİR UYGULAMASI	6
3. TEMEL SONUÇLAR	10
4. SONUÇLAR	18
KAYNAKLAR	19
ÖZGEÇMİŞ	21

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
U	Birim disk
∂U	Birim diskin sınırı
$h(z)$	Analitik fonksiyon
b_2	Taylor açılımının katsayısı
b_3	Taylor açılımının katsayısı
$\left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)'_{z=1}$	Açısal türev
$B(z)$	Blaschke Çarpım

1. GİRİŞ

Kompleks analizde, analitik fonksiyonlar ve bu fonksiyonların birim disk üzerindeki davranışları literatürde önemli bir yere sahiptir. Özellikle birim diskin içindeki fonksiyonların sınır noktalarındaki davranışları, bu fonksiyonların geometrik ve analitik özelliklerini incelemek için önemli araçlar sunmaktadır. Bu bağlamda, birim disk içindeki fonksiyonların belirli sınırlamalar altında nasıl davrandığı ve sınır değerlerine yaklaşım biçimleri araştırma konusu haline gelmiştir.

Fonksiyonların disk içinde ve diskin sınırında gösterdiği farklı özelliklerin sonuçlarının ne olduğu kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin önemli sorularından biridir. Birim disk üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların belirli sınır koşulları altında nasıl davrandığına dair teorik çalışmalar, analizin farklı alanlarıyla kesişmektedir. Özellikle fonksiyonların açısallık limitlerini ve sınır noktalarındaki davranışlarını incelemek, bu fonksiyonların dinamik yapısını daha iyi anlamamıza yardımcı olmaktadır.

Çalışmamızda, analitik fonksiyonların sınırlayıcı özellikleri ve bu sınırlamaların çeşitli matematiksel yapılar üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Schwarz Lemması'ndan referansla, bu fonksiyonların belirli dönüşümler altında sergiledikleri davranışlar ve bu dönüşümlerin sonuçları üzerine yeni perspektifler geliştirilmiştir. Elde edilen bu yaklaşımlar hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında geniş bir kullanım alanına sahiptir ve gelecekteki araştırmalar için sağlam bir temel sunmaktadır.

Sonuç olarak, bu çalışma, Schwarz Lemması'nın temel prensiplerinden hareketle, analitik fonksiyonların belirli sınıfları üzerinde elde edilen yeni sonuçları ve bu sonuçların matematiksel teoriye getirdiği katkıları ortaya koymaktadır. Analitik fonksiyonlar üzerine gerçekleştirilen bu tür araştırmalar hem matematiksel anlayışın genişlemesine hem de potansiyel yeni uygulama alanlarının ortaya çıkarılmasına katkıda bulunmaktadır.

Şimdi sonuçlarımızın ispatı için gerekli olan Schwarz Lemması'nı verelim. Maksimum prensibinin bir sonucu olmakla birlikte analitik fonksiyonlar teorisinin temel teoremlerinden olan Schwarz Lemması'nın klasik versiyonunu ifade edelim.

$U = \{z: |z| < 1\}$ birim daire ve $\partial U = \{z: |z| = 1\}$ birim dairenin sınırı olsun.

1.1 Lemma $f: U \rightarrow U$ fonksiyonu $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. O halde her $z \in U$ için

$$|f(z)| \leq |z|$$

ve

$$|f'(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca bir $z \in U$ ($z \neq 0$) noktası için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ eşitlikleri sağlanıyorsa o halde f fonksiyonu bir rotasyondur. Yani f fonksiyonu $f(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ formundadır (Markushevich, 2005).

Schwarz Lemması, matematikte çok yönlü bir araç olarak, birçok farklı alanda çeşitli teorilerin ve sonuçların ispatında kritik bir rol oynamaktadır. Bu nedenle hem saf matematikte hem de uygulamalı bilimlerde geniş bir kullanım alanına sahiptir. (Örnek & Düzenli, 2018; Dineen, 1989; Mercer, 1997). Schwarz Lemması'nda $f(0) = 0$ koşulu kaldırıldığında Schwarz-Pick Lemması elde edilir (Ahlfors, 1979; Osserman, 1999; Beardon ve Minda, 2004; Beardon ve Carne, 1992; Mercer, 1999).

Kompleks analizin merkezi konularından olan Schwarz Lemması'nın önemli uygulama alanlarından birisi de bu lemmanın sınıra uygulanması hakkındadır. Sınırdaki Schwarz Lemması, klasik Schwarz Lemması'nın bir uzantısıdır ve analitik fonksiyonların birim diskin sınırındaki davranışlarıyla ilgilenir. Klasik Schwarz Lemması, birim disk içinde tanımlı ve belirli koşulları sağlayan analitik fonksiyonlar için bazı önemli sınırlamalar getirir; sınırdaki Schwarz Lemması ise bu sınırlamaların birim diskin sınırına nasıl genelleştirilebileceğini ele alır. Fonksiyonların birim disk içindeki davranışını sınır noktalarına genişletmek önemli bir adımdır; çünkü birçok analitik fonksiyon sınırdaki ilginç ve önemli sonuçlar doğurabilecek özellikler gösterebilir.

Birim disk üzerindeki bir analitik fonksiyonun sınırdaki davranışını ele almak için fonksiyonun sınırdaki açısallık limitleri incelenir. Dolayısıyla Julia-Wolff Lemması gibi güçlü araçlar devreye girebilir. Sınırdaki Schwarz Lemması, analitik fonksiyonun sınırdaki bir noktaya yakınsarken nasıl davrandığını sınırlayan bir sonuçtur.

Schwarz Lemmasının sınır versiyonu en klasik hali ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

1.2 Lemma $f: U \rightarrow U$ analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Varsayalım ki $f(z)$ fonksiyonu $|f(1)| = 1$ olmak üzere $1 \in \partial U = \{z: |z| = 1\}$ noktasına sürekli devam ettiriliyor ve $f'(1)$ mevcuttur. Bu takdirde

$$|f'(1)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \geq 1 \quad (1.1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir (Osserman, 2000; Unkelbach, 1938).

Dubinin, Osserman'ın bulduğu fonksiyonun sıfırdan farklı sıfırlarını da hesaba katarak (1.1)'i daha da kuvvetlendirmiştir (Dubinin, 2004). Ayrıca, sınırda Schwarz Lemma ile ilgili çalışmalar güncelliğini devam ettirmektedir (Akyel ve Örnek, 2016; Atlı ve Örnek, 2021; Aydınoglu, 2020; Azeroğlu ve Örnek, 2013; Boas, 2010; Örnek, 2013; Örnek ve Düzenli, 2018, Krantz, 2011).

Tezdeki sonuçlarda fonksiyonunun $z = 1 \in \partial U$ noktasında açısallıkta sahip olması koşulu konularak, fonksiyonun $z = 1 \in \partial U$ noktasında açısallık türevi incelenmiştir. Bu incelemeler için kullandığımız tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

1.3 Tanım Köşe noktası 1 hariç, kapanışı birim disk içerisinde yer alan ve $[0,1]$ aralığına göre simetrik olan U 'daki herhangi bir üçgene $1 \in \partial U$ noktasında Stolz açısı denir ve Δ ile gösterilir.

Çalışmada açısallık limit ve açısallık türev notasyonları temel unsurlardır. $1 \in \partial U$ olsun. 1 noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} f(z)$$

mevcut ise o halde f fonksiyonu 1 noktasında $f(1)$ açısallık limitine sahiptir denir.

Eğer 1 noktasındaki her Stolz açısı için açısıl limit $f(1)$ ve

$$f'(1) = \lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

mevcut ise, o halde f fonksiyonu 1 noktasında $f'(1)$ açısıl türevine sahiptir denir (Pommerenke, 1992).

Çalışmamızın bir başka önemli unsuru da analitik fonksiyonun sıfırlarını ifade ederken kullanacağımız sonlu Blaschke çarpımıdır. Hardy Uzayları, fonksiyonel analiz ve geometrik fonksiyonlar teorisinde geniş bir uygulama alanına sahip olan Blaschke çarpımı birim dairede tanımlı sınırlı bir analitik fonksiyondur. Sonlu Blaschke çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^n \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k}z} \quad (1.2)$$

$B(z)$ fonksiyonu birim daireyi kendisine dönüştüren bir analitik fonksiyon olup, sadece $c_0, c_1, \dots, c_n$ noktalarında sıfıra sahiptir. $|z| = 1$ için ise $|B(z)| = 1$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu c_k 'lerin bazıları tekrarlanabilir. Örneğin, bir c_k , p kez tekrar ediyorsa bu durumda $B(z)$ fonksiyonunun c_k noktasında p . mertebeden sıfırı vardır.

Bu tezde sonlu Blaschke çarpımları incelenmiş ve bu çarpımların farklı biçimlerde ifade edilebildiği gösterilmiştir. Sonlu Blaschke çarpımlarının en belirgin özelliği, birim çember üzerindeki tüm noktalar için modüllerinin 1 olmasıdır. Buna karşılık, sonsuz Blaschke çarpımları iç fonksiyonlar olup, sınırdaki sonsuz sayıda noktada limit değerlerinin modülü 1 olmayabilir (Markushevich, 2005).

Bu çalışmada, belirtilen eşitsizlikler daha geniş fonksiyon sınıflarına genellenmiştir. Ayrıca açısıl limitin varlığına dair şartın yer alması, açısıl limit ile ilgili olan Julia-Wolff teorisinin uygulanmasını gerektirmiştir.

Julia-Wolff Lemma: $f: U \rightarrow U$ analitik fonksiyonu $1 \in \partial U$ noktasında $f(1) \in \partial U$ açısıl limitine sahip ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde $f'(1)$ açısıl türevi mevcuttur ve $1 \leq$

$|f'(1)| \leq \infty$ 'dir (Pommerenke, 1992).

Julia-Wolff teorisi, açısallık limitlerle ilgili olarak Schwarz Lemması'nın güçlü bir şekilde uygulandığı alanlardan biridir. Schwarz Lemması, bir fonksiyonun belirli sınır noktalarındaki büyüme hızını kontrol etmeye yarayan önemli bir araçtır. Julia-Wolff teorisinde de, bir fonksiyonun açısallık limitlerinin mevcudluğu ve büyüme özellikleri incelenirken Schwarz Lemması kritik bir rol oynar.

Bu tezde, aşağıdaki bölümde vereceğimiz yeni bir sınıf için Schwarz Lemması'nın uygulaması ve Schwarz Lemması'nın sınır versiyonları incelenmiştir.



2. SCHWARZ LEMMASI'NIN FARKLI BİR UYGULAMASI

Bu bölümde, tanımlayacağımız yeni bir fonksiyon sınıfı için Schwarz Lemması'nın nasıl uygulanabileceğini göstereceğiz. Amacımız, verilen analitik fonksiyonun Taylor serisindeki ikinci terimin katsayısı için bir üst sınır elde etmektir. Ayrıca fonksiyonun açılal limitin var olması koşulu altında, sınır noktasında açılal türevleri için bir alt sınır bulmayı amaçlıyoruz. Bu sonuçları göstermek için kullanacağımız sınıfı tanımlayalım.

S, U birim diskinde analitik olan $h(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$ fonksiyonlar sınıfını gösterebiliriz. Ayrıca $M(\alpha, \theta)$, $z \in U$ ve bazı $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ için

$$\sum_{p=1}^{\infty} (p+1 + |p+1 - 2\alpha e^{-i\theta}|) |b_{p+1}| \leq 1 - |1 - 2\alpha e^{-i\theta}| \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayan tüm $h(z) \in S$ fonksiyonlarının içerildiği alt sınıf olsun. Burada $0 < \alpha \leq \cos \theta$ 'dir. $h(z) \in M(\alpha, \theta)$ ve

$$\vartheta(z) = \frac{2\alpha e^{-i\theta}}{f(z)} - 1, \quad f(z) = \frac{zh'(z)}{h(z)}$$

olsun. Burada $f(z) = 1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + (b_2^3 - 3b_2 b_3 + 3b_4)z^3 + \dots$ şeklindedir. $\vartheta(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik ve $\vartheta(0) = 2\alpha e^{-i\theta} - 1$ 'dir. Şimdi $z \in U$ için $|\vartheta(z)| < 1$ olduğunu gösterelim. $\vartheta(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonlarının tanımlarından

$$\vartheta(z) = \frac{2\alpha e^{-i\theta}}{f(z)} - 1 = \frac{2\alpha e^{-i\theta} - f(z)}{f(z)} = \frac{2\alpha h(z) - e^{i\theta} zh'(z)}{e^{i\theta} zh'(z)}$$

elde ederiz. $h(z)$ fonksiyonun açılımını son eşitlikte göz önüne alalım. O halde

$$|\vartheta(z)| = \left| \frac{2\alpha(z + \sum_{p=1}^{\infty} b_{p+1} z^{p+1}) - e^{i\theta} z(1 + \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)b_{p+1} z^p)}{e^{i\theta} z(1 + \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)b_{p+1} z^p)} \right|$$

$$= \left| \frac{2\alpha e^{-i\theta} - 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (2\alpha e^{-i\theta} - (p+1))b_{p+1}z^p}{1 + \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)b_{p+1}z^{p+1}} \right|$$

ve

$$|\vartheta(z)| \leq \frac{|1 - 2\alpha e^{-i\theta}| + \sum_{p=1}^{\infty} |p+1 - 2\alpha e^{-i\theta}| |b_{p+1}|}{1 - \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)|b_{p+1}|} \quad (2.2)$$

sonucu elde ederiz. (2.1) eşitsizliğinden,

$$|1 - 2\alpha e^{-i\theta}| \leq 1 - \sum_{p=1}^{\infty} (p+1 + |p+1 - 2\alpha e^{-i\theta}|) |b_{p+1}|$$

olduğu açıktır. Bu ifadeyi (2.2)'de göz önüne alırsak $|z| < 1$ için $|\vartheta(z)| < 1$ sonucuna ulaşırız.

$$\omega(z) = \frac{\vartheta(z) - \vartheta(0)}{1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(z)}$$

fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon analitik olup $\omega(0) = 0$ ve $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ koşullarını sağlamaktadır. Dolayısıyla bu koşullar altında $\omega(z)$ fonksiyonuna Schwarz Lemması'nı uygulayabiliriz. Bu taktirde

$$|\omega'(0)| = \frac{|\vartheta'(0)|}{1 - |\vartheta(0)|^2} \leq 1$$

elde edilir. Ayrıca $|\vartheta(0)| = |2\alpha - e^{i\theta}|$ ve $|\vartheta'(0)| = 2\alpha|f'(0)|$ olduğu için

$$\frac{2\alpha|f'(0)|}{1 - |2\alpha - e^{i\theta}|^2} \leq 1$$

ve buradan da

$$|f'(0)| \leq \frac{1 - |2\alpha - e^{i\theta}|^2}{2\alpha}$$

sonucu elde edilir.

$$1 - |2\alpha - e^{i\theta}|^2 = 1 - (4\alpha^2 - 4\alpha \cos \theta + 1) = 4\alpha \cos \theta - 4\alpha^2 = 4\alpha(\cos \theta - \alpha)$$

ve $|f'(0)| = |b_2|$ olduğundan

$$|b_2| \leq 2(\cos \theta - \alpha)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $h(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki ikinci katsayı olan b_2 için aşağıdaki lemmayı elde etmiş olduk.

2.1 Lemma Eğer $h \in M(\alpha, \theta)$ ise

$$|b_2| \leq 2(\cos \theta - \alpha) \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırlarını dikkate alalım ve

$$\theta(z) = \frac{\omega(z)}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \overline{c_i}z}}$$

fonksiyonunu dahil edelim. $\omega(z)$ fonksiyonunun Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığını biliyoruz. $\omega(0) = 0$ koşulundan $\theta(0) = 0$ alınır. Ayrıca $\theta(z)$ fonksiyonuna birim dairede maximum modül prensibi uygulanırsa $|z| < 1$ için $|\theta(z)| < 1$ elde edilir. Bu taktirde $\theta(z)$ fonksiyonunun da Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığı görülür. Hüküm gereğince $|\theta'(0)| \leq 1$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$\theta(z) = \frac{\vartheta(z) - \vartheta(0)}{1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(z)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \overline{c_i}z}}$$

$$= \frac{-2\alpha e^{-i\theta}(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \overline{c_i} z}}$$

$$\frac{\Theta(z)}{z} = \frac{-2\alpha e^{-i\theta}(b_2 + (2b_3 - b_2^2)z + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \overline{c_i} z}}$$

$$|\theta'(0)| = \frac{2\alpha|b_2|}{(1 - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2) \prod_{i=1}^n |c_i|} \leq 1$$

ve

$$|b_2| \leq \frac{(1 - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2) \prod_{i=1}^n |c_i|}{2\alpha} = 2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i|$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

2.2 Lemma Eğer $h \in M(\alpha, \theta)$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n$, $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olan sıfırları ise

$$|b_2| \leq 2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i| \quad (2.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu lemma, $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun sıfırları dikkate alındığında b_2 katsayısı için daha güçlü bir üst sınır sağlar.

3. TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde, $M(\alpha, \theta)$ sınıfı için sınırdaki Schwarz Lemması'nın çeşitli versiyonlarını tartışacağız. Ayrıca farklı bir analitik fonksiyon sınıfında açısallık limitinin varlığı koşulu altında birim diskin sınır noktasında açısallık türevinin modülü için tahminler elde edeceğiz (Akca ve Örnek, 2024).

3.1 Teorem $h \in M(\alpha, \theta)$ olsun. Ayrıca $1 \in \partial U$ noktasında $h(z)$ fonksiyonu $h(1)$ açısallık limitine sahip ve $h'(1) = \frac{\alpha}{\cos \theta} h(1)$ olsun. Bu takdirde

$$\left| \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)' \right|_{z=1} \geq \frac{\cos \theta - \alpha}{2 \cos^2 \theta} \quad (3.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat:

$$\omega(z) = \frac{\vartheta(z) - \vartheta(0)}{1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(z)}, \quad \vartheta(z) = \frac{2\alpha e^{-i\theta}}{f(z)}, \quad f(z) = \frac{zh'(z)}{h(z)}$$

şeklinde yazalım. $\omega(z)$ fonksiyonun türevini aldığımızda

$$\omega'(z) = \frac{1 - |\vartheta(0)|^2}{(1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(z))^2} \vartheta'(z)$$

elde ederiz. Ayrıca $h'(1) = \frac{\alpha}{\cos \theta} h(1)$, $\vartheta(0) = 2\alpha e^{-i\theta} - 1$, $\vartheta(1) = e^{-2i\theta}$ ve $|\omega(1)| = 1$ olduğundan $\omega(z)$ fonksiyonu Lemma 1.2'nin koşullarını sağlar. O halde $1 \leq |\omega'(1)|$ eşitsizliği sağlanır. Buradan hareketle

$$1 \leq |\omega'(1)| = \frac{1 - |\vartheta(0)|^2}{|1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(1)|^2} |\vartheta'(1)| = \frac{1 - |2\alpha e^{-i\theta} - 1|^2}{|1 - (2\alpha e^{-i\theta} - 1)e^{-2i\theta}|^2} 2\alpha \frac{|f'(1)|}{|f(1)|^2}$$

$$= \frac{4\alpha(\cos\theta - \alpha)}{(2\alpha - 2\cos\theta)^2} 2\alpha \frac{|f'(1)|}{\left(\frac{\alpha}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta - \alpha} |f'(1)|,$$

$$|f'(1)| \geq \frac{\cos\theta - \alpha}{2\cos^2\theta}$$

ve

$$\left| \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)' \right|_{z=1} \geq \frac{\cos\theta - \alpha}{2\cos^2\theta}$$

elde edilir.

3.2 Teorem Teorem 3.1'in koşulları altında

$$\left| \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)' \right|_{z=1} \geq \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{2(\cos\theta - \alpha)^2}{2(\cos\theta - \alpha) + |b_2|} \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\omega(z)$ fonksiyonu daha önce tanımladığımız gibi olsun. Lemma 1.2'den

$$\frac{2}{1 + |\omega'(0)|} \leq |\omega'(1)| = \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta - \alpha} |f'(1)|$$

elde edilir. Ayrıca $|\omega'(0)| = \frac{|b_2|}{2(\cos\theta - \alpha)}$ olduğundan

$$\frac{2}{1 + \frac{|b_2|}{2(\cos\theta - \alpha)}} \leq \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta - \alpha} |f'(1)|$$

ve

$$|f'(1)| \geq \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{2(\cos \theta - \alpha)^2}{2(\cos \theta - \alpha) + |b_2|}$$

sağlanır.

$h(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki b_3 katsayısını hesaba katarak Teorem 3.2'deki eşitsizliği aşağıdaki şekilde kuvvetlendirebiliriz.

3.3 Teorem Teorem 3.1'in koşulları altında

$$\left| \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)' \right|_{z=1} \geq \frac{\cos \theta - \alpha}{2 \cos^2 \theta} \left(1 + \frac{2(2(\cos \theta - \alpha) - |b_2|)^2}{4(\cos \theta - \alpha)^2 - |b_2|^2 + |2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|} \right) \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\omega(z)$ fonksiyonu yukarıda verildiği gibi ve $\Psi(z) = z$ olsun. Maksimum prensibi gereği, $z \in U$ için $|\omega(z)| \leq |\Psi(z)|$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\omega(z)}{\Psi(z)} = \frac{1}{z} \left(\frac{\vartheta(z) - \vartheta(0)}{1 - \overline{\vartheta(0)}\vartheta(z)} \right) \\ &= \frac{1}{z} \frac{-2\alpha e^{-i\theta}(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{-i\theta}|^2 + (2\alpha e^{-i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \\ &= \frac{-2\alpha e^{-i\theta}(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu fonksiyon birim diskte analitik ve modülü birden küçüktür. Özel halde

$$|\phi(0)| = \frac{2\alpha|b_2|}{1 - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2} = \frac{|b_2|}{2(\cos \theta - \alpha)} \leq 1 \quad (3.4)$$

ve

$$|\phi'(0)| = \frac{|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|}{4(\cos \theta - \alpha)^2}$$

sağlanır.

$$\varphi(z) = \frac{\phi(z) - \phi(0)}{1 - \overline{\phi(0)}\phi(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon sınırdaki Schwarz Lemma'sının koşullarını sağladığından dolayı

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + |\varphi'(0)|} &\leq |\varphi'(1)| = \frac{1 - |\phi(0)|^2}{|1 - \overline{\phi(0)}\phi(1)|^2} |\phi'(1)| \leq \frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|} \left| \frac{\omega'(1)}{\Psi(1)} - \frac{\omega(1)\Psi'(1)}{\Psi^2(1)} \right| \\ &= \frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|} \left| \frac{\omega(1)}{\Psi(1)} \right| \left| \frac{\omega'(1)}{\omega(1)} - \frac{\Psi'(1)}{\Psi(1)} \right| \leq \frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|} \{|\omega'(1)| - |\Psi'(1)|\} \\ &= \frac{2(\cos \theta - \alpha) + |b_2|}{2(\cos \theta - \alpha) - |b_2|} \left(\frac{2 \cos^2 \theta}{\cos \theta - \alpha} |f'(1)| - 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\varphi'(0)| &= \frac{|\phi'(0)|}{1 - |\phi(0)|^2} = \frac{\frac{|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|}{4(\cos \theta - \alpha)^2}}{1 - \left(\frac{|b_2|}{2(\cos \theta - \alpha)} \right)^2} \\ &= \frac{|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|}{4(\cos \theta - \alpha)^2 - |b_2|^2} \end{aligned}$$

olduğu için

$$\frac{2}{1 + \frac{|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|}{4(\cos \theta - \alpha)^2 - |b_2|^2}} \leq \frac{2(\cos \theta - \alpha) + |b_2|}{2(\cos \theta - \alpha) - |b_2|} \left(\frac{2 \cos^2 \theta}{\cos \theta - \alpha} |f'(1)| - 1 \right)$$

$$\frac{2(2(\cos \theta - \alpha) - |b_2|)^2}{4(\cos \theta - \alpha)^2 - |b_2|^2 + |2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|} \leq \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos \theta - \alpha} |f'(1)| - 1$$

ve

$$|f'(1)| \geq \frac{\cos \theta - \alpha}{2 \cos^2 \theta} \left(1 + \frac{2(2 \cos \theta - \alpha) - |b_2|^2}{4(\cos \theta - \alpha)^2 - |b_2|^2 + |2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|} \right)$$

sonucu elde edilir. $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'dan farklı sıfırları varsa bu sıfırlar dikkate alınarak (2.3) eşitsizliği başka bir şekilde güçlendirilebilir. Bu durum aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

3.4 Teorem Teorem 3.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca $c_1, c_2, \dots, c_n$, $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları olsun. Bu taktirde

$$\left| \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right)' \right|_{z=1} \geq \frac{\cos \theta - \alpha}{2 \cos^2 \theta} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{|1 - c_i|^2} + \frac{(2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i| - |b_2|)^2}{\left(((2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i|)^2 - |b_2|^2) + \prod_{i=1}^n |c_i| \left| 2(\cos \theta - \alpha) (2b_3 - b_2^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i}) - b_2^2 e^{i\theta} \right| \right)} \right) \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\omega(z)$ fonksiyonu yukarıda tanımlandığı gibi olsun ve $c_1, c_2, \dots, c_n$, $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun U 'da sıfırdan farklı sıfırları olsun. Ayrıca

$$\mathbb{Q}(z) = z \prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \bar{c}_i z}$$

fonksiyonunu düşünelim. Maksimum modül ilkesine göre, her $z \in U$ için $|\omega(z)| \leq |\mathbb{Q}(z)|$ eşitsizliği sağlanır. O halde $s(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
s(z) &= \frac{\omega(z)}{\vartheta(z)} = \left(\frac{\vartheta(z) - \vartheta(0)}{1 - \vartheta(0)\vartheta(0)} \right) \frac{1}{z \prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \bar{c}_i z}} \\
&= \frac{-2\alpha e^{-i\theta} (b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \frac{1}{z \prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \bar{c}_i z}} \\
&= \frac{-2\alpha e^{-i\theta} (b_2 + (2b_3 - b_2^2)z + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \bar{c}_i z}} \\
&= \frac{-2\alpha e^{-i\theta} (b_2 + (2b_3 - b_2^2)z + \dots)}{1 + b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots - |1 - 2\alpha e^{i\theta}|^2 + (2\alpha e^{i\theta} - 1)(b_2 z + (2b_3 - b_2^2)z^2 + \dots)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{z - c_i}{1 - \bar{c}_i z}}.
\end{aligned}$$

Özel halde,

$$|s(0)| = \frac{|b_2|}{2(\cos \theta - \alpha)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n |c_i|}$$

ve

$$|s'(0)| = \frac{\left| 2(\cos \theta - \alpha) \left(2b_3 - b_2^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i} \right) - b_2^2 e^{i\theta} \right|}{4(\cos \theta - \alpha)^2 \prod_{i=1}^n |c_i|}$$

eşitlikleri elde edilir. Aşağıdaki şekilde bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım:

$$r(z) = \frac{s(z) - s(0)}{1 - \overline{s(0)}s(z)}.$$

Bu fonksiyon sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığından dolayı

$$\frac{2}{1 + |r'(0)|} \leq |r'(1)| = \frac{1 - |s(0)|^2}{|1 - \overline{s(0)}s(1)|} |s'(1)| \leq \frac{1 + |s(0)|}{1 - |s(0)|} (|\omega'(1)| - |\vartheta'(1)|) \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca kolayca gösterebiliriz ki

$$|r'(0)| = \frac{|s'(0)|}{1 - |s(0)|^2} = \frac{\left| \frac{2(\cos \theta - \alpha) \left(2b_3 - b_2^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i} \right) - b_2^2 e^{i\theta}}{4(\cos \theta - \alpha)^2 \prod_{i=1}^n |c_i|} \right|}{1 - \left(\frac{|b_2|}{2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i|} \right)^2}$$

$$= \prod_{i=1}^n |c_i| \frac{\left| 2(\cos \theta - \alpha) \left(2b_3 - b_2^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i} \right) - b_2^2 e^{i\theta} \right|}{\left(\left((2(\cos \theta - \alpha)) \prod_{i=1}^n |c_i| \right)^2 - |b_2|^2 \right)}$$

ve

$$|\mathbb{Z}'(1)| = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{|1 - c_i|^2}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, bulduğumuz bu ifadeleri (3.6)'da yerine yazarsak

$$\frac{2}{1 + \prod_{i=1}^n |c_i|} \frac{\left| 2(\cos \theta - \alpha) \left(2b_3 - b_2^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i} \right) - b_2^2 e^{i\theta} \right|}{\left(\left((2(\cos \theta - \alpha)) \prod_{i=1}^n |c_i| \right)^2 - |b_2|^2 \right)}$$

$$\leq \frac{2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i| + |b_2|}{2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i| - |b_2|} \left(\frac{2 \cos^2 \theta}{\cos \theta - \alpha} |f'(1)| - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{|1 - c_i|^2} \right)$$

ve

$$\frac{(2(\cos \theta - \alpha) \prod_{i=1}^n |c_i| - |b_2|)^2}{\left(\left((2(\cos \theta - \alpha)) \prod_{i=1}^n |c_i| \right)^2 - |b_2|^2 \right) + \prod_{i=1}^n |c_i| \left| 2(\cos \theta - \alpha) \left(2b_3 - b_2^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{c_i} \right) - b_2^2 e^{i\theta} \right|}$$

$$\leq \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos \theta - \alpha} |f'(1)| - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1 - |c_i|^2}{|1 - c_i|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da bize (3.5) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

3.5 Teorem Teorem 3.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun sıfırdan başka sıfırı olmasın ve $b_2 > 0$ olsun. Bu takdirde

$$|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}| \leq 4 \left| (\cos \theta - \alpha) b_2 \ln \left(\frac{b_2}{2(\cos \theta - \alpha)} \right) \right| \quad (3.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $b_2 > 0$ ve $\phi(z)$ fonksiyonu Teorem 3.3'deki gibi olsun. (3.4) eşitliği göz önünde bulundurularak, $\ln \phi(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu bir dal seçilirse

$$\ln \phi(0) = \ln \left(\frac{b_2}{2(\cos \theta - \alpha)} \right) < 0$$

olur.

$$q(z) = \frac{\ln \phi(z) - \ln \phi(0)}{\ln \phi(z) + \ln \phi(0)}$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. Böylece

$$1 \geq |q'(0)| = \frac{|2 \ln \phi(0)|}{|\ln \phi(0) + \ln \phi(0)|^2} \left| \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} \right| = \frac{-1}{2 \ln \phi(0)} \left| \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} \right|$$

$$= - \frac{\frac{|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}|}{4(\cos \theta - \alpha)^2}}{2 \ln \left(\frac{b_2}{2(\cos \theta - \alpha)} \right) \frac{b_2}{2(\cos \theta - \alpha)}}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan da

$$|2(2b_3 - b_2^2)(\cos \theta - \alpha) - b_2^2 e^{i\theta}| \leq 4 \left| (\cos \theta - \alpha) b_2 \ln \left(\frac{b_2}{2(\cos \theta - \alpha)} \right) \right|$$

elde edilir.

4. SONUÇLAR

Sonuç olarak, bu çalışma analitik fonksiyonların bir alt sınıfı olan $M(\alpha, \theta)$ sınıfının analizine yönelik birkaç önemli katkı sunmaktadır. Schwarz Lemması ve sınır değişkenlerinden yararlanılarak, çalışma bu sınıftaki fonksiyonların Taylor açılımındaki katsayılar için yeni üst sınırlar türetmektedir. Ek olarak, $1 - \frac{zh'(z)}{h(z)}$ fonksiyonu için sıfır olmayan sıfırlar hesaba katılarak daha güçlü sınırlar elde edilmektedir. Bu bulgular, özellikle sınır noktalarındaki açılal limitleri ve türevleriyle ilişkili olarak, analitik fonksiyonların birim disk içindeki geometrik davranışlarının daha derin bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Sonuçlar klasik eşitsizlikleri genişletmekte ve analitik fonksiyonlar teorisi ile geometrik fonksiyonlar teorisi arasındaki etkileşime ilişkin yeni bakış açıları sunmaktadır. Bu bağlamda çalışma, analitik fonksiyonların sınır davranışları ve kompleks analizdeki uygulamaları üzerine yapılacak ileri çalışmalar için bir temel oluşturabilir.

KAYNAKLAR

- Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis* (3. baskı). McGraw-Hill.
- Akca, N. T. and Örnek, B. N. (2024). Applications of Schwarz lemma for the class $M(\alpha, \theta)$, *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*. 14(1), 105-114.
- Akyel, T. and Örnek, B. N. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary, *Proceedings-Mathematical Sciences*, 126(1), 69-78.
- Atli, G. and Örnek, B. N. (2021). Some Results Concerned With Hankel Determinant For $\mathcal{N}(\alpha)$ Class, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 36(4), 715-727.
- Aydinoğlu, S. (2020). *Applications of the Jack's lemma for the holomorphic functions* Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya.
- Azeroğlu, T. A. and Örnek, B. (2013). A refined Schwarz inequality on the boundary, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58(4), 571-577.
- Beardon, A. and Minda, D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse Mathématique*, 92(1), 81-104.
- Beardon, A. F. and Carne, T. K. (1992). A strengthening of the Schwarz-Pick inequality, *American Mathematical Monthly*, 99(3), 216-217.
- Boas, H. P. (2010). Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz lemma. *The American Mathematical Monthly*, 117(9), 770-785.
- Dineen, S. (1989). *The Schwarz lemma*. Oxford University Press.
- Dubinin, V. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disk, *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3623-3629.
- Krantz, S. G. (2011). The Schwarz lemma at the boundary, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(5), 455-468.
- Markushevich, A. I. (2005). *Theory of functions of a complex variable*, American Mathematical Society Vol.296, 1,5.
- Mercer, P. R. (1997). Sharpened versions of the Schwarz lemma, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 205(2), 508-511.
- Mercer, P. R. (2006). Schwarz-Pick-type estimates for the hyperbolic derivative, *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, 1-6.

- Örnek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(6), 2053-2059.
- Osserman, R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors lemma, *Manuscripta Mathematica*, 100(2), 123-129.
- Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(12), 3513-3517.
- Örnek, B. N. and Düzenli, T. (2018). Boundary analysis for the derivative of driving point impedance functions, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 65(9), 1149-1153.
- Pommerenke, C. (1992). Boundary behaviour of conformal maps, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 299.
- Unkelbach, H. (1938). Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, *Mathematische Zeitschrift*, 43(1), 739-742.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Nurbanu Tuğçe AKCA

Eğitim Derecesi

Okul/Program

Mezuniyet Yılı

Lisans

Anadolu Üniversitesi

2020

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Örnek B. N. and Akca N. T. (2024). Applications of Schwarz lemma for the class $M(\alpha, \theta)$, Bulletin of International Mathematical Virtual Institute 14(1), 105-114.