



**SEÇME PRENSİPLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI
FORMLARI VE ÖZELLİKLERİ**

Necati Can AÇIKGÖZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

2025

Her hakkı saklıdır.



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

SEÇME PRENSİPLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI FORMLARI VE
ÖZELLİKLERİ

Necati Can AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2025

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**SEÇME PRENSİPLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI FORMLARI VE
ÖZELLİKLERİ**

Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI danışmanlığında, Necati Can AÇIKGÖZ tarafından hazırlanan bu çalışma 26 / 05 / 2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **Oy birliği ile (5/5)** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Tamer UĞUR	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Ramazan KALIN	İmza	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Bünyamin ÖZGERİŞ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26 / 05 / 2025

Necati Can AÇIKGÖZ

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SEÇME PRENSİPLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI FORMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Necati Can AÇIKGÖZ

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Örtüler, kompaktlık ile ilgili olan birçok topolojik özelliği tanımlayabilmek için kullanılır. Bir topolojik uzayı örtülerini kullanarak belirli sınıflar altında toplayabilmek ve sınıflandırabilmek önemlidir. Topolojide seçme prensipleri olarak bilinen teori bu alanda önemli bir yer tutmaktadır. Bu teori, birçok topolojik özelliği karakterize edebilmeye, verilen bir topolojik uzayın farklı açık örtülerini kullanarak farklı bir örtüsünü elde edebilmeye ve ilgili topolojik uzayı istenilen sınıflarda toplayabilmeye olanak sağlamaktadır. Topolojiyi oyun teorisi, fonksiyon uzayları vb. gibi matematiğin diğer alanları ile de bir araya getirebilmeye olanak sağlayan seçme prensipleri teorisi günümüzde de halen aktif olarak çalışılmakta ve bu anlamda geniş bir yer tutmaktadır. Kompaktlık ile Lindelöf özelliği arasında kalan Menger özelliği seçme prensiplerinin en temel örtü özelliklerinden birisidir. Bu tezde Menger, Alster ve Lindelöf özelliklerinin bazı zayıf ve genel formları bitopolojik uzaylarda tanımlanmıştır. İlk olarak kapanış, iç ve yıldız operatörü kullanılarak Menger ve Lindelöf özelliklerinin bazı zayıf formları tanımlanmış ve incelenmiştir. Sonrasında Alster özelliğinin bitopolojik bir formu olan bitopolojik yakın Alster özelliği tanımlanmış ve bu özelliğe sahip bitopolojik uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Tanımlanan bazı özelliklerin seçme prensipleri ile karakterizasyonları yapılmıştır. Rothberger özelliğinin literatürde var olan bitopolojik hemen hemen Rothberger ve bitopolojik zayıf Rothberger zayıf formları detaylı bir biçimde çalışılmıştır. Bu yeni formlar ile beraber tez çalışması bitopolojik uzaylarda seçme prensipleri ve örtü özellikleri alanının devamı niteliğinde olmaktadır.

2025, 142 sayfa

Anahtar Kelimeler: Seçme prensipleri, Menger uzaylar, Alster uzaylar, Rothberger uzaylar, Yıldız seçme prensipleri, Bitopolojik uzaylar

ABSTRACT

Ph.D

SOME BITOPOLOGICAL FORMS AND PROPERTIES OF SELECTION PRINCIPLES

Necati Can AÇIKGÖZ

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Covers are used to define various topological properties related to compactness. It is important to be able to collect and classify a topological space under certain classes using its covers. The Theory known as Selection Principles in topology has an important place in this field. It allows characterizing a wide range of topological notions, obtaining a different cover of a given topological space by using its different open covers, and collecting the related topological space into desired classes. The selection principles theory, which brought topology with other fields of mathematics, such as game theory, function spaces, etc., is still actively studied. The Menger property, which lies between compactness and Lindelöf property, is one of the most essential covering property of selection principles. In this thesis, some weaker and general forms of the Menger, Alster, and Lindelöf covering properties are defined in bitopological spaces. Firstly, some weaker forms of the Menger and Lindelöf properties are defined and examined by using closure, interior, and star operators. Afterwards, the bitopological nearly Alster property, which is a bitopological form of the Alster property, is introduced and some topological properties of bitopological spaces that have this property are scrutinized. Some of defined properties are characterized in terms of selection principles. The bitopological almost Rothberger and bitopological weakly Rothberger, which are the weaker forms of the Rothberger property existing in the literature, are studied in detail. With these new forms, the thesis study is regarded as a continuation of the field of selection principles and selective covering properties via bitopological spaces.

2025, 142 pages

Keywords: Selection principles, Menger spaces, Alster spaces, Rothberger spaces, Star selection principles, Bitopological spaces

TEŞEKKÜR

Bilgisini ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, benim için bir itici güç olan çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya,

Çok değerli tez savunma sınavı jüri üyeleri Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU, Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK, Prof. Dr. Tamer UĞUR ve Doç. Dr. Ramazan KALIN hocalarıma,

Çok değerli Diş Hekimi kardeşlerim Yaşar DURNAOĞLU ve Taha Burak YÜKSEL'e; yakın gelecekte çok başarılı olacak olan sevgili doktor adayı kardeşim Ömer BAYRAKTAR'a,

Bu süreçte yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen sevgili abim Bünyamin AÇIKGÖZ ve sevgili ablalarım Beyza AÇIKGÖZ, Seda YILMAZLAR ve Yasemin AÇIKGÖZ'e,

Her zaman arkamda olan, sevgilerini ve emeklerini ölçsüzce sunan, haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim çok kıymetli annem Nimet AÇIKGÖZ'e ve babam Hayati AÇIKGÖZ'e,

2211-A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı kapsamında vermiş olduğu finansal destekten ötürü TÜBİTAK'a,

sonsuz teşekkürler.

Necati Can AÇIKGÖZ
Mayıs 2025

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. TEMEL KAVRAMLAR ve BİLGİLER.....	12
3.1. Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar	12
3.2. Bitopolojik Uzaylar ile İlgili Temel Kavramlar.....	22
4. Menger ve LINDELÖF ÖZELLİKLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI ZAYIF FORMLARI.....	29
4.1. Bitopolojik Yakın Menger Özelliği	29
4.2. Bitopolojik Yakın Menger ve Yakın Lindelöf Örtü Özelliklerinin Bazı Yıldız Formları.....	53
4.3. Bitopolojik Bazı Küme Örtü Özellikleri	71
4.3.1. Bitopolojik hemen hemen küme Menger özelliği.....	72
4.3.2. Bitopolojik hemen hemen P_γ -kümeler	91
5. BİTOPOLOJİK YAKIN ALSTER ÖZELLİĞİ	94
6. BİTOPOLOJİK HEMEN HEMEN ROTHBERGER ve ZAYIF ROTHBERGER ÖZELLİKLERİ	118
7. SONUÇ.....	134
KAYNAKLAR	137

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
2^X	X kümesinin kuvvet kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
ω	Doğal sayılar kümesi
ω_1	İlk sayılamaz ordinal
$ A $	A kümesinin kardinalitesi
$\aleph_1$	ω_1 'in kardinalitesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
(i, j)	$i, j \in \{1, 2\}$ ve $i \neq j$
$\bigcap \mathcal{O}$	$\mathcal{O}$ kümeler ailesinin tüm elemanlarının arakesiti
$\bigcup \mathcal{O}$	$\mathcal{O}$ kümeler ailesinin tüm elemanlarının birleşimi
$Cl^{\lambda_i}(A)$	$(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayında A 'nın λ_i topolojisine göre kapanışı
$\text{Çap}(A)$	Metrik uzayda A kümesinin çapı
$Int^{\lambda_i}(A)$	$(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayında A 'nın λ_i topolojisine göre içi
$Int(A)$	A kümesinin içi
$\max A$	A kümesinin maksimumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\mathcal{U} \times \mathcal{V}$	$\{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$

1. GİRİŞ

Bir topolojik uzayın özelliklerini sahip olduğu örtülerini kullanarak tanımlayabilmek, karakterize edebilmek ve sınıflandırabilmek önemlidir. Matematik biliminde seçme prensipleri olarak adlandırılan teori bunlara olanak sağlamaktadır. Bu teori bir topolojik uzayın özelliklerini kombinatorik (seçme işlemine dayalı olan) bir çatı altında toplayabilmekte ve aynı zamanda topolojiyi oyun teorisi, Ramsey teorisi, fonksiyon uzayları, Karamata teorisi, cebirsel yapılar gibi matematik alanında var olan diğer disiplinlerle bir araya getirebilen yöntemlere fırsat sunabilmektedir. Sonsuz kombinatorik topoloji olarak da bilinen bu teorelin temeli Cantor'un 1874 yılında gerçel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlarken kullandığı köşegenleştirme tekniğine dayanmaktadır. Bu teknik aynı özelliğe sahip matematiksel nesnelerin bir dizisinden, verilen bir kurala göre dizinin her bir nesnesiyle ilişkilendirilmiş bir seçme işlemi yapılması ve istenilen şekilde bir nesneye erişilebilmesidir. Bu teknik matematik biliminde yeni araştırmaların ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Seçme prensipleri teorisinin geçmişi Borel (1919), Menger (1924), Hurewicz (1926), Rothberger (1938) ve Sierpinski (1928) tarafından yapılan çalışmalara dayanmaktadır. Fakat bu teori ile ilgili sistematik ilk çalışma 1996 yılında Scheepers (1996) tarafından başlatılmış ve sonrasında aynı yıl içerisinde Just et al. (1996) tarafından yapılan bir çalışma ile devam etmiştir. X sonsuz bir küme ve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{2^X}$ olmak üzere, Scheepers (1996) üç klasik seçme prensibi olan $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ve $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seçme yöntemlerini tanıtmıştır:

1. $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seçme prensibi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının oluşturduğu her $(A_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için A_n 'nin sonlu bir B_n alt kümesini seçerek $\mathcal{B}$ 'de bir $\bigcup_{n \in \omega} B_n$ elemanını elde etmektir,
2. $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seçme prensibi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının oluşturduğu her $(A_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, bir $(a_n)_{n \in \omega}$ dizisini, her $n \in \omega$ için $a_n \in A_n$ ve $\{a_n : n \in \omega\}$ kümesi $\mathcal{B}$ 'nin bir elemanı olacak şekilde elde etmektir,

3. $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ seçme prensibi: $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının oluşturduğu her $(A_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için A_n 'nin sonlu bir B_n alt kümesini seçerek $\mathcal{B}$ 'de bir $\{\cup B_n : n \in \omega\}$ elemanını elde etmektir.

Birçok topolojik özellik ve kavram bu üç klasik seçme prensibi ile tanımlanabilir ve karakterize edilebilir. Örneğin, $S \subset \mathbb{R}$ bir Sierpiński kümesi ve Γ da S 'nin tüm γ -örtülerinden oluşan sınıf olmak üzere, S kümesinin $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ sınıfından olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, eğer $\mathcal{O}$ ailesi bir L Luzin kümesinin tüm açık örtülerinden oluşan sınıf ise L kümesinin $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme özelliğini sağladığı bilinir ve bu kümeler bu sınıf ile karakterize edilir. Diğer yandan yukarıda bahsedilen $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri sırasıyla bir topolojik uzayın yoğun alt kümelerinden oluşan ailelerinin sınıfı ve örtülerinin bir sınıfı olsun. ϕ bu seçme yöntemlerinden biri ise, $\mathcal{A}$ 'ya ϕ uygulanarak bir örtü elde edilip edilemeyeceği incelenebilir ve bu topolojik uzayın $\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ içinde sınıflandırılıp sınıflandırılmayacağı sonucuna varılabilir. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri genellikle bu topolojik uzayın ω -örtüsü, γ -örtüsü gibi farklı açık örtülerinin sınıfları olarak alınmaktadır.

Menger (1924) çalışmasında Menger taban özelliği olarak bilinen özelliği metrik uzaylar için şu şekilde tanımlamıştır. (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{T}$ ailesi de d metriğinin ürettiği topolojinin keyfi bir tabanı olsun. Her $n \in \omega$ için $T_n \in \mathcal{T}$ olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} T_n$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Çap}(T_n) = 0$$

olacak şekilde bir $\{T_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{T}$ bulunabiliyorsa (X, d) metrik uzayı Menger taban özelliğine sahiptir denir. Hurewicz (1926) çalışmasında, $\mathcal{O}$ bir (X, λ) topolojik uzayının tüm açık örtülerinin sınıfı olmak üzere, Menger taban özelliğinin Scheepers'in vermiş olduğu notasyon ile $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme özelliğine denk olduğunu göstermiştir. Bu durumda

(X, d) metrik uzayı Menger taban özelliğine sahip ise X 'in açık örtülerinden oluşan her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{U}_n$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebilir. Bu özellik Menger özelliği olarak bilinmektedir. Hurewicz aynı zamanda Menger özelliğine sahip metrik uzayların Menger taban özelliğine sahip olduğunu göstermiştir.

Hurewicz (1927) çalışmasında Hurewicz özelliğini tanımlamıştır. Bu özelliğe sahip bir (X, λ) topolojik uzayının açık örtülerinden oluşan her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \geq n} \bigcup \mathcal{U}_m$$

eşitliği sağlanır. Belirtilen topolojik uzayın tüm γ -örtülerinin sınıfı Γ olmak üzere, bu özellik klasik seçme prensiplerinden $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ yöntemine denktir. Hurewicz özelliğinin Menger özelliğinden daha kuvvetli bir form olduğu, yani Hurewicz özelliğini sağlayan her topolojik uzayın Menger özelliğini de sağladığı bilinmektedir.

Rothberger (1938) çalışmasında Rothberger örtü özelliğini tanımlamıştır. (X, λ) bir topolojik uzay olmak üzere, X 'in açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} O_n$$

olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa bu topolojik uzaya Rothberger denir. Bu özellik ise Scheepers'in notasyonu ile $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ seçme prensibine denk gelmektedir

ve Rothberger özelliğine sahip her topolojik uzayın Menger özelliğine sahip olduğu bilinmektedir.

Bu tez çalışmasında, Menger, Alster ve Lindelöf örtü özelliklerinin bazı zayıf ve genel formları bitopolojik (ikili topolojik) uzaylarda tanımlanmış ve incelenmiştir. Literatürde var olan bitopolojik hemen hemen Rothberger ve zayıf Rothberger örtü özellikleri daha kapsamlı bir biçimde ele alınmıştır. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, bir bitopolojik uzay (veya bi-uzay) basitçe X kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı, genellikle birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 gibi iki topolojik yapıdan oluşur. Genel olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ biçiminde gösterilir. Temel çalışmaları Kelly (1963) tarafından yapılmıştır. X kümesi üzerinde iki farklı topoloji kullanılarak klasik topolojide var olan kompaktlık, ayırma aksiyomları gibi kavramlar ve birçok kavram bu tip yapılara genelleştirilip incelenebilmektedir. Günümüzde bitopolojik uzaylar aktif olarak çalışılmakta olup seçme prensipleri ve örtü özellikleri de bitopolojik uzaylarda incelenmiştir.

Yedi bölümden oluşan bu tez çalışmasının ikinci bölümünde literatür taramasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında yer alan klasik topoloji ve bitopolojik uzaylara ait temel tanımlara, teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde bitopolojik yakın Menger seçme örtü özelliği tanımlanmış ve seçme prensipleri ile karakterize edilmiştir. Literatürde var olan bazı seçme örtü özellikleriyle ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca bu özelliğin çarpma, bazı özel dönüşümler ve alt uzaylar altında bazı korunum özellikleri ele alınmıştır. Bitopolojik yakın yıldız Menger özelliği ve bu özelliğin bazı diğer formları, bitopolojik yakın Lindelöf özelliğinin bazı yıldız formları tanımlanarak birbirleri ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca küme-Menger örtü özelliğinin hemen hemen küme-Menger zayıf formu bitopolojik uzaylarda tanımlanmış ve bu özelliğin bazı örtü özellikleri ile ilişkileri incelenip sonrasında bazı korunum özellikleri verilmiştir. Bu bölümde yine klasik topolojide verilen γ -örtü yardımıyla γ -kümelerin zayıf bir bitopolojik formundan bahsedilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde bitopolojik yakın Alster özelliği tanımlanmış ve seçme prensipleri ile bazı karakterizasyonları verilmiştir. Bitopolojik hemen hemen Alster ve bitopolojik zayıf Alster özellikleri ile ilişkisi incelenip bu üç formun denk olma koşullarından bahsedilmiştir. Ayrıca Menger özelliği ve Lindelöf özelliğinin bitopolojik bazı zayıf formları ile Alster özelliğinin bitopolojik zayıf formlarının denk olma koşulları ele alınmıştır. Bunun yanı sıra bitopolojik yakın Menger ve bitopolojik yakın Lindelöf özelliklerinin çarpımsallığı bitopolojik yakın Alster özelliği ile ilişkilendirilmiş olup bitopolojik yakın Alster özelliğinin bazı topolojik özelliklerinden bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde ise bitopolojik hemen hemen Rothberger ve bitopolojik zayıf Rothberger özelliklerine detaylı bir şekilde değinilmiştir. Bu özelliklerin klasik topolojide var olan Rothberger örtü özelliği ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca bu özelliklerin bazı topolojik özelliklerinden bahsedilmiştir.

Tezin yedinci ve son bölümünde tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Menger, Rothberger ve Hurewicz klasik seçme örtü özellikleri seçme prensipleri teorisinin temelini oluşturmaktadır. Bu özellikler ve seçme prensipleri gerek klasik topoloji gerekse kümeler teorisi kapsamında çalışılmıştır. Bu örtü özellikleri birçok açıdan incelenmiştir. Topolojide geniş bir yer tutan kompaktlık, Lindelöf ve Alster özelliği gibi kavramlar ile ilişkileri ortaya konmuştur.

Miller and Fremlin (1988) çalışmalarında Menger, Rothberger ve Hurewicz özelliklerini birlikte ele almış ve bu özellikleri kümeler teorisi kapsamında incelemişlerdir. İlgili özelliklere sahip topolojik uzaylar ile bu uzayların kardinaliteleri arasındaki ilişkilerden bahsetmişlerdir. Ayrıca bu özellikleri CH (Süreklilik Hipotezi) ve Martin Aksiyomu gibi kavramlar altında düşünmüşlerdir. Scheepers (1997) ise çalışmasında Menger ve Rothberger özelliklerini topolojik oyunlar ile karakterize etmiştir. Ayrıca elde ettiği karakterizasyonları fonksiyon uzaylarına uygulamış ve bu örtü özellikleri ile fonksiyon uzayları arasındaki ilişkilerden bahsetmiştir. Scheepers (2001) çalışmasında ise bir topolojik uzayın literatürde var olan geniş örtü, ω -örtü, γ -örtü kavramlarının yanı sıra gruplanabilir, zayıf gruplanabilir gibi farklı örtü kavramlarını vermiştir. Bununla beraber Hurewicz örtü özelliğinin seçme prensipleri ile bu kavramlar arasındaki ilişkilerinden bahsetmiştir. Aynı zamanda Ramsey teorisi ve oyun teorisi ile seçme prensipleri arasındaki ilişkilere de yer vermiştir. Scheepers (2003) çalışmasında da yine Menger, Hurewicz ve Rothberger özelliklerini ele almış; $\mathcal{S}_{fin}$, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{U}_{fin}$ seçme prensiplerinin yanı sıra farklı seçme prensiplerini de incelemiştir. Kočinac and Scheepers (2003) çalışmalarında Ramsey ayrışım bağıntısını kullanarak Hurewicz özelliğini karakterize etmişlerdir. Menger ve Hurewicz özelliklerinin sonlu çarpımları ile ilgili sonuçlar vererek, bazı seçme prensipleri ile karakterizasyonlarını yapmışlardır. Yine bu çalışmada, bahsedilen bazı örtülerin sınıflarının denk olma durumlarından bahsetmişler ve örtü özellikleri ile topolojik oyunlar arasındaki ilişkileri göz önünde bulundurmuşlardır.

Babinkostova and Scheepers (2003) çalışmalarında Menger taban özelliğini göz önünde bulundurarak $\mathcal{A}$ -taban özelliğini, köşegenleştirme taban özelliğini ve bu özelliklerin güçlü formlarını tanımlamışlardır. Bu özelliklerin seçme prensipleri ile

karakterizasyonlarını yapmışlardır. Özel olarak Menger özelliğine sahip metriklenebilir bir uzayın güçlü köşegenleştirme taban özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca metriklenemeyen ve Menger özelliğine sahip olmayan Sorgenfrey doğrusunun da köşegenleştirme taban özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmada da bir topolojik uzayın farklı örtülerinden bahsedildiği görülmektedir.

Babinkostova et al. (2004) çalışmalarında rölatif Hurewicz özelliğini tanımlamışlardır. Metrik uzaylarda Hurewicz özelliğini ele alarak, hem Hurewicz özelliğinin hem de rölatif Hurewicz özelliğinin bir taban özelliği ile karakterize edilebileceğinden bahsetmişler ve bu taban özelliğini Hurewicz taban özelliği olarak adlandırmışlardır. Tsaban (2006) çalışmasında Menger ve Hurewicz Konjektürlerinden bahsetmiştir. ZFC (Zermelo-Fraenkel Küme Teorisi ve Seçme Aksiyomu) kapsamında bu konjektürlere ters örnekler vererek bu özellikleri kümeler teorisi kapsamında incelemiştir. Babinkostova et al. (2007) çalışmalarında Menger-sınırlı ve Rothberger-sınırlı grupları incelemiştir. Bu özelliklere sahip topolojik grupların karakterizasyonlarını yapmışlar ve metriklenebilmeyi de göz önünde bulundurarak ölçü-teorik özelliklere yer vermişlerdir.

Bu örtü özelliklerinin zayıf ve genel formları da literatürde birçok çalışmada yerini almış olup günümüzde halen aktif bir şekilde çalışılmaktadır.

Bahsedilen bu üç klasik seçme örtü özelliğinin zayıf ve genel formları bir topolojik uzayın kapanış ve iç operatörleri, genelleştirilmiş açık kümeleri kullanılarak elde edilebileceği gibi yıldız operatörü ve ideal yapısı yardımıyla da tanımlanabilmektedir. Bu yöntemlerle örtü özelliklerinin daha genel formları elde edilerek yeni örtü özellikleri literatüre kazandırılmıştır. Kočinac (1999a) yıldız operatörünü kullanarak Menger seçme örtü özelliğinin zayıf bir formu olan yıldız Menger örtü özelliğini tanımlamış ve bu özelliğin seçme prensipleri ile karakterizasyonunu vermiştir. Aynı yıl içerisinde Kočinac (1999b) bu özelliğin başka bir zayıf formu olan hemen hemen Menger özelliğini tanımlamıştır. Koccev (2009) ise çalışmasında bu özelliği incelemiş ve topolojik bazı karakterizasyonlarını yapmıştır. Bununla beraber Koccev (2009) yıldız Menger özelliğinin bir zayıf formu olan hemen hemen yıldız Menger özelliğini literatüre kazandırmıştır.

Menger özelliğinin bir başka zayıf formu Daniels (1988) tarafından tanımlanmıştır. Bu özellik literatürde daha çok Pansera (2012) tarafından tanımlanan ismiyle zayıf Menger olarak bilinmektedir. Pansera zayıf Menger özelliğini incelemiş ve bu formun hemen hemen Menger özelliğinden farklı yeni bir yapı olduğunu zayıf Menger özelliğine sahip olan fakat hemen hemen Menger özelliğine sahip olmayan bir topolojik uzay örneği vererek göstermiştir. Bununla beraber Pansera aynı çalışmasında zayıf yıldız Menger özelliğini de tanıtmış ve bu özelliğin bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Kocev (2015) ve Song (2015a) çalışmalarında hemen hemen Menger ve zayıf Menger örtü özelliklerini, birbirleri arasındaki ilişkileri daha detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

Menger özelliğinin ve yıldız formlarının bir topolojik uzayın kapanış operatörü ile tanımlanan bu genel formlarının yanı sıra, Kočinac (2019) bir topolojik uzayın hem iç hem de kapanış operatörünü kullanarak yakın Menger özelliğini tanıtmış ve bu özellikten kısaca bahsetmiştir. Sonrasında Parvez and Khan (2019) yakın Menger özelliğini yarı-açık kümeler kullanarak tanımlamışlardır. Kočinac'ın verdiği tanıma denk olan bu tanıma verdikten sonra yakın Menger özelliğini detaylı bir biçimde incelemiş, Menger özelliği ve bu özelliğin var olan bazı zayıf formları ile karşılaştırmışlardır. Bunun yanı sıra aynı çalışmalarında yıldız operatörü yardımıyla yakın yıldız Menger özelliğini de tanımlamış ve incelemişlerdir.

Daniels (1988) Rothberger özelliğinin zayıf bir formu olan zayıf C'' özelliğini tanımlamıştır. Bu özellik genel olarak zayıf Rothberger ismiyle bilinmektedir. Hemen hemen Rothberger örtü özelliği Scheepers (1999) tarafından tanıtılmıştır. Zayıf Hurewicz özelliği ise Kočinac (2001) tarafından tanımlanmıştır. Babinkostova et al. (2012) çalışmalarında Menger ve Rothberger örtü özelliklerinin zayıf formlarını topolojik oyunlar ile ilişkilendirmişlerdir. Sakai (2013) zayıf Hurewicz özelliğini Pixley-Roy hiper-uzaylar için incelemiştir. Song and Li (2013) çalışmalarında hemen hemen Hurewicz örtü özelliğini tanımlamış ve çalışmıştır. Ayrıca Bonanzinga et al. (2014) yoğun ailelerin köşegenleştirilmesi adı altında klasik seçme özellikleri ve bu özelliklerin zayıf formları (örneğin zayıf Hurewicz) ile ilgili geniş bir çalışma yapmışlar ve bu çalışma ile beraber klasik seçme örtü özelliklerinin ve zayıf formlarının sınıflandırılmalarının tamamlayıcısı niteliğinde bir çalışma ortaya koymuşlardır. Song and Li (2015) çalışmalarında Kočinac'ın kazandırmış olduğu zayıf Hurewicz örtü özelliği ile Hurewicz özelliği

arasındaki ilişkileri ele almışlardır. Song (2015b) çalışmasında zayıf Rothberger ve hemen hemen Rothberger özelliklerini detaylı bir şekilde çalışmıştır.

Rothberger ve Hurewicz seçme örtü özelliklerinin bir başka formu olan yıldız Rothberger ve yıldız Hurewicz özellikleri de literatüre kazandırılmıştır. Koçinac (1999a) yıldız operatörünü kullanarak Rothberger özelliğinin bazı formlarını tanımlamıştır. Bonanzinga et al. (2004) ise yıldız Hurewicz özelliğini ve yıldız Hurewicz özelliğinin bazı güçlü formlarını tanımlamışlar ve bu özelliklere sahip topolojik uzayların ω -örtülerini, γ -örtülerini, gruplanabilir ve zayıf gruplanabilir örtülerini kullanarak birden fazla seçme prensipleri ile karakterizasyonlarını yapmışlardır. Koçinac'ın tanımlamış olduğu Rothberger özelliğinin yıldız formları Casas-de la Rosa et al. (2020) tarafından hiper uzaylarda incelenmiştir.

Klasik seçme örtü özellikleri ve bunların zayıf ve kuvvetli formları, bir topolojik uzayın yarı-açık, ön-açık, α -açık, yarı-ön açık (β -açık), θ -açık gibi genelleştirilmiş açık alt kümeleri yardımıyla da elde edilebilmektedir. Sabah et al. (2016) çalışmalarında bir topolojik uzayın yarı-açık alt kümelerini kullanarak yarı-Menger, yarı-hemen hemen Menger ve yarı-yıldız Menger özelliklerini tanıtmış ve bu özellikleri incelemişlerdir. Sabah and Khan (2017) yarı-Rothberger özelliğini ve bu özelliğin yıldız formlarını tanımlayarak ilgili özellikleri detaylı bir biçimde ele almışlardır. Aynı yıl içerisinde Koçinac et al. (2017) Hurewicz özelliğinin daha güçlü bir formu olan yarı-Hurewicz özelliğini ve bu özelliğin bazı zayıf formlarını literatüre kazandırmış, bazı klasik seçme özellikleri ile ilişkilerini incelemişlerdir. Yarı-açık kümeler yardımıyla tanımlanan yeni seçme örtü özelliklerine benzer olarak α -Menger ve θ -Menger seçme örtü özellikleri, Koçinac (2019) tarafından α -açık ve θ -açık kümeler yardımıyla elde edilmiştir. Bunu takiben Tyagi et al. (2021) çalışmalarında ön-açık kümeler yardımıyla ön-açık Menger seçme örtü özelliğini ve bazı zayıf formlarını tanımlarken, Kule (2022) yarı-ön açık (β -açık) kümeler yardımıyla β -Menger ve β -Hurewicz kavramlarını vermiş ve çalışmıştır. Genelleştirilmiş açık kümeler yardımıyla tanımlanmış bu seçme özelliklerinin bazı formları Kumar and Tyagi (2022, 2023) tarafından daha farklı yönden ve detaylı bir şekilde çalışılmıştır.

Di Maio and Kočinac (2015) Arhangel'skii (1979)'nin çalışmasında tanımladığı zayıf Lindelöf özelliğinden daha kuvvetli ve bir topolojik uzayın kardinalitesinin tahmin edilmesi ile bağlantılı olan quasi-Lindelöf tanımıyla ilişkilendirdikleri ve yukarıda söz edilen Menger, Rothberger ve Hurewicz özelliklerinin zayıf formlarından farklı versiyonlar olan quasi-Menger, quasi-Rothberger ve quasi-Hurewicz özelliklerini tanımlayıp araştırmışlardır. Bu özellikleri var olan bazı zayıf formlar ile karşılaştırarak klasik seçme örtü özelliklerinin farklı sınıflarını oluşturmuşlardır. Arhangel'skii (1995) çalışmasında sL olarak bilinen bir kardinal fonksiyon tanımlamıştır. Bu fonksiyon yardımıyla da s -Lindelöf olarak bilinen yeni bir topolojik uzay tanımını ortaya koymuştur. Arhangel'skii'nin bu tanımını temel alarak ve değiştirerek Kočinac and Konca (2020) küme-örtü özellikleri olarak bilinen küme-Menger, küme-Rothberger, küme-Hurewicz ve bunların zayıf formlarını tanıtmışlar ve çok yakın zamanda bu yeni örtü özelliklerinin araştırılmasını başlatmışlardır.

Seçme prensipleri ile yakından ilişkisi olan Reznichenko özelliğinin bitopolojik bir versiyonu Pansera and Pavlovič (2006) tarafından verilmiştir. Sonrasında Pavlovič (2009) bir X kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar kümesi $C(X)$ 'i kompakt-açık topoloji ve noktasal yakınsaklık topolojileri ile düşünerek bu bitopolojik uzaylarda Reznichenko özelliğinin seçme prensipleri ile farklı bir karakterizasyonundan bahsetmiştir.

Kočinac and Özçağ (2011) bitopolojik uzaylarda ayrılabilirliğin seçme prensipleri ile ilgili olan bazı versiyonlarını tanıtmışlardır. Kočinac and Özçağ (2012) çalışmalarında δ_2 -Menger bitopolojik uzay ile beraber hemen hemen Menger ve zayıf Menger seçme örtü özelliklerinin bitopolojik formlarını tanımlamışlardır. Sonrasında Özçağ and Eysen (2016) bitopolojik hemen hemen Menger özelliğini sistematik bir şekilde çalışmışlardır. Ayrıca Eysen and Özçağ (2018) çalışmalarında bitopolojik zayıf Menger özelliğini ele almış ve bitopolojik hemen hemen Menger özelliği ile ilişkisini vererek bu iki formun özelliklerini geniş bir biçimde incelemişlerdir.

Eysen and Özçağ (2019) çalışmalarında Lindelöf uzayların bitopolojik bazı zayıf formlarının çarpımsallıklarını incelemek için Alster (1988)'in tanımladığı Alster özelliğinin bazı zayıf formlarını tanımlamışlardır. Bu formların bitopolojik hemen hemen

Menger ve bitopolojik zayıf Menger seçme örtü özellikleri ile ilişkilerini incelemişler ve bu özelliklerin seçme prensipleri ile karakterizasyonlarını yapmışlardır. Khan and Sabah (2020) p -örtüler yardımıyla p -Menger, p -Hurewicz örtü özelliklerinin yanı sıra yıldız operatörünü kullanarak bu özelliklerin farklı formlarını tanımlayıp yeni tip seçme örtü özelliklerini çalışmışlardır.

Chauhan and Singh (2021) Hurewicz seçme örtü özelliğinin zayıf bir formu olan hemen hemen Hurewicz özelliğini bitopolojik uzaylarda tanımlayıp incelemişlerdir. Sen (2021)'in çalışmasında ise Hurewicz özelliğinin bitopolojik bazı formları görülmektedir. Kočinac and Özçağ (2021) çalışmalarında bitopolojik seçme örtü özelliklerinin araştırılmasına devam etmiştir.

Klasik üç seçme özelliğinin yukarıda bahsedilmeyen bazı diğer formları ve seçme prensipleri ile ilgili detaylı bilgiler için Kočinac (2004, 2006, 2020)'ın yaptığı çalışmalar incelenebilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR ve BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında yer alan genel topolojik uzaylara ve bitopolojik uzaylara ait tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

3.1. Topolojik Uzaylarda Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: X boş kümeden farklı bir küme, $Y \subset X$ ve $\mathcal{A} \subset 2^X$ olsun. Eğer

$$Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

kapsaması sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine Y 'nin bir *örtüsü* denir (Engelking 1989).

Tanım 3.1.2: X boş kümeden farklı bir küme, I bir indis kümesi ve $\mathcal{A} = \{A_i: i \in I\}$ ise X 'in bir örtüsü olsun. $I' \subset I$ olmak üzere, $\mathcal{A}' = \{A_i: i \in I'\}$ ailesi de X 'in bir örtüsü oluyorsa $\mathcal{A}'$ ailesine $\mathcal{A}$ 'nın bir *alt örtüsü* denir (Engelking 1989).

Tanım 3.1.3: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{O}$ da X 'in bir örtüsü olsun. Eğer her $O \in \mathcal{O}$ için $O \in \lambda$ ise $\mathcal{O}$ 'ya X 'in bir *açık örtüsü* denir (Engelking 1989).

Bir topolojik uzayın açık örtülerinin farklı sınıfları mevcuttur. Aşağıdaki tanımda bir topolojik uzayın tez kapsamında kullanılmış olan farklı açık örtüleri verilmektedir.

Tanım 3.1.4: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{O}$ ailesi de X 'in bir açık örtüsü olsun.

1. Eğer $\mathcal{O}$ ailesi sonsuz elemanlı ve her $x \in X$ için $\mathcal{O}_x = \{O \in \mathcal{O}: x \notin O\}$ ailesi sonlu oluyor ise $\mathcal{O}$ 'ya X kümesinin bir *γ -örtüsü* denir.
2. Eğer $X \notin \mathcal{O}$ ve X 'in sonlu her $F \subset X$ alt kümesi için $F \subset O_F$ olacak şekilde bir $O_F \in \mathcal{O}$ varsa $\mathcal{O}$ 'ya X 'in bir *ω -örtüsü* denir (Scheepers 1996).

X 'in tüm γ -örtülerinin ve ω -örtülerinin sınıfı sırasıyla Γ ve Ω ile gösterilir.

Tanım 3.1.5: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, λ) topolojik uzayına *kompakt* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.6: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}(\overline{U})$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *yakın kompakt* denir (Singal and Mathur 1969).

Tanım 3.1.7: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X sayılabilir çoklukta kompakt alt kümelerinin birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa, diğer bir deyişle X 'in kompakt alt kümelerinin

$$X = \bigcup_{n \in \omega} K_n$$

olacak şekilde sayılabilir bir $\{K_n : n \in \omega\}$ ailesi varsa (X, λ) topolojik uzayına σ -kompakt denir (Willard 1970).

Üç klasik seçme örtü özelliklerinden Menger ve Rothberger örtü özelliklerinin tezin kapsamında kullanılmış olan bazı zayıf formları aşağıda verilmektedir.

Tanım 3.1.8: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup \{ \text{Int}(\overline{U}) : U \in \mathcal{U}_n \}$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *yakın Menger* denir (Kočinac 2019).

Tanım 3.1.9: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup \{ \bar{U} : U \in \mathcal{U}_n \}$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *hemen hemen Menger* denir (Kočinac 1999b).

Tanım 3.1.10: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \overline{O_n}$$

olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *hemen hemen Rothberger* denir (Scheepers 1999).

Tanım 3.1.11: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \omega} O_n}$$

olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *zayıf Rothberger* denir (Daniels 1988).

Teorem 3.1.12: *Ayrılabilir topolojik uzaylar zayıf Rothberger'dir* (Song 2015b).

Tanım 3.1.13: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{O}$ ailesi X 'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{O}$ sonsuz ve her $x \in X$ için

$$\{O \in \mathcal{O} : x \notin \overline{O}\}$$

ailesi sonlu ise $\mathcal{O}$ örtüsüne *hemen hemen γ -örtü* denir (Kocev 2009).

Tanım 3.1.14: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} \subset 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ ve X 'in açık alt kümelerinden oluşan ve her $n \in \omega$ için $\overline{A} \subset \bigcup \mathcal{O}_n$ koşulunu sağlayan alt ailelerin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa bu topolojik uzaya *$\mathcal{A}$ -Menger* denir. Eğer $\mathcal{A} = 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ise (X, λ) topolojik uzayına *küme-Menger* denir (Kočinac and Konca 2020).

Tanım 3.1.15: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} \subset 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ ve X 'in açık alt kümelerinden oluşan ve her $n \in \omega$ için $\overline{A} \subset \bigcup \mathcal{O}_n$ koşulunu sağlayan alt ailelerin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_n\}$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa bu topolojik uzaya *hemen hemen $\mathcal{A}$ -Menger* denir. Eğer $\mathcal{A} = 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ise (X, λ) topolojik uzayına *hemen hemen küme-Menger* denir (Kočinac and Konca 2020).

Kočinac and Konca (2020) çalışmalarında küme örtü özelliklerini tanımladıktan ve inceledikten sonra, Singh (2020) çalışmasında Menger özelliği ile küme-Menger özelliğinin denk olduğunu ve küme-Menger özelliğinin aslında Menger örtü özelliğinin farklı bir gösterimi olduğunu göstermiştir.

Tanım 3.1.16: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa (X, λ) topolojik uzayına *Lindelöf* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.17: (X, λ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer X 'in her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}(\overline{U})$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *yakın Lindelöf* denir (Balasubramanian 1982).

Tanım 3.1.18: (X, λ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer X 'in her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına *hemen hemen Lindelöf* denir (Willard and Dissanayake 1984).

Lindelöf örtü özelliği topolojide önemli bir rol oynamaktadır. Lindelöf olan iki topolojik uzayın çarpımlarının Lindelöf olamayabileceği gerçeği ile beraber birçok matematikçi Lindelöf uzayların çarpımları ile ilgili birçok çalışma yapmıştır. Bu çalışmalardan biri de Alster (1988)'in yaptığı çalışmadır. Lindelöf olan bir topolojik uzay ile çarpımı Lindelöf olan bir topolojik uzaya çarpımsal Lindelöf denir. Alster, $(*)$ özelliği (Alster özelliği) olarak bilinen bu özelliği çarpımsal Lindelöf uzayları karakterize etmek

için tanımlamıştır. Çalışmasında Alster özelliğine sahip olan topolojik uzayların çarpımsal Lindelöf olduğunu ve dahası CH (Süreklilik Hipotezi) altında ağırlığı en fazla $\aleph_1$ olan çarpımsal Lindelöf uzayların da Alster özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Alster özelliğinin seçme prensipleri ve seçme örtü özellikleri ile de yakından ilişkisi bulunmaktadır.

Babinkostova et al. (2013) Alster özelliğini çalışmış ve bu özelliğin zayıf bir formu olan zayıf Alster özelliğini tanımlayarak her iki özelliğin seçme prensipleri ile karakterizasyonlarını yapmışlardır. Ayrıca zayıf Menger özelliği ile de ilişkilerini incelemişlerdir. Kocev (2015) ise Alster özelliğinin başka bir formu olan hemen hemen Alster özelliğini tanımlayarak bu özelliğin bazı seçimsel karakterizasyonlarını yapmış ve hemen hemen Menger özelliği ile ilişkisini incelemiştir.

Tanım 3.1.19: (X, λ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi sayılabilir çoklukta açık kümenin arakesiti şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile eğer A kümesi her $n \in \omega$ için $O_n \in \lambda$ olmak üzere

$$A = \bigcap_{n \in \omega} O_n$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa A 'ya X 'in bir G_δ alt kümesi denir (Engelking 1989).

Tanım 3.1.20: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ ailesi de X 'in G_δ alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olsun. Eğer X 'in kompakt her C alt kümesi için $C \subset A_C$ olacak şekilde bir $A_C \in \mathcal{A}$ varsa $\mathcal{A}$ 'ya X 'in bir *Alster örtüsü* denir (Alster 1988).

Tanım 3.1.21: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her Alster örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü mevcutsa bu topolojik uzaya *Alster uzay* denir (Alster 1988).

Tanımları düşünüldüğünde bir (X, λ) topolojik uzayı için aşağıdaki diyagram elde edilebilir:

Kompakt $\Rightarrow$ σ -kompakt $\Rightarrow$ Alster $\Rightarrow$ Menger $\Rightarrow$ Lindelöf

Tanım 3.1.22: X boş kümeden farklı bir küme, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{O}$ aileleri X 'in iki örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset O_U$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}$ varsa $\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{O}$ 'nun bir *incelti mişi* denir (Engelking 1989).

Tanım 3.1.23: (X, λ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{O} \subset 2^X$ olmak üzere,

1. Eğer her $x \in X$ için, x 'in $\mathcal{O}$ 'nun en fazla sonlu tane elemanı ile arakesiti boş kümeden farklı olan bir komşuluğu mevcutsa $\mathcal{O}$ ailesine *yerel sonlu aile* denir (Engelking 1989).
2. Eğer X 'in her bir elemanı $\mathcal{O}$ ailesinin sonlu tane elemanı tarafından içeriliyorsa $\mathcal{O}$ ailesine *nokta sonlu aile* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.24: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün yerel sonlu açık bir incelti mişi varsa bu topolojik uzaya *parakompakt* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.25: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün nokta sonlu açık bir incelti mişi varsa bu topolojik uzaya *metakompakt* denir (Steen and Seebach 1995).

Tanım 3.1.26: X bir küme, $A \subset X$ ve $\mathcal{O} \subset 2^X$ olsun. A kümesinin $\mathcal{O}$ ailesine göre *yıldızı*

$$St(A, \mathcal{O}) = \bigcup \{O \in \mathcal{O} : A \cap O \neq \emptyset\}$$

ile tanımlıdır. Eğer bir $x \in X$ için $A = \{x\}$ ise $St(\{x\}, \mathcal{O})$ yerine $St(x, \mathcal{O})$ yazılır (Engelking 1989).

Tanım 3.1.27: (X, λ) bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{O}$ da X 'in iki örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için

$$St(U, \mathcal{U}) \subset \mathcal{O}_U$$

olacak şekilde bir $\mathcal{O}_U \in \mathcal{O}$ varsa $\mathcal{U}$ 'ya $\mathcal{O}$ örtüsünün *yıldız inceltişi* denir (Engelking 1989).

Teorem 3.1.28: (X, λ) bir T_1 uzayı olsun. (X, λ) topolojik uzayının parakompakt olması için gerek ve yeter koşul X 'in her açık örtüsünün yıldız açık bir inceltişi olmasıdır (Engelking 1989).

Tanım 3.1.29: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. X 'in $A \notin \lambda$ olacak şekildeki bir A alt kümesi için

$$\tau = \{O \cup (O' \cap A) : O, O' \in \lambda\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye λ 'nın bir *basit genişlemesi* denir. $\tau = \lambda(A)$ olarak gösterilir (Levine 1964).

Tanım 3.1.30: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in açık alt kümelerinden oluşan sayılabilir her $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi için $\bigcap_{n \in \omega} O_n \in \lambda$ oluyorsa (X, λ) topolojik uzayına bir *P-uzay* denir (Gillman and Henriksen 1954).

Tanım 3.1.31: (X, λ) ve (Y, ζ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \lambda) \rightarrow (Y, \zeta)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi X 'in sonlu bir alt kümesi oluyorsa f dönüşümüne *bire-sonlu* denir (Kočinac 1999b).

Tanım 3.1.32: (X, λ) ve (Y, ζ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \lambda) \rightarrow (Y, \zeta)$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer X 'in $f(F) = Y$ koşulunu sağlayan kapalı tek F alt kümesi X ise f 'ye *indirgenemez* denir (Kočinac 1999b).

Lemma 3.1.33: (X, λ) ve (Y, ζ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \lambda) \rightarrow (Y, \zeta)$ ise kapalı, indirgenemez ve bire-sonlu bir dönüşüm olsun. $\mathcal{O}$ ailesi X 'in bir ω -örtüsü ve her $O \in \mathcal{O}$ için $f_\phi(O) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset O\}$ olmak üzere

$$\{f_\phi(O): O \in \mathcal{O}\}$$

ailesi Y 'nin bir ω -örtüsüdür (Kočinac 1999b).

Lemma 3.1.34: (X, λ) ve (Y, ζ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \lambda) \rightarrow (Y, \zeta)$ ise kapalı ve indirgenemez bir dönüşüm olsun. Eğer O kümesi X 'in herhangi bir açık alt kümesi ise

$$f(\overline{O}) = \overline{f_\phi(O)}$$

ve

$$\overline{O} = \overline{f^{-1}(f_\phi(O))}$$

sağlanır (Kočinac 1999b).

Tanım 3.1.35: (X, λ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ ise A 'ya *hiçbir yerde yoğun değildir* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.36: (X, λ) bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Eğer Y kümesi X 'in sayılabilir çoklukta hiçbir yerde yoğun olmayan alt kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa Y 'ye *1. Kategoriden küme* denir (Willard 1970).

Tanım 3.1.37: $X \subset \mathbb{R}$ sayılamaz bir küme olsun. Eğer X kümesinin $\mathbb{R}$ 'nin 1. Kategoriden olan tüm alt kümeleri ile arakesiti sayılabilir ise X 'e bir *Luzin küme* denir (Miller 1984).

Tanım 3.1.38: X boş kümeden farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlı $<$ bağıntısı;

1. Her $x \in X$ için $x \not< x$,

2. Her $x, y, z \in X$ için $x < y$ ve $y < z$ iken $x < z$

koşullarını sağlıyorsa bu bağıntıya *kesin kısmi sıralama bağıntısı*, $(X, <)$ ikilisine de *kesin kısmi sıralı küme* denir (Jech 2003).

Tanım 3.1.39: $(X, <)$ kesin kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer X 'in boş kümeden farklı her alt kümesinin en küçük elemanı varsa bu kümeye *kesin iyi sıralı küme* denir (Jech 2003).

Tanım 3.1.40: X boş kümeden farklı bir küme olsun. Eğer X 'in bütün elemanları aynı zamanda X 'in bir alt kümesi oluyorsa bu kümeye *geçişken küme* denir (Jech 2003).

Tanım 3.1.41: Eleman olma ($\in$) bağıntısı ile kesin iyi sıralı olan bir geçişken kümeye *ordinal* denir (Jech 2003).

Tanım 3.1.42: Tüm sayılabilir ordinalerin kümesi

$$\omega_1 = \{\gamma: \gamma \text{ bir ordinaldir ve sayılabilirdir}\}$$

ile verilir. ω_1 kümesi ilk sayılamaz ordinaldir (Jech 2003).

Tanım 3.1.43: $(X, \leq)$ tam sıralı bir küme olsun. $(y, z) = \{x \in X: y < x < z\}$ olmak üzere

$$\mathcal{B} = \{(y, z): y, z \in X, y < z\}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji tabanıdır. Bu taban tarafından üretilen topolojiye *sıra topolojisi* denir (Steen and Seebach 1995).

Tanım 3.1.44: I bir indis kümesi $\{X_i: i \in I\}$ de ikişer ikişer ayrık kümelerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için (X_i, λ_i) topolojik uzayları verilsin. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ olsun. Bu durumda

$$\lambda = \{U \subset X: U \cap X_i \in \lambda_i, i \in I\}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. X kümesine λ topolojisi ile beraber $\{(X_i, \lambda_i): i \in I\}$ topolojik uzaylar ailesinin *toplamı* denir (Engelking 1989).

3.2. Bitopolojik Uzaylar ile İlgili Temel Kavramlar

Bitopolojik uzaylarda kullanılan notasyonlar için Dvalishvili (2005) kaynağı temel alınmıştır. Tez çalışması boyunca $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olarak alınmış ve $i, j \in \{1, 2\}$ olmak üzere, $i \neq j$ olarak kabul edilmiştir. Herhangi bir ψ topolojik özelliği için (i, j) - ψ ifadesi ψ ile benzer, aynı zamanda λ_j ile ilişkili olan ve λ_i için geçerli bir özelliği belirtir. Eğer hem $(1, 2)$ - ψ hem $(2, 1)$ - ψ ise bu durum p - ψ ile gösterilir. $i \in \{1, 2\}$ olmak üzere, i - ψ (bazen λ_i - ψ), (X, λ_i) topolojik uzayının ψ 'ye sahip olması ile $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının i - ψ 'ye sahip olmasının denk olduğunu belirtir. Eğer hem 1 - ψ hem de 2 - ψ ise d - ψ notasyonu kullanılmıştır. Örneğin $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı d -kompakt ise hem (X, λ_1) hem de (X, λ_2) kompakttır. Aynı şekilde, $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümünün i -sürekli olması $f: (X, \lambda_i) \rightarrow (Y, \zeta_i)$ indirgenmiş dönüşümünün sürekli olduğu anlamına gelmektedir. Aksi belirtilmediği sürece X üzerinde her iki topolojiye göre hiçbir ayırma aksiyomunun olmadığı varsayılmıştır.

Bu kısımda öncelikle bitopolojik uzaylarda tanımlı bazı örtü özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.2.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in her λ_i -açık örtüsü $\mathcal{O}$ 'nun sonlu bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U))$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -yakın *kompakt* denir (Banerjee 1987).

Tanım 3.2.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in her λ_i -açık örtüsü $\mathcal{O}$ 'nun sayılabilir bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

1.

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U))$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -yakın *Lindelöf* denir (Salleh and Kılıçman 2013).

2.

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} Cl^{\lambda_j}(U)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -hemen hemen *Lindelöf* denir (Kılıçman and Salleh 2013).

3.

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -zayıf *Lindelöf* denir (Kılıçman and Salleh 2013).

Tanım 3.2.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Eğer bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

1.

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Cl^{\lambda_j}(U)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -hemen hemen Menger denir.

2.

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -zayıf Menger denir (Kočinac and Özçağ 2012).

Yukarıda tanımları verilen bitopolojik hemen hemen Menger ve zayıf Menger özellikleri ile bitopolojik hemen hemen Lindelöf ve zayıf Lindelöf örtü özellikleri Alster özelliğinin bitopolojik bazı formları ile de ilişkilendirilmiştir. Tez çalışmasında Alster özelliğinin literatüre yeni kazandırılmış olan bir bitopolojik formu ile de ilişkilendirilmiş olan bu formların tanımları aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.2.4: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. X 'in her λ_i -Alster örtüsü $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir $\mathcal{O}$ alt ailesi

1.

$$X = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} Cl^{\lambda_j}(O)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -hemen hemen Alster denir.

2.

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -zayıf *Alster* denir (Eysen and Özçağ 2019).

Teorem 3.2.5: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen *Alster* ise (i, j) -hemen hemen *Menger*'dir. Eğer (X, λ_i) bir *P*-uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen *Alster*'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen *Menger*'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen *Lindelöf*'tür (Eysen and Özçağ 2019).

Tanım 3.2.6: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık olan her örtüsü λ_i -açık ve λ_j -yerel sonlu bir inceltilmişse sahipse bu bitopolojik uzaya (i, j) -*parakompakt* denir (Raghavan and Reilly 1977).

Tanım 3.2.7: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$$A = \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(A) \right)$$

eşitliği sağlanıyorsa A kümesine (i, j) -*regüler açık* denir. (i, j) -regüler açık olan bir kümenin tümleyenine (i, j) -*regüler kapalı* denir (Singal and Arya 1971).

Tanım 3.2.8: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in her x elemanı ve $x \notin K$ olacak şekildeki her λ_i -kapalı alt kümesi için X 'in λ_i -açık O ve λ_j -açık U alt kümeleri $x \in O$, $K \subset U$ ve $O \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu bitopolojik uzaya (i, j) -*regüler* denir (Singal and Arya 1971).

Önerme 3.2.9: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -*regüler* ancak ve ancak her $x \in X$ ve $x \in O$ olacak şekildeki her $O \in \lambda_i$ için

$$x \in U \subset Cl^{\lambda_j}(U) \subset O$$

olacak şekilde bir $U \in \lambda_i$ vardır (Singal and Arya 1971).

Tanım 3.2.10: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $x \in X$ keyfi olsun. Eğer x 'i içeren (i, j) -regüler açık her $O \subset X$ alt kümesi için X 'in

$$x \in U \subset Cl^{\lambda_j}(U) \subset O$$

olacak şekilde λ_i -açık olan bir U alt kümesi varsa bu bitopolojik uzaya (i, j) -hemen hemen regüler denir (Singal and Singal 1970).

Teorem 3.2.11: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (i, j) -hemen hemen Menger ise (X, λ_i) Menger'dir (Özçağ and Eysen 2016).

Tanım 3.2.12: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan sayılabilir her $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi için

$$Cl^{\lambda_j}\left(\bigcup_{n \in \omega} O_n\right) = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -zayıf P -uzay denir (Kılıçman and Salleh 2013).

Bitopolojik uzaylar arasındaki dönüşümlerin sürekliliğinin birçok çeşidi literatüre kazandırılmıştır. Tez çalışması için gerekli olan sürekli dönüşümlerin tanımları aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.2.13: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) iki bitopolojik uzay ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ bir dönüşüm olmak üzere,

1. Eğer Y 'nin (i, j) -regüler açık olan her alt kümesinin f dönüşümü altındaki ters görüntüsü X 'in λ_i -açık bir alt kümesi oluyorsa f 'ye (i, j) -hemen hemen sürekli denir (Maheshwari and Prasad 1977).

2. Eğer Y 'nin ζ_i -açık olan her alt kümesinin f dönüşümü altındaki ters görüntüsü X 'in bir (i, j) -regüler açık alt kümesi oluyorsa f 'ye (i, j) -tamamen sürekli denir (Khedr and Alshibani 1991).

3. Eğer her $x \in X$ ve Y 'nin $f(x) \in O$ olacak şekildeki ζ_i -açık her O alt kümesi için X 'in x noktasını içeren λ_i -açık bir U alt kümesi

$$f(Cl^{\lambda_j}(U)) \subset O$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f 'ye (i, j) -kuvvetli- θ -sürekli denir (Banerjee 1987).

4. Eğer Y 'nin ζ_i -açık olan her O alt kümesi için

$$f^{-1}(O) \subset Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O)))$$

kapsaması sağlanıyorsa f 'ye (i, j) -ön sürekli denir (Khedr and Alshibani 1991).

5. Eğer Y 'nin ζ_i -açık olan her O alt kümesi için $f^{-1}(O)$ kümesi X 'in bir λ_j -kapalı alt kümesi oluyorsa f 'ye (i, j) -kontra sürekli denir (Khedr and Alshibani 1991).

6. Eğer her $x \in X$ ve Y 'nin $f(x)$ 'i içeren ζ_i -açık her O alt kümesi için X 'in x elemanını içeren λ_i -açık bir U alt kümesi

$$f(U) \subset Cl^{\zeta_j}(O)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f 'ye (i, j) -zayıf sürekli denir (Bose and Sinha 1981).

7. Eğer $f: (X, \lambda_i) \rightarrow (Y, \zeta_j)$ dönüşümü sürekli ise f 'ye (i, j) -sürekli dönüşüm denir (Kılıçman and Salleh 2007).

Tanım 3.2.14: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) iki bitopolojik uzay ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ bir dönüşüm olsun. Eğer X 'in λ_i -açık olan her O alt kümesi için

$$f(O) \subset \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(f(O)) \right)$$

kapsaması sağlanıyorsa f 'ye (i, j) -ön açık dönüşüm denir (Saegrove 1971).

Önerme 3.2.15: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) iki bitopolojik uzay ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümü (i, j) -ön açık bir dönüşümdür ancak ve ancak Y 'nin ζ_j -açık olan her O alt kümesi için

$$f^{-1} \left(Cl^{\zeta_i}(O) \right) \subset Cl^{\lambda_i}(f^{-1}(O))$$

kapsaması sağlanır (Eysen and Özçağ 2018).

Tanım 3.2.16: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) iki bitopolojik uzay ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ ise d -kapalı, d -süreklili ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi X 'in d -kompakt bir alt kümesi oluyorsa f 'ye *mükemmel dönüşüm* denir (Datta 1972).

Tanım 3.2.17: I bir indis kümesi ve $\mathfrak{U} = \{(X_i, \lambda_i, \zeta_i) : i \in I\}$ bitopolojik uzayların bir ailesi olsun. $\prod_{i \in I} X_i$ çarpım kümesi üzerinde $(X_i, \lambda_i)_{i \in I}$ ve $(X_i, \zeta_i)_{i \in I}$ topolojik uzaylarının ürettiği çarpım topolojileri sırasıyla λ ve ζ olsun. Bu durumda $\mathfrak{U}$ bitopolojik uzaylar ailesinin çarpım bitopolojik uzayı

$$\left(\prod_{i \in I} X_i, \lambda, \zeta \right)$$

ile tanımlıdır (Saegrove 1971).

4. Menger ve LİNDELÖF ÖZELLİKLERİNİN BİTOPOLOJİK BAZI ZAYIF FORMLARI

4.1. Bitopolojik Yakın Menger Özelliği

Bu bölümde Menger seçme örtü özelliğinin bir kümenin üzerindeki her iki topoloji de kullanılarak elde edilen bitopolojik zayıf bir formu verilmiştir. Literatüre yeni kazandırılmış olan bu formun seçme prensipleri ile karakterizasyonu yapılmıştır. Ayrıca literatürde var olan bazı seçme örtü özellikleri ile ilişkileri incelenmiştir. Bu yeni form ile karşılaştırıldığı seçme örtü özelliklerinin denk olma koşullarından bahsedilmiştir. Sonrasında bu formun alt uzaylar, çarpımlar ve bitopolojik uzaylarda tanımlı bazı dönüşümler altındaki davranışları ele alınmıştır. Bu bölümde verilen sonuçlar 2024 yılında AIMS Mathematics dergisinde “Nearly Menger covering property via bitopological spaces” başlıklı makalede yayımlanmıştır.

Tanım 4.1.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Eğer bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U))$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -yakın Menger denir.

$(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ ailesi X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin sınıfını temsil etsin. Aşağıdaki teorem bitopolojik yakın Menger özelliğinin seçme prensipleri ile bir karakterizasyonunu vermektedir. Bu teorem çalışmanın ileriki kısımlarında verilmiş olan örnek ve bazı teoremlerin ispatlarına yardımcı olarak kullanılmaktadır.

Teorem 4.1.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın Menger'dir ancak ve ancak X $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme özelliğini sağlar.

İspat: $\Rightarrow (X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olsun. X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ve X 'in her bir (i, j) -regüler açık alt kümesi aynı zamanda λ_i -açık olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U))$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için $\text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U)) = U$ olacağından $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme prensibini sağladığını gösteren bir dizidir.

$\Leftarrow X \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme özelliğini sağlasın ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_n = \{\text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olarak tanımlansın. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ dir. Varsayımdan ötürü bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ ailesi $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}'_n} V$$

olacak şekilde bulunabilir. Şimdi de her $n \in \omega$ ve her $V \in \mathcal{U}'_n$ için $V = \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(O_V))$ olacak şekilde bir $O_V \in \mathcal{O}_n$ seçilsin. $\mathcal{O}'_n = \{O_V : V \in \mathcal{U}'_n\}$ olarak tanımlansın. Açıkça her bir $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O_V \in \mathcal{O}'_n} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(O_V)) = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}'_n} V$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Sonuç 4.1.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir ancak ve ancak X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U))$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.4: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) Menger ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. (X, λ_i) Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için $U \in \lambda_i$ olduğundan

$$U = \text{Int}^{\lambda_i}(U) \subset \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U))$$

kapsaması sağlanır ve dolayısıyla

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U$$

$$\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U))$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 4.1.5: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) yakın Menger ve $\lambda_j \subset \lambda_i$ ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. (X, λ_i) yakın Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_i}(U))$$

olacak şekilde bulunabilir. $\lambda_j \subset \lambda_i$ olduğundan her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}_n$ için $Cl^{\lambda_i}(U) \subset Cl^{\lambda_j}(U)$ kapsamaları sağlanır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_i}(U)) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U)) \end{aligned}$$

elde edilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Aşağıda Teorem 4.1.4'ün tersinin daima doğru olmadığına dair örnekler verilmiştir.

Örnek 4.1.6: $x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ve $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ da $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış topolojiye göre (x_0, y_0) merkezli ve ε yarıçaplı açık disk olsun.

$$O_{(x_0, y_0)}^\varepsilon = (O_\varepsilon(x_0, y_0) \setminus \{(a, b) : y_0 = b, a \in \mathbb{R}\}) \cup \{(x_0, y_0)\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{S} = \{O_\varepsilon(x_0, y_0) : x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\} \cup \{O_{(x_0, y_0)}^\varepsilon : x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$$

ailesini alt taban olarak kabul eden $\mathbb{R}^2$ üzerindeki topolojiye *silinmiş çap topolojisi* denir (Steen and Seebach 1995).

$\mathbb{R}^2$ silinmiş çap topolojisi ile beraber yakın Menger bir topolojik uzaydır (Parvez and Khan 2019).

Şimdi ters örnek olan bitopolojik uzay için $X = \mathbb{R}^2$ olsun. X kümesi λ_2 alışılmış topoloji ve λ_1 silinmiş çap topolojisi ile verilsin. (X, λ_1) yakın Menger ve $\lambda_2 \subset \lambda_1$ olduğundan, Teorem 4.1.5'e göre $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Menger'dir. Fakat (X, λ_1) Lindelöf olmadığından Menger uzay olamaz.

Örnek 4.1.7: $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{P}$ sırasıyla rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesi, $p \in \mathbb{P}$ sabit bir nokta olsun. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi

$$\lambda_1 = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{Q} \subset U\} \cup \{\emptyset\} \text{ ve } \lambda_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{p\}, \{p\}\}$$

topolojileri ile verilsin. Eğer $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtülerinin herhangi bir dizisi ise her $n \in \omega$ için $p \in O_n^p$ olacak şekilde bir $O_n^p \in O_n$ vardır. Diğer yandan her bir O_n^p kümesi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini içerdiğinden $\mathbb{R}$ 'nin λ_2 -yoğun bir alt kümesidir. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{O_n^p\}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizi olup $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Menger'dir. Diğer yandan $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtüsü olan

$$\mathcal{O} = \{\mathbb{Q} \cup \{x\} : x \in \mathbb{P}\}$$

ailesi verilsin. Bu örtünün sayılabilir bir alt örtüsü olmadığından $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Lindelöf değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger olamaz.

Aşağıdaki teorem Teorem 4.1.4'te belirtilen örtü özelliklerinin hangi koşul altında denk olduğunu vermektedir.

Teorem 4.1.8: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ise (X, λ_i) Menger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Önerme 3.2.9'a göre X 'in bir λ_i -açık örtüsü $\mathcal{U}_n$ elde edilebilir ve

$$Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}_n)) = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(U)) : U \in \mathcal{U}_n\}$$

örtüsü her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin bir inceltilmişidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her $n \in \omega$ için sonlu bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(V))$$

sağlanır. $Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}_n))$ örtüsü $\mathcal{O}_n$ 'nin bir inceltilmiş olduğu için her $V \in \mathcal{V}_n$ için $Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(V)) \subset \mathcal{O}_V$ olacak şekilde bir $\mathcal{O}_V \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{\mathcal{O}_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$ sonlu olduğundan $\mathcal{O}'_n \subset \mathcal{O}_n$ ailesi sonludur ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{\mathcal{O}_V \in \mathcal{O}'_n} \mathcal{O}_V$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizi olup (X, λ_i) Menger'dir.

Bitopolojik uzaylarda Menger özelliğinin kümenin üzerindeki topolojilerin kapanış operatörü kullanılarak tanımlanan bazı zayıf formları vardır. Tanım 3.2.3'teki gibi verilen bu iki form (i, j) -hemen hemen Menger ve (i, j) -zayıf Menger seçme örtü özellikleridir. (i, j) -hemen hemen Menger olan bir bitopolojik uzayın (i, j) -zayıf Menger örtü özelliğini sağladığı bilinmektedir. Bu iki formun tanımları düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.9: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ise (i, j) -hemen hemen Menger'dir.

İspat: Kapanış ve iç operatörlerinin özellikleri düşünüldüğünde hemen görülür.

Teorem 4.1.9 ile beraber (i, j) -yakın Menger özelliğinin daha güçlü bir form olduğu elde edilir. Fakat (i, j) -hemen hemen Menger ve (i, j) -zayıf Menger özellikleri (i, j) -yakın Menger özelliğini gerektirmez. Aşağıdaki örnekler sırasıyla $(1, 2)$ -hemen hemen Menger ve $(1, 2)$ -zayıf Menger olan fakat $(1, 2)$ -yakın Menger olmayan bitopolojik uzay örnekleridir.

Örnek 4.1.10: ω_1 ilk sayılamaz ordinal, $i \in \omega_1$ ve $j \in \omega$ olsun. a_i^j, b_i^j, c_i, a ve b ayrık noktalar olmak üzere, A_1, A_2 ve A_3 kümeleri

$$A_1 = \{a_i^j : j \in \omega, i < \omega_1\} \cup \{b_i^j : j \in \omega, i < \omega_1\},$$

$$A_2 = \{c_i : i < \omega_1\}$$

ve

$$A_3 = \{a, b\}$$

olarak tanımlansın. $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ olsun. λ_1 ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir öyle ki bu topolojiye göre $\{a_i^j\}$ ve $\{b_i^j\}$ noktaları izole noktalar; $\{c_i\}$, a ve b noktalarının komşulukları sırasıyla

$$N_{c_i}^n = \{c_i\} \cup \{a_i^j : j \geq n\} \cup \{b_i^j : j \geq n\},$$

$$N_a^\alpha = \{a\} \cup \{a_i^j : i \geq \alpha, j \in \omega\}$$

ve

$$N_b^\alpha = \{b\} \cup \{b_i^j : i \geq \alpha, j \in \omega\}$$

ile tanımlıdır (Cammaroto and Santoro 1996).

X kümesi λ_1 topolojisi ile beraber hemen hemen Menger olan bir P -uzaydır (Parvez and Khan 2019).

λ_2 topolojisi λ_1 'in bir basit genişlemesi olsun öyle ki $a \in X$ için

$$\lambda_2 = \lambda_1(\{a\}) = \{U \cup (V \cap \{a\}) : U, V \in \lambda_1\}$$

olarak tanımlansın. X kümesi λ_1 topolojisi ve λ_2 topolojisi ile birlikte verilsin. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen Menger'dir fakat (1,2)-yakın Menger değildir. Öncelikle $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin (1,2)-hemen hemen Menger olduğu gösterilmiştir. Bunun için öncelikle λ_2 basit genişlemesine göre X kümesinin λ_1 -açık olan her U alt kümesi için (4.1) elde edilir:

$$Cl^{\lambda_2}(U) = \begin{cases} Cl^{\lambda_1}(U), & a \in U \\ Cl^{\lambda_1}(U) \setminus \{a\}, & a \notin U \text{ ve } a \in Cl^{\lambda_1}(U) \\ Cl^{\lambda_1}(U), & a \notin U \text{ ve } a \notin Cl^{\lambda_1}(U) \end{cases} \quad (4.1)$$

$(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin (1,2)-hemen hemen Menger olduğunu göstermek için X 'in λ_1 -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. (X, λ_1) hemen hemen Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Cl^{\lambda_1}(U)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan $\mathcal{O}_n$ ailesi her $n \in \omega$ için X kümesinin bir örtüsü olduğundan $a \in U_n^a$ olacak şekilde en az bir $U_n^a \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n \cup \{U_n^a\}$ olarak tanımlansın. Dolayısıyla (4.1) ile beraber $(\mathcal{V}_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen Menger'dir.

Şimdi de X kümesinin λ_1 -açık örtüsü olan $\mathcal{O} = \{N_{c_i}^0 : i < \omega_1\} \cup \{N_a^1, N_b^1\}$ ailesi verilsin ve her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olsun. $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_1 -açık örtülerinin bir dizisidir. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Menger ise her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Int^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(U))$$

eşitliği sağlanır. Genelliği bozmadan λ_1 topolojisine göre komşuluklar sistemi ile her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_n = \left\{ N_{c_{i_k^n}}^0 : k = 1, 2, 3, \dots, m_n \right\} \cup \{N_a^1, N_b^1\}$$

olarak kabul edilebilir. Her $n \in \omega$ için $\alpha_n = \max \left\{ i_k^n : N_{c_{i_k^n}}^0 \in \mathcal{U}_n \right\}$ olsun. Diğer yandan $\beta_0 = \sup \{ \alpha_n : n \in \omega \}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ sonlu olduğundan $\beta_0 < \omega_1$ dir. O halde bir $\beta^* > \beta_0$ seçilebilir. Fakat (4.1) ile beraber

$$c_{\beta^*} \notin \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Int^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(U))$$

elde edilir. Dolayısıyla $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Menger değildir.

Örnek 4.1.11: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ve $x \in \mathbb{P}$ keyfi olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji verilsin. Bu topolojiye göre her $n \in \omega$ için $x_n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, x 'e yakınsayan bir $(x_n)_{n \in \omega}$ dizisi seçilsin. Her $x \in \mathbb{P}$ için

$$B_n^x = \{x\} \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x_i\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\mathcal{B} = \{\{q\}: q \in \mathbb{Q}\} \cup \{B_n^x: x \in \mathbb{P}, n \in \omega\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır ve bu taban tarafından üretilen $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojiye *rasyonel dizi topolojisi* denir (Steen and Seebach 1995).

λ_1 topolojisi $\mathbb{R}$ üzerinde rasyonel dizi topolojisi, λ_2 ise alışılmış topoloji olmak üzere, $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-zayıf Menger'dir (Eysen and Özçağ 2018).

$(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının (1,2)-yakın Menger olmadığını göstermek için $\mathcal{O}_n$ ailesi her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}_n = \{B_n^x: x \in \mathbb{P}\} \cup \{\{q\}: q \in \mathbb{Q}\}$$

olarak tanımlansın. Açıkça her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ ailesi $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtüsüdür. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin her bir elemanı λ_2 -kapalı olduğundan aynı zamanda $\mathbb{R}$ 'nin (1,2)-regüler açık olan bir alt kümesidir. Diğer yandan $\mathbb{P}$ sayılamaz olduğundan ve her $x \in \mathbb{P}$ elemanı her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin tek bir elemanı tarafından içerildiğinden $\mathbb{R}$ kümesi $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme prensibini sağlamaz. Dolayısıyla Teorem 4.1.2 ile beraber $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Menger değildir.

Aşağıdaki teorem verilen bu üç formun hangi koşullar altında denk olduklarını göstermektedir.

Teorem 4.1.12: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen regüler ve (i, j) -zayıf P -uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger'dir.

İspat: $3 \Rightarrow 1$ $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi

$$\mathcal{U}_n = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. Diğer yandan $x \in X$ keyfi verilsin. Her $n \in \omega$ için $x \in U_n^x$ olacak şekilde en az bir $U_n^x \in \mathcal{U}_n$ vardır. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen regüler olduğundan

$$x \in V_n^x \subset Cl^{\lambda_j}(V_n^x) \subset U_n^x$$

olacak şekilde bir $V_n^x \in \lambda_i$ bulunabilir. Böylece her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{V_n^x : x \in X\}$ olmak üzere, X 'in λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger olduğundan bir $(\mathcal{V}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}'_n$ ailesi $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{V}'_n} V \right)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}'_n$ ailesi sayılabilir ve $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir (i, j) -zayıf P -uzay olduğundan

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{V}'_n} V \right) = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{V}'_n} Cl^{\lambda_j}(V)$$

elde edilir. Şimdi de her $n \in \omega$ ve her $V \in \mathcal{V}'_n$ için $Cl^{\lambda_j}(V) \subset Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_V))$ olacak şekilde bir $O_V \in \mathcal{O}_n$ seçilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}'_n = \{O_V : V \in \mathcal{V}'_n\}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizidir ve sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 4.1.8 ile beraber aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.13: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (i, j) -zayıf P -uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (X, λ_i) Menger'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Menger'dir,
4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger'dir.

Aşağıda bitopolojik yakın Menger özelliğinin alt uzaylar, dönüşümler, çarpımlar altındaki bazı korunum özelliklerinden ve karakterizasyonlarından bahsedilmiştir.

Bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının herhangi bir Y alt kümesinin (i, j) -yakın Menger olması demek, Y alt kümesinin üzerine λ_1 ve λ_2 topolojileri tarafından indirgenen λ_1^Y ve λ_2^Y alt uzay topolojileri ile birlikte (i, j) -yakın Menger olması anlamına gelmektedir.

Tanım 4.1.14: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun.

1. Eğer Y λ_1 -açık ve λ_2 -açık ise Y 'ye *açık*,
2. Eğer Y λ_1 -kapalı ve λ_2 -kapalı ise Y 'ye *kapalı*,
3. Eğer Y λ_i -kapalı ve λ_j -açık ise Y 'ye (i, j) -*kapalı/açık*,
4. Eğer Y (i, j) -kapalı/açık ve (j, i) -kapalı/açık ise Y 'ye *kapalı/açık* denir (Salleh and Kılıçman 2013).

Aşağıdaki örnek (i, j) -yakın Menger bitopolojik uzayların alt uzaylarının (i, j) -yakın Menger özelliğine sahip olamayabileceğini göstermektedir. Ayrıca, verilen örnek (i, j) -yakın Menger özelliğine sahip bir bitopolojik uzayın kapalı alt kümelerinin de (i, j) -yakın Menger olamayabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.1.15: X sayılamaz bir küme ve $w \notin X$ olsun. $X^* = X \cup \{w\}$ olarak tanımlansın. $p \in X$ sabit bir nokta olmak üzere, X^* üzerindeki λ_1 ve λ_2 topolojileri

$$\lambda_1 = \{U \subset X^* : \{p, w\} \subset U\} \cup \{\emptyset, \{w\}\} \text{ ve } \lambda_2 = \{U \subset X^* : w \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

olarak verilsin. X^* 'in boş kümeden farklı λ_1 -açık olan her alt kümesi (X^*, λ_2) 'de yoğundur. Dolayısıyla X^* 'in λ_1 -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verildiğinde, her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ örtüsünden tek bir eleman seçilerek elde edilen ailelerin dizisi $(X^*, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının $(1, 2)$ -yakın Menger olduğunu gösterir. Diğer yandan X kümesinin hem λ_1 -kapalı hem de λ_2 -kapalı ve dolayısıyla bu bitopolojik uzayda kapalı bir alt küme olduğu görülür. Şimdi de X 'in λ_1^X -açık örtüsü olan

$$\mathcal{O} = \{\{p, x\} : x \in X\}$$

ailesi verilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlansın. Bu durumda X 'in λ_1^X -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Diğer yandan (X, λ_2^X) topolojik uzayı ayrık ve X sayılamaz olduğundan $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için istenilen şartlarda bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunamaz. Sonuç olarak $(X, \lambda_1^X, \lambda_2^X)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın Menger değildir.

Önerme 4.1.16: Bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının açık bir $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ alt uzayı (i, j) -yakın Menger'dir ancak ve ancak Y 'nin λ_i -açık kümelerden oluşan örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{O}_n$ alt ailesi sonludur ve Y kümesi

$$\left\{ \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(U) \right) : U \in \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n \right\}$$

ailesi tarafından örtülür.

İspat: $\Rightarrow (\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi önermede bahsedildiği gibi verilsin. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}'_n = \{Y \cap O : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ ailesi Y 'nin λ_i^Y -açık örtüsüdür. $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ alt uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ ailesi $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$Y = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} \text{Int}^{\lambda_i^Y} \left(\text{Cl}^{\lambda_j^Y}(U) \right) \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve her $U \in \mathcal{U}'_n$ için $U = O_U \cap Y$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_n$ vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{O_U : U \in \mathcal{U}'_n\}$ şeklinde tanımlansın. Açıkça her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi sonludur ve Y hem λ_i -açık hem de λ_j -açık olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Int}^{\lambda_i^Y} \left(\text{Cl}^{\lambda_j^Y}(U) \right) &= \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U) \cap Y) \\ &\subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(Y \cap U) \right) \\ &= \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(Y \cap O_U) \right) \\ &\subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(O_U) \right) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Dolayısıyla (4.2) eşitliği ile birlikte

$$Y \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O_U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(O_U))$$

sağlanır.

$\Leftarrow$ Y 'nin λ_i^Y -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ ve her $O \in \mathcal{O}_n$ için $O = Y \cap U_O$ olacak şekilde bir $U_O \in \lambda_i$ bulunabilir. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_O : O \in \mathcal{O}_n\}$ olmak üzere, Y 'nin λ_i -açık kümelerden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. O halde bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ sonludur ve

$$Y \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U_O \in \mathcal{U}'_n} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U_O)) \quad (4.3)$$

kapsaması elde edilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{O : U_O \in \mathcal{U}'_n\}$ olarak tanımlansın. Açıkça her bir $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer yandan Y açık olduğundan

$$\text{Int}^{\lambda_i^Y} (Cl^{\lambda_j^Y}(O)) = \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U_O \cap Y)) = \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(U_O)) \cap Y$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak (4.3) kapsamasına göre $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 4.1.17: (i, j) -yakın Menger olan bir bitopolojik uzayın açık ve λ_i -kapalı (dolayısıyla kapalı/açık) alt uzayları (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger, $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ de bu bitopolojik uzayın açık ve λ_i -kapalı bir alt uzayı olsun. $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi Y 'nin λ_i -açık kümelerden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olmak üzere, Y kümesi λ_i -kapalı olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n \cup \{X \setminus Y\}$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$

bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}'_n$ alt ailesi vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U) \right) \quad (4.4)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi de her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U : U \in \mathcal{U}'_n, U \neq X \setminus Y\}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. $X \setminus Y$ hem λ_i -açık hem de λ_j -kapalı olduğundan (4.4) eşitliğinin her iki tarafının Y ile arakesiti alınır

$$Y \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U) \right)$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak Önerme 4.1.16 ile beraber $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 4.1.18: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger, (Y, ζ_1, ζ_2) herhangi bir bitopolojik uzay ve $f : (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü p -hemen hemen sürekli, i -açık ve örten olsun. O halde (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı da (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi Y 'nin (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_n\}$ şeklinde tanımlansın. f dönüşümü (i, j) -hemen hemen sürekli olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsüdür. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}'_n$ alt ailesi vardır ve

$$\left\{ \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U') \right) : U' \in \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}'_n \right\}$$

ailesi X 'i örter. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve $U' \in \mathcal{U}'_n$ için bir $O_{U'} \in \mathcal{O}_n$ vardır öyle ki $U' = f^{-1}(O_{U'})$ sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{O_{U'} : U' \in \mathcal{U}'_n\}$ şeklinde tanımlansın. Şimdi

$$\left\{ \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right) = O_{U'} : O_{U'} \in \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n \right\}$$

ailesinin Y 'yi örttüğü gösterilebilir. Bunun için $y = f(x) \in Y$ keyfi verilsin. En az bir $n \in \omega$ ve $U' \in \mathcal{U}'_n$ için $x \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U') \right)$ sağlanır ve bundan dolayı $x \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O_{U'})) \right)$ dir. Diğer yandan $O_{U'}$ kümesi Y 'nin (i, j) -regüler açık alt kümesi olduğundan $Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) = Cl^{\zeta_j} \left(\text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right) \right)$ eşitliği yazılabilir. O halde $Cl^{\zeta_j}(O_{U'})$ kümesi Y 'nin (j, i) -regüler kapalı alt kümesidir. Dolayısıyla $Y \setminus Cl^{\zeta_j}(O_{U'})$ kümesi (j, i) -regüler açık olup f dönüşümü (j, i) -hemen hemen sürekli olduğundan $f^{-1} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right)$ kümesi X 'in λ_j -kapalı bir alt kümesidir. O halde $Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O_{U'})) \subset f^{-1} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right)$ sağlandığından ve f dönüşümü i -açık olduğundan

$$\begin{aligned} y = f(x) &\in f \left(\text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O_{U'})) \right) \right) \\ &\subset \text{Int}^{\zeta_i} \left(f \left(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O_{U'})) \right) \right) \\ &\subset \text{Int}^{\zeta_i} \left(f \left(f^{-1} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right) \right) \right) \\ &= \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(O_{U'}) \right) = O_{U'} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olup Y $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme özelliğini sağlar. Sonuç olarak Teorem 4.1.2 ile birlikte (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Her d -sürekli dönüşüm p -hemen hemen sürekli olduğundan aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

Sonuç 4.1.19: (i, j) -yakın Menger bitopolojik bir uzayın d -sürekli ve i -açık örten dönüşümler altındaki görüntüleri (i, j) -yakın Menger'dir.

(i, j) -yakın Menger bitopolojik uzayların ters görüntüleri ile ilgili sonuç verilmeden önce bu forma sahip bitopolojik uzayların d -sürekli ve i -açık örten dönüşümler altındaki ters görüntülerinin (i, j) -yakın Menger olamayabileceğine dair aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.1.20: $p \in \mathbb{P}$ sabit bir nokta olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde $\lambda_1 = \{U \subset \mathbb{R} : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$, $\lambda_2 = \{U \subset \mathbb{R} : p \notin U\} \cup \{\mathbb{R}\}$, $\zeta_1 = \{U \cap \mathbb{P} : U \in \lambda_1\} \cup \{\mathbb{R}\}$ ve $\zeta_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ topolojileri verilsin. Kolaylıkla görülebilir ki $(\mathbb{R}, \zeta_1, \zeta_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın Menger'dir. Öncelikle, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = p$ olmak üzere, $f : (\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \zeta_1, \zeta_2)$ sabit dönüşümü düşünülürse f 'nin 1 -açık ve d -sürekli olduğu gösterilebilir. Diğer yandan $\mathcal{O} = \{\{p, x\} : x \in \mathbb{R}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtüsüdür. Bununla beraber her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin $(1, 2)$ -yakın Menger olmadığını gösterir. Gerçekten, her $x \in \mathbb{R}$ için $\{p, x\}$ kümesi λ_2 -kapalı ve $\mathbb{R}$ sayılamaz olduğundan, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_1} (Cl^{\lambda_2}(U))$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunamaz.

Teorem 4.1.21: (i, j) -yakın Menger bitopolojik uzayların d -açık, (i, j) -tamamen sürekli ve mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüleri (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ve $f : (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ ise d -açık, (i, j) -tamamen sürekli mükemmel bir dönüşüm olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının (i, j) -yakın Menger olduğunu göstermek için X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. f dönüşümü mükemmel olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi X 'in λ_i -kompakt olan bir alt kümesidir. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için sonlu bir $\mathcal{U}_n^y \subset \mathcal{O}_n$ alt ailesi vardır öyle ki

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{U}_n^y = \mathcal{U}_n^y$$

sağlanır. Diğer yandan f dönüşümü i -kapalı ve U_n^y kümesi λ_i -açık olduğundan $W_n^y = Y \setminus f(X \setminus U_n^y)$ kümesi Y 'nin y 'yi içeren ζ_i -açık alt kümesidir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{W}_n = \{W_n^y : y \in Y\}$ olarak tanımlanırsa Y 'nin ζ_i -açık örtülerinden oluşan bir $(\mathcal{W}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{W}_n$ 'nin sonlu olan bir $\mathcal{W}_n'$ alt ailesi vardır öyle ki

$$\left\{ \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(W) \right) : W \in \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n' \right\}$$

ailesi Y 'yi örter. Her $n \in \omega$ için F_n kümesi Y 'nin sonlu bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{W}_n' = \{W_n^y : y \in F_n\}$ şeklinde yazılabilir. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}_n' = \bigcup_{y \in F_n} U_n^y$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{O}_n'$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer yandan f dönüşümü d -açık ve (i, j) -tamamen sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) = X &= f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(W_n^y) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} f^{-1} \left(\text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(W_n^y) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(f^{-1}(W_n^y) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_n^y) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} U_n^y \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in F_n} \left(\bigcup U_n^y \right) = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{O}_n'} U \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan X 'in $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}_{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ seçme özelliğini sağladığı görülür. Dolayısıyla Teorem 4.1.2 ile birlikte $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Aşağıda (i, j) -yakın Menger olan iki bitopolojik uzayın çarpımlarının (i, j) -yakın Menger olamayabileceğini gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.1.22:

$$\mathcal{B} = \{[a, b): a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji üretir. Bu aile ile üretilen topolojiye *Sorgenfrey topolojisi* denir. $\mathbb{R}$ kümesi Sorgenfrey topolojisi ile beraber regüler parakompakt bir Hausdorff uzayıdır (Steen and Seebach 1995).

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi Sorgenfrey topolojisi λ_1 ve ayrık topoloji λ_2 ile verilsin. τ ise $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topoloji olsun. Lelek (1969) çalışmasında

$$i: (\mathbb{R}, \lambda_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$$

birim dönüşüm olmak üzere, $(\mathbb{R}, \tau)$ uzayındaki her L Luzin kümesi için $i^{-1}(L)$ 'nin $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ 'in bir Menger alt kümesi olduğunu göstermiştir. Diğer yandan Lelek

$$A = \{(x, y): x + y = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere, eğer $(L \times L) \cap A$ sayılamaz ise $i^{-1}(L) \times i^{-1}(L)$ 'nin $(\mathbb{R}^2, (\lambda_1)^2)$ 'de Menger olamayacağını belirtmiştir.

Şimdi de $(\mathbb{R}^2, (\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2)$ bitopolojik uzayının

$$(\mathcal{L} = i^{-1}(L) \times i^{-1}(L), (\lambda_1^{\mathcal{L}})^2, (\lambda_2^{\mathcal{L}})^2)$$

alt uzayı verilsin. $(\mathcal{L}, (\lambda_1^{\mathcal{L}})^2, (\lambda_2^{\mathcal{L}})^2)$ 'nin $(1,2)$ -regüler bir alt uzay olduğu kolaylıkla görülebilir. Diğer yandan $(\mathcal{L}, (\lambda_1^{\mathcal{L}})^2)$ Menger olmadığından Teorem 4.1.8'e göre $(\mathcal{L}, (\lambda_1^{\mathcal{L}})^2, (\lambda_2^{\mathcal{L}})^2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Menger değildir.

Teorem 4.1.23: (i,j) -yakın Menger bir bitopolojik uzay ile (i,j) -yakın kompakt bir bitopolojik uzayın çarpımı (i,j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -yakın Menger, (Y, ζ_1, ζ_2) de (i,j) -yakın kompakt bir bitopolojik uzay olsun. $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ 'nin (i,j) -yakın Menger olduğunu göstermek için $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'nin bir λ_i -açık örtüsü ve $\mathcal{V}_n$ ailesi de Y 'nin bir ζ_i -açık örtüsü olmak üzere, $\mathcal{O}_n = \mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n$ şeklinde düşünülebilir. Öncelikle, $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -yakın Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ ailesi $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U) \right) \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i,j) -yakın kompakt olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{V}'_n$ alt ailesi vardır ve

$$Y = \bigcup_{V \in \mathcal{V}'_n} \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(V) \right) \quad (4.6)$$

dir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \mathcal{U}'_n \times \mathcal{V}'_n$ olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizidir ve $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -yakın Menger'dir. Gerçekten, her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ ailesinin sonlu bir alt ailesidir. Diğer yandan $(x, y) \in X \times Y$ keyfi verilsin. (4.5) eşitliğine göre bir $n_0 \in \omega$ için en az bir $U_x \in \mathcal{U}'_{n_0}$ vardır öyle ki $x \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_x) \right)$ dir. Diğer yandan (4.6) ile beraber $y \in \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(V_y^{n_0}) \right)$ olacak şekilde bir $V_y^{n_0} \in \mathcal{V}'_{n_0}$ bulunabilir. Dolayısıyla

$$(x, y) \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_x) \right) \times \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(V_y^{n_0}) \right) = \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(U_x \times V_y^{n_0}) \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$X \times Y = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O \in \mathcal{O}'_n} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(O) \right)$$

olup istenen sağlanır.

Sonuç 4.1.24: (i, j) -yakın Menger bir bitopolojik uzayın d -kompakt bir bitopolojik uzay ile çarpımı (i, j) -yakın Menger'dir.

$\mathcal{O}_\Omega^{\lambda_i}$ ve $\mathcal{O}_{\Omega(\lambda_i, \overline{\lambda_j})}$ bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının sırasıyla aşağıda belirtilen ailelerinin sınıfları olsun:

$\mathcal{O}_\Omega^{\lambda_i} : X$ 'in tüm λ_i - ω -örtülerinin ailesi,

$\mathcal{O}_{\Omega(\lambda_i, \overline{\lambda_j})} : X$ 'in alt kümelerinin tüm $\mathcal{O}$ koleksiyonlarının ailesidir öyle ki X 'in sonlu her F alt kümesi için $F \subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(O_F) \right)$ olacak şekilde bir $O_F \in \mathcal{O}$ vardır.

Teorem 4.1.25: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $n \in \omega$ olsun. Eğer $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ise X kümesi $\mathcal{S}_{fin} \left(\mathcal{O}_\Omega^{\lambda_i}, \mathcal{O}_{\Omega(\lambda_i, \overline{\lambda_j})} \right)$ seçme prensibini sağlar.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ X 'in λ_i - ω -örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. $\{P_m : m \in \omega\}$ ailesi her $m \in \omega$ için P_m sonsuz olmak üzere, ω 'nın bir ayrışımı olsun. Her $m \in \omega$ ve $k \in P_m$ için $\mathcal{O}_{k,m} = \{(O)^m : O \in \mathcal{O}_k\}$ olarak tanımlansın. O halde X^m 'nin $(\lambda_i)^m$ -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_{k,m})_{k \in P_m}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X^m, (\lambda_1)^m, (\lambda_2)^m)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her $k \in P_m$ için $\mathcal{O}_{k,m}$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}_{k,m}$ alt ailesi vardır ve

$$X^m = \bigcup_{k \in P_m} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{k,m}} Int^{(\lambda_i)^m} \left(Cl^{(\lambda_j)^m} (U) \right) \quad (4.7)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $k \in P_m$ ve $U \in \mathcal{U}_{k,m}$ için bir $O_U \in \mathcal{O}_k$ vardır öyle ki $(O_U)^m = U$ yazılabilir. Her $k \in \omega$ için $\mathcal{U}_k = \{O_U : U \in \mathcal{U}_{k,m}\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ istenilen şekildedir. Gerçekten, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer yandan $F = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subset X$ sonlu alt kümesi verilsin. $(x_1, x_2, \dots, x_t) \in X^t$ olacağından (4.7)'ye göre bir $k \in P_t$, $U \in \mathcal{U}_{k,t}$ ve dolayısıyla $(O_U)^t = U$ olacak şekildeki bir $O_U \in \mathcal{O}_k$ için

$$(x_1, x_2, \dots, x_t) \in Int^{(\lambda_i)^t} \left(Cl^{(\lambda_j)^t} ((O_U)^t) \right) = \left(Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (O_U) \right) \right)^t$$

elde edilir. Sonuç olarak $F \subset Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (O_U) \right)$ kapsamı sağlanır ve X belirtilen seçme prensibini sağlar.

Tanım 4.1.26: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık her alt kümesi O için

$$Cl^{\lambda_j}(O) = Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(O) \right)$$

sağlanıyorsa, diğer bir ifade ile X 'in λ_i -açık her alt kümesinin λ_j -kapanışı da λ_i -açık oluyorsa bu bitopolojik uzaya (i, j) -ekstremal bağlantısız denir (Dvalishvili 2005).

Teorem 4.1.27: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -ekstremal bağlantısız olsun. Eğer X kümesi $\mathcal{S}_{fin} \left(\mathcal{O}_\Omega^{\lambda_i}, \mathcal{O}_{\Omega(\lambda_i, \lambda_j)} \right)$ seçme prensibini sağlıyor ise her $n \in \omega$ için $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $k \in \omega$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ de X^k 'nın $(\lambda_i)^k$ -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için S_n bir indis kümesi olmak üzere, $\mathcal{O}_n = \{O_{n,s} : s \in S_n\}$ şeklinde

verilsin. Eğer $F \subset X$ sonlu ise $(F)^k$ kümesi X^k 'nin sonlu bir alt kümesidir ve bundan dolayı $(\lambda_i)^k$ -kompakttır. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $F \subset \bigcup \mathcal{O}_{n,F}$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{O}_{n,F} \subset \mathcal{O}_n$ alt ailesi vardır. Her $n \in \omega$ için $J_{n,F} \subset S_n$ sonlu olsun ve $\mathcal{O}_{n,F} = \{O_{n,s} : s \in J_{n,F}\}$ şeklinde tanımlansın. Diğer yandan bir $U_F \in \lambda_i$ vardır öyle ki

$$F \subset U_F$$

ve

$$(U_F)^k \subset \bigcup_{s \in J_{n,F}} O_{n,s}$$

sağlanır. Böylece her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_F : F \subset X \text{ sonlu}\}$ ailesi X 'in bir λ_i - ω -örtüsüdür. Varsayımdan dolayı her $n \in \omega$ için sonlu bir $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır öyle ki X 'in sonlu her $F \subset X$ alt kümesi için bir $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}'_n$ kümesi $F \subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U) \right)$ olacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için T_n sonlu bir indis kümesi olmak üzere, $\mathcal{U}'_n = \{U_{F_t} : t \in T_n\}$ olarak tanımlansın. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının (i, j) -ekstremal bağlantısız olması ile birlikte

$$X^k = \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{s \in \bigcup_{t \in T_n} J_{n,F_t}} \text{Int}^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k}(O_{n,s}) \right) \right)$$

eşitliği elde edilir. Bunu göstermek için keyfi bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$ verilsin. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ kümesi X 'in sonlu bir alt kümesidir. Dolayısıyla bir $n \in \omega$ vardır öyle ki en az bir $V \in \mathcal{U}'_n$ için $A \subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(V) \right)$ sağlanır. Bir $t \in T_n$ için $V = U_{F_t}$ olsun. O halde

$$(A)^k \subset \left(\text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_{F_t}) \right) \right)^k$$

$$\begin{aligned}
 &= Int^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k} \left((U_{F_t})^k \right) \right) \\
 &\subset Int^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k} \left(\bigcup_{s \in J_{n,F_t}} O_{n,s} \right) \right) \\
 &= \bigcup_{s \in J_{n,F_t}} Cl^{(\lambda_j)^k} (O_{n,s}) \\
 &= \bigcup_{s \in J_{n,F_t}} Int^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k} (O_{n,s}) \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak bir $s \in J_{n,F_t}$ için $x \in Int^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k} (O_{n,s}) \right)$ dir. Diğer yandan her $n \in \omega$ için

$$\left\{ O_{n,s} : s \in \bigcup_{t \in T_n} J_{n,F_t} \right\} \subset O_n$$

sonlu olduğundan $(X^k, (\lambda_1)^k, (\lambda_2)^k)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

4.2. Bitopolojik Yakın Menger ve Yakın Lindelöf Örtü Özelliklerinin Bazı Yıldız Formları

Bu bölümde yıldız operatörü kullanılarak bitopolojik yakın Menger örtü özelliğinin ve bitopolojik yakın Lindelöf örtü özelliğinin bazı formları tanımlanmış ve incelenmiştir. Bu formlar arasındaki ilişkilerden kısaca bahsedilmiştir.

Tanım 4.2.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi için X 'in sonlu alt kümelerinden oluşan bir $(F_n)_{n \in \omega}$ dizisi

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (St(F_n, O_n)) \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger denir.

Teorem 4.2.2: (i, j) -yakın Menger olan her bitopolojik uzay (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ de X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(U))$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \omega$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için $x_U \in U$ olacak şekilde bir x_U elemanı seçilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ sonlu olduğundan $F_n = \{x_U : U \in \mathcal{U}_n\}$ kümesi sonludur. Buradan

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(\text{St}(F_n, \mathcal{O}_n)))$$

olduğu hemen görülür. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger'dir.

Tanım 4.2.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için X 'in λ_j -kompakt alt kümelerinden oluşan bir $(K_n)_{n \in \omega}$ dizisi

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i}(\text{Cl}^{\lambda_j}(\text{St}(K_n, \mathcal{O}_n)))$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -yakın yıldız K Menger denir.

Bir topolojik uzayın sonlu her alt kümesi kompakt olduğundan (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger olan her bitopolojik uzayın (i, j) -yakın yıldız K Menger olduğu elde edilir.

Tanım 4.2.4: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -yakın yıldız Menger denir.

Teorem 4.2.5: (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger olan bitopolojik uzaylar (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ de X 'in λ_i -açık örtülerinin bir dizisi olsun. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için X 'in sonlu bir F_n alt kümesi bulunabilir öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St}(F_n, \mathcal{O}_n) \right) \right)$$

eşitliği elde edilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ ailesi X için bir örtü olduğundan her $x \in F_n$ için $x \in O_{x,n}$ olacak şekilde bir $O_{x,n} \in \mathcal{O}_n$ seçilir ve her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}'_n = \{O_{x,n} : x \in F_n\}$$

olarak tanımlanırsa $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olur ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}'_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

Teorem 4.2.6: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız K Menger olsun. Eğer $\lambda_i \subset \lambda_j$ ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: İlgili tanımlardan hemen görülür.

(i, j) -yakın Menger olan bir bitopolojik uzay (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger olduğundan aynı zamanda (i, j) -yakın yıldız K Menger ve (i, j) -yakın yıldız Menger'dir. Fakat bu üç yıldız formun hiçbiri (i, j) -yakın Menger olma özelliğini gerektirmez. Aşağıda verilen örnek $(1, 2)$ -yakın kuvvetli yıldız Menger (dolayısıyla $(1, 2)$ -yakın yıldız K Menger ve $(1, 2)$ -yakın yıldız Menger) olan fakat $(1, 2)$ -yakın Menger olmayan bir bitopolojik uzay örneğidir.

Örnek 4.2.7: $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.1.20'deki gibi verilsin. $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ ve her $O \in \mathcal{O}_n$ için $p \in O$ olacağından $St(p, \mathcal{O}_n) = \mathbb{R}$ dir. Her $n \in \omega$ için $F_n = \{p\}$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{R}$ 'nin

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_1} \left(Cl^{\lambda_2} (St(F_n, \mathcal{O}_n)) \right)$$

koşulunu sağlayan sonlu alt kümelerinin bir $(F_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın kuvvetli yıldız Menger'dir. Bununla birlikte Örnek 4.1.20'de gösterildiği gibi $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın Menger değildir.

Teorem 4.2.8: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -parakompakt ve (i, j) -hemen hemen regüler olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın yıldız K Menger ise (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_n = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $x \in X$ keyfi verilsin. Her $n \in \omega$ için bir $U_n^x \in \mathcal{U}_n$ kümesi $x \in U_n^x$ olacak şekilde seçilebilir. Diğer yandan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen regüler olduğundan X 'in λ_i -açık olan bir V_n^x alt kümesi mevcuttur öyle ki

$$x \in V_n^x \subset Cl^{\lambda_j}(V_n^x) \subset U_n^x$$

sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{V_n^x : x \in X\}$ olsun. O halde $(\mathcal{V}_n)_{n \in \omega}$ X 'in λ_i -açık örtülerinin bir dizisidir. Her bir $\mathcal{V}_n$ ailesinin λ_j -yerel sonlu olduğu kabul edilebilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız K Menger olduğundan X 'in λ_j -kompakt alt kümelerinin bir $(K_n)_{n \in \omega}$ dizisi

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(St(K_n, \mathcal{V}_n)))$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. Her bir $\mathcal{V}_n$ ailesi λ_j -yerel sonlu olduğundan her $x \in X$ için X 'in x noktasını içeren ve $\mathcal{V}_n$ 'nin en fazla sonlu tane elemanı ile arakesiti boş kümeden farklı olan bir λ_j -açık alt kümesi W_n^x vardır. Diğer yandan her bir K_n kümesi λ_j -kompakt olduğundan K_n 'nin sonlu bir S_n alt kümesi vardır ve

$$K_n \subset \bigcup_{x \in S_n} W_n^x$$

kapsaması sağlanır. Her $i \in \{1, 2, \dots, m_n\}$ için $x_i^n \in S_n$ olsun ve her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{V}_i^n = \{V \in \mathcal{V}_n : V \cap W_n^{x_i^n} \neq \emptyset\}$$

ve

$$\mathcal{U}'_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} \mathcal{V}_i^n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$St\left(\bigcup_{x_i^n \in S_n} W_n^{x_i^n}, \mathcal{V}_n\right) = \bigcup \mathcal{U}'_n$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve her $V \in \mathcal{U}'_n$ için bir $O_V \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir öyle ki $Cl^{\lambda_j}(V) \subset Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_V))$ kapsaması sağlanır. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{O_V : V \in \mathcal{U}'_n\}$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(St(K_n, \mathcal{V}_n))) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i}\left(Cl^{\lambda_j}\left(St\left(\bigcup_{x_i^n \in S_n} W_n^{x_i^n}, \mathcal{V}_n\right)\right)\right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i}\left(Cl^{\lambda_j}\left(\bigcup \mathcal{U}'_n\right)\right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O_V \in \mathcal{O}'_n} Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_V)) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 4.2.9: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger, (i, j) -parakompakt (veya (X, λ_i) metakompakt) ve (i, j) -hemen hemen regüler olsun. Bu durumda $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: Teorem 4.2.8'in ispatında kullanılan benzer argümanlar kullanılarak hemen elde edilir.

Sonuç 4.2.10: (i, j) -parakompakt ve (i, j) -hemen hemen regüler olan bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız K Menger'dir.

Teorem 4.2.11: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen regüler ve (X, λ_i) parakompakt Hausdorff olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger ise (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ve $\mathcal{V}_n$ aileleri Teorem 4.2.8'in ispatında tanımlandıkları şekliyle olsun. Her bir $\mathcal{V}_n$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsü olduğundan Teorem 3.1.28'e göre her bir $\mathcal{V}_n$ 'nin λ_i -açık bir $\mathcal{V}'_n$ yıldız inceltişi vardır. O halde X 'in λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{V}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger olduğundan bir $(\mathcal{W}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $\mathcal{W}'_n$ ailesi $\mathcal{V}'_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{W}'_n, \mathcal{V}'_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. (X, λ_i) parakompakt olduğundan her $n \in \omega$ ve $W \in \mathcal{W}'_n$ için $St(W, \mathcal{V}'_n) \subset V(W)$ olacak şekilde bir $V(W) \in \mathcal{V}_n$ vardır. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve $V(W) \in \mathcal{V}_n$ için

$$Cl^{\lambda_j}(V(W)) \subset Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_{V(W)}))$$

olacak şekilde bir $O_{V(W)} \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir. Buradan her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}'_n = \{O_{V(W)} : V(W) \in \mathcal{V}_n, St(W, \mathcal{V}'_n) \subset V(W), W \in \mathcal{W}'_n\}$$

olarak tanımlanırsa $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{W}'_n, \mathcal{V}'_n \right) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}'_n} St(W, \mathcal{V}'_n) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{V(W) \in \mathcal{V}_n} V(W) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O_{V(W)} \in \mathcal{O}'_n} Int^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(O_{V(W)})) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Sonuç 4.2.12: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen regüler ve (X, λ_i) parakompakt Hausdorff ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız K Menger'dir,

4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

Tanım 4.2.13: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık her $\mathcal{O}$ örtüsü için X 'in sayılabilir bir A alt kümesi

$$X = Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (St(A, \mathcal{O})) \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf denir.

Tanım 4.2.14: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in her λ_i -açık $\mathcal{O}$ örtüsünün sayılabilir bir $\mathcal{U}$ alt ailesi

$$X = Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{U}, \mathcal{O} \right) \right) \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'ye (i, j) -yakın yıldız Lindelöf denir.

Tanımları göz önüne alındığında ve Teorem 4.2.2'nin ispatında kullanılan benzer argümanlar kullanılarak (i, j) -yakın Lindelöf olan bitopolojik bir uzayın (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf ve Teorem 4.2.5'in ispatına benzer olarak ise (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf olan bir bitopolojik uzayın (i, j) -yakın yıldız Lindelöf olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Bununla beraber aşağıda verilen örnek (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf (dolayısıyla (i, j) -yakın yıldız Lindelöf) özelliğine sahip bir bitopolojik uzayın (i, j) -yakın Lindelöf olması gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 4.2.15: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.1.10'daki gibi verilsin. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf (dolayısıyla $(1, 2)$ -yakın yıldız Lindelöf) fakat $(1, 2)$ -yakın Lindelöf değildir. Öncelikle $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının $(1, 2)$ -yakın kuvvetli yıldız Lindelöf olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{O}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_1 -açık örtüsü olsun. (X, λ_1) hemen hemen Lindelöf olduğundan $\mathcal{O}$ 'nun sayılabilir bir $\mathcal{U}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} Cl^{\lambda_1}(U) \quad (4.8)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan $\mathcal{O}$ ailesi X 'in bir örtüsü olduğundan bir $O_a \in \mathcal{O}$ için $a \in O_a$ dır. $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{O_a\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{V}$ ailesinin $\mathcal{O}$ 'nun sayılabilir bir alt ailesi olduğu açıktır. Her bir $V \in \mathcal{V}$ için bir $x_V \in V$ elemanı seçilsin ve $A = \{x_V : V \in \mathcal{V}\}$ olarak tanımlansın. O halde

$$X = Int^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(St(A, \mathcal{O})))$$

eşitliği sağlanır. Bunu göstermek için $X = Cl^{\lambda_2}(St(A, \mathcal{O}))$ eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. $O_a \in \mathcal{O}$ ve $A \cap O_a \neq \emptyset$ olduğundan $a \in St(A, \mathcal{O})$ sağlanır. Dolayısıyla λ_2 basit genişlemesinden dolayı

$$Cl^{\lambda_2}(St(A, \mathcal{O})) = Cl^{\lambda_1}(St(A, \mathcal{O}))$$

eşitliği sağlanır. Bunu göstermek için ise $X \neq Cl^{\lambda_1}(St(A, \mathcal{O}))$ olduğu varsayılınsın. O halde bir $x \in X$ için $x \notin Cl^{\lambda_1}(St(A, \mathcal{O}))$ dir. Dolayısıyla x noktasını içeren λ_1 -açık bir G kümesi bulunabilir öyle ki $A \cap O \neq \emptyset$ olacak şekilde her $O \in \mathcal{O}$ için $G \cap O = \emptyset$ dir. Diğer yandan (4.8) eşitliğinden dolayı bir $V_x \in \mathcal{V}$ için $x \in Cl^{\lambda_1}(V_x)$ olur ve dolayısıyla $G \cap V_x \neq \emptyset$ dir. Fakat $V_x \in \mathcal{O}$, $A \cap V_x \neq \emptyset$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak varsayım yanlıştır. $X = Cl^{\lambda_1}(St(A, \mathcal{O}))$ olmalıdır. Diğer yandan A kümesi X 'in sayılabilir bir alt kümesi olduğundan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın kuvvetli yıldız Lindelöf tür.

Fakat $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Lindelöf değildir. Bunu göstermek için X 'in λ_1 -açık örtüsü olan $\mathcal{O} = \{N_{c_i}^0 : i < \omega_1\} \cup \{N_a^1, N_b^1\}$ ailesi verilsin. $\mathcal{U}$ ailesi $\mathcal{O}$ 'nun sayılabilir bir alt ailesi olsun. Genelliği bozmayacağı için

$$\mathcal{U} = \{N_{\alpha_n}^0 : \alpha_n < \omega_1, n \in \omega\} \cup \{N_a^1, N_b^1\}$$

olarak tanımlanabilir. $\beta = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ olsun. $\mathcal{U}$ sayılabilir olduğundan $\beta < \omega_1$ dir. Keyfi bir $\gamma > \beta$ ordinali için $\mathcal{O}$ 'nun $c_\gamma \in \text{Int}^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(\mathcal{O}))$ olacak şekildeki tek $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ elemanı $N_{c_\gamma}^0$ olduğundan

$$c_\gamma \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(U))$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{O}$ 'nun

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(U))$$

olacak şekilde sayılabilir hiçbir $\mathcal{U}$ alt ailesi bulunamaz. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Lindelöf değildir.

Teorem 4.2.16: *(i, j)-yakın yıldız Menger ((i, j)-yakın kuvvetli yıldız Menger) olan her bitopolojik uzay (i, j)-yakın yıldız Lindelöf'tür ((i, j)-yakın kuvvetli yıldız Lindelöf'tür).*

İspat: Teoremin ispatı (i, j)-yakın yıldız Menger bitopolojik uzaylar için yapılmıştır. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j)-yakın yıldız Menger ve $\mathcal{O}$ ailesi de X 'in herhangi bir λ_i -açık örtüsü olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j)-yakın yıldız Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$ olarak tanımlanırsa

$$X = Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup u, \mathcal{O} \right) \right) \right)$$

olacağından $\mathcal{U}$ ailesi $\mathcal{O}$ 'nun istenilen şartı sağlayan sayılabilir bir alt ailesidir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Lindelöf'tür.

(i, j) -yakın yıldız Lindelöf olma özelliği (i, j) -yakın yıldız Menger olma özelliğini gerektirmez. Aşağıdaki örnekte $(1, 2)$ -yakın yıldız Lindelöf olan fakat $(1, 2)$ -yakın yıldız Menger olmayan bir bitopolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 4.2.17: $\mathbb{R}$ üzerinde λ_1 Sorgenfrey topolojisi ve λ_2 alışılmış topoloji verilmiş olsun.

$(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın Lindelöf ve $(1, 2)$ -regülerdir (Salleh et al. 2023).

Fakat $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın yıldız Menger değildir. Öncelikle, $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ $(1, 2)$ -yakın Lindelöf olduğundan aynı zamanda $(1, 2)$ -yakın yıldız Lindelöf'tür. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -regüler olduğundan ve $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger olmadığından Teorem 4.1.8 ile beraber $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ $(1, 2)$ -yakın Menger değildir. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -regüler olduğundan açıkça $(1, 2)$ -hemen hemen regülerdir. Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ parakompakt bir Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 4.2.11 ile birlikte $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın yıldız Menger olamaz.

Aşağıda (i, j) -yakın yıldız Menger bitopolojik uzayların bazı korunum özelliklerinden bahsedilmiştir. Aynı özellikler (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger, (i, j) -yakın yıldız K Menger ve bitopolojik yakın Lindelöf uzayların yukarıda tanımları verilen yıldız formları için araştırılabilir.

Teorem 4.2.18: (i, j) -yakın yıldız Menger bitopolojik uzayların kapalı/açık alt kümeleri de (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger ve $Y \subset X$ kapalı/açık bir alt küme olsun. Y 'nin λ_i^Y -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Y kümesi λ_i -kapalı olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n \cup \{X \setminus Y\}$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ ailesi $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}'_n, \mathcal{O}'_n \right) \right) \right) \quad (4.9)$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U}'_n : U \neq X \setminus Y\}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ sonlu olduğundan $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Y hem λ_i -açık hem de λ_j -açık bir küme olduğundan (4.9) eşitliğinin her iki tarafının Y ile arakesiti alınır

$$Y = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i^Y} \left(\text{Cl}^{\lambda_j^Y} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ alt uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

Teorem 4.2.19: (i, j) -yakın yıldız Menger bitopolojik uzayların d -süreklili, i -açık ve örten dönüşümler altındaki görüntüleri de (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü ise d -süreklili, i -açık ve örten olsun. Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. f dönüşümü i -süreklili olduğundan

$$\mathcal{O}'_n = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

ailesi her $n \in \omega$ için X 'in bir λ_i -açık örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}'_n$ alt ailesi bulunabilir öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}'_n, \mathcal{O}'_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}'_n$ için bir $\mathcal{O}_U \in \mathcal{O}_n$ seçilsin öyle ki $f^{-1}(\mathcal{O}_U) = U$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{\mathcal{O}_U : U \in \mathcal{U}'_n\}$ olarak tanımlansın. Açıkça her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$Y = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\zeta_i} \left(\text{Cl}^{\zeta_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten, f örten olduğundan $f(\text{St}(\bigcup \mathcal{U}'_n, \mathcal{O}'_n)) = \text{St}(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n)$ elde edilir. Diğer yandan f dönüşümü i -açık ve j -süreklili olduğundan

$$\begin{aligned} f(X) &= Y = f \left(\bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}'_n, \mathcal{O}'_n \right) \right) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\zeta_i} \left(\text{Cl}^{\zeta_j} \left(f \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}'_n, \mathcal{O}'_n \right) \right) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\zeta_i} \left(\text{Cl}^{\zeta_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

Teorem 4.2.20: (i, j) -yakın yıldız Menger bitopolojik uzayların d -açık ve mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüleri de (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü ise d -açık ve mükemmel bir dönüşüm olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının (i, j) -yakın yıldız Menger olduğunu göstermek için X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. f mükemmel bir dönüşüm olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi λ_i -kompakttır ve dolayısıyla her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{O}_{n,y}$ alt ailesi

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{O}_{n,y}$$

ve her $O \in \mathcal{O}_{n,y}$ için

$$f^{-1}(y) \cap O \neq \emptyset$$

olacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $U_{n,y} = Y \setminus f(X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{n,y})$ olarak tanımlansın. Açıkça $y \in U_{n,y}$ dir. f dönüşümü i -kapalı olduğundan $U_{n,y}$ kümesi y 'nin bir ζ_i -açık komşuluğudur. Diğer taraftan

$$f^{-1}(U_{n,y}) \subset \bigcup \mathcal{O}_{n,y} \quad (4.10)$$

sağlanır. f dönüşümü i -açık olduğundan her bir $O \in \mathcal{O}_{n,y}$ için $f(O)$ da y 'nin bir ζ_i -açık komşuluğudur. O halde y 'nin bir ζ_i -açık komşuluğu $V_{n,y}$ için $V_{n,y} \subset U_{n,y}$ ve her $O \in \mathcal{O}_{n,y}$ için $V_{n,y} \subset f(O)$ elde edilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$ ailesi

$$\mathcal{V}_n = \{V_{n,y} : y \in Y\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{V}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger olduğundan bir $(\mathcal{V}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}'_n$ ailesi $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi ve

$$Y = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\zeta_i} \left(\text{Cl}^{\zeta_j} \left(\text{St} \left(\bigcup \mathcal{V}'_n, \mathcal{V}_n \right) \right) \right) \quad (4.11)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $F_n \subset Y$ sonlu olmak üzere, $\mathcal{V}'_n = \{V_{n,y} : y \in F_n\}$ olsun ve $\mathcal{O}'_n = \bigcup_{y \in F_n} \mathcal{O}_{n,y}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Şimdi de

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}'_n, \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

olduğu gösterilebilir. Bunun için $x \in X$ elemanı keyfi verilsin ve $f(x) = y$ olsun. (4.11) eşitliğine göre bir $n_y \in \omega$ için

$$y \in \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y}, \mathcal{V}_{n_y} \right) \right) \right)$$

sağlanır. O halde y 'nin bir ζ_i -açık komşuluğu G vardır öyle ki

$$G \subset Cl^{\zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y}, \mathcal{V}_{n_y} \right) \right)$$

kapsaması sağlanır. f dönüşümü i -sürekliliğinden $f^{-1}(G)$ kümesi de x 'in bir λ_i -açık komşuluğudur. Diğer yandan f dönüşümü j -açık olduğundan

$$f^{-1}(G) \subset Cl^{\lambda_j} \left(f^{-1} \left(St \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y}, \mathcal{V}_{n_y} \right) \right) \right)$$

kapsaması elde edilir. Şimdi de $t \in f^{-1} \left(St \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y}, \mathcal{V}_{n_y} \right) \right)$ keyfi verilsin. O halde bir $y_0 \in Y$ ve $V_{n_y, y_0} \in \mathcal{V}_{n_y}$ için $f(t) \in V_{n_y, y_0}$ dir ve

$$V_{n_y, y_0} \cap \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y} \right) \neq \emptyset \quad (4.12)$$

sağlanır. (4.10) ile beraber $f^{-1}(V_{n_y, y_0}) \subset \bigcup \mathcal{O}_{n_y, y_0}$ olduğundan bir $O \in \mathcal{O}_{n_y, y_0}$ (dolayısıyla $O \in \mathcal{O}_{n_y}$) bulunabilir öyle ki $t \in O$ dur. Diğer yandan (4.12) ile beraber bir $y_1 \in F_{n_y}$ ve $V_{n_y, y_1} \in \mathcal{V}'_{n_y}$ için $V_{n_y, y_0} \cap V_{n_y, y_1} \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $O \cap f^{-1}(V_{n_y, y_1}) \neq \emptyset$ dir ve

$$O \cap \left(\bigcup \mathcal{O}_{n_y, y_1} \right) \subset O \cap \left(\bigcup \mathcal{O}'_{n_y} \right) \neq \emptyset \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) ile beraber $t \in St \left(\bigcup \mathcal{O}'_{n_y}, \mathcal{O}_{n_y} \right)$ dir ve

$$x \in f^{-1}(G) \subset Cl^{\lambda_j} \left(f^{-1} \left(St \left(\bigcup \mathcal{V}'_{n_y}, \mathcal{V}_{n_y} \right) \right) \right) \subset Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}'_{n_y}, \mathcal{O}_{n_y} \right) \right)$$

sağlanır. Sonuç olarak $x \in Int^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}'_{n_y}, \mathcal{O}_{n_y} \right) \right) \right)$ olacağından ve $x \in X$ keyfi verildiğinden $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

Teorem 4.2.21: (i, j) -yakın yıldız Menger bir bitopolojik uzay ile (i, j) -yakın kompakt bir bitopolojik uzayın çarpımı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayları sırasıyla (i, j) -yakın yıldız Menger ve (i, j) -yakın kompakt olsun. $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayının (i, j) -yakın yıldız Menger olduğunu göstermek için $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık örtülerinin keyfi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n^X$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsü ve $\mathcal{O}_n^Y$ ise Y 'nin bir ζ_i -açık örtüsü olmak üzere, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n^X \times \mathcal{O}_n^Y$ şeklinde düşünülebilir. $x \in X$ keyfi verilsin. $\{x\} \times Y$ kümesi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -kompakt bir alt kümesi olduğundan $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{O}_{n,x}^X \times \mathcal{O}_{n,x}^Y$ alt ailesi bulunabilir öyle ki bu aile $\{x\} \times Y$ 'yi örter. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n^x$ kümesi

$$\mathcal{O}_n^x = \bigcap_{O \in \mathcal{O}_{n,x}^X} O$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için X 'in bir λ_i -açık örtüsü olan

$$\mathcal{O}'_n = \{\mathcal{O}_n^x : x \in X\}$$

ailesi elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{U}_n, \mathcal{O}'_n \right) \right) \right) \quad (4.14)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $S_n \subset X$ sonlu olsun.

$$\mathcal{U}_n = \{ \mathcal{O}_n^{x_s^n} : s \in S_n \}$$

ve

$$\mathcal{O}_n'' = \bigcup_{s \in S_n} (\mathcal{O}_{n, x_s^n}^X \times \mathcal{O}_{n, x_s^n}^Y)$$

olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n''$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. Diğer yandan

$$X \times Y = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}_n'', \mathcal{O}_n \right) \right) \right)$$

eşitliği sağlanır. Bunu göstermek için $(x, y) \in X \times Y$ keyfi verilsin. O halde (4.14) eşitliği ile beraber x noktasını içeren bir $G \in \lambda_i$ ve bir $n_x \in \omega$ için

$$G \times Y \subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{U}_{n_x}, \mathcal{O}'_{n_x} \right) \times Y \right)$$

kapsaması sağlanır. Öte yandan $(x_0, y_0) \in St(\bigcup \mathcal{U}_{n_x}, \mathcal{O}'_{n_x}) \times Y$ keyfi verilsin. Bir $\tilde{x} \in X$ için $\mathcal{O}_{n_x}^{\tilde{x}} \in \mathcal{O}'_{n_x}$ bulunabilir öyle ki her bir $O \in \mathcal{O}_{n_x, \tilde{x}}^X$ için $x_0 \in O$ ve en az bir $s \in S_{n_x}$ için

$O \cap O_{n_x}^{x_s^{n_x}} \neq \emptyset$ dir. Diğer yandan $\{x_s^{n_x}\} \times Y$ kümesi $\lambda_i \times \zeta_i$ -kompakt olduğundan $y_0 \in H$ olacak şekilde bir $H \in \mathcal{O}_{n_x, x_s^{n_x}}^Y$ vardır. Dolayısıyla herhangi bir $O \in \mathcal{O}_{n_x, \tilde{x}}^X$ için

$$(x_0, y_0) \in O \times H \in \mathcal{O}_{n_x} \text{ ve } (O \times H) \cap (\cup \mathcal{O}_{n_x}'') \neq \emptyset$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} (x, y) \in G \times Y &\subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{U}_{n_x}, \mathcal{O}_{n_x}' \right) \times Y \right) \\ &\subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}_{n_x}'', \mathcal{O}_{n_x} \right) \right) \end{aligned}$$

sağlanacağından

$$(x, y) \in Int^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(St \left(\bigcup \mathcal{O}_{n_x}'', \mathcal{O}_{n_x} \right) \right) \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın yıldız Menger'dir.

4.3. Bitopolojik Bazı Küme Örtü Özellikleri

Bu bölümde Menger özelliğinin bitopolojik zayıf bir formu olan bitopolojik hemen hemen küme Menger örtü özelliği verilmiştir. Bununla beraber klasik topolojide var olan γ -küme, γ -örtü gibi kavramlardan yararlanılarak tanımlanan (i, j) -hemen hemen P_γ -küme kavramı sunulmuş ve bu özelliğe sahip bitopolojik uzayların bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar 2022 yılında AIMS Mathematics dergisinde “On almost set-Menger spaces in bitopological context” başlıklı makalede yayımlanmıştır.

4.3.1. Bitopolojik hemen hemen küme Menger özelliği

Tanım 4.3.1.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in boş kümeden farklı her A alt kümesi ve $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{O}_n$ sonlu ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Cl^{\lambda_j}(U)$$

olacak şekilde bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -hemen hemen küme Menger denir.

Teorem 4.3.1.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) Menger (veya küme-Menger) ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

İspat: (X, λ_i) Menger, $A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n \cup \{X \setminus Cl^{\lambda_i}(A)\}$ olarak tanımlansın. $Cl^{\lambda_i}(A)$ kümesi λ_i -kapalı olduğundan X 'in λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. (X, λ_i) Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}'_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}'_n = \{U \in \mathcal{U}_n : U \cap (X \setminus Cl^{\lambda_i}(A)) = \emptyset\}$$

olarak tanımlanırsa

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}'_n} Cl^{\lambda_j}(V)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) hemen hemen küme-Menger ve $\lambda_j \subset \lambda_i$ ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

İspat: (X, λ_i) hemen hemen küme-Menger, $A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi olsun. Varsayımdan dolayı bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesi ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} Cl^{\lambda_i}(U)$$

sağlanır. $\lambda_j \subset \lambda_i$ olduğundan her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}_n$ için $Cl^{\lambda_i}(A) \subset Cl^{\lambda_j}(A)$ kapsamı sağlanacağından istenilen hemen elde edilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Örnek 4.3.1.4: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde λ_1 sayılabilir tümleyenler topolojisi ve λ_2 Sorgenfrey topolojisi olsun. $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger (aynı zamanda küme-Menger) olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -hemen hemen küme Menger'dir.

Örnek 4.3.1.5: λ_2 topolojisi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji olsun.

$$\lambda_1 = \left\{ O = U \setminus A : U \in \lambda_2, A \subset \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\} \right\}$$

olarak tanımlanan aile $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye *Smirnov'un silinmiş dizi topolojisi* denir. $\mathbb{R}$ kümesi bu topoloji ile beraber σ -kompakttır (Steen and Seebach 1995).

$(\mathbb{R}, \lambda_1)$ topolojik uzayı Menger (dolayısıyla hemen hemen küme-Menger) ve $\lambda_2 \subset \lambda_1$ olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen küme Menger'dir.

Aşağıda Teorem 4.3.1.2'nin tersinin her zaman doğru olmadığına dair bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.3.1.6: $p \in \mathbb{P}$ sabit bir nokta olmak üzere, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi

$$\lambda_1 = \{O \subset \mathbb{R} : p \in O\} \cup \{\emptyset\} \text{ ve } \lambda_2 = \{O \cap \mathbb{P} : O \in \lambda_1\}$$

topolojileri ile verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen küme Menger'dir fakat $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger değildir. Gerçekten, her $O \in \lambda_1$ için $p \in O$ olduğundan $\lambda_2 \subset \lambda_1$ sağlandığı açıktır. $\mathcal{O} = \{\{x, p\} : x \in \mathbb{R}\}$ ailesi $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ için bir açık örtüdür. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ 'in açık örtülerinin bir dizisidir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger (aynı zamanda küme-Menger) değildir. $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ 'deki boş kümeden farklı her açık küme yoğun olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ hemen hemen küme-Menger'dir ve $\lambda_2 \subset \lambda_1$ olduğundan Teorem 4.3.1.3 ile beraber $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen küme Menger'dir.

Aşağıda verilen teorem Teorem 4.3.1.2'nin tersinin hangi koşul altında doğru olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.3.1.7: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ise (X, λ_i) küme-Menger'dir.

İspat: $A \subset X$, $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise her $n \in \omega$ için $Cl^{\lambda_i}(A) \subset \bigcup \mathcal{O}_n$ koşulunu sağlayan ve X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ailelerin bir dizisi olsun. O halde her $n \in \omega$ ve her

$x \in Cl^{\lambda_i}(A)$ için $O_x^n \in \mathcal{O}_n$ elemanı x 'i içerecek şekilde seçilebilir. Diğer yandan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler olduğundan her $n \in \omega$ için $x \in U_x^n \subset Cl^{\lambda_j}(U_x^n) \subset O_x^n$ olacak şekilde bir $U_x^n \in \lambda_i$ vardır. Şimdi de her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_x^n : x \in Cl^{\lambda_i}(A)\}$ şeklinde tanımlansın. Her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın bir λ_i -açık örtüsüdür ve

$$Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}_n) = \{Cl^{\lambda_j}(U_x^n) : U_x^n \in \mathcal{U}_n\}$$

$\mathcal{O}_n$ 'nin bir inceltilmişidir. Diğer yandan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan bir $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ ailesi $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} Cl^{\lambda_j}(U)$$

kapsaması sağlanır. Buradan her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}'_n$ için $Cl^{\lambda_j}(U) \subset O_U$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_n$ seçilebilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{O_U : U \in \mathcal{U}'_n\}$ şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{O}'_n \subset \mathcal{O}_n$ ailesi sonlu olur ve

$$\bigcup_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{O}'_n \supset A$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak (X, λ_i) küme-Menger'dir.

Teorem 4.3.1.8: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ise (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür.

İspat: $\mathcal{O}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_i -açık örtüsü olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlansın. X 'in boş kümeden farklı herhangi bir A alt kümesi verilsin ve $B = X \setminus A$ olsun. $\mathcal{O}$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsü olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ hem $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın hem de $Cl^{\lambda_i}(B)$ 'nin X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan bir örtüsüdür.

$(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu $\mathcal{U}_n^A$ ve $\mathcal{U}_n^B$ alt aileleri

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n^A} Cl^{\lambda_j}(U)$$

ve

$$B \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}_n^B} Cl^{\lambda_j}(V)$$

olacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n^A$ ve $\mathcal{U}_n^B$ sonlu olduğundan

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n^A \cup \mathcal{U}_n^B$$

ailesi her $n \in \omega$ için sonludur. O halde $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n$ ailesi $\mathcal{O}$ 'nun sayılabilir bir alt ailesidir ve

$$X = A \cup B \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{W \in \mathcal{W}_n} Cl^{\lambda_j}(W)$$

eşitliği elde edilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür.

Teorem 4.3.1.8'in tersi her zaman doğru değildir. Aşağıda (1,2)-hemen hemen Lindelöf olan fakat (1,2)-hemen hemen küme Menger olmayan bir bitopolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 4.3.1.9: σ topolojisi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji olmak üzere

$$\lambda_2 = \{O = U \setminus A : U \in \sigma, A \subset \mathbb{R}, |A| \leq \omega\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir (Steen and Seebach 1995).

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi λ_1 Sorgenfrey topolojisi ve λ_2 topolojisi ile verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Lindelöf olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-hemen hemen Lindelöf'tür. Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \sigma)$ bitopolojik uzayı (1,2)-regüler ve $\sigma \subset \lambda_2$ olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ de (1,2)-regülerdir. Fakat $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Menger olmadığından $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Teorem 4.3.1.7'den dolayı (1,2)-hemen hemen küme Menger olamaz.

Teorem 4.3.1.10: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf ve (X, λ_i) bir P -uzay ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

İspat: $A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu birleşimler altında kapalı olduğu varsayılabilir. Eğer

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcap_{n \in \omega} \mathcal{O}_n : (\forall n)(\mathcal{O}_n \in \mathcal{O}_n) \right\}$$

olarak tanımlanırsa (X, λ_i) bir P -uzay olduğundan $\mathcal{O}$ ailesi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın bir λ_i -açık örtüsü olur. Diğer yandan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf olduğundan $Cl^{\lambda_i}(A)$ alt kümesi de (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür. Dolayısıyla $\mathcal{O}$ 'nun

$$Cl^{\lambda_i}(A) \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_n)$$

olacak şekilde sayılabilir bir $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ alt ailesi vardır. Her $m, n \in \omega$ için $\mathcal{O}_m^n \in \mathcal{O}_m$ olmak üzere

$$U_n = \bigcap_{m \in \omega} \mathcal{O}_m^n$$

şeklinde tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $U_n \subset O_n^n$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n^n)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Sonuç 4.3.1.11: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (X, λ_i) bir P -uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (X, λ_i) Menger'dir,
2. (X, λ_i) hemen hemen küme-Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir,
4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür,
5. (X, λ_i) Lindelöf'tür.

Aşağıdaki teoremden bir bitopolojik uzayın (i, j) -hemen hemen küme Menger olma özelliğinin (i, j) -regüler açık alt kümeler ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Teorem 4.3.1.12: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir ancak ve ancak boş kümeden farklı her $A \subset X$ ve $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $U_n \subset O_n$ sonlu ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in U_n} Cl^{\lambda_j}(V)$$

olacak şekilde bulunabilir.

İspat: $\Rightarrow X$ 'in (i, j) -regüler açık alt kümeleri aynı zamanda λ_i -açık olduğundan ispat açıktır.

$\Leftarrow A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_n = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olarak tanımlanırsa $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. Varsayımdan dolayı her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n$ sonlu ve

$$Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}'_n) = \{Cl^{\lambda_j}(V) : V \in \mathcal{U}'_n\}$$

olmak üzere

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}'_n)$$

kapsaması sağlanır. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve her $U \in \mathcal{U}_n$ için $U = Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_U))$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_n$ vardır. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{O_U : U \in \mathcal{U}'_n\}$ olmak üzere, $\mathcal{U}'_n$ sonlu olduğundan $\mathcal{O}'_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve sonuç olarak $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizidir.

Aşağıda bitopolojik hemen hemen küme Menger özelliğinin bazı korunum özellikleri verilmiştir.

Teorem 4.3.1.13: *Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü d -sürekli ve örten ise (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı da (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.*

İspat: $B \subset Y$ boş kümeden farklı ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise Y 'nin ζ_i -açık alt kümelerinden oluşan ailelerin bir dizisi olsun öyle ki her $n \in \omega$ için $Cl^{\zeta_i}(B) \subset \bigcup \mathcal{O}_n$ sağlansın. $A = f^{-1}(B)$ olarak verilsin. f dönüşümü i -sürekli olduğundan her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{O}_n$ için $f^{-1}(O) \in \lambda_i$ dir. Aynı zamanda f 'nin i -sürekliliğinden her $n \in \omega$ için

$$Cl^{\lambda_i}(A) \subset f^{-1}\left(Cl^{\zeta_i}(B)\right) \subset f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{O}_n\right)$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n^A = \{f^{-1}(O): O \in \mathcal{O}_n\}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{O}_n^A)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nin X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{U}_n^A \subset \mathcal{O}_n^A$ alt ailesi bulunabilir öyle ki $\mathcal{U}_n^A$ sonludur ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n^A} Cl^{\lambda_j}(U)$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}_n^A$ için $U = f^{-1}(O_U)$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_n$ seçilsin ve $\mathcal{U}_n = \{O_U: U \in \mathcal{U}_n^A\}$ olarak tanımlansın. O halde $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. f dönüşümü j -sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} B &= f(A) \subset f\left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n^A} Cl^{\lambda_j}(U)\right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n^A} Cl^{\zeta_j}(f(U)) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O_U \in \mathcal{U}_n} Cl^{\zeta_j}(O_U) \end{aligned}$$

elde edilir. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.13'ün ispatına benzer olarak aşağıdaki teoremin ispatı hemen elde edilir.

Teorem 4.3.1.14: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü (j, i) -sürekli olsun. Eğer her $\sigma \in \{\lambda, \zeta\}$ için $\sigma_j \subset \sigma_i$ ise (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.15: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzaylar, $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü de (i, j) -kuvvetli- θ -sürekli ve örten olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ise (Y, ζ_i) küme-Menger'dir.

İspat: $B \subset Y$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ de $Cl^{\zeta_i}(B)$ 'nin Y 'nin ζ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi olsun. $A = f^{-1}(B)$ olarak tanımlansın ve $x \in Cl^{\lambda_i}(A)$ keyfi verilsin. f dönüşümü i -sürekli olduğundan

$$f(x) \in f\left(Cl^{\lambda_i}(f^{-1}(B))\right) = Cl^{\zeta_i}(B)$$

elde edilir. O halde her $n \in \omega$ için bir $O_x^n \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir öyle ki $f(x) \in O_x^n$ sağlanır. Diğer yandan f dönüşümü (i, j) -kuvvetli- θ -sürekli olduğundan X 'in λ_i -açık bir U_x^n alt kümesi $x \in U_x^n$ ve $f\left(Cl^{\lambda_j}(U_x^n)\right) \subset O_x^n$ olacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n^A = \{U_x^n: x \in Cl^{\lambda_i}(A)\}$ olmak üzere, $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n^A)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{U}_n^A \subset \mathcal{O}_n^A$ alt ailesi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n^A$ sonludur ve

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}\left(\bigcup \mathcal{U}_n^A\right)$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için F_n kümesi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{U}_n^A = \{U_x^n: x \in F_n\}$ olarak tanımlansın. Dolayısıyla $\mathcal{U}_n = \{O_x^n: x \in F_n\}$ ailesi de $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$\begin{aligned}
 f(f^{-1}(B)) = B &\subset f\left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{x \in F_n} Cl^{\lambda_j}(U_x^n)\right) \\
 &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{x \in F_n} f(Cl^{\lambda_j}(U_x^n)) \\
 &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{x \in F_n} O_x^n \\
 &= \bigcup_{n \in \omega} U_n
 \end{aligned}$$

elde edilir. (Y, ζ_i) küme-Menger'dir.

Her (i, j) -kuvvetli- θ -sürekli dönüşüm i -sürekli olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.1.16: *Eğer $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü i -sürekli, $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (i, j) -hemen hemen küme Menger ise (Y, ζ_i) küme-Menger'dir.*

Teorem 4.3.1.17: *(Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü mükemmel ve (j, i) -ön açık bir dönüşüm ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.*

İspat: $A \subset X$, $(O_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi, $B = f(A) \subset Y$ ve $y \in Cl^{\zeta_i}(f(A))$ olsun. O halde her $n \in \omega$ için sonlu bir $O_y^n \subset O_n$ alt ailesi vardır öyle ki $f^{-1}(y) \subset \bigcup O_y^n$ sağlanır. $\bigcup O_y^n = O_y^n$ olsun. f dönüşümü i -kapalı olduğundan $U_y^n = Y \setminus f(X \setminus O_y^n)$ kümesi y 'nin bir ζ_i -açık komşuluğudur. Her $n \in \omega$ için

$$U_n = \{U_y^n : y \in Cl^{\zeta_i}(f(A))\}$$

olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\zeta_i}(f(A))$ 'nin Y 'nin ζ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ için sonlu bir $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ alt ailesi

$$f(A) \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}'_n} Cl^{\zeta_j}(U)$$

olacak şekilde bulunabilir. $F_n \subset Cl^{\zeta_i}(f(A))$ alt kümesi her $n \in \omega$ için sonlu olsun ve $\mathcal{U}'_n = \{U_{y_i}^n : i \in F_n\}$ olarak tanımlansın. O halde

$$\mathcal{O}'_n = \bigcup_{i \in F_n} \mathcal{O}_{y_i}^n \subset \mathcal{O}_n$$

her $n \in \omega$ için sonludur. Diğer yandan f dönüşümü (j, i) -ön açık olduğundan

$$\begin{aligned} A &\subset f^{-1}(f(A)) \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in F_n} f^{-1}(Cl^{\zeta_j}(U_{y_i}^n)) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in F_n} Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(U_{y_i}^n)) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in F_n} Cl^{\lambda_j}(\mathcal{O}_{y_i}^n) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in F_n} Cl^{\lambda_j}(\bigcup \mathcal{O}_{y_i}^n) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O' \in \mathcal{O}'_n} Cl^{\lambda_j}(O') \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Şu halde $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.18: (i, j) -hemen hemen küme Menger bitopolojik uzay olma özelliği sayılabilir birleşim altında kapalıdır.

İspat: (i, j) -hemen hemen küme Menger bitopolojik uzayların sayılabilir bir ailesi $\{(X_n, \lambda_{1_n}, \zeta_{2_n}): n \in \omega\}$ olarak verilsin.

$$X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$$

olarak tanımlansın. X üzerindeki topolojiler sırasıyla λ ve ζ olmak üzere, $A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^\lambda(A)$ 'nın X 'in λ -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $A_n \subset X_n$ olsun ve

$$A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için N_n kümesi ω 'nın sonsuz bir alt kümesi olmak üzere, $\{N_n: n \in \omega\}$ ailesi ω 'nın bir parçalanışı olsun. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}_k^n = \{O \cap X_n: k \in \mathcal{O}_k\}$$

olarak tanımlansın. $Cl^{\lambda_{1_n}}(A_n) \subset Cl^\lambda(A)$ kapsaması sağlandığından $T_n = (\mathcal{O}_k^n)_{k \in N_n}$ dizisi $Cl^{\lambda_{1_n}}(A_n)$ 'nin X_n 'nin λ_{1_n} -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. $(X_n, \lambda_{1_n}, \zeta_{2_n})$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ ve $k \in N_n$ için sonlu bir $\mathcal{U}_k^n \subset \mathcal{O}_k^n$ alt ailesi vardır öyle ki

$$A_n \subset \bigcup_{k \in N_n} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_k^n} Cl^{\zeta_{2_n}}(U)$$

kapsaması sağlanır. Diğer yandan her $U \in \mathcal{U}_k^n$ için $U = O_U \cap X_n$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_k$ seçilirse her $n \in \omega$ ve $k \in N_n$ için $\mathcal{O}'_k = \{O_U: U \in \mathcal{U}_k^n\}$ ailesi $\mathcal{O}_k$ 'nın sonlu bir alt ailesidir. Bu durumda

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{O_U \in \mathcal{O}'_k} Cl^Z(O_U) : k \in N_n, n \in \omega \right\}$$

ailisi A 'nın istenilen örtüsüdür.

(i, j) -hemen hemen küme Menger olan bitopolojik uzayların alt uzaylarının (i, j) -hemen hemen küme Menger olması gerekmez. Aşağıda bu duruma dair bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.3.1.19: $X = [0, \omega_1]$ kümesi sıra topolojisi ile beraber kompakt bir kümedir (Steen and Seebach 1995).

X kümesi λ_1 sıra topolojisi ve λ_2 ayrık topoloji ile verilsin. (X, λ_1) kompakt olduğundan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -hemen hemen küme Menger'dir.

$Y = X \setminus \{\omega_1\}$ kümesi sırasıyla üzerine λ_1 ve λ_2 tarafından indirgenen λ_1^Y ve λ_2^Y alt uzay topolojileri ile düşünülürse $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -hemen hemen Lindelöf değildir (Salleh and Kılıçman 2014).

Teorem 4.3.1.8 ile beraber $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ alt uzayı $(1,2)$ -hemen hemen küme Menger değildir.

Teorem 4.3.1.20: (i, j) -hemen hemen küme Menger bitopolojik uzayların (i, j) -kapalı/açık olan alt uzayları (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger, $A \subset X$ alt kümesi (i, j) -kapalı/açık olsun. $(A, \lambda_1^A, \lambda_2^A)$ alt uzayının (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğunu göstermek için A 'nın boş kümeden farklı bir B alt kümesi ve $Cl^{\lambda_i^A}(B)$ 'nin A 'nın λ_i^A -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{O}_n$ için X 'in λ_i -açık bir U_O alt kümesi $O = A \cap U_O$ olacak şekilde bulunabilir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{U_O : O \in \mathcal{O}_n\}$ olarak tanımlansın. A kümesi λ_i -kapalı olduğundan

$$Cl^{\lambda_i^A}(B) = A \cap Cl^{\lambda_i}(B) = Cl^{\lambda_i}(A \cap B) = Cl^{\lambda_i}(B)$$

eşitliği sağlanır. O halde $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(B)$ 'nin X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $n \in \omega$ için sonlu bir $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{O}'_n$ alt ailesi vardır öyle ki

$$\left\{ \bigcup_{U_O \in \mathcal{U}'_n} Cl^{\lambda_j}(U_O) : n \in \omega \right\}$$

ailesi B 'yi örter. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{O = A \cap U_O : U_O \in \mathcal{U}'_n\}$ olarak tanımlanırsa her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir. $A \in \lambda_j$ olduğundan her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{U}_n$ için

$$Cl^{\lambda_j^A}(O) = Cl^{\lambda_j^A}(A \cap U_O) = A \cap Cl^{\lambda_j}(U_O)$$

eşitliği sağlanır ve bundan dolayı

$$B \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O \in \mathcal{U}_n} Cl^{\lambda_j^A}(O)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $(A, \lambda_1^A, \lambda_2^A)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.21: (i, j) -hemen hemen küme Menger bir bitopolojik uzay ile d-kompakt bir bitopolojik uzayın çarpımı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

İspat: A ve B sırasıyla X ve Y 'nin boş kümeden farklı keyfi alt kümeleri ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi de $Cl^{\lambda_i}(A) \times Cl^{\lambda_j}(B) = Cl^{\lambda_i \times \lambda_j}(A \times B)$ 'nin $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \lambda_j$ -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ ailesi, $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'in $Cl^{\lambda_i}(A) \subset \bigcup \mathcal{U}_n$ olacak şekildeki λ_i -açık alt kümelerinden

oluşan aile ve $\mathcal{V}_n$ ise Y 'nin $Cl^{\zeta_i}(B) \subset \cup \mathcal{V}_n$ olacak şekildeki ζ_i -açık alt kümelerinden oluşan aile olmak üzere

$$\mathcal{O}_n = \mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n$$

şeklinde tanımlanabilir. Bununla beraber $x \in Cl^{\lambda_i}(A)$ keyfi verilsin. Y kümesi ζ_i -kompakt olduğundan $Cl^{\zeta_i}(B)$ kümesi de ζ_i -kompakttır. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{O}'_n$ alt ailesi vardır öyle ki $\{x\} \times Cl^{\zeta_i}(B) \subset \cup \mathcal{O}'_n$ kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_{n,x}$ ve $\mathcal{V}_{n,x}$ sırasıyla $\mathcal{U}_n$ ve $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu alt aileleri olmak üzere, $\mathcal{O}'_n = \mathcal{U}_{n,x} \times \mathcal{V}_{n,x}$ olsun. Diğer yandan her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}_x^n = \bigcap \mathcal{U}_{n,x}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\{x\} \times Cl^{\zeta_i}(B) \subset \bigcup \left(\left(\bigcap \mathcal{U}_{n,x} \right) \times \mathcal{V}_{n,x} \right) \subset \bigcup (\mathcal{U}_{n,x} \times \mathcal{V}_{n,x})$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}'_n = \{\mathcal{O}_x^n : x \in Cl^{\lambda_i}(A)\}$ olarak verilsin. O halde $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan, her $n \in \omega$ için F_n kümesi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{U}'_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{U}''_n$ alt ailesi $\mathcal{U}''_n = \{\mathcal{O}_{x_k}^n : k \in F_n\}$ olacak şekilde bulunabilir öyle ki

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}''_n} Cl^{\lambda_j}(V)$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}_n^* = \bigcup_{k \in F_n} (\mathcal{U}_{n,x_k^n} \times \mathcal{V}_{n,x_k^n})$$

olarak seçilirse $\mathcal{O}_n^*$ ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir alt ailesidir ve

$$\begin{aligned} A \times B \subset A \times Cl^{\zeta_i}(B) &\subset \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{V \in \mathcal{U}_n''} Cl^{\lambda_j}(V) \right) \times Cl^{\zeta_i}(B) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{O \in \mathcal{O}_n^*} (Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(O)) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger'dir.

Teorem 4.3.1.22: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Her $n \in \omega$ için $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayının (i, j) -hemen hemen küme Menger olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ ve $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ω -örtülerinin her $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisinin bulunmasıdır öyle ki her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{O}_n$ sonlu olmak üzere, A 'nın sonlu her F alt kümesi için $F \subset Cl^{\lambda_j}(V)$ olacak şekilde bir $n \in \omega$ ve $V \in \mathcal{U}_n$ vardır.

İspat: $\Rightarrow A \subset X$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ω -örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için K_n kümesi ω 'nın sonsuz bir alt kümesi ve her $n, t \in \omega$ için $K_t \cap K_n = \emptyset$ olmak üzere, $\omega = \bigcup_{t \in \omega} K_t$ olsun. Her $t \in \omega$ ve $k \in K_t$ için

$$\mathcal{O}_{k,t} = \{(O)^t : O \in \mathcal{O}_k\}$$

olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{O}_{k,t})_{k \in K_t}$ dizisi $\left(Cl^{\lambda_i}(A) \right)^t = Cl^{(\lambda_i)^t}((A)^t)$ 'nin X 'in $(\lambda_i)^t$ -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisidir. $(X^t, (\lambda_1)^t, (\lambda_2)^t)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger olduğundan her $k \in K_t$ için sonlu bir $\mathcal{U}_{k,t} \subset \mathcal{O}_{k,t}$ alt ailesi vardır ve

$$(A)^t \subset \bigcup_{k \in K_t} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{k,t}} Cl^{(\lambda_j)^t}(U) \quad (4.15)$$

kapsaması sağlanır. Her $k \in K_t$ ve $U \in \mathcal{U}_{k,t}$ için $U = (O_U)^t$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_k$ seçilebilir. Her $k \in K_t$ için $\mathcal{U}_k = \{O_U : U \in \mathcal{U}_{k,t}\}$ olarak tanımlansın. Şu halde $(\mathcal{U}_k)_{k \in K_t}$ istenilen dizidir. Gerçekten, $\mathcal{U}_k$ ailesi $\mathcal{O}_k$ 'nın sonlu bir alt ailesidir ve eğer $F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset A$ ise (4.15)'e göre en az bir $k \in K_p$ ve $U \in \mathcal{U}_{k,p}$ vardır öyle ki $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in Cl^{(\lambda_j)^p}(U)$ sağlanır. Diğer taraftan bir $O_U \in \mathcal{O}_k$ için $U = (O_U)^p$ dir. O halde

$$Cl^{(\lambda_j)^p}(U) = Cl^{(\lambda_j)^p}((O_U)^p) = \left(Cl^{\lambda_j}(O_U) \right)^p$$

eşitliği sağlanacağından $F \subset Cl^{\lambda_j}(O_U)$ elde edilir.

$\Leftarrow t \in \omega$, $A \subset X^t$ ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{(\lambda_i)^t}(A)$ 'nın X^t 'nin $(\lambda_i)^t$ -açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için S_n bir indis kümesi olmak üzere, $\mathcal{O}_n = \{O_{k,n} : k \in S_n\}$ olarak tanımlansın. Her $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $A_p \subset X$ olsun ve

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$$

olarak tanımlansın. $F_p \subset Cl^{\lambda_i}(A_p)$ sonlu bir alt küme ise $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_t$ kümesi X^t 'nin sonlu bir alt kümesidir. Dolayısıyla

$$F_1 \times F_2 \times \dots \times F_t \subset \bigcup_{k \in S_n^{F_1}} O_{k,n}$$

olacak şekilde sonlu bir $S_n^{F_1} \subset S_n$ alt kümesi vardır. Diğer yandan her $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ için X 'in λ_i -açık olan bir V_{F_p} alt kümesi vardır öyle ki

$$F_p \subset V_{F_p}$$

ve

$$V_{F_1} \times V_{F_2} \times \dots \times V_{F_t} \subset \bigcup_{k \in S_n^{F_1}} O_{k,n}$$

kapsamaları sağlanır. O halde her $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ ve $Cl^{\lambda_i}(A_p)$ 'nin sonlu her F_{A_p} alt kümesi için

$$\mathcal{U}_{n,p} = \{V_{F_{A_p}} : F_{A_p} \subset Cl^{\lambda_i}(A_p) \text{ sonlu}\}$$

ailesi her $n \in \omega$ için $Cl^{\lambda_i}(A_p)$ 'nin X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ω -örtüsüdür. Varsayımdan dolayı her $n \in \omega$ ve $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ için sonlu bir $\mathcal{U}'_{n,p} \subset \mathcal{U}_{n,p}$ alt ailesi, A_p 'nin sonlu her P alt kümesi için bir $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}'_{n,p}$ vardır öyle ki $P \subset Cl^{\lambda_j}(U)$ dur. Diğer yandan $R_{n,p}$ kümesi her $n \in \omega$ ve $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ için sonlu bir indis kümesi olsun. $\mathcal{U}'_{n,p} = \{V_{F_{A_p}^r} : r \in R_{n,p}\}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için

$$K_n = \{k \in S_n^{F_{A_p}^r} : p \in \{1, 2, \dots, t\} \text{ ve } r \in R_{n,p}\}$$

ise

$$\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{k \in K_n} Cl^{(\lambda_j)^t}(O_{k,n}) \supset A$$

kapsaması elde edilir. Bunu göstermek için $x = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in A$ keyfi verilsin. O halde her $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $\{x_p\} \subset A_p$ dir. Bundan dolayı bir $n_{x_p} \in \omega$ ve $U_{x_p} \in \mathcal{U}'_{n_{x_p},p}$ vardır öyle ki $\{x_p\} \subset Cl^{\lambda_j}(U_{x_p})$ sağlanır. Bir $r_{x_p} \in R_{n_{x_p},p}$ için $U_{x_p} = V_{F_{A_p}^{r_{x_p}}}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
 \{(x_1, x_2, \dots, x_p)\} &\subset Cl^{\lambda_j} \left(V_{F_{A_1}}^{rx_1} \right) \times \dots \times Cl^{\lambda_j} \left(V_{F_{A_t}}^{rx_t} \right) \\
 &\subset Cl^{(\lambda_j)^t} \left(V_{F_{A_1}}^{rx_1} \times \dots \times V_{F_{A_t}}^{rx_t} \right) \\
 &\subset \bigcup_{\substack{k \in S_n \\ F_{A_1}^{rx_1}}} Cl^{(\lambda_j)^t} (O_{k,n})
 \end{aligned}$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla bir $k \in K_n$ vardır öyle ki $x \in Cl^{(\lambda_j)^t} (O_{k,n})$ dir. Sonuç olarak $(X^t, (\lambda_1)^t, (\lambda_2)^t)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen küme Menger' dir.

4.3.2. Bitopolojik hemen hemen P_γ -kümeler

Tanım 4.3.2.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\mathcal{O}$ ailesi sonsuz ve A 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olsun. Her $x \in A$ için

$$\{O \in \mathcal{O} : x \notin Cl^{\lambda_j}(O)\}$$

kümesi sonlu ise, diğer bir ifade ile x elemanı $\mathcal{O}$ 'nun sonlu tanesi hariç tüm elemanlarının λ_j -kapanışları tarafından içeriliyorsa $\mathcal{O}$ 'ya A 'nın bir (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsü denir.

Tanım 4.3.2.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer her $A \subset X$ ve $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ω -örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi A 'nın (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsü olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -hemen hemen P_γ -küme denir.

Tanım 4.3.2.3: (X, λ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in ω -örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi X 'in γ -örtüsü olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa (X, λ) topolojik uzayına γ -küme denir (Gerlits and Nagy 1982).

Teorem 4.3.2.4: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) topolojik uzayı γ -küme ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -kümedir.

İspat: Teorem 4.3.1.2'nin ispatında kullanılan benzer argümanlar kullanılarak hemen elde edilir.

Aşağıda Teorem 4.3.2.4'ün tersinin her zaman doğru olmayacağına dair bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.3.2.5: $p \in \mathbb{P}$ sabit olmak üzere, $\mathbb{R}$ üzerinde $\lambda_1 = \{U \subset \mathbb{R} : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi ve λ_2 ayrık olmayan topoloji verilsin. Açıkça $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -hemen hemen P_γ -kümedir. Fakat $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ topolojik uzayı bir γ -küme değildir.

Teorem 4.3.2.6: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -kümedir ancak ve ancak her $A \subset X$ ve $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan λ_i - ω -örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi A 'nın bir (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsü olacak şekilde bulunabilir.

İspat: $\Rightarrow$ Her (i, j) -regüler açık küme λ_i -açık olduğundan ispat açıktır.

$\Leftarrow$ $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan λ_i - ω -örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. O halde her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}'_n = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olmak üzere, $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nın X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan λ_i - ω -örtülerinin bir dizisidir. Varsayımdan dolayı bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}'_n$ ve $\{O_n : n \in \omega\}$ ailesi A 'nın bir (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsüdür. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $O_n = Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(\mathcal{O}'_n))$ olacak şekilde bir $\mathcal{O}'_n \in \mathcal{O}_n$ vardır.

Böylece A 'nın istenilen şekilde bir $\mathcal{U} = \{O'_n : n \in \omega\}$ örtüsü elde edilmiş olur. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -kümedir.

Teorem 4.3.2.7: (i, j) -hemen hemen P_γ -kümelerin d -sürekli ve örten dönüşümler altındaki görüntüleri de (i, j) -hemen hemen P_γ -kümedir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -küme ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ ise d -sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = A$ ve $(O_n)_{n \in \omega}$ ise $Cl^{\zeta_i}(B)$ 'nin Y 'nin (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan ζ_i - ω -örtülerinin bir dizisi olsun. f dönüşümü i -sürekli olduğundan

$$Cl^{\lambda_i}(A) \subset f^{-1}\left(Cl^{\zeta_i}(B)\right)$$

kapsaması geçerlidir. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $O'_n = \{f^{-1}(O) : O \in O_n\}$ olmak üzere, $(O'_n)_{n \in \omega}$ dizisi $Cl^{\lambda_i}(A)$ 'nin X 'in λ_i -açık alt kümelerinden oluşan ω -örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -küme olduğundan bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $U_n \in O'_n$ ve $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ ailesi A 'nın bir (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsü olacak şekilde bulunabilir. Diğer yandan her $n \in \omega$ için bir $O_n \in O_n$ elemanı $U_n = f^{-1}(O_n)$ olacak şekilde vardır. O halde $\mathcal{O}' = \{O_n : n \in \omega\}$ ailesi B 'nin bir (i, j) -hemen hemen P_γ -örtüsüdür. Gerçekten, $y \in B$ ve bir $x \in A$ için $f(x) = y$ ise $F_x = \{U_n \in \mathcal{U} : x \notin Cl^{\lambda_j}(U_n)\}$ ailesi sonludur. O halde bir $n_0 \in \omega$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $x \in Cl^{\lambda_j}(U_n)$ dir. Dolayısıyla her $n > n_0$ için $f(x) = y \in f\left(Cl^{\lambda_j}(U_n)\right)$ elde edilir ve bundan dolayı her $n > n_0$ için $y \in Cl^{\zeta_j}(O_n)$ dir. O halde

$$F^y = \{O_n \in \mathcal{O}' : y \notin Cl^{\zeta_j}(O_n)\}$$

ailesi sonludur. Diğer yandan $\mathcal{U}$ sonsuz olduğundan $\mathcal{O}'$ sonsuzdur. Sonuç olarak (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen P_γ -kümedir.

5. BİTOPOLOJİK YAKIN ALSTER ÖZELLİĞİ

Bu bölümde Alster özelliğinin bitopolojik bir zayıf formu tanımlanmış ve bazı seçme prensipleriyle karakterizasyonları yapılmıştır. Alster özelliğinin literatürde var olan bitopolojik bazı zayıf formları ile karşılaştırılması yapılarak bu formların denk olma koşulları verilmiştir. Ayrıca bu özelliğin bitopolojik yakın Lindelöf ve dördüncü bölümde tanımlanan bitopolojik yakın Menger özelliği ile ilişkileri incelenip Alster, Menger ve Lindelöf özelliklerinin bazı zayıf formlarının denk olma koşulları ile ilgili genel bir sonuç verilmiştir. Bitopolojik yakın Alster özelliğine sahip bitopolojik uzayların bitopolojik çarpımsal yakın Lindelöf olduğu gösterilmiştir. Bitopolojik yakın Alster bitopolojik uzaylar ile bitopolojik yakın Menger özelliğine sahip bitopolojik uzayların çarpımları incelenmiştir. Literatüre yeni katılmış olan Alster özelliğinin bu zayıf formunun bazı topolojik özelliklerinden bahsedilmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar 2025 yılında Turkish Journal of Mathematics dergisinde “A note on a novel type of Alster covering property in bitopological setting” başlıklı makalede yayımlanmıştır.

Tanım 5.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in her λ_i -Alster örtüsü $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir $\mathcal{O}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(O) \right)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -yakın Alster denir.

Bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı için aşağıdaki notasyonlar verilsin:

$\mathcal{G}^{\lambda_i}$: X 'in bütün elemanları λ_i - G_δ alt küme olan tüm $\mathcal{O}$ örtülerinin ailesi,

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}$: X 'in tüm λ_i -Alster örtülerinin ailesi,

$\mathcal{G}_{\lambda_i, \lambda_j}^{\lambda_i}$: X 'in alt kümelerinin tüm $\mathcal{O}$ ailelerinin koleksiyonudur öyle ki her $O \in \mathcal{O}$ elemanı

X 'in bir λ_i - G_δ alt kümesidir ve $\left\{ \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(O) \right) : O \in \mathcal{O} \right\}$ ailesi X 'in bir örtüsüdür.

Verilen bu bilgilere göre aşağıdaki teorem (i, j) -yakın Alster özelliğinin bir seçme prensibi ile karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 5.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir ancak ve ancak X $\mathcal{S}_1 \left(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}, \mathcal{G}_{\lambda_i, \lambda_j}^{\lambda_i} \right)$ seçme prensibini sağlar.

İspat: $\Rightarrow (X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olsun ve X 'in λ_i -Alster örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{A}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin.

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{n \in \omega} A_n : (\forall n)(A_n \in \mathcal{A}_n) \right\}$$

olarak tanımlansın. O halde her $B \in \mathcal{B}$ için B kümesi X 'in bir λ_i - G_δ alt kümesidir ve açıkça $\mathcal{B}$ ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsüdür. Varsayımdan ötürü $\mathcal{B}$ 'nin sayılabilir bir $\mathcal{B}' = \{B_n : n \in \omega\}$ alt ailesi bulunabilir öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(B_n) \right)$$

eşitliği sağlanır. Her $k, n \in \omega$ için $A_k^n \in \mathcal{A}_k$ olmak üzere

$$B_n = \bigcap_{k \in \omega} A_k^n$$

olarak tanımlansın. Her $n \in \omega$ için $B_n \subset A_n^n \in \mathcal{A}_n$ dir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(B_n) \right) \subset \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j}(A_n^n) \right)$$

kapsaması sağlanır. Sonuç olarak $\{A_n^n : n \in \omega\} \in \mathcal{G}_{\lambda_i, \lambda_j}^{\lambda_i}$ elde edilir.

$\Leftarrow \mathcal{A}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_i -Alster örtüsü olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ olarak tanımlansın. O halde X 'in λ_i -Alster örtülerinin bir $(\mathcal{A}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Varsayımdan dolayı her $n \in \omega$ için bir $A_n \in \mathcal{A}_n$ seçilebilir öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(A_n))$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \omega\}$ ailesi $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir alt ailesidir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Tanım 5.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X kümesi sayılabilir çoklukta λ_i -kompakt alt kümelerinin λ_j -kapanışlarının λ_i -içlerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile her $n \in \omega$ için C_n kümesi X 'in bir λ_i -kompakt alt kümesi olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(C_n))$$

eşitliği sağlanıyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -yakın σ -kompakt denir.

Teorem 5.4: (i, j) -yakın σ -kompakt olan her bitopolojik uzay (i, j) -yakın Alster'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın σ -kompakt ve $\mathcal{A}$ da X 'in bir λ_i -Alster örtüsü olsun. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın σ -kompakt olduğundan X 'in λ_i -kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\{C_n : n \in \omega\}$ ailesi vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(C_n))$$

sağlanır. Diğer yandan $\mathcal{A}$ ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsü olduğundan her $n \in \omega$ için $C_n \subset A_n$ olacak şekilde bir $A_n \in \mathcal{A}$ vardır. Bu durumda

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(C_n)) \subset \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(A_n))$$

kapsaması sağlanır. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Teorem 5.4'ün tersinin her zaman doğru olmayacağına dair bir ters örnek için Örnek 5.14'e bakılabilir. Aşağıdaki teorem (i, j) -yakın σ -kompakt ve (i, j) -yakın Alster özelliklerinin denk olma koşulunu vermektedir.

Teorem 5.5: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın Alster ve (X, λ_i) metriklenebilir ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın σ -kompakttır.

İspat: X 'in tüm λ_i -kompakt alt kümelerinden oluşan aile

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : C \text{ } \lambda_i\text{-kompakt}\}$$

olarak verilsin. (X, λ_i) metriklenebilir olduğundan bir Hausdorff uzaydır. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ 'nin her bir C elemanı bu topolojik uzayda kapalı bir kümedir. Diğer yandan metriklenebilir bir topolojik uzayın kapalı alt kümeleri G_δ küme olduğundan $\mathcal{C}$ ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan $\mathcal{C}$ 'nin sayılabilir bir $\{C_n : n \in \omega\}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(C_n))$$

sağlanır. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın σ -kompakttır.

Teorem 5.6: (i, j) -yakın Alster olan bitopolojik uzaylar (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster ve $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu birleşim altında kapalı olduğu varsayılabilir.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcap_{n \in \omega} O_n : (\forall n)(O_n \in \mathcal{O}_n) \right\}$$

olarak tanımlansın. O halde X 'in λ_i - G_δ alt kümelerinden oluşan bir ailesi elde edilmiş olur. Diğer yandan her $n \in \omega$ ve X 'in λ_i -kompakt olan her C alt kümesi için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu bir $\mathcal{F}_{n,C}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$C \subset \bigcup \mathcal{F}_{n,C}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$C \subset \bigcap_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{F}_{n,C} \in \mathcal{A}$$

olacağından $\mathcal{A}$ ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(B_n))$$

eşitliği elde edilir. Her $m, n \in \omega$ için $O_{m,n} \in \mathcal{O}_m$ olmak üzere, $B_n = \bigcap_{m \in \omega} O_{m,n}$ şeklinde verilsin. Her $n \in \omega$ için $B_n \subset O_{n,n}$ olacağından

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(O_{n,n}))$$

eşitliği sağlanmış olur. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{O_{n,n}\}$ olarak tanımlanırsa $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen şekilde bir dizidir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Aşağıda (1,2)-yakın Menger olan fakat (1,2)-yakın Alster olmayan bir bitopolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 5.7: $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.1.6'daki gibi verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin (1,2)-yakın Menger olduğu gösterilmişti. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin (1,2)-yakın Alster olmadığını göstermek için $\mathbb{R}$ 'nin tüm λ_1 -kompakt alt kümelerinden oluşan aile

$$\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{R} : C \text{ } \lambda_1\text{-kompakt}\}$$

olarak verilsin. $\lambda_2 \subset \lambda_1$ olduğundan her $C \in \mathcal{C}$ kümesi $(\mathbb{R}, \lambda_2)$ uzayında da kompaktır. Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_2)$ metriklenabilir olduğundan Hausdorff bir uzaydır ve dolayısıyla her $C \in \mathcal{C}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'nin λ_2 -kapalı bir alt kümesi olup aynı zamanda bir λ_2 - G_δ kümedir. Dolayısıyla her bir $C \in \mathcal{C}$ kümesi λ_1 - G_δ kümedir. O halde $\mathcal{C}$ ailesi $\mathbb{R}$ 'nin bir λ_1 -Alster örtüsüdür. Fakat $\mathcal{C}$ ailesinin elemanlarının λ_2 -kapanışlarının λ_1 -içlerinin birleşimleri $\mathbb{R}$ 'ye eşit olacak şekilde sayılabilir bir alt ailesi mevcut değildir. Gerçekten, her $C \in \mathcal{C}$ için $Cl^{\lambda_2}(C) = C$ dir. Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ 'de içi boş kümeden farklı olan hiçbir alt küme kompakt olmadığından

$$Int^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(C)) = \emptyset$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Alster olamaz.

Teorem 5.8: (i, j) -yakın Menger olan bitopolojik uzaylar (i, j) -yakın Lindelöf'tür.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger ve $\mathcal{O}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_i -açık örtüsü olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$ olarak tanımlansın. O halde $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her bir $\mathcal{O}_n$ ailesinin sonlu bir $\mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır öyle ki X kümesi

$$\{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(U)) : U \in \mathcal{U}_n, n \in \omega\}$$

tarafından örtülür. Dolayısıyla $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$ ailesi $\mathcal{O}$ 'nun istenildiği şekilde sayılabilir bir alt ailesidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf'tür.

Teorem 5.6 ve Teorem 5.8'in bir sonucu olarak (i, j) -yakın Alster olan bitopolojik uzayların (i, j) -yakın Lindelöf olduğu elde edilir.

Aşağıda $(1, 2)$ -yakın Lindelöf olan fakat $(1, 2)$ -yakın Alster olmayan bir bitopolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 5.9: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde λ_2 alışımlı topoloji ve $\mathcal{B}$ ailesi λ_2 için bir taban olmak üzere

$$\mathcal{R} = \{\{q\}: q \in \mathbb{Q}\} \cup \mathcal{B}$$

ailesini taban olarak kabul eden topolojiye λ_2 'nin *ayrık rasyonel genişletilmesi* denir. $\mathbb{R}$ bu topoloji ile birlikte metriklenebilir ve Lindelöf uzaydır fakat lokal kompakt değildir. (Steen and Seebach 1995).

λ_1 topolojisi λ_2 'nin ayrık rasyonel genişletilmesi olsun. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayının $(1, 2)$ -yakın Alster olmadığını göstermek için, $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ metriklenebilir olduğundan Teorem 5.5'den dolayı bu bitopolojik uzayın $(1, 2)$ -yakın σ -kompakt olmadığını göstermek yeterlidir. Öncelikle, $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ topolojik uzayı Lindelöf olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -yakın Lindelöf'tür. $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -kompakt alt kümelerinden oluşan ve

$$\mathbb{R} = \bigcup_{C_n \in \mathcal{K}} \text{Int}^{\lambda_1} \left(Cl^{\lambda_2}(C_n) \right)$$

eşitliğini sağlayan sayılabilir bir $\mathcal{K} = \{C_n: n \in \omega\}$ ailesinin olduğu varsayalım. λ_1 topolojisi λ_2 'den daha ince olduğu için her bir C_n alt kümesi λ_2 -kompakttır ve dolayısıyla λ_2 -kapalıdır. O halde

$$\mathbb{R} = \bigcup_{C_n \in \mathcal{K}} \text{Int}^{\lambda_1}(C_n)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ 'in lokal kompakt olduğunu gösterir. Fakat $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ topolojik uzayı lokal kompakt bir uzay değildir. Dolayısıyla varsayım yanlış olup $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın σ -kompakt değildir.

Teorem 5.10: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf ve (X, λ_i) bir P -uzay ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ (i, j) -yakın Alster'dir.

İspat: $\mathcal{A}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_i -Alster örtüsü olsun. $\mathcal{A}$ 'nın her bir elemanı λ_i - G_δ küme ve (X, λ_i) bir P -uzay olduğundan $\mathcal{A}$ 'nın her bir elemanı aynı zamanda λ_i -açık alt kümedir. Dolayısıyla $\mathcal{A}$ ailesi X 'in aynı zamanda bir λ_i -açık örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf olduğundan istenilen hemen sağlanır.

Sonuç 5.11: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer (X, λ_i) bir P -uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf'tür.

Verilen sonuç sonrasında (i, j) -yakın Alster özelliği ile Alster özelliğinin literatürde var olan (i, j) -zayıf Alster ve (i, j) -hemen hemen Alster zayıf formlarının ilişkisi incelenmiştir. Tanımlarına bakıldığında (i, j) -yakın Alster olan bir bitopolojik uzayın (i, j) -hemen hemen Alster ve (i, j) -zayıf Alster olduğu kolaylıkla görülebilir. Bununla birlikte (i, j) -zayıf Alster olan bitopolojik uzayların (i, j) -hemen hemen Alster ve (i, j) -hemen hemen Alster olan bitopolojik uzayların (i, j) -yakın Alster olmaları gerekmez.

Aşağıda $(1,2)$ -zayıf Alster olan fakat $(1,2)$ -hemen hemen Alster olmayan bir bitopolojik uzay örneği verilmiştir.

Örnek 5.12: $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.2.17'deki gibi verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin $(1,2)$ -zayıf Alster olduğunu göstermek için $\mathbb{R}$ 'nin herhangi bir λ_1 -Alster örtüsü olan $\mathcal{A}$ ailesi verilsin. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $\{q\}$ kümesi λ_1 -kompakt olduğundan her $q \in \mathbb{Q}$ için bir $A_q \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $\{q\} \subset A_q$ kapsaması sağlanır. Diğer yandan $\mathbb{Q}$ kümesi λ_2 -yoğun olduğundan

$$\mathbb{R} = Cl^{\lambda_2} \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \right) \subset Cl^{\lambda_2} \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{A_q : q \in \mathbb{Q}\}$ ailesi $\mathcal{A}$ 'nın istenilen şekilde sayılabilir bir alt ailesidir. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -zayıf Alster'dir.

Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ uzayı Menger olmadığından ve $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -regüler olduğundan Teorem 3.2.11'den dolayı $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -hemen hemen Menger değildir. Dolayısıyla Teorem 3.2.5 ile beraber bu bitopolojik uzay $(1,2)$ -hemen hemen Alster olamaz.

Aşağıda verilen örnek ise $(1,2)$ -hemen hemen Alster olan fakat $(1,2)$ -yakın Alster olmayan bir bitopolojik uzay örneğidir.

Örnek 5.13: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.1.10'daki gibi verilsin. Bu bitopolojik uzayın $(1,2)$ -hemen hemen Menger olduğu fakat $(1,2)$ -yakın Menger olmadığı gösterilmişti. Diğer yandan (X, λ_1) bir P -uzay olduğundan Teorem 3.2.5'e göre $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ $(1,2)$ -hemen hemen Alster'dir. Fakat $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Menger olmadığından Teorem 5.6 ile beraber bu bitopolojik uzay $(1,2)$ -yakın Alster olamaz.

Örnek 5.14: $(1,2)$ -yakın Alster olup $(1,2)$ -yakın σ -kompakt olmayan bir bitopolojik uzay vardır.

X sayılamaz bir küme ve $\alpha \in X$ sabit olsun. X üzerinde

$$\lambda_1 = \{O \subset X: \alpha \notin O \text{ veya } \alpha \in O \text{ ise } |X \setminus O| \leq \omega\}$$

ve

$$\lambda_2 = \{O \subset X: \alpha \notin O\} \cup \{X\}$$

topolojileri verilsin. (X, λ_1) uzayının bir P -uzay olduğu kolaylıkla görülebilir. (X, λ_1) Lindelöf olduğundan $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Lindelöf tür. Diğer yandan X 'in λ_1 -kompakt olan herhangi bir $K \subset X$ alt kümesi sonlu olduğundan ve $Cl^{\lambda_2}(K) = K$ ya da $Cl^{\lambda_2}(K) = K \cup \{\alpha\}$ olacağından her iki durumda da $Cl^{\lambda_2}(K)$ sonludur. Dolayısıyla X sayılamaz olduğundan X 'in λ_1 -kompakt alt kümelerinin sayılabilir hiçbir $\mathcal{K} = \{K_n: n \in \omega\}$ ailesi için

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Int^{\lambda_1}(Cl^{\lambda_2}(K_n))$$

eşitliği sağlanmaz. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın σ -kompakt değildir. Bununla beraber $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Lindelöf olduğundan Teorem 5.10 ile birlikte aynı zamanda $(1,2)$ -yakın Alster'dir.

Tanım 5.15: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer her $i \in \{1,2\}$ için (X, λ_i) bir P -uzay ise bu bitopolojik uzaya P -biuzay denir.

Teorem 5.16: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -ekstremal bağlantısız bir P -biuzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -yakın Alster'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -hemen hemen Alster'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -zayıf Alster'dir.

İspat: $3 \Rightarrow 1$ $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Alster ve $\mathcal{A}$ ailesi X 'in herhangi bir λ_i -Alster örtüsü olsun. Varsayımdan dolayı $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir $\mathcal{B}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right)$$

eşitliği sağlanır. $\mathcal{B}$ ailesi sayılabilir, her $B \in \mathcal{B}$ için $Cl^{\lambda_j}(B)$ kümesi λ_j -kapalı ve (X, λ_j) bir P -uzay olduğundan $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} Cl^{\lambda_j}(B)$ kümesi X 'in $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ alt kümesini kapsayan λ_j -kapalı bir alt kümesidir. Diğer yandan $Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right)$ kümesi $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ kümesini kapsayan en dar λ_j -kapalı alt küme olduğundan

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} Cl^{\lambda_j}(B)$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Alster'dir. Diğer yandan (X, λ_i) bir P -uzay ve her $B \in \mathcal{B}$ kümesi λ_i - G_δ küme olduğundan $B \in \lambda_i$ dir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -ekstremal bağlantısız olduğundan her $B \in \mathcal{B}$ için $Cl^{\lambda_j}(B) = Int^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(B))$ eşitliği sağlanır ve

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} Cl^{\lambda_j}(B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} Int^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j}(B))$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Teorem 5.16'nın ispatına benzer olarak aşağıdaki teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 5.17: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay ve (X, λ_i) bir P -uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Alster'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Lindelöf'tür.

Teorem 3.2.5 ile birlikte aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.18: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir (i, j) -ekstremal bağlantısız P -biuzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Alster'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Alster'dir,
4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
5. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Menger'dir,
6. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger'dir,
7. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf'tür,
8. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür,
9. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Lindelöf'tür.

Sonuç 5.19: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler, (i, j) -ekstremal bağlantısız P -biuzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (X, λ_i) Alster'dir,
2. (X, λ_i) Menger'dir,
3. (X, λ_i) Lindelöf'tür,
4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir,
5. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Alster'dir,
6. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Alster'dir,
7. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir,
8. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Menger'dir,
9. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Menger'dir,
10. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf'tür,

11. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Lindelöf'tür,

12. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Lindelöf'tür.

Aşağıda bitopolojik yakın Alster özelliğinin bazı topolojik özelliklerinden bahsedilmiştir. Öncelikle bitopolojik yakın Alster özelliğinin alt uzaylara indirgenip indirgenemeyeceği incelenmiştir.

Aşağıdaki örnek bitopolojik yakın Alster özelliğinin kalıtsal olmadığını gösteren bir örnektir.

Örnek 5.20: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi λ_1 alışılmış topoloji ve λ_2 Sorgenfrey topolojisi ile verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Alster'dir. Gerçekten,

$$\mathcal{C} = \{[-n, n] : n \in \omega\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -kompakt altkümelerinden oluşan sayılabilir bir ailedir. Bu aile $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin $(1,2)$ -yakın σ -kompakt olduğunu gösterir ve dolayısıyla $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ metriklenebilir olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ aynı zamanda $(1,2)$ -yakın Alster'dir. Fakat $\mathbb{P}$ irrasyonel sayılar kümesi ilgili alt uzay topolojileri $\lambda_1^{\mathbb{P}}$ ve $\lambda_2^{\mathbb{P}}$ ile düşünülürse $(1,2)$ -yakın Alster değildir. Bunu göstermek için K kümesi $\mathbb{P}$ 'nin herhangi bir $\lambda_1^{\mathbb{P}}$ -kompakt alt kümesi olarak verilsin. Dolayısıyla K aynı zamanda λ_1 -kompattır. $\mathbb{R}$ 'deki her λ_1 -kompakt alt küme λ_2 -kapalı olduğundan ve $Cl^{\lambda_2^{\mathbb{P}}}(K) = \mathbb{P} \cap Cl^{\lambda_2}(K) = K$ sağlandığından K alt kümesi $\lambda_2^{\mathbb{P}}$ -kapalıdır. Diğer yandan bilindiği üzere $\mathbb{P}$ 'nin $\lambda_1^{\mathbb{P}}$ -kompakt alt kümelerinin $\lambda_1^{\mathbb{P}}$ -içi boş küme olduğundan ve bununla birlikte $\mathbb{P}$ $\lambda_1^{\mathbb{P}}$ -metriklenebilir olduğundan Teorem 5.5 ile beraber $(\mathbb{P}, \lambda_1^{\mathbb{P}}, \lambda_2^{\mathbb{P}})$ $(1,2)$ -yakın Alster değildir.

Örnek 4.1.15'e bakıldığında (X^*, λ_1) 'in bir P -uzay olduğu görülür. $(X^*, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Menger olduğundan Sonuç 5.11 ile birlikte $(X^*, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin $(1,2)$ -yakın Alster olduğu elde edilir. Diğer yandan $(X, \lambda_1^X, \lambda_2^X)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -yakın Menger olmadığından $(1,2)$ -yakın Alster değildir. Bu durum (i, j) -yakın Alster bitopolojik uzayların kapalı alt kümelerinin de (i, j) -yakın Alster olması gerekmediği sonucunu verir.

Teorem 5.21: (i, j) -yakın Alster olan bitopolojik uzayların kapalı/açık alt kümeleri (i, j) -yakın Alster'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster ve $Y \subset X$ de X 'in kapalı/açık bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$ ailesi Y 'nin herhangi bir λ_i^Y -Alster örtüsü ise her $A \in \mathcal{A}$ elemanı her $n \in \omega$ için O_n kümesi X 'in λ_i -açık bir alt kümesi olmak üzere

$$A = \bigcap_{n \in \omega} (O_n \cap Y)$$

şeklinde yazılabilir. $X \setminus Y$ kümesi λ_i -açık olduğundan $A \cup (X \setminus Y)$ kümesinin X 'in bir λ_i - G_δ alt kümesi olduğu görülür. Diğer yandan $C \subset X$ kümesi λ_i -kompakt ise $C \cap Y$ kümesi λ_i^Y -kompakt olur. O halde bir $A_C \in \mathcal{A}$ bulunabilir öyle ki $C \cap Y \subset A_C$ dir. Bundan dolayı $C \subset A_C \cup (X \setminus Y)$ sağlanır. Sonuç olarak

$$\mathcal{B} = \{A \cup (X \setminus Y) : A \in \mathcal{A}\}$$

ailesi X 'in λ_i -Alster örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan $\mathcal{A}$ 'nın sayılabilir bir $\mathcal{B}'$ alt ailesi vardır ve

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} (B \cup (X \setminus Y)) \right) \quad (5.1)$$

sağlanır. Y açık olduğundan (5.1) eşitliğinin her iki tarafının Y ile arakesiti alınır

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} Y \cap \text{Int}^{\lambda_i} \left(\text{Cl}^{\lambda_j} (B \cup (X \setminus Y)) \right) \\ &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Y \cap \left(\text{Cl}^{\lambda_j} (B) \cup (X \setminus Y) \right) \right) \\ &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Y \cap \text{Cl}^{\lambda_j} (B) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j^Y}(B) \right) \\
 &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \text{Int}^{\lambda_i^Y} \left(Cl^{\lambda_j^Y}(B) \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(Y, \lambda_1^Y, \lambda_2^Y)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Teorem 5.22: (i, j) -yakın Alster bitopolojik uzayların i -açık, d -sürekli ve örten dönüşümler altındaki görüntüleri de (i, j) -yakın Alster'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster, (Y, ζ_1, ζ_2) herhangi bir bitopolojik uzay ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ ise d -sürekli, i -açık ve örten bir dönüşüm olsun. $\mathcal{A}$ ailesi ise Y 'nin bir ζ_i -Alster örtüsü olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ için Y 'nin ζ_i -açık alt kümelerinden oluşan sayılabilir bir $\{O_{n,A}: n \in \omega\}$ ailesi bulunabilir öyle ki

$$A = \bigcap_{n \in \omega} O_{n,A}$$

olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla $f^{-1}(A) = \bigcap_{n \in \omega} f^{-1}(O_{n,A})$ sağlanır ve f dönüşümü i -sürekli olduğundan her $n \in \omega$ için $f^{-1}(O_{n,A}) \in \lambda_i$ dir. O halde $f^{-1}(A)$ kümesi X 'in bir λ_i - G_δ alt kümesidir. Diğer yandan $C \subset X$ kümesi X 'in herhangi bir λ_i -kompakt alt kümesi ise bir $A_C \in \mathcal{A}$ vardır ve $f(C) \subset A_C$ sağlanır. Dolayısıyla $C \subset f^{-1}(A_C)$ dir. O halde $\mathcal{A}^\leftarrow = \{f^{-1}(A): A \in \mathcal{A}\}$ ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan $\mathcal{A}^\leftarrow$ 'nin sayılabilir bir $\mathcal{B}$ alt ailesi

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(B) \right)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. Şimdi her $B \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(A_B) = B$ olacak şekilde bir $A_B \in \mathcal{A}$ seçilsin. f 'nin i -açık ve j -sürekli olması ile birlikte

$$\begin{aligned}
 f(X) = Y &= f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \text{Int}^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(B))\right) \\
 &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f\left(\text{Int}^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(B))\right) \\
 &\subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \text{Int}^{\zeta_i}(Cl^{\zeta_j}(f(B))) \\
 &= \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \text{Int}^{\zeta_i}(Cl^{\zeta_j}(A_B))
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{A_B : B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A}$ sayılabilir ailesi istenilen şekilde olup (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Teorem 5.23: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayları (i, j) -yakın Alster ise $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı da (i, j) -yakın Alster'dir.

İspat: $\mathcal{A}$ ailesi $X \times Y$ 'nin herhangi bir $\lambda_i \times \zeta_i$ -Alster örtüsü olsun. X 'in λ_i -kompakt her $C \subset X$ alt kümesi ve Y 'nin ζ_i -kompakt her $D \subset Y$ alt kümesi için bir $A_{(C,D)} \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $C \times D \subset A_{(C,D)}$ kapsaması sağlanır. $A_{(C,D)}$ kümesi $X \times Y$ 'nin bir $\lambda_i \times \zeta_i$ - G_δ alt kümesi olduğundan her $n \in \omega$ için $O_{n,(C,D)}$ kümesi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık alt kümesi olmak üzere

$$A_{(C,D)} = \bigcap_{n \in \omega} O_{n,(C,D)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer yandan $C \times D$ kümesi $\lambda_i \times \zeta_i$ -kompakt ve her $n \in \omega$ için $C \times D \subset O_{n,(C,D)}$ olduğundan her $n \in \omega$ için

$$C \times D \subset U_{n,(C,D)} \times V_{n,(C,D)} \subset O_{n,(C,D)}$$

olacak şekilde X 'in bir λ_i -açık alt kümesi $U_{n,(C,D)}$ ve Y 'nin bir ζ_i -açık alt kümesi $V_{n,(C,D)}$ bulunabilir. Şimdi

$$U_{(C,D)} = \bigcap_{n \in \omega} U_{n,(C,D)}$$

ve

$$V_{(C,D)} = \bigcap_{n \in \omega} V_{n,(C,D)}$$

olarak tanımlansın. O halde $U_{(C,D)}$ kümesi X 'in C 'yi içeren bir λ_i - G_δ alt kümesi ve $V_{(C,D)}$ ise Y 'nin D 'yi içeren bir ζ_i - G_δ alt kümesidir. $\mathcal{D}$ ailesi Y 'nin tüm ζ_i -kompakt alt kümelerinden oluşan aile olsun ve $\mathcal{A}^* = \{V_{(C,D)} : D \in \mathcal{D}\}$ şeklinde verilsin. O halde $\mathcal{A}^*$ ailesi X 'in λ_i -kompakt her C alt kümesi için Y 'nin bir ζ_i -Alster örtüsüdür. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan sayılabilir bir $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ alt ailesi vardır öyle ki

$$Y = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^*} \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} (V_{(C,D)}) \right)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi de

$$U_C = \bigcap_{D \in \mathcal{D}^*} U_{(C,D)}$$

olarak tanımlansın. O halde

$$\mathcal{B} = \{U_C : C \subset X \text{ } \lambda_i\text{-kompakt}\}$$

ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan her $n \in \omega$ için C_n kümesi λ_i -kompakt olmak üzere

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (U_{C_n}) \right)$$

olacak şekilde sayılabilir bir $\{C_n: n \in \omega\}$ ailesi vardır. Diğer yandan

$$C \times D \subset U_C \times V_{(C,D)} \subset A_{(C,D)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_{C_n}) \right) \times \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n^*} \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(V_{(C_n,D)}) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}_n^*} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(U_{C_n}) \right) \times \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j}(V_{(C_n,D)}) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}_n^*} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(U_{C_n} \times V_{(C_n,D)}) \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n^*} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(A_{(C_n,D)}) \right) \end{aligned}$$

kapsaması sağlanır. Sonuç olarak $\mathcal{A}$ 'nın istenilen şekilde sayılabilir bir

$$\{A_{(C_n,D)}: n \in \omega\}$$

alt ailesi elde edilmiş olur. $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Sonuç 5.24: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster ise her $n \in \omega$ için $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ sonlu çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir.

Teorem 5.2 ve Teorem 5.23 kullanılarak bitopolojik yakın Alster özelliğinin farklı bir seçme karakterizasyonu verilebilir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. $\mathcal{G}_{\Omega(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)}$ ailesi de tüm $\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{\lambda_i, \bar{\lambda}_j}^{\lambda_i}$ ailelerinin koleksiyonunu temsil etsin öyle ki X 'in sonlu her alt kümesi F için $F \subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j}(A_F) \right)$ olacak şekilde bir $A_F \in \mathcal{A}$ var olsun.

Teorem 5.25: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir ancak ve ancak $X \mathcal{S}_1 \left(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}, \mathcal{G}_{\Omega(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)} \right)$ seçme prensibini sağlar.

İspat: $\Rightarrow (X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster ve $(\mathcal{A}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -Alster örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için N_n sonsuz olmak üzere, $\{N_n : n \in \omega\}$ ailesi ω 'nın bir parçalanışı olsun. Her $n \in \omega$ ve her $m \in N_n$ için

$$\mathcal{U}_m = \{(A)^n : A \in \mathcal{A}_m\}$$

şeklinde verilsin. O halde her $n \in \omega$ için $(\mathcal{U}_m)_{m \in N_n}$ dizisi X^n 'nin $(\lambda_i)^n$ -Alster örtülerinin bir dizisidir. Sonuç 5.24'ten $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster'dir ve dolayısıyla Teorem 5.2 ile birlikte X^n kümesi $\mathcal{S}_1 \left(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}, \mathcal{G}_{\lambda_i, \bar{\lambda}_j}^{\lambda_i} \right)$ seçme prensibini sağlar. O halde her $m \in N_n$ için bir $U_m \in \mathcal{U}_m$ vardır ve

$$X^n = \bigcup_{m \in N_n} \text{Int}^{(\lambda_i)^n} \left(Cl^{(\lambda_j)^n} (U_m) \right) \quad (5.2)$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \omega$ ve her $m \in N_n$ için bir $A_m \in \mathcal{A}_m$ seçilsin öyle ki $U_m = (A_m)^n$ olsun. Şimdi de $\mathcal{V} = \{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{G}_{\Omega(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)}$ olduğunu göstermek için $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X$ sonlu alt kümesi keyfi verilsin. $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$ olacağından (5.2) eşitliğinden dolayı $x \in \text{Int}^{(\lambda_i)^k} \left(Cl^{(\lambda_j)^k} (U_m) \right)$ olacak şekilde bir $m \in N_k$ bulunabilir. Öte yandan her $i = 1, 2, \dots, k$ için $x_i \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (A_m) \right)$ olacağından $F \subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (A_m) \right)$ kapsaması sağlanır. Sonuç olarak istenen elde edilir.

$$\Leftarrow \mathcal{G}_{\Omega(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)} \subset \mathcal{G}_{\lambda_i, \bar{\lambda}_j}^{\lambda_i} \text{ olduğundan Teorem 5.2 ile hemen görülür.}$$

Bu bölümün son kısmında bitopolojik yakın Lindelöf ve bitopolojik yakın Menger özelliklerinin çarpımsallıklarının bitopolojik yakın Alster özelliği ile ilişkileri verilmiştir. Öncelikle bitopolojik yakın Lindelöf özelliğine sahip olan iki bitopolojik uzayın

çarpımının bitopolojik yakın Lindelöf özelliğine sahip olması gerekmediğine dair örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.26: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi sırasıyla λ_1 Sorgenfrey topolojisi ve λ_2 alışılmış topoloji ile verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ Lindelöf olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Lindelöf'tür. Diğer yandan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-regülerdir ve $(\mathbb{R}^2, (\lambda_1)^2)$ Lindelöf olmadığından $(\mathbb{R}, (\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2)$ bitopolojik uzayı (1,2)-yakın Lindelöf değildir (Kılıçman and Salleh 2008).

Teorem 5.27: (i, j) -yakın Alster bir bitopolojik uzay ile (i, j) -yakın Lindelöf bir bitopolojik uzayın çarpımı (i, j) -yakın Lindelöf'tür.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster, (Y, ζ_1, ζ_2) ise (i, j) -yakın Lindelöf olsun. $\mathcal{O}$ ailesi $X \times Y$ 'nin herhangi bir $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık örtüsü olsun. Genelliği bozmadan $\mathcal{O}$ ailesinin sonlu birleşim altında kapalı olduğu varsayılabilir. K kümesi X 'in herhangi bir λ_i -kompakt alt kümesi olsun. Her $y \in Y$ için $K \times \{y\}$ kümesi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -kompakt bir alt kümesi olduğundan bir $O_K^y \in \mathcal{O}$ vardır ve $K \times \{y\} \subset O_K^y$ kapsamı elde edilir. Diğer yandan her $y \in Y$ için X 'in bir λ_i -açık alt kümesi U_K^y ve Y 'nin bir ζ_i -açık alt kümesi V_K^y vardır öyle ki $K \subset U_K^y, y \in V_K^y$ ve

$$K \times \{y\} \subset U_K^y \times V_K^y \subset O_K^y \quad (5.3)$$

dir. O halde $\mathcal{U} = \{V_K^y : y \in Y\}$ ailesi Y 'nin bir ζ_i -açık örtüsüdür. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf olduğundan sayılabilir bir $Y_K \subset Y$ alt kümesi

$$Y = \bigcup_{y \in Y_K} \text{Int}^{\zeta_i} \left(\text{Cl}^{\zeta_j}(V_K^y) \right)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bulunabilir. Şimdi de

$$U_K = \bigcap_{y \in Y_K} U_K^y$$

olarak tanımlansın. Açıkça U_K kümesi X 'in K λ_i -kompakt alt kümesini kapsayan bir λ_i - G_δ alt kümesidir. O halde

$$\mathcal{A} = \{U_K : K \subset X \text{ } \lambda_i\text{-kompakt}\}$$

ailesi X 'in bir λ_i -Alster örtüsü olacak şekilde elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster olduğundan X 'in λ_i -kompakt alt kümelerinin sayılabilir bir $\{K_n : n \in \omega\}$ ailesi bulunabilir öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j} (U_{K_n}))$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan (5.3)'den dolayı $K_n \times \{y\} \subset U_{K_n} \times V_{K_n}^y \subset O_{K_n}^y$ olduğundan

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j} (U_{K_n})) \times \bigcup_{y \in Y_{K_n}} \text{Int}^{\zeta_i} (Cl^{\zeta_j} (V_{K_n}^y)) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{y \in Y_{K_n}} \text{Int}^{\lambda_i} (Cl^{\lambda_j} (U_{K_n})) \times \text{Int}^{\zeta_i} (Cl^{\zeta_j} (V_{K_n}^y)) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{y \in Y_{K_n}} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} (Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} (U_{K_n} \times V_{K_n}^y)) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{y \in Y_{K_n}} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} (Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} (O_{K_n}^y)) \end{aligned}$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla $\mathcal{O}$ 'nun istenilen şekilde sayılabilir bir

$$\{O_{K_n}^y : y \in Y_{K_n}, n \in \omega\}$$

alt ailesi elde edilir. Sonuç olarak $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Lindelöf'tür.

Sonuç 5.28: *Bitopolojik yakın Alster özelliğine sahip bitopolojik uzaylar bitopolojik çarpımsal yakın Lindelöf'tür.*

Bitopolojik yakın Menger özelliğinin çarpımsallığı ile ilgili Teorem 5.6 ve Sonuç 5.24 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.29: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster ise her $n \in \omega$ için $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.

Teorem 5.30: (i, j) -yakın Alster olan bir bitopolojik uzay ile (i, j) -yakın Menger olan bir bitopolojik uzayın çarpımı (i, j) -yakın Menger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Alster, (Y, ζ_1, ζ_2) ise (i, j) -yakın Menger olsun. $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n$ 'nin sonlu birleşim altında kapalı olduğu kabul edilebilir. Her λ_i -kompakt $K \subset X$ ve her $y \in Y$ için $K \times \{y\}$ kümesi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -kompakt bir alt kümesidir. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için bir $O_{n,K}^y \in \mathcal{O}_n$ vardır ve $K \times \{y\} \subset O_{n,K}^y$ kapsamı sağlanır. Diğer yandan λ_i -açık bir $U_{n,K}^y \subset X$ ve ζ_i -açık bir $V_{n,K}^y \subset Y$ bulunabilir öyle ki

$$K \times \{y\} \subset U_{n,K}^y \times V_{n,K}^y \subset O_{n,K}^y \quad (5.4)$$

kapsaması elde edilir. O halde X 'in λ_i -kompakt her K alt kümesi için

$$\mathcal{V}_n^K = \{V_{n,K}^y : y \in Y\}$$

ailesi Y 'nin ζ_i -açık örtüsüdür. Her $m \in \omega$ için N_m sonsuz olmak üzere, $\{N_m : m \in \omega\}$ ailesi ω 'nın bir parçalanışı olsun. O halde her $m \in \omega$ için Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{V}_n^K)_{n \in N_m}$ dizisi elde edilmiş olur. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger olduğundan her $m \in \omega$ ve her $n \in N_m$ için Y 'nin sonlu bir $F_{n,K}$ alt kümesi vardır ve

$$Y = \bigcup_{n \in N_m} \bigcup_{y \in F_{n,K}} \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} (V_{n,K}^y) \right) \quad (5.5)$$

eşitliği sağlanır. Her $m \in \omega$ için

$$U_m^K = \bigcap_{n \in N_m} \bigcap_{y \in F_{n,K}} U_{n,K}^y$$

olarak tanımlansın. O halde her bir U_m^K kümesi K λ_i -kompakt alt kümesini kapsayan bir λ_i - G_δ alt kümedir. Her $m \in \omega$ için

$$\mathcal{A}_m = \{U_m^K : K \subset X \text{ } \lambda_i\text{-kompakt}\}$$

olarak tanımlansın. O halde X 'in λ_i -Alster örtülerinin bir $(\mathcal{A}_m)_{m \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Teorem 5.2 ile birlikte X kümesi $\mathcal{S}_1 \left(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}, \mathcal{G}_{\lambda_i, \overline{\lambda_j}}^{\lambda_i} \right)$ seçme prensibini sağlayacağından her $m \in \omega$ için bir $U_m^{K_m} \in \mathcal{A}_m$ vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{m \in \omega} \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (U_m^{K_m}) \right) \quad (5.6)$$

sağlanır. Şimdi de her $m \in \omega$ ve $n \in N_m$ için $\mathcal{U}_n = \{U_{n,K_m}^y \times V_{n,K_m}^y : y \in F_{n,K_m}\}$ olarak tanımlansın. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi sonludur ve

$$X \times Y = \bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{n \in N_m} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} (U) \right)$$

eşitliği elde edilir. Bunu göstermek için $(x_0, y_0) \in X \times Y$ keyfi verilsin. Öncelikle (5.6) ile beraber bir $m \in \omega$ bulunabilir öyle ki $x_0 \in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (U_m^{K_m}) \right)$ dir. Diğer yandan (5.5) ile beraber bir $n \in N_m$ ve $y \in F_{n,K_m}$ için $y_0 \in \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} (V_{n,K_m}^y) \right)$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 (x_0, y_0) &\in \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (U_m^{K_m}) \right) \times \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} (V_{n,K_m}^y) \right) \\
 &\subset \text{Int}^{\lambda_i} \left(Cl^{\lambda_j} (U_{n,K_m}^y) \right) \times \text{Int}^{\zeta_i} \left(Cl^{\zeta_j} (V_{n,K_m}^y) \right) \\
 &\subset \text{Int}^{\lambda_i \times \zeta_i} \left(Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} (U_{n,K_m}^y \times V_{n,K_m}^y) \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan (5.4) ile beraber her $n \in \omega$ ve $U \in \mathcal{U}_n$ için $U \subset O_U$ olacak şekilde bir $O_U \in \mathcal{O}_n$ vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \{O_U : U \in \mathcal{U}_n\}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{O}'_n \subset \mathcal{O}_n$ ailesi sonludur ve sonuç olarak $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen şekildedir. $(X \times Y, \lambda_1 \times \zeta_1, \lambda_2 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -yakın Menger'dir.



6. BİTOPOLOJİK HEMEN HEMEN ROTHBERGER ve ZAYIF ROTHBERGER ÖZELLİKLERİ

Bitopolojik hemen hemen Rothberger özelliği Özçağ and Eysen (2016) tarafından tanımlanmıştır ve tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

Tanım 6.1: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n)$$

olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -hemen hemen Rothberger denir (Özçağ and Eysen 2016).

Koçınac and Özçağ (2021) bu özelliğin bazı sürekli dönüşümler altındaki davranışlarını incelemişlerdir. Eysen and Özçağ (2018) çalışmalarında Rothberger özelliğinin bitopolojik zayıf bir formu olan bitopolojik zayıf Rothberger örtü özelliğinden bahsetmişlerdir fakat bu özelliğin formal bir tanımını vermemişlerdir. Bu özelliğin ise tanımını aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 6.2: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X 'in λ_i -açık örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisinden, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_n \right)$$

olacak şekilde bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilebiliyorsa $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayına (i, j) -zayıf Rothberger denir.

Yukarıda verilen örtü özellikleri üzerine literatürde sistematik bir çalışma olmadığından dolayı bu bölümde bu seçme örtü özellikleri incelenmiştir.

Yukarıdaki tanımlardan hareketle Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5'te kullanılan argümanlar ile aşağıdaki teorem hemen elde edilir.

Teorem 6.3: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Bu durumda

1. (X, λ_i) Rothberger ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.
2. (X, λ_i) hemen hemen Rothberger ve $\lambda_j \subset \lambda_i$ ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.
3. (X, λ_i) zayıf Rothberger ve $\lambda_j \subset \lambda_i$ ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.
4. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ise (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

Aşağıda Teorem 6.3'te verilen 1. ifadenin tersinin her zaman doğru olmayacağına dair bir ters örnek verilmiştir.

Örnek 6.4: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi λ_1 alışılmış topoloji ve $\lambda_2 = \{O \subset \mathbb{R}: 0 \in O\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi ile verilsin. Eğer $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi $\mathbb{R}$ 'nin λ_1 -açık örtülerinin herhangi bir dizisi ise her $n \in \omega$ için $0 \in O_{n(0)}$ olacak şekilde bir $O_{n(0)} \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir. $O_{n(0)}$ alt kümesi her $n \in \omega$ için λ_2 -yoğun bir alt küme olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -hemen hemen Rothberger'dir. Fakat bilindiği üzere $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ topolojik uzayı Rothberger değildir.

Aşağıdaki teoremde Teorem 6.3'ün 1. ifadesinde verilen iki örtü özelliğinin hangi koşul altında denk olduğu gösterilmektedir.

Teorem 6.5: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler olsun. Eğer $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ise (X, λ_i) Rothberger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $x \in O_x^n$ olacak şekilde bir $O_x^n \in \mathcal{O}_n$ vardır. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler olduğundan her $n \in \omega$ için bir $U_x^n \in \lambda_i$ bulunabilir öyle ki

$$x \in U_x^n \subset Cl^{\lambda_j}(U_x^n) \subset O_x^n$$

sağlanır. O halde her $n \in \omega$ için

$$Cl^{\lambda_j}(\mathcal{U}_n) = \{Cl^{\lambda_j}(U_x^n) : U_x^n \in \mathcal{U}_n\}$$

ailesi $\mathcal{O}_n$ 'nin bir inceltiştir. Diğer yandan her $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'in λ_i -açık örtüsü ve $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan her $n \in \omega$ için bir $x_n \in X$ ve $U_{x_n}^n \in \mathcal{U}_n$ vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n)$$

eşitliği sağlanır. Her $n \in \omega$ için $Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n) \subset O_{x_n}^n$ olacak şekilde bir $O_{x_n}^n \in \mathcal{O}_n$ seçilirse $(O_{x_n}^n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen şekildedir. Sonuç olarak (X, λ_i) topolojik uzayı Rothberger'dir.

Teorem 6.6: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ise (i, j) -hemen hemen Menger'dir (Özçağ and Eysen 2016).

Aşağıda Teorem 6.3'te verilen 4. ifadenin tersinin daima doğru olmayacağına dair ters örnekler verilmiştir.

Örnek 6.7: $\mathbb{R}$ kümesi λ_1 alışılmış topoloji ve $\lambda_2 = \{O \subset \mathbb{R} : O = U \setminus C, U \in \lambda_1, C \subset \mathbb{R}, |C| \leq \omega\}$ topolojisi ile verilsin. $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1, 2)$ -hemen hemen Rothberger değildir (Özçağ and Eysen 2016).

Bununla birlikte $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -zayıf Rothberger'dir. Gerçekten, $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ ayrılabilir olduğundan Teorem 3.1.12 ile beraber bu uzay aynı zamanda zayıf Rothberger'dir. Diğer yandan her $U \in \lambda_1$ için $Cl^{\lambda_1}(U) = Cl^{\lambda_2}(U)$ olduğundan $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin $(1,2)$ -zayıf Rothberger olduğu elde edilir.

Örnek 6.8: $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı Örnek 4.1.11'deki gibi verilsin. Eysen and Özçağ (2018) çalışmalarında bu bitopolojik uzayın $(1,2)$ -hemen hemen Menger olmadığını göstermişlerdir.

Dolayısıyla Teorem 6.6 ile birlikte $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -hemen hemen Rothberger değildir. Fakat bu bitopolojik uzay $(1,2)$ -zayıf Rothberger'dir. Gerçekten, $(\mathbb{R}, \lambda_1)$ ayrılabilir olduğundan zayıf Rothberger bir uzaydır. Diğer yandan $\lambda_2 \subset \lambda_1$ olduğundan Teorem 6.3'teki 3. ifade ile birlikte $(\mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)$ -zayıf Rothberger'dir.

Aşağıdaki teorem (i,j) -hemen hemen Rothberger özelliği ile (i,j) -zayıf Rothberger özelliğinin hangi koşul altında denk olduğunu göstermektedir.

Teorem 6.9: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -zayıf Rothberger ve (X, λ_j) bir P -uzay olsun. Bu durumda $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -hemen hemen Rothberger'dir.

İspat: X 'in λ_i -açık örtülerinin keyfi bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i,j) -zayıf Rothberger olduğundan bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi bulunabilir öyle ki her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ dir ve

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_n \right)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $Cl^{\lambda_j}(O_n)$ kümesi X 'in λ_j -kapalı bir alt kümesidir. (X, λ_j) bir P -uzay olduğundan $\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n)$ kümesinin de X 'in λ_j -kapalı bir

alt kümesi olduğu görülür. Öte yandan $Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_n \right)$ kümesi X 'in $\bigcup_{n \in \omega} O_n$ kümesini içeren en dar λ_j -kapalı alt kümesi olduğundan

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_n \right) \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

Sonuç 6.10: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (X, λ_j) bir P -uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (X, λ_i) Rothberger'dir,
2. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir,
3. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

Aşağıdaki teorem (i, j) -hemen hemen Rothberger ve (i, j) -zayıf Rothberger seçme örtü özelliklerinin (i, j) -regüler açık kümeler ile bir karakterizasyonunu vermektedir. Teoremin ispatı (i, j) -hemen hemen Rothberger bitopolojik uzaylar için verilmiştir. İspatta kullanılmış olan benzer argümanlar ile ispat (i, j) -zayıf Rothberger bitopolojik uzaylar için de gösterilebilir.

Teorem 6.11: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir $((i, j)$ -zayıf Rothberger'dir) ancak ve ancak X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi için bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_n) \left(X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_n \right) \right)$$

olacak şekilde bulunabilir.

İspat: $\Rightarrow$ Her (i, j) -regüler açık küme λ_i -açık olduğundan ispat açıktır.

$\Leftarrow$ X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_n = \{Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O)) : O \in \mathcal{O}_n\}$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla X 'in (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Varsayımdan dolayı bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_n)$$

olacak biçimde vardır. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $U_n = Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_{U_n}))$ olacak şekilde bir $O_{U_n} \in \mathcal{O}_n$ seçilebilir. O halde

$$Cl^{\lambda_j}(U_n) = Cl^{\lambda_j}(Int^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(O_{U_n}))) \subset Cl^{\lambda_j}(Cl^{\lambda_j}(O_{U_n})) = Cl^{\lambda_j}(O_{U_n})$$

kapsaması sağlanır ve dolayısıyla

$$X \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(O_{U_n})$$

sağlanacağından $(O_{U_n})_{n \in \omega}$ dizisi istenilen şekildedir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

Aşağıda bitopolojik hemen hemen Rothberger ve bitopolojik zayıf Rothberger örtü özelliklerinin bazı topolojik özellikleri verilmiştir. Öncelikle bazı sürekli dönüşümler altındaki davranışları incelenmiştir.

Teorem 6.12: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü (i, j) -kuvvetli- θ -süreklili, örten bir dönüşüm ise (Y, ζ_i) Rothberger'dir.

İspat: Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi ve $x \in X$ keyfi verilsin. Her $n \in \omega$ için bir $O_x^n \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir öyle ki $f(x) \in O_x^n$ dir. f dönüşümü (i, j) -kuvvetli- θ -süreklili olduğundan x noktasını içeren bir $U_x^n \subset X$ alt kümesi λ_i -açık ve $f(Cl^{\lambda_j}(U_x^n)) \subset O_x^n$ olacak şekilde vardır. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_x^n: x \in X\}$ olmak üzere, X 'in λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan bir $(U_{x_n}^n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $U_{x_n} \in \mathcal{U}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n)$$

olacak şekilde bulunabilir. Buradan her $n \in \omega$ için $f(Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n)) \subset O_{x_n}^n$ olacak şekilde bir $O_{x_n}^n \in \mathcal{O}_n$ seçilirse

$$f(X) = Y = f\left(\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n)\right) = \bigcup_{n \in \omega} f(Cl^{\lambda_j}(U_{x_n}^n)) \subset \bigcup_{n \in \omega} O_{x_n}^n$$

sağlanır. Sonuç olarak (Y, ζ_i) Rothberger'dir.

Sonuç 6.13: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -regüler ve (i, j) -hemen hemen Rothberger olsun. Eğer $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü i -süreklili ve örten ise (Y, ζ_i) Rothberger'dir.

Teorem 6.14: $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü (i, j) -ön süreklili, (i, j) -kontra süreklili ve örten bir dönüşüm, $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ise (Y, ζ_i) Rothberger'dir.

İspat: Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. Öncelikle f dönüşümü (i, j) -kontra sürekli olduğundan her $n \in \omega$ ve her $O \in \mathcal{O}_n$ için $f^{-1}(O)$ kümesi X 'in λ_j -kapalı bir alt kümesidir. Diğer yandan f dönüşümü (i, j) -ön sürekli olduğundan her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{O}_n$ için $f^{-1}(O) \subset \text{Int}^{\lambda_i}(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O)))$ kapsaması elde edilir. O halde $f^{-1}(O) = \text{Int}^{\lambda_i}(f^{-1}(O))$ eşitliği sağlanır. Bu durumda her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_n\}$ olmak üzere, X 'in λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ dir ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_n)$$

eşitliği sağlanır. Eğer her U_n kümesi için $f^{-1}(O_n) = U_n$ olacak şekilde bir $O_n \in \mathcal{O}_n$ seçilirse

$$\begin{aligned} f(X) &= Y = f\left(\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_n)\right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} f(Cl^{\lambda_j}(U_n)) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} f(Cl^{\lambda_j}(f^{-1}(O_n))) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} f(f^{-1}(O_n)) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} O_n \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi istenilen şekildedir ve (Y, ζ_i) Rothberger'dir.

Teorem 6.15: $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü (i, j) -zayıf sürekli ve örten bir dönüşüm, (X, λ_i) Rothberger ise (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

İspat: Y 'nin ζ_i -açık örtülerinin herhangi bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi ve $x \in X$ keyfi verilsin. Her $n \in \omega$ için $f(x) \in O_x^n$ olacak şekilde bir $O_x^n \in \mathcal{O}_n$ bulunabilir. f dönüşümü (i, j) -zayıf sürekli olduğundan X 'in x noktasını içeren bir λ_i -açık alt kümesi U_x^n vardır öyle ki $f(U_x^n) \subset Cl^{\zeta_j}(O_x^n)$ kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_x^n : x \in X\}$ şeklinde tanımlansın. (X, λ_i) Rothberger ve her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsü olduğundan bir $(U_{x_n}^n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $U_{x_n}^n \in \mathcal{U}_n$ ve

$$X = \bigcup_{n \in \omega} U_{x_n}^n$$

olacak şekilde bulunabilir. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $f(U_{x_n}^n) \subset Cl^{\zeta_j}(O_{x_n}^n)$ olacak şekilde bir $O_{x_n}^n \in \mathcal{O}_n$ seçilsin. Böylece

$$\begin{aligned} Y = f(X) &= f\left(\bigcup_{n \in \omega} U_{x_n}^n\right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} f(U_{x_n}^n) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\zeta_j}(O_{x_n}^n) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

Teorem 6.16: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ dönüşümü p -hemen hemen sürekli ve örten bir dönüşüm ise (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

İspat: $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ dizisi Y 'nin (i, j) -regüler açık alt kümelerinden oluşan örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. f dönüşümü (i, j) -hemen hemen sürekli olduğundan her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{O}_n$ için $f^{-1}(O)$ kümesi X 'in λ_i -açık bir alt kümesidir. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_n\}$ olarak tanımlansın. Böylece $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi X 'in λ_i -açık örtülerinin bir dizisidir. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger olduğundan her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ ve

$$X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} U_n \right) \quad (6.1)$$

olacak şekilde bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır. Her $n \in \omega$ için bir $O_{U_n} \in \mathcal{O}_n$ seçilsin öyle ki $f^{-1}(O_{U_n}) = U_n$ olsun. Böylece Y kümesi $(O_{U_n})_{n \in \omega}$ dizisinin elemanlarının birleşiminin ζ_j -kapanışına eşit olur. Gerçekten, $y = f(x) \in Y$ keyfi ve G kümesi de y 'nin herhangi bir ζ_j -açık komşuluğu ise f dönüşümü (j, i) -hemen hemen sürekli ve $Int^{\zeta_j}(Cl^{\zeta_i}(G))$ kümesi Y 'nin (j, i) -regüler açık alt kümesi olduğundan $f^{-1}(Int^{\zeta_j}(Cl^{\zeta_i}(G))) \subset X$ alt kümesi x noktasının bir λ_j -açık komşuluğudur. Diğer yandan (6.1)'den dolayı bir $n(x) \in \omega$ vardır ve

$$f^{-1}(Int^{\zeta_j}(Cl^{\zeta_i}(G))) \cap U_{n(x)} \neq \emptyset$$

sağlanır. Bu durumda

$$Int^{\zeta_j}(Cl^{\zeta_i}(G)) \cap O_{U_{n(x)}} \neq \emptyset$$

olacağından

$$O_{U_{n(x)}} \cap Cl^{\zeta_i}(G) \neq \emptyset$$

elde edilir. $O_{U_{n(x)}}$ kümesi ζ_i -açık bir alt küme olduğundan $G \cap O_{U_{n(x)}} \neq \emptyset$ dir. Sonuç olarak $y \in Cl^{\zeta_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} O_{U_n} \right)$ dir. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

Tanım 6.17: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ ve (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzaylar ve $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü d -kapalı, d -indirgenemez bire-sonlu bir dönüşüm ise f 'ye *hiper-mükemmel* denir.

Teorem 6.18: $f: (X, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (Y, \zeta_1, \zeta_2)$ hiper-mükemmel ve (j, i) -ön açık bir dönüşüm olsun. Eğer (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

İspat: X 'in λ_i -açık örtülerinin keyfi bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi verilsin. $\{N_n: n \in \omega\}$ ailesi de her $n \in \omega$ için N_n sonsuz olmak üzere, ω 'nın bir parçalanışı olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi $k \in \omega$, $n_1 < n_2 < \dots < n_k \in N_n$, $O_{n_i} \in \mathcal{O}_{n_i}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$O_{n_1} \cup O_{n_2} \cup \dots \cup O_{n_k}$$

şeklindeki elemanların kümesi olarak tanımlansın. Açıkça her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi X 'in bir λ_i - ω -örtüsüdür. O halde X 'in λ_i - ω -örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Bu durumda $(f_\phi(\mathcal{U}_n))_{n \in \omega}$ dizisi, her $n \in \omega$ için

$$f_\phi(\mathcal{U}_n) = \{f_\phi(U): U \in \mathcal{U}_n\} \text{ ve } f_\phi(U) = \{y \in Y: f^{-1}(y) \subset U\}$$

olmak üzere, f dönüşümü i -kapalı, i -indirgenemez ve bire-sonlu bir dönüşüm olduğundan Lemma 3.1.33 ile birlikte Y 'nin ζ_i - ω -örtülerinin bir dizisidir. (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan bir $(U_n)_{n \in \omega}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ dir ve

$$Y = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\zeta_j}(f_\phi(U_n))$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan f dönüşümü (j, i) -ön açık olduğundan Lemma 3.1.34 ve Önerme 3.2.15 ile birlikte

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\zeta_j}(f_\phi(U_n))\right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} f^{-1}\left(Cl^{\zeta_j}(f_\phi(U_n))\right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}\left(f^{-1}(f_\phi(U_n))\right) \\ &= \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(U_n) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

Teorem 6.19: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayı her $n \in \omega$ için (i, j) -hemen hemen Rothberger ise X 'in λ_i - ω -örtülerinin her $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi mevcuttur:

1. Her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ 'dir,
2. X 'in sonlu her F alt kümesi için $F \subset Cl^{\lambda_j}(O_n)$ olacak şekilde bir $n \in \omega$ ve $O_n \in \mathcal{O}_n$ vardır.

İspat: $(X^n, (\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger ve $(O_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i - ω -örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $m \in \omega$ için N_m kümesi sonsuz ve $\{N_m : m \in \omega\}$ ailesi ω 'nın bir parçalanışı olsun. O halde $\mathcal{O}_k^m = \{(O)^m : O \in \mathcal{O}_k\}$ olmak üzere, X^m 'nin $(\lambda_i)^m$ -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}_k^m)_{k \in N_m}$ dizisi elde edilmiş olur. $(X^m, (\lambda_i)^m, (\lambda_j)^m)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan bir $(U_k)_{k \in N_m}$ dizisi vardır öyle ki her $k \in N_m$ için $U_k \in \mathcal{O}_k^m$ dir ve

$$X^m = \bigcup_{k \in N_m} Cl^{(\lambda_j)^m}(U_k) \quad (6.2)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan her $k \in N_m$ için $U_k = (O_{U_k})^m$ olacak şekilde bir $O_{U_k} \in \mathcal{O}_k$ bulunabilir. Bu durumda $(O_{U_k})_{k \in N_m}$ dizisi istenilen dizidir. Bunu göstermek için X 'in herhangi bir $F = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ sonlu alt kümesi verilsin. (6.2)'den dolayı bir $k \in N_s$ ve $U_k \in \mathcal{O}_k^s$ bulunabilir öyle ki $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in Cl^{(\lambda_j)^s}(U_k)$ dir. Bir $O_{U_k} \in \mathcal{O}_k$ için $U_k = (O_{U_k})^s$ olacağından

$$Cl^{(\lambda_j)^s}(U_k) = Cl^{(\lambda_j)^s}((O_{U_k})^s) = \left(Cl^{\lambda_j}(O_{U_k}) \right)^s$$

eşitliği sağlanır ve dolayısıyla $F \subset Cl^{\lambda_j}(O_{U_k})$ kapsaması elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Teorem 6.20: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger ve (Y, ζ_1, ζ_2) bitopolojik uzayı d -ayrılabilir ise $(X \times Y, \lambda_1 \times \lambda_2, \zeta_1 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

İspat: $D \subset Y$ kümesi Y 'nin sayılabilir ve ζ_i -yoğun bir alt kümesi olsun. O halde $X \times D$ kümesi de $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -yoğun bir alt kümesidir. $D = \{y_n : n \in \omega\}$ olarak tanımlanırsa

$$X \times D = \bigcup_{n \in \omega} X \times \{y_n\}$$

şeklinde yazılabilir. $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi $X \times Y$ 'nin $\lambda_i \times \zeta_i$ -açık örtülerinin herhangi bir dizisi ve $\{N_n : n \in \omega\}$ ailesi de her $n \in \omega$ için N_n sonsuz olmak üzere, ω 'nın bir parçalanışı olsun. $X \times \{y_n\}$ 'nin (i, j) -zayıf Rothberger olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla bir $(O_k)_{k \in N_n}$ dizisi her $k \in N_n$ için $O_k \in \mathcal{O}_k$ ve

$$X \times \{y_n\} \subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(\bigcup_{k \in N_n} O_k \right)$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda bir $(O_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur öyle ki her $n \in \omega$ için $O_n \in \mathcal{O}_n$ ve

$$X \times D \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(\bigcup_{k \in N_n} O_k \right) \subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{k \in N_n} O_k \right)$$

dir. Bundan dolayı

$$X \times Y = Cl^{\lambda_j \times \zeta_j}(X \times D) \subset Cl^{\lambda_j \times \zeta_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{k \in N_n} O_k \right)$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X \times Y, \lambda_1 \times \lambda_2, \zeta_1 \times \zeta_2)$ çarpım bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

Teorem 6.21: (i, j) -hemen hemen Rothberger olan bir bitopolojik uzayın kapalı/açık her alt kümesi de (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

İspat: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen Rothberger, A kümesi X 'in bir kapalı/açık alt kümesi, $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise A 'nın λ_i^A -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. O halde her $n \in \omega$ ve $O \in \mathcal{O}_n$ için $O = A \cap U_O$ olacak şekilde X 'in λ_i -açık bir U_O alt kümesi vardır. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n = \{U_O : O \in \mathcal{O}_n\}$ olarak tanımlanırsa A 'nın λ_i -açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. Bununla birlikte $X \setminus A$ kümesi λ_i -açık olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = \mathcal{U}_n \cup \{X \setminus A\}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{O}'_n$ ailesi X 'in bir λ_i -açık örtüsüdür. $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan her $n \in \omega$ için bir $V_n \in \mathcal{O}'_n$ vardır öyle ki

$$X = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(V_n) \quad (6.3)$$

eşitliği sağlanır. Eğer $V_n = X \setminus A$ ise V_n kümesi $\mathcal{O}'_n \setminus \{X \setminus A\}$ 'nin başka bir elemanı ile değiştirilsin. (6.3) eşitliğinin her iki tarafının A ile arakesiti alınır

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(V_n)$$

kapsaması sağlanır. Her $n \in \omega$ için $O_{V_n} = V_n \cap A$ olsun. A kümesi λ_j -açık olduğundan

$$Cl^{\lambda_j^A}(O_{V_n}) = Cl^{\lambda_j^A}(V_n \cap A) = Cl^{\lambda_j}(V_n) \cap A \subset A$$

elde edilir. Sonuç olarak $(O_{V_n})_{n \in \omega}$ dizisi istenilen dizidir. $(A, \lambda_1^A, \lambda_2^A)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger'dir.

Teorem 6.22: (i, j) -zayıf Rothberger bitopolojik uzayların kapalı/açık her alt kümesi de (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

İspat: Teorem 6.21'in ispatına benzer olarak hemen elde edilir.

Teorem 6.23: $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bir bitopolojik uzay olsun. Eğer X kümesi λ_j -yoğun olan bir (i, j) -hemen hemen Rothberger alt kümeye sahip ise $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

İspat: A kümesi X 'in λ_j -yoğun ve (i, j) -hemen hemen Rothberger olan bir alt kümesi, $(\mathcal{O}_n)_{n \in \omega}$ ise X 'in λ_i -açık örtülerinin herhangi bir dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için

$$\mathcal{O}'_n = \{A \cap O : O \in \mathcal{O}_n\}$$

olarak tanımlanırsa A 'nın λ_i^A -açık örtülerinin bir $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi elde edilmiş olur. $(A, \lambda_1^A, \lambda_2^A)$ bitopolojik uzayı (i, j) -hemen hemen Rothberger olduğundan bir $(\mathcal{O}'_n)_{n \in \omega}$ dizisi her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n \in \mathcal{O}'_n$ ve

$$A = \bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j^A}(\mathcal{O}'_n)$$

olacak şekilde vardır. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}'_n = A \cap \mathcal{O}_n$ olacak şekilde bir $\mathcal{O}_n \in \mathcal{O}_n$ seçilirse A kümesi λ_j -yoğun olduğundan

$$\begin{aligned} Cl^{\lambda_j}(A) &= X = Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j^A}(A \cap \mathcal{O}_n) \right) \\ &\subset Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} A \cap Cl^{\lambda_j}(\mathcal{O}_n) \right) \\ &\subset Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} Cl^{\lambda_j}(\mathcal{O}_n) \right) \\ &= Cl^{\lambda_j} \left(\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{O}_n \right) \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. Sonuç olarak $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı (i, j) -zayıf Rothberger'dir.

7. SONUÇ

Bu bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Menger örtü özelliğinin bazı zayıf formları bitopolojik uzaylarda tanımlanmıştır. Öncelikle, (i, j) -yakın Menger bitopolojik uzay tanımı verilmiştir. Bu özelliğin seçme prensipleri ile bir karakterizasyonu Teorem 4.1.2 ile yapılmıştır. Özelliğin bazı topolojik özellikleri incelenirken bu karakterizasyondan yer yer yararlanılmıştır. Verilen bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı için (X, λ_i) Menger iken $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ 'nin λ_j topolojisinden bağımsız olarak (i, j) -yakın Menger olduğu sonucuna Teorem 4.1.4 ile varılmıştır. Fakat bu ifadenin tersinin her zaman doğru olamayacağı Örnek 4.1.6 ve Örnek 4.1.7 sunularak gösterilmiş ve bu iki formun tek yönlü ilişkisinin olduğu gösterilmiştir. Ancak Teorem 4.1.8 ile (i, j) -regüler uzaylar için bu iki formun denk olduğu sonucuna varılmıştır. Böylece klasik topolojide tanımlı Menger uzaylar ile (i, j) -yakın Menger bitopolojik uzaylar arasındaki ilişki kurulmuştur. Küme üzerindeki her iki topolojinin küme operatörleri kullanılarak tanımlanan bu özelliğin literatürde var olan ve yine buna benzer yöntemle tanımlanan (i, j) -hemen hemen Menger ve (i, j) -zayıf Menger bitopolojik uzaylarla bir karşılaştırılması yapılmıştır. Örnek 4.1.10 verilerek bu yeni özelliğin ilgili formlardan farklı ve daha kuvvetli bir form olduğu elde edilmiştir. Teorem 4.1.12 verilerek ilgili üç formun denk olma koşulu elde edilmiştir. Sonrasında (i, j) -yakın Menger özelliğinin bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Bu özelliğin alt uzaylar, bitopolojik uzaylarda tanımlı bazı sürekli dönüşümler ve çarpımlar altındaki davranışları ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Yıldız operatörü kullanılarak (i, j) -yakın Menger özelliğinin (i, j) -yakın kuvvetli yıldız Menger, (i, j) -yakın yıldız K Menger ve (i, j) -yakın yıldız Menger gibi bazı yıldız formları tanımlanmış ve bu formların Örnek 4.2.7 ile beraber (i, j) -yakın Menger özelliğinden farklı ve zayıf formlar olduğu elde edilmiştir. (i, j) -yakın Menger özelliği ile beraber bu dört formun denk olma koşulları elde edilmiş ve Sonuç 4.2.12'ye varılmıştır. Bunun yanı sıra (i, j) -yakın Lindelöf özelliğinin de bazı yıldız formları tanımlanmıştır ve (i, j) -yakın Menger özelliğinin yıldız formları ile ilişkileri incelenmiştir. Lindelöf örtü özelliğinin bitopolojik uzaylarda yıldız operatörü ile ilk kez tanımlanan bu formlarının (i, j) -yakın Menger özelliğinin yıldız formlarından daha zayıf formlar olduğu sonucuna varılmıştır. Sonrasında (i, j) -yakın yıldız Menger özelliğinin bazı korunum özelliklerinden bahsedilmiştir.

Daha sonra küme-Menger örtü özelliğinin literatürde bitopolojik uzaylarda ilk kez tanımlanan (i, j) -hemen hemen küme Menger örtü özelliği tanıtılmış ve çalışılmıştır. Bu özelliğin de klasik topolojide var olan Menger uzaylar ile ilişkisi incelenmiştir. Teorem 4.3.1.2 ve Örnek 4.3.1.6 verilerek Menger uzaylar ile (i, j) -hemen hemen küme Menger bitopolojik uzaylar arasındaki tek yönlü ilişkiden bahsedilmiş, Teorem 4.3.1.7 ile bu iki formun denkliği elde edilmiştir. Ayrıca Menger özelliğinin bitopolojik uzaylardaki bu zayıf formunun (i, j) -hemen hemen Lindelöf örtü özelliğinden daha kuvvetli bir form olduğu sonucuna Teorem 4.3.1.8 ve Örnek 4.3.1.9 ile varılmıştır. Sonuç 4.3.1.11 verilerek ilgili beş örtü özelliğinin denk olma koşulları elde edilmiştir. Sonrasında (i, j) -hemen hemen küme Menger özelliğine sahip bitopolojik uzayların bazı topolojik özelliklerinden bahsedilmiştir. Klasik topolojide var olan hemen hemen γ -örtü ve hemen hemen γ -küme kavramlarından yararlanılarak (i, j) -hemen hemen P_γ -küme kavramı tanıtılmış ve ilgili özellikten kısaca bahsedilmiştir. Bu özelliğe sahip bitopolojik uzayların da bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde Alster özelliğinin bitopolojik bir formu olan (i, j) -yakın Alster bitopolojik uzay tanımı verilmiştir. Teorem 5.2 sunularak bu özelliğin seçme prensipleri ile bir karakterizasyonu verilmiştir. Bitopolojik uzaylarda Alster özelliğinin üçüncü bir formu olan bu formun (i, j) -yakın Menger ve (i, j) -yakın Lindelöf örtü özellikleri ile ilişkileri Teorem 5.6 ve Teorem 5.8 verilerek incelenmiştir. Örnek 5.7 ve Örnek 5.9 verilerek (i, j) -yakın Alster özelliğinin bitopolojik yakın Menger ve bitopolojik yakın Lindelöf özelliklerinden daha kuvvetli bir form olduğu sonucuna varılmıştır. Literatürde var olan (i, j) -hemen hemen Alster ve (i, j) -zayıf Alster özelliklerinin bu formdan daha zayıf formlar olduğu sonucuna Örnek 5.12 ve Örnek 5.13 verilerek varılmıştır. Bahsedilen bu özelliklerin denk olma koşulları incelenmiş; Alster, Menger ve Lindelöf topolojik uzaylar da göz önünde bulundurularak Sonuç 5.19'da verilen on iki seçme özelliğinin denk olma koşulu elde edilmiştir. Böylece daha geniş bir sonuca varılmıştır. Sonrasında (i, j) -yakın Alster özelliğinin bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Teorem 5.27 ve Teorem 5.30 verilerek (i, j) -yakın Alster olan bitopolojik uzaylar ile (i, j) -yakın Lindelöf $((i, j)$ -yakın Menger) bitopolojik uzayların çarpımlarının (i, j) -yakın Lindelöf $((i, j)$ -yakın Menger) olduğu gösterilmiş ve (i, j) -yakın Alster uzayların hem bitopolojik çarpımsal yakın Lindelöf hem de bitopolojik çarpımsal yakın Menger olduğu sonucuna varılmıştır.

Altıncı bölümde Rothberger örtü özelliğinin bitopolojik zayıf formları olan (i, j) -hemen hemen Rothberger ve (i, j) -zayıf Rothberger özellikleri incelenmiştir. Klasik topolojide var olan Rothberger özelliği ile verilen bir $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ bitopolojik uzayı için bu özelliklerin ilişkileri Teorem 6.3'te elde edilmiştir. Fakat verilen bu iki formun i -Rothberger olma özelliğini gerektirmediği sonucuna Örnek 6.4 verilerek ulaşılmıştır. Ayrıca (i, j) -zayıf Rothberger olan fakat (i, j) -hemen hemen Rothberger olmayan bitopolojik uzay örnekleri Örnek 6.7 ve Örnek 6.8'de verilerek bu iki formun da birbirinden farklı formlar olduğu sonucuna varılmıştır. Sonuç 6.10 ile beraber bu üç formun denk olma koşulu verilmiştir. (i, j) -hemen hemen Rothberger ve (i, j) -zayıf Rothberger bitopolojik uzayların bazı topolojik özellikleri incelenerek bu özellikler sistematik bir şekilde çalışılmış ve genel bir çerçeve elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Açıkgöz, N. C. and Elmalı, C. S. 2022. On almost set-Menger spaces in bitopological context. *AIMS Mathematics*, 7(12), 20579-20593.
- Açıkgöz, N. C. and Elmalı, C. S. 2024. Nearly Menger covering property via bitopological spaces. *AIMS Mathematics*, 9(12), 34042-34066.
- Açıkgöz, N. C. and Elmalı, C. S. 2025. A note on a novel type of Alster covering property in bitopological setting. *Turkish Journal of Mathematics*, 49(2), 185-200.
- Alster, K. 1988. On the class of all spaces of weight not greater than ω_1 whose Cartesian product with every Lindelöf space is Lindelöf. *Fundamenta Mathematicae*, 129(2), 133-140.
- Arhangel'skii, A. V. 1979. A theorem on cardinality. *Russian Mathematical Surveys*, 34(4), 153-154.
- Arhangel'skii, A. V. 1995. A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 36(2), 303-325.
- Babinkostova, L. and Scheepers, M. 2003. Combinatorics of open covers (IX): Basis properties. *Note di Matematica*, 22(2), 167-178.
- Babinkostova, L., Kočinac, Lj. D. R. and Scheepers, M. 2004. Combinatorics of open covers (VIII). *Topology and its Applications*, 140(1), 15-32.
- Babinkostova, L., Kočinac, Lj. D. R. and Scheepers, M. 2007. Combinatorics of open covers (XI): Menger- and Rothberger-bounded groups. *Topology and its Applications*, 154(7), 1269-1280.
- Babinkostova, L., Pansera, B. A. and Scheepers, M. 2012. Weak covering properties and infinite games. *Topology and its Applications*, 159(17), 3644-3657.
- Babinkostova, L., Pansera, B. A. and Scheepers, M. 2013. Weak covering properties and selection principles. *Topology and its Applications*, 160(18), 2251-2271.
- Balasubramanian, G. 1982. On some generalizations of compact spaces. *Glasnik Matematički*, 17(37), 367-380.
- Banerjee, G. K. 1987. On pairwise almost strongly θ -continuous mappings. *Bulletin of The Calcutta Mathematical Society*, 79, 314-320.
- Bonanzinga, M., Cammaroto, F. and Kočinac, Lj. D. R. 2004. Star-Hurewicz and related properties. *Applied General Topology*, 5(1), 79-89.
- Bonanzinga, M., Cammaroto, F., Pansera, B. A. and Tsaban, B. 2014. Diagonalizations of dense families. *Topology and its Applications*, 165, 12-25.

- Borel, E. 1919. Sur la classification des ensembles de mesure nulle. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 47, 97-125.
- Bose, S. and Sinha, D. 1981. Almost open, almost closed, θ -continuous, almost quasi compact mappings in bitopological spaces. *Bulletin of The Calcutta Mathematical Society*, 73(4), 345-354.
- Cammaroto, F. and Santoro, G. 1996. Some counterexamples and properties on generalizations of Lindelöf spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 19(4), 737-746.
- Casas-de la Rosa, J., Martínez-Ruiz, I. and Ramírez-Páramo, A. 2020. Star versions of the Rothberger property on hyperspaces. *Topology and its Applications*, 283, 107396.
- Chauhan, H. V. S. and Singh, B. 2021. On Almost Hurewicz Property in Bitopological Spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70(1), 74-81.
- Daniels, P. 1988. Pixley-Roy spaces over subsets of the reals. *Topology and its Applications*, 29(1), 93-106.
- Datta, M. C. 1972. Projective bitopological spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 13(3), 327-334.
- Di Maio, G. and Kočinac, Lj. D. R. 2015. A note on quasi-Menger and similar spaces. *Topology and its Applications*, 179, 148-155.
- Dvalishvili, B. P. 2005. Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications. *North-Holland Mathematics Studies*, 415, Amsterdam.
- Engelking, R. 1989. *General Topology*, Revised and completed edition. Heldermann Verlag, 529, Germany.
- Eysen, A. E. and Özçağ, S. 2018. Weaker forms of the Menger property in bitopological spaces. *Quaestiones Mathematicae*, 41(7), 877-888.
- Eysen, A. E. and Özçağ, S. 2019. Investigations on Weak Versions of the Alster Property in Bitopological Spaces and Selection Principles. *Filomat*, 33(14), 4561-4571.
- Gerlits, J. and Nagy, Zs. 1982. Some properties of $C(X)$, I. *Topology and its Applications*, 14(2), 151-161.
- Gillman, L. and Henriksen, M. 1954. Concerning Rings of Continuous Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77(2), 340-362.
- Hurewicz, W. 1926. Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift*, 24(1), 401-421.
- Hurewicz, W. 1927. Über Folgen stetiger Funktionen. *Fundamenta Mathematicae*, 9(1), 193-210.

- Jech, T. 2003. Set Theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer, 769, Berlin.
- Just, W., Miller, A. W., Scheepers, M. and Szeptycki, P. J. 1996. The combinatorics of open covers II. Topology and its Applications, 73(3), 241-266.
- Kelly, J. C. 1963. Bitopological spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, 13(3), 71-89.
- Khan, M. D. and Sabah, A. 2020. Selection principles and covering properties in bitopological spaces. Applied General Topology, 21(1), 159-169.
- Khedr, F. H. and Alshibani, A. M. 1991. On pairwise super continuous mappings in bitopological spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 14(4), 715-722.
- Kılıçman, A. and Salleh, Z. 2007. Mappings and pairwise continuity on pairwise Lindelöf bitopological spaces. Albanian Journal of Mathematics, 1(2), 115-120.
- Kılıçman, A. and Salleh, Z. 2008. Pairwise weakly regular-Lindelöf spaces. Abstract and Applied Analysis, 2008, 184243.
- Kılıçman, A. and Salleh, Z. 2013. On pairwise weakly Lindelöf bitopological spaces. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 39(3), 469-485.
- Kocev, D. 2009. Almost Menger and related spaces. Matematički Vesnik, 61(2), 173-180.
- Kocev, D. 2015. Menger-Type Covering Properties of Topological Spaces. Filomat, 29(1), 99-106.
- Kočinac, Lj. D. R. 1999a. Star-Menger and related spaces. Publicationes Mathematicae Debrecen, 55(3-4), 421-431.
- Kočinac, Lj. D. R. 1999b. Star-Menger and related spaces, II. Filomat, 13, 129-140.
- Kočinac, Lj. D. R. 2001. The Pixley-Roy topology and selection principles. Questions and Answers in General Topology, 19(2), 219-225.
- Kočinac, Lj. D. R. and Scheepers, M. 2003. Combinatorics of open covers (VII): Groupability. Fundamenta Mathematicae, 179(2), 131-155.
- Kočinac, Lj. D. R. 2004. Selected results on selection principles, The Third Seminar on Geometry and Topology, 15-17 July, Full Text Paper, 71-104, Tabriz, Iran.
- Kočinac, Lj. D. R. 2006. Some covering properties in topological and uniform spaces. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 252(1), 122-137.
- Kočinac, Lj. D. R. and Özçağ, S. 2011. Versions of separability in bitopological spaces. Topology and its Applications, 158(12), 1471-1477.

- Kočinac, Lj. D. R. and Özçağ, S. 2012. Bitopological spaces and selection principles, International Conference on Topology and its Applications (ICTA 2011), 4-10 July, Full Text Paper, 243-255, Islamabad, Pakistan.
- Kočinac, Lj. D. R., Sabah, A., Khan, M. D. and Seba, D. 2017. Semi-Hurewicz spaces. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(1), 53-66.
- Kočinac, Lj. D. R. 2019. Generalized Open Sets and Selection Properties. Filomat, 33(5), 1485-1493.
- Kočinac, Lj. D. R. and Konca, Ş. 2020. Set-Menger and related properties. Topology and its Applications, 275, 106996.
- Kočinac, Lj. D. R. 2020. Variations of classical selection principles: An overview. Quaestiones Mathematicae, 43(8), 1121-1153.
- Kočinac, Lj. D. R. and Özçağ, S. 2021. More on Selective Covering Properties in Bitopological Spaces. Journal of Mathematics, 2021, 5558456.
- Kule, M. 2022. β -Menger and β -Hurewicz spaces. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 51(1), 1-7.
- Kumar, G. and Tyagi, B. K. 2022. Remarks on Semi-Menger and Star Semi-Menger Spaces. Tatra Mountains Mathematical Publications, 81(1), 57-68.
- Kumar, G. and Tyagi, B. K. 2023. On variants of θ -Menger spaces. Filomat, 37(15), 5075-5085.
- Lelek, A. 1969. Some cover properties of spaces. Fundamenta Mathematicae, 64(2), 209-218.
- Levine, N. 1964. Simple Extensions of Topologies. The American Mathematical Monthly, 71(1), 22-25.
- Maheshwari, S. N. and Prasad, R. 1977. Semi-open sets and semi-continuous function in bitopological spaces. Mathematical Notes, 26, 29-37.
- Menger, K. 1924. Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre. Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie, Wien), 133, 421-444.
- Miller, A. W. 1984. Special Subsets of the Real Line, In: Handbook of Set-Theoretic Topology. Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds), North-Holland, 201-233, Amsterdam.
- Miller, A. W. and Fremlin, D. H. 1988. On some properties of Hurewicz, Menger, and Rothberger. Fundamenta Mathematicae, 129(1), 17-33.
- Özçağ, S. and Eysen, A. E. 2016. Almost Menger Property in Bitopological Spaces. Ukrainian Mathematical Journal, 68(6), 950-958.

- Pansera, B. A. and Pavlović, V. 2006. Open covers and function spaces. *Matematički Vesnik*, 58(1-2), 57-70.
- Pansera, B. A. 2012. Weaker forms of the Menger property. *Quaestiones Mathematicae*, 35(2), 161-169.
- Parvez, A. and Khan, M. D. 2019. On Nearly Menger and Nearly Star-Menger Spaces. *Filomat*, 33(19), 6219-6227.
- Pavlović, V. 2009. A selective bitopological version of the Reznichenko property in function spaces. *Topology and its Applications*, 156(9), 1636-1645.
- Raghavan, T. G. and Reilly, I. L. 1977. Metrizable of Quasi-Metric Spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 15(1), 169-172.
- Rothberger, F. 1938. Eine Verschärfung der Eigenschaft C. *Fundamenta Mathematicae*, 30(1), 50-55.
- Sabah, A., Khan, M. D. and Kočinac, Lj. D. R. 2016. Covering properties defined by semi-open sets. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(6), 4388-4398.
- Sabah, A. and Khan, M. D. 2017. Semi-Rothberger and related spaces. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 43(6), 1969-1987.
- Saegrove, M. J. 1971. On bitopological spaces. Doctoral Dissertation, Iowa State University of Science and Technology, Mathematics, 51, Ames, Iowa.
- Sakai, M. 2013. The weak Hurewicz property of Pixley-Roy hyperspaces. *Topology and its Applications*, 160(18), 2531-2537.
- Salleh, Z. and Kılıçman, A. 2013. On pairwise nearly Lindelöf bitopological spaces. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 77(2), 147-171.
- Salleh, Z. and Kılıçman, A. 2014. Some results on pairwise almost Lindelöf spaces. *JP Journal of Geometry and Topology*, 15(2), 81-98.
- Salleh, Z., Nurillaev, M. and Taib, C. M. I. C. 2023. Product Properties for Generalized Pairwise Lindelöf Spaces. *Mathematics and Statistics*, 11(3), 606-614.
- Scheepers, M. 1996. Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. *Topology and its Applications*, 69(1), 31-62.
- Scheepers, M. 1997. Combinatorics of open covers (III): games, $C_p(X)$. *Fundamenta Mathematicae*, 152(3), 231-254.
- Scheepers, M. 1999. Lusin Sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(1), 251-257.
- Scheepers, M. 2001. Selection principles in topology: New directions. *Filomat*, 15(1), 111-126.

- Scheepers, M. 2003. Selection principles and covering properties in Topology. *Note di Matematica*, 22(2), 3-41.
- Sen, R. 2021. On Some Weaker Forms of Hurewicz Property in Bitopological Spaces. "Vasile Alecsandri" University of Bacău Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 31(1), 119-130.
- Sierpinski, W. 1928. Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle. *Fundamenta Mathematicae*, 11(1), 302-303.
- Singal, M. K. and Mathur, A. 1969. On nearly compact spaces. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 4(2), 702-710.
- Singal, M. K. and Singal, A. R. 1970. Some more separation axioms in bitopological spaces. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 84, 207-230.
- Singal, A. R. and Arya, S. P. 1971. On pairwise almost regular spaces. *Glasnik Matematički*, 6(2), 335-343.
- Singh, S. 2020. Remarks on set-Menger and related properties. *Topology and its Applications*, 280, 107278.
- Song, Y. K. and Li, R. 2013. On almost Hurewicz Spaces. *Questions and Answers in General Topology*, 31(2), 131-136.
- Song, Y. K. and Li, R. 2015. On Weakly Hurewicz Spaces. *Filomat*, 29(4), 667-671.
- Song, Y. K. 2015a. Some Remarks on almost Menger spaces and weakly Menger Spaces. *Publications de l'Institut Mathématique*, 98(112), 193-198.
- Song, Y. K. 2015b. Remarks on almost Rothberger spaces and weakly Rothberger spaces. *Quaestiones Mathematicae*, 38(3), 317-325.
- Steen, L. A. and Seebach, J. A. 1995. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, 272, New York.
- Tsaban, B. 2006. Some New Directions in Infinite-combinatorial Topology, In: *Trends in Mathematics*. Bagaria, J. and Todorčević, S. (eds), Birkhäuser Verlag Basel, 225-255, Switzerland.
- Tyagi, B. K., Singh, S. and Bhardwaj, M. 2021. Covering properties defined by preopen sets. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(3), 2150035.
- Willard, S. 1970. *General Topology*. Addison-Wesley, 369, United States of America.
- Willard, S. and Dissanayake, U. N. B. 1984. The Almost Lindelöf Degree. *Canadian Mathematical Bulletin*, 27(4), 452-455.