



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

SEDENİYONİK MATRİSLER

(Yüksek Lisans Tezi)

İsmail Gökhan GÜRSOY

Danışman

Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

RİZE

2023

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ danışmanlığında, İsmail Gökhan GÜRSOY tarafından hazırlanan *Sedeniyonik Matrisler* adlı bu tez çalışması, 16/01/2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliğiyle / oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ	
Üye	: Dr. Öğretim Üyesi Mehmet Akif İNCE	
Üye	: Dr. Öğretim Üyesi Süleyman ŞENYURT	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Sedeniyonik Matrisler” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet ederek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durum ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

16/01/2023

İsmail Gökhan GÜRSOY

ÖN SÖZ

“Sedeniyonik Matrisler” adlı tez çalışmamın hazırlanmasında bilgi, tecrübe ve katkılarından dolayı çok değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ’a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma, her zaman emeklerini üzerimde hissettiğim anneme, babama ve kardeşime teşekkür ederim. Son olarak beni asla yalnız bırakmayan, her koşul ve şartta yanımda olan eşim Zeynep GÜRSOY’a teşekkür ederim.

İsmail Gökhan GÜRSOY

2023 / RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VI
ABSTRACT.....	VII
KISALTMALAR	VIII
TABLolar LİSTESİ	X
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	XI
GİRİŞ.....	1
1. GENEL BİLGİLER.....	2
1.1. Literatür Özeti	2
1.2. Reel Sedeniyonlar ve Özellikleri.....	3
1.3. Reel Sedeniyonlarda Fonksiyon Teorileri.....	21
1.3.1. Sedeniyonik Fonksiyonlarda Regülerlik	21
1.3.2. Bazı Özel Tipte Sedeniyonik Fonksiyonlarda Regülerlik	22
1.3.2.1. Analitik Fonksiyonlar.....	22
1.3.2.2. Polinom Fonksiyonlar	23
1.3.2.3. Üstel Fonksiyonlar	24
1.3.2.4. Cauchy Tipi Çekirdek Fonksiyonları	24
1.4. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ Katsayılı Sedeniyonlar ve Özellikleri.....	25
1.4.1. Sedeniyonların Oktoniyonik Katsayılı Olarak Gösterilmesi	25
1.4.2. Sedeniyonların Kuaterniyonik Katsayılı Olarak Gösterilmesi	27
1.4.3. Sedeniyonların Kompleks Katsayılı Olarak Gösterilmesi.....	30
1.5. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ Katsayılı Sedeniyonların Özel Tanımlı Eşlenikleri.....	34
1.5.1. Sedeniyonların Kompleks, Kuaterniyonik ve Oktoniyonik Eşlenik Gösterimleri ve Norm Özellikleri	34
1.5.2. Sedeniyonların Kompleks, Kuaterniyonik ve Oktoniyonik Matris Gösterimleri.....	37
1.5.2.1. $\mathbb{O}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri.....	37

1.5.2.2. $\mathbb{H}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri	38
1.5.2.3. $\mathbb{C}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri	39
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR	40
2.1. Sedeniyonik Matrisler ve İşlemler	40
2.1.1. Sedeniyonik Matrislerde Eşitlik	41
2.1.2. Sedeniyonik Birim Matris ve Sedeniyonik Sıfır Matrisi	42
2.1.3. Sedeniyonik Matrislerde Toplama İşlemi ve Özellikleri	43
2.1.4. Sedeniyonik Matrislerde Çarpma İşlemi ve Özellikleri	45
2.1.5. Sedeniyonik Matrislerde Eşlenik İşlemi ve Özellikleri	48
2.1.6. Sedeniyonik Matrislerde Transpoz ve Özellikleri	53
2.1.7. Sedeniyonik Matrislerde Eşlenik Transpoz ve Özellikleri	57
2.1.8. Sedeniyonik Matrislerin Tersi	60
2.1.9. Sedeniyonik Matrislerde İz İşlemi ve Özellikleri	61
2.2. Sedeniyonik Matrisler Üzerinde Cebirsel Yapılar	64
2.2.1. $\mathbb{R}$ Cismi Üzerinde Vektör Uzayı Yapısı	64
2.2.2. $\mathbb{C}$ Cismi Üzerinde Sol (Sağ) Vektör Uzayı Yapısı	68
2.2.3. $\mathbb{H}$ Halkası Üzerinde Sol (Sağ) Modül Yapısı	71
3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	75
3.1.Öneriler	76
KAYNAKÇA	77

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ

Hazırlayan : İsmail Gökhan GÜRSOY

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 78

ÖZET

SEDENİYONİK MATRİSLER

Tezin birinci bölümünde çalışmanın temelini oluşturan Cayley-Dickson sedeniyonlarının tanımı yapılmış ve cebirsel özellikleri incelenmiştir. Sedeniyonik fonksiyonlar tanıtılmış ve regülerlik şartları incelenmiştir. Daha sonra kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı sedeniyonlar incelenmiştir. Sedeniyonların kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik olarak altı tipte eşlenik gösterimi incelenmiştir. Eşlenik gösterimleri ve norm özellikleri kullanılarak sedeniyonların kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı matris gösterimleri incelenmiştir.

İkinci bölümde sedeniyonik katsayılı matrislerin tanımı yapılmıştır. Sedeniyonik matrisler kümesi üzerinde toplama, çıkarma, çarpma, eşlenik, transpoz, eşlenik transpoz, ters alma ve iz işlemleri tanımlanmış ve cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Sedeniyonik matrisler üzerindeki vektör uzayları ve modül yapıları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sedeniyon, Hiper Kompleks Sayılar, Sedeniyonik Matrisler

Recep Tayyip Erdoğan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics

Thesis Type : Master Thesis

Supervisor : Associate Professor Özcan BEKTAŞ

Author : İsmail Gökhan GÜRSOY

Year : 2023

Pages : 78

ABSTRACT

SEDENIONIC MATRICES

In the first part of this thesis, Cayley-Dickson sedenions, which form the basis of the study, are defined and their algebraic properties are examined. Sedenionic functions are introduced and their regularity conditions are examined. Afterwards, sedenions with complex, quaternionic and octonionic coefficients were investigated. Six type of conjugate representations of sedenions as complex, quaternionic and octonionic have been studied and matrix representations of sedenions with complex, quaternionic, and octonionic coefficients have been studied by using these conjugate notations and norm properties.

In the second chapter, matrices with sedenionic coefficients are defined. On the set of sedenionic matrices, addition, subtraction, multiplication, conjugate, transpose, conjugate transpose inverse and trace operations were defined and their algebraic properties were investigated. Vector space and module structures on sedenionic matrices are investigated.

Keywords: Sedenions, Hyper Complex Numbers, Sedenionic Matrices

KISALTMALAR

- $\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi
 $\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Kümesi
 $\mathbb{H}$: Kuaterniyonik Sayılar Kümesi
 $\mathbb{O}$: Oktoniyonik Sayılar Kümesi
 $\mathbb{S}$: Sedeniyonik Sayılar Kümesi
 $\oplus_s$: Sedeniyonik Toplama İşlemi
 $\bullet$: Sedeniyonlarda Dış Çarpım İşlemi
 $\otimes_s$: Sedeniyonik Çarpma İşlemi
 $-$: Sedeniyonlarda Eşlenik İşlemi
 $\mathbb{R}^{16}$: 16 Boyutlu Vektör Uzayı
 $\| \cdot \|$: Bir Sedeniyonun Normu
 $\langle , \rangle$: Sedeniyonlarda Skaler Çarpım
 $F(Z)$: Sedeniyon Değişkenli Fonksiyon
 S^{15} : 15 Boyutlu Hiperyüzey
 $\int [S^{15}]$: 15 Boyutlu Hiperyüzey Üzerinde İntegral
 $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$: Oktoniyonik Katsayılı Sedeniyon
 $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$: Kuaterniyonik Katsayılı Sedeniyon
 $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$: Kompleks Katsayılı Sedeniyon
 $\oplus_o$: Oktoniyonik Katsayılı Sedeniyonlarda Toplama
 $\oplus_h$: Kuaterniyonik Katsayılı Sedeniyonlarda Toplama
 $\oplus_c$: Kompleks Katsayılı Sedeniyonlarda Toplama
 $\otimes_o$: Oktoniyonik Katsayılı Sedeniyonlarda Çarpma
 $\otimes_h$: Kuaterniyonik Katsayılı Sedeniyonlarda Çarpma
 $\otimes_c$: Kompleks Katsayılı Sedeniyonlarda Çarpma
 $[\mathbb{S}_{\mathbb{O}}]_{2 \times 2}^R$: Oktoniyonik Katsayılı Sedeniyonun Sağdan Matris Gösterimi
 $[\mathbb{S}_{\mathbb{O}}]_{2 \times 2}^L$: Oktoniyonik Katsayılı Sedeniyonun Soldan Matris Gösterimi
 $[\mathbb{S}_{\mathbb{H}}]_{4 \times 4}^R$: Kuaterniyonik Katsayılı Sedeniyonun Sağdan Matris Gösterimi
 $[\mathbb{S}_{\mathbb{H}}]_{4 \times 4}^L$: Kuaterniyonik Katsayılı Sedeniyonun Soldan Matris Gösterimi
 $[\mathbb{S}_{\mathbb{C}}]_{8 \times 8}^R$: Kompleks Katsayılı Sedeniyonun Sağdan Matris Gösterimi

$[\mathbb{S}_{\mathbb{C}}]_{8 \times 8}^R$: Kompleks Katsayılı Sedeniyonun Soldan Matris Gösterimi

$M_{m \times n}(\mathbb{S})$: $m \times n$ Boyutlu Sedeniyonik Katsayılı Matris

$M_{m \times n}(\mathbb{O})$: $m \times n$ Boyutlu Oktoniyonik Katsayılı Matris

$M_{m \times n}(\mathbb{H})$: $m \times n$ Boyutlu Kuaterniyonik Katsayılı Matris

$M_{m \times n}(\mathbb{C})$: $m \times n$ Boyutlu Kompleks Katsayılı Matris

$\oplus$: Sedeniyonik Matrislerde Toplama İşlemi

$\otimes$: Sedeniyonik Matrislerde Çarpma İşlemi



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Sedeniyonik Baz Elemanlarının Çarpım Tablosu	10
Tablo 2. Sedeniyonik Üçlü Döngüler	12
Tablo 3. Sedeniyonların Sıfır Bölen Listesi	15



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Sedeniyonların Reel ve Uzaysal Eksenlere İzdüşümleri	16
---	----



GİRİŞ

Hiper kompleks sayılar matematik literatüründe oldukça önemli bir yere sahiptir. Hiper kompleks sayılar birim eleman içeren fakat birleşme ve değişme özelliği bulunması zorunlu olmayan, gerçel sayılar üzerinde sonlu boyutlu cebirler olarak tanımlanmıştır. Çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde Cayley-Dickson süreci sonunda elde edilen 16 boyutlu reel katsayılı sedeniyonlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. İkinci bölümde ise literatürdeki çalışmalardan farklı olarak sedeniyonik katsayılı matrisler tanımlanmış ve buradan hareketle sedeniyonik katsayılı matrislerin, standart matris teorisindeki cebirsel özellikleri araştırılmıştır.



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Literatür Özeti

1843 yılında İrlandalı matematikçi W.R. Hamilton tarafından kuaterniyonlar keşfedilmiştir. Bu keşif zaman içerisinde beklenenden daha büyük etkiler yaratmıştır. İngiliz matematikçi Arthur Cayley ve Amerikalı matematikçi Leonard E. Dickson 1919 yılında oktoniyonların kuaterniyonlar üzerinde nasıl iki boyutlu bir cebir olabileceğini göstermiştir. Cayley-Dickson süreci olarak bilinen bu yöntem “ikiye katlama inşası” olarak bilinir. Bu yöntem $\mathbb{R}$ cisminden başlayarak boyutu 2^n olan cebirler üretmek için kullanılır. Reel sayılara bu süreçte uygulandığında kompleks sayılar ($\text{boy}(\mathbb{C}) = 2^1 = 2$), kompleks sayılara uygulandığında kuaterniyonlar ($\text{boy}(\mathbb{H}) = 2^2 = 4$), kuaterniyonlara uygulandığında oktoniyonlar ($\text{boy}(\mathbb{O}) = 2^3 = 8$), oktoniyonlara uygulandığında sedeniyonlar ($\text{boy}(\mathbb{S}) = 2^4 = 16$) elde edilir. Bu süreçte göre bu yöntemle elde edilen her cebir üretildiği bir alt cebiri içerdiğinden bu cebirler arasından $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S}$ ilişkisi vardır. Kompleks sayılar hem değişimli hem birleşimlidir. Kuaterniyonlar değişimli değil fakat birleşimlidir. Oktoniyonlar ise ne değişimli ne de birleşimlidir fakat alternatif, esnektir ve üstel birleşimlidir. Sedeniyonlar ise değişimli, birleşimli, alternatif ve esnek değildir. Sadece üstel birleşimlidir. Ayrıca Cayley-Dickson süreciyle üretilen cebirlerde, sedeniyonlardan itibaren üretilen her cebir sıfır bölen eleman içermektedir. Bu yüzden sedeniyonlar bölüm cebiri değildir. Sedeniyon kelimesi Latince on altı anlamına gelen “sedecim” kelimesinden türemiştir. Literatürde sedeniyon terimi tüm 16 boyutlu cebirsel yapıları ifade etmek için kullanılır (Cawagas, 2004). Bu cebirsel yapılara örnek olarak Conway-Smith sedeniyonları ve J.D.H Smith tarafından tanımlanan oktoniyonları kapsayan cebir verilebilir. Conway-Smith sedeniyonlarının Cayley-Dickson sedeniyonlarından farkı çarpımsal norm özelliği sağlamasıdır (Conway-Smith, 2003; Cawagas, 2004). Bu çalışmada sedeniyon terimi ile Cayley-Dickson süreci sonucu elde edilen reel katsayılı sedeniyonlar kastedilmektedir. Sedeniyonlar konik sedeniyonlar, bölüntülü sedeniyonlar, hiperbolik sedeniyonlar, Fibonacci sedeniyonları, Lucas sedeniyonları olmak üzere çeşitli tanımlamalara sahiptir (Carmody, 1988; Catarino, 2019;

Musés, 1980; Moreno, 1998). Sedeniyonlar son yıllarda cebirsel özellikleri araştırılması ve teorik fizikteki uygulama alanları açısından ön plana çıkmaktadır. Perrin Sedeniyonlar ve Tribonacci sedeniyonlar sırasıyla (Taşyurdu-Akpınar, 2020) ve (Soykan, vd., 2020) tarafından çalışılmıştır. k-pell ve Fibonacci-lucas sedeniyonları sırasıyla (Catarino, 2019) ve (Bilgici, vd., 2017) tarafından çalışılmıştır. Padovan, pell-padovan, perrin sedeniyonları ve Horadam sedeniyonları sırasıyla (Akpınar, 2021) ve (Çimen, vd., 2019) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ katsayılı sedeniyonlar (Bektaş, 2021) tarafından çalışılmıştır. Sedeniyonların başlıca kullanım alanları topoloji, clifford cebirleri, sicim teorisi, izafiyet teorisi, kuantum teori, yapay zekâ teorileri, birleşik kütle çekim-elektromanyetik teoridir.

1.2. Reel Sedeniyonlar ve Özellikleri

Tanım 1.1. Sedeniyonlar değişimli, birleşimli, alternatif ve esnek olmayan fakat üstel birleşimli olan 16 boyutlu cebirdir. Bu özelliklere ek olarak sedeniyonlar sıfır bölen eleman içerdiğinden bölüm cebiri veya kompozisyon cebiri değildir. Reel katsayılı sedeniyonların kümesi $\mathbb{S}$ ile gösterilir. $E_{16} = \{e_i \in \mathbb{S} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 15\}$ kümesi $\mathbb{S}$ 'nin standart tabanı, e_0 reel birim ve $e_1, e_2, \dots, e_{15}$ sanal birimler olmak üzere her $\mathcal{X}$ reel sedeniyon E_{16} kümesindeki baz elemanlarının lineer birleşimi olarak

$$\mathcal{X} = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_{15} e_{15} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = x_0 e_0 + \sum_{i=1}^{15} x_i e_i$$

şeklinde yazılır.

Buradan reel katsayılı sedeniyonları kümesi ise

$$\mathbb{S} = \left\{ \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, 15 \text{ için } x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca e_i sanal birimleri aşağıda verilen özellikleri sağlar (Imaeda-Imaeda, 2000).

$$e_0 = 1 \text{ ve } i \neq 0 \text{ için } e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$$

$$i \neq 0 \text{ için } e_i e_i = (e_i)^2 = -1$$

$$i \neq j \text{ ve } i, j \neq 0 \text{ için } e_i e_j = -e_j e_i$$

Tanım 1.2. $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{S}$ sedeniyonu için $x_0 e_0$ sedeniyonun reel (skaler) kısmıdır. $\text{Re}(\mathcal{X}) = S_x$ olarak gösterilir. $\sum_{i=1}^{15} x_i e_i$ sedeniyonun imajiner (vektörel) kısmıdır. $\text{Im}(\mathcal{X}) = \vec{V}_x$ olarak gösterilir. Bu durumda bir $\mathcal{X}$ sedeniyonu skaler ve vektörel kısım cinsinden $\mathcal{X} = S_x + \vec{V}_x$ olarak ifade edilir.

Tanım 1.3. $\mathcal{X} \in \mathbb{S}$ için, $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{15} x_i e_i$ olarak yazılıyorsa sıfır sedeniyon ya da pür sedeniyon denir.

Tanım 1.4. $\mathcal{X} \in \mathbb{S}$ için, $\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} 0 e_i = 0 + \vec{0}$ olarak yazılan sedeniyona sıfır sedeniyonu denir ve 0_s ile gösterilir.

Tanım 1.5. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = S_x + \vec{V}_x, \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i = S_y + \vec{V}_y$ sedeniyonları için

$$\begin{aligned} \oplus_s : \mathbb{S} \times \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{S} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\rightarrow \mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = (S_x + \vec{V}_x) \oplus_s (S_y + \vec{V}_y) \\ &= (S_x + S_y) + (\vec{V}_x + \vec{V}_y) \\ &= (S_{x+y}) + (\vec{V}_{x+y}) \end{aligned}$$

veya

$$\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i$$

olarak tanımlanan işleme sedeniyonik toplama işlemi denir (Imaeda-Imaeda, 2000).

Teorem 1.1. $\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i, \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i, \mathcal{Z} = \sum_{i=0}^{15} z_i e_i$ ve $0_s = \sum_{i=0}^{15} 0 e_i$ sedeniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}) \oplus_s \mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus_s (\mathcal{Y} \oplus_s \mathcal{Z})$
2. $0_s \oplus_s \mathcal{X} = \mathcal{X} \oplus_s 0_s = \mathcal{X}$
3. $\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ vardır.
4. $\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \oplus_s \mathcal{X}$

İspat :

$$\begin{aligned}
 1. (\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}) \oplus_s \mathcal{Z} &= \left(\sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i \right) \oplus_s \sum_{i=0}^{15} z_i e_i \\
 &= \sum_{i=0}^{15} ((x_i + y_i) e_i + z_i e_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i + z_i) e_i \\
 &= \sum_{i=0}^{15} (x_i e_i + (y_i + z_i) e_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \oplus_s \left(\sum_{i=0}^{15} (y_i + z_i) e_i \right) \\
 &= \mathcal{X} \oplus_s (\mathcal{Y} \oplus_s \mathcal{Z})
 \end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{S}$ kümesi $\oplus_s$ işlemine göre birleşme özelliğini sağlar.

$$\begin{aligned}
 2. 0_s \oplus_s \mathcal{X} &= \sum_{i=0}^{15} 0 e_i \oplus_s \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \\
 &= \sum_{i=0}^{15} (x_i + 0) e_i \\
 &= \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \\
 &= \mathcal{X}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{X} \oplus_s 0_s = \mathcal{X}$ olduğu gösterilir. $\oplus_s$ işlemine göre $\mathbb{S}$ kümesinin birim elemanı vardır ve 0_s sedeniyonudur.

3. $\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = 0_s$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i = 0_s$$

olur. Buradan $i = 0, 1, 2, \dots, 15$ için $x_i + y_i = 0$ olur ve $y_i = -x_i$ elde edilir. Böylece,

$$\mathcal{Y} = -\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} (-x_i) e_i$$

ifadesi bir sedeniyondur. Benzer şekilde $\mathcal{Y} \oplus_s \mathcal{X} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} \in \mathbb{S}$ sedeniyonu vardır.

$$\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \text{ sedeniyonu için } \mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} = 0_s \text{ yapan } \mathcal{Y} \text{ sedeniyonuna } \mathcal{X}$$

sedeniyonunun toplamsal tersi denir ve $\mathcal{Y} = -\mathcal{X}$ olarak yazılır.

$$\begin{aligned} 4. \mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y} &= \sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} (y_i + x_i) e_i \\ &= \mathcal{Y} \oplus_s \mathcal{X} \end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{S}$ kümesi $\oplus_s$ işlemine göre değişme özelliğini sağlar.

Sonuç 1.1. $(\mathbb{S}, \oplus_s)$ yapısı Abel gruptur.

Tanım 1.6. $\lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = S_x + \overrightarrow{V_x}$ sedeniyonu için

$$\bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$\begin{aligned} (\lambda, \mathcal{X}) &\rightarrow \lambda \bullet \mathcal{X} = \lambda \bullet (S_x + \overrightarrow{V_x}) \\ &= \lambda \bullet S_x + \lambda \bullet \overrightarrow{V_x} \end{aligned}$$

veya

$$\lambda \bullet \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} (\lambda \cdot x_i) e_i$$

şeklinde tanımlanan işleme $\mathbb{S}$ kümesi üzerinde skalerle çarpım işlemi denir. Burada

$\bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 1.2. $\bullet: \mathbb{R} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ dış işlemi $\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i,$

$\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i$ sedeniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\lambda \bullet (\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}) = \lambda \bullet \mathcal{X} \oplus_s \lambda \bullet \mathcal{Y}$
2. $(\lambda_1 + \lambda_2) \bullet \mathcal{X} = \lambda_1 \bullet \mathcal{X} \oplus_s \lambda_2 \bullet \mathcal{X}$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \bullet \mathcal{X} = \lambda_1 \bullet (\lambda_2 \bullet \mathcal{X})$
4. $1_\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $1_\lambda \bullet \mathcal{X} = \mathcal{X}$

İspat :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ için

$$\begin{aligned}\lambda \bullet (\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}) &= \lambda \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \oplus_s \sum_{i=0}^{15} y_i e_i \right) \\ &= \lambda \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda \cdot x_i + \lambda \cdot y_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda \cdot x_i) e_i \right) \oplus_s \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda \cdot y_i) e_i \right) \\ &= \lambda \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} (x_i e_i) \right) \oplus_s \lambda \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} (y_i e_i) \right) \\ &= \lambda \bullet \mathcal{X} \oplus_s \lambda \bullet \mathcal{Y}\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\mathcal{X} \in \mathbb{S}$ için

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2) \bullet \mathcal{X} &= (\lambda_1 + \lambda_2) \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} ((\lambda_1 + \lambda_2) x_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda_1 x_i) e_i \right) \oplus_s \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda_2 x_i) e_i \right) \\ &= \lambda_1 \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} (x_i e_i) \right) \oplus_s \lambda_2 \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} (x_i e_i) \right) \\ &= \lambda_1 \bullet \mathcal{X} \oplus_s \lambda_2 \bullet \mathcal{X}\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{S}$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \bullet \mathcal{X} &= (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{15} ((\lambda_1 \cdot \lambda_2) x_i) e_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x_i)) e_i \right) \\
&= \lambda_1 \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} ((\lambda_2 \cdot x_i)) e_i \right) \\
&= \lambda_1 \bullet \left(\lambda_2 \bullet \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \\
&= \lambda_1 \bullet (\lambda_2 \bullet \mathcal{X})
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. 1_λ , $\mathbb{R}$ cisminin çarpmaya göre birim elemanı ve $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{S}$ için

$$\begin{aligned}
1_\lambda \bullet \mathcal{X} &= 1_\lambda \bullet \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{15} (1_\lambda \cdot x_i) e_i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{15} x_i e_i \\
&= \mathcal{X}
\end{aligned}$$

Sonuç 1.2. $\mathbb{S}$ kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemlerine göre $\mathbb{S}$ kümesi $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ cismi üzerinde vektör uzayı belirtir. $\{\mathbb{S}, \oplus_s, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet\}$ yapısı vektör uzayıdır. Cayley-Dickson süreci ile üretilen cebirler 2^n boyutlu $\mathbb{R}$ vektör uzaylarına izomorftur (Soykan, vd., 2019).

Teorem 1.3. $\{\mathbb{S}, \oplus_s, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet\}$ vektör uzayı $\{\mathbb{R}^{16}, [+], \mathbb{R}, +, \cdot, [\cdot]\}$ vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi $\mathbb{R}^{16}$ 'daki iki vektörün toplama işlemi, $[\cdot]$ işlemi ise $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile $\mathbb{R}^{16}$ 'daki bir vektörün çarpımı olan dış işlemdir.

İspat : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i, \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i$ sedeniyonları verilsin.

$\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^{16}$

$$\mathcal{X} \rightarrow \varphi(\mathcal{X}) = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15})$$

şeklinde bir φ fonksiyonu tanımlansın.

1. φ fonksiyonu lineerdir.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{15} (x_i + y_i) e_i\right) \\ &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_{15} + y_{15}) \\ &= (x_0, x_1, \dots, x_{15})[+](y_0, y_1, \dots, y_{15}) \\ &= \varphi(\mathcal{X})[+]\varphi(\mathcal{Y}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot \mathcal{X}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{15} (\lambda \cdot x_i) e_i\right) \\ &= (\lambda \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 + \dots + \lambda \cdot x_{15}) \\ &= \lambda[\cdot](x_0, x_1, \dots, x_{15}) \\ &= \lambda[\cdot]\varphi(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

olduğundan φ lineer fonksiyondur.

2. φ fonksiyonu birebirdir.

$$\varphi(\mathcal{X}) = \varphi(\mathcal{Y}) \text{ olsun. } \varphi\left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{15} y_i e_i\right) \text{ elde edilir.}$$

φ fonksiyonunun tanımından $(x_0, x_1, \dots, x_{15}) = (y_0, y_1, \dots, y_{15})$ elde edilir. Sıralı on altılıların eşitliğinden $\forall i = 0, 1, \dots, 15$ için $x_i = y_i$ elde edilir. Buradan $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ elde edilir. φ fonksiyonu birebirdir.

3. φ fonksiyonu örtendir.

$\text{boy}(\mathbb{S}) = 16, \text{boy}(\mathbb{R}^{16}) = 16$ ve φ birebir olduğundan φ örtendir.

Tanım 1.7. $\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i, \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i$ sedeniyonları verilsin.

$$\otimes_s : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y} = \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \otimes_s \left(\sum_{i=0}^{15} y_i e_i \right)$$

olarak tanımlanan işleme sedeniyonik çarpım işlemi denir. İki sedeniyon çarpılırken tanımdan anlaşılacağı üzere sırayla tüm elemanlarının çarpılıp toplanması ile hesaplanır. Bu yüzden E_{16} baz elemanlarının çarpımının tanımlanması gerekmektedir. Baz elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibidir (Imaeda-Imaeda, 2000).

Tablo 1. Sedeniyonik Baz Elemanlarının Çarpım Tablosu

$e_i e_j$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	$-e_0$	$-e_1$
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

$\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i, \mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i$ sedeniyonlarının **Tablo 1.**'e göre çarpım işlemi

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y} &= \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \otimes_s \left(\sum_{i=0}^{15} y_i e_i \right) \\
&= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7 - x_8 y_8 \\
&\quad - x_9 y_9 - x_{10} y_{10} - x_{11} y_{11} - x_{12} y_{12} - x_{13} y_{13} - x_{14} y_{14} - x_{15} y_{15}) e_0 \\
&\quad + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_7 + x_7 y_6 + x_8 y_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_9y_1 - x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} - x_{12}y_{13} - x_{13}y_9 + x_{14}y_{15} - x_{15}y_{14})e_1 \\
& + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 - x_6y_4 - x_7y_5 + x_8y_{10} \\
& + x_9y_{11} - x_{10}y_8 - x_{11}y_9 - x_{12}y_{14} - x_{13}y_{15} + x_{14}y_{12} + x_{15}y_{13})e_2 \\
& + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 - x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_4 + x_8y_{11} \\
& - x_9y_{10} + x_{10}y_9 - x_{11}y_8 - x_{12}y_{15} + x_{13}y_{14} - x_{14}y_{13} + x_{15}y_{12})e_3 \\
& + (x_0y_4 - x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3 + x_8y_{12} \\
& + x_9y_{13} + x_{10}y_{14} + x_{11}y_{15} - x_{12}y_8 - x_{13}y_9 - x_{14}y_{10} - x_{15}y_{11})e_4 \\
& + (x_0y_5 + x_1y_4 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_1 + x_5y_0 - x_6y_3 + x_7y_2 + x_8y_{13} \\
& - x_9y_{12} + x_{10}y_{15} - x_{11}y_{14} + x_{12}y_9 - x_{13}y_8 + x_{14}y_{11} - x_{15}y_{10})e_5 \\
& + (x_0y_6 + x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_5 - x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_0 - x_7y_1 - x_8y_{14} \\
& + x_9y_{14} - x_{10}y_{13} + x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} + x_{13}y_{10} - x_{14}y_9 - x_{15}y_8)e_6 \\
& + (x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0 + x_8y_{15} \\
& + x_9y_{14} - x_{10}y_{13} + x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} + x_{13}y_{10} - x_{14}y_9 - x_{15}y_8)e_7 \\
& + (x_0y_8 - x_1y_9 - x_2y_{10} - x_3y_9 - x_4y_{12} - x_5y_{13} - x_6y_{14} - x_7y_{15} + x_8y_0 \\
& + x_9y_1 + x_{10}y_2 + x_{11}y_3 + x_{12}y_4 + x_{13}y_5 + x_{14}y_6 + x_{15}y_7)e_8 \\
& + (x_0y_9 + x_1y_8 - x_2y_{11} + x_3y_{10} - x_4y_{13} + x_5y_{12} + x_6y_{15} - x_7y_{14} \\
& - x_8y_1 + x_9y_0 - x_{10}y_3 + x_{11}y_2 - x_{12}y_5 + x_{13}y_4 + x_{14}y_7 - x_{15}y_6)e_9 \\
& + (x_0y_{10} + x_1y_{11} + x_2y_8 - x_3y_9 - x_4y_{14} - x_5y_{15} + x_6y_{12} + x_7y_{13} \\
& - x_8y_2 + x_9y_3 + x_{10}y_0 - x_{11}y_1 - x_{12}y_6 - x_{13}y_7 + x_{14}y_4 + x_{15}y_5)e_{10} \\
& + (x_0y_{11} - x_1y_{10} + x_2y_9 + x_3y_8 - x_4y_{15} + x_5y_{14} - x_6y_{13} + x_7y_{12} \\
& - x_8y_3 - x_9y_2 + x_{10}y_1 + x_{11}y_0 - x_{12}y_7 + x_{13}y_6 - x_{14}y_5 + x_{15}y_4)e_{11} \\
& + (x_0y_{12} + x_1y_{13} + x_2y_{14} + x_3y_{15} + x_4y_8 - x_5y_9 - x_6y_{10} - x_7y_{11} \\
& - x_8y_4 + x_9y_5 + x_{10}y_6 + x_{11}y_7 + x_{12}y_0 - x_{13}y_1 - x_{14}y_2 - x_{15}y_3)e_{12} \\
& + (x_0y_{13} - x_1y_{12} + x_2y_{15} - x_3y_{14} + x_4y_9 + x_5y_8 + x_6y_{11} - x_7y_{10} \\
& - x_8y_5 - x_9y_4 + x_{10}y_7 - x_{11}y_6 + x_{12}y_1 + x_{13}y_0 + x_{14}y_3 - x_{15}y_2)e_{13} \\
& + (x_0y_{14} - x_1y_{15} - x_2y_{12} + x_3y_{13} + x_4y_{10} - x_5y_{11} + x_6y_8 + x_7y_9 \\
& - x_8y_6 - x_9y_7 - x_{10}y_4 + x_{11}y_5 + x_{12}y_2 - x_{13}y_3 + x_{14}y_0 + x_{15}y_1)e_{14} \\
& + (x_0y_{15} + x_1y_{14} - x_2y_{13} - x_3y_{12} + x_4y_{11} + x_5y_{10} - x_6y_9 + x_7y_8 \\
& - x_8y_7 + x_9y_6 - x_{10}y_5 - x_{11}y_4 + x_{12}y_3 + x_{13}y_2 - x_{14}y_1 + x_{15}y_0)e_{15}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 1.3. Sedeniyonik çarpım işlemi birleşimli değildir.

Sonuç 1.4. $(\mathbb{S}, \oplus_s, \otimes_s)$ yapısı halka değildir.

Sonuç 1.5. $\{\mathbb{S}, \oplus_s, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet, \otimes_s\}$ yapısı değişimli olmayan bir cebirdir.

Teorem 1.4. Sedeniyonik çarpım işlemi aşağıda verilen üçlü döngüleri sağlar (Imaeda-Imaeda, 2000).

$$\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y} = \left(\sum_{i=0}^{15} x_i e_i \right) \otimes_s \left(\sum_{i=0}^{15} y_i e_i \right) = \sum_{i,j,k=1}^{15} f_{ij} \gamma_{ij}^k e_k$$

Burada $e_i, e_j, e_k \in E_{16}$, $f_{ij} = x_i y_j$ ve γ_{ij}^k cisim parametresidir. $\gamma_{ij}^k \in \{-1, 0, +1\}$ ve $e_i e_j = \sum_{k=0}^{15} \gamma_{ij}^k e_k$ şeklinde yazılır. Buradaki döngüleri sağlayan sıralı üçlülerin indisleri (i, j, k) olmak üzere tüm üçlülerin listesi **Tablo 2.**'de belirtilmiştir.

Tablo 2. Üçlü Sedeniyonik Döngüler

(i, j, k)
(1,2,3), (1,4,5), (1,7,6), (1,8,9), (1,11,10), (1,13,12), (1,14,15), (2,4,6), (2,5,7), (2,8,10), (2,9,11), (2,14,12), (2,15,13), (3,4,7), (3,6,5), (3,8,11), (3,10,9), (3,13,14), (3,15,12), (4,8,12), (4,9,13), (4,10,14), (4,11,15), (5,8,13), (5,10,15), (5,12,9), (5,14,11), (6,8,14), (6,11,13), (6,12,10), (6,15,9), (7,8,15), (7,9,14), (7,12,11), (7,13,10)

Tanım 1.8. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = S_x + \vec{V}_x$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i = S_y + \vec{V}_y$ sedeniyonları için $S_x = S_y$ ve $\vec{V}_x = \vec{V}_y$ şartı sağlanıyorsa veya $\forall i = 0, 1, \dots, 15$ için $x_i = y_i$ oluyorsa $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ sedeniyonları eşit sedeniyonlardır denir ve $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ile gösterilir (Imaeda-Imaeda, 2000).

Tanım 1.9. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = S_x + \vec{V}_x$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i = S_y + \vec{V}_y$ sedeniyonları için sedeniyonik toplama ve skaler ile çarpım işlemlerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \oplus_s (-\mathcal{Y}) &= \mathcal{X} - \mathcal{Y} \\ &= (S_x + \vec{V}_x) - (S_y + \vec{V}_y) \\ &= (S_x - S_y) + (\vec{V}_x - \vec{V}_y) \\ &= (S_{x-y}) + (\vec{V}_{x-y}) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \oplus_s (-\mathcal{Y}) &= \mathcal{X} - \mathcal{Y} \\ &= \sum_{i=0}^{15} x_i e_i + \left(\sum_{i=0}^{15} (-y_i) e_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{15} (x_i - y_i) e_i\end{aligned}$$

olarak tanımlanan işleme sedeniyonik çıkarma işlemi denir. (Imaeda-Imaeda, 2000)

Tanım 1.10. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i = S_x + \vec{V}_x$ sedeniyonu için

$$\bar{\cdot} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}} &= x_0 e_0 - \sum_{i=1}^{15} x_i e_i \\ &= S_x - \vec{V}_x\end{aligned}$$

olarak tanımlanan işleme sedeniyonun standart eşlenik işlemi denir (Imaeda-Imaeda, 2000). $\bar{\mathcal{X}}$ sedeniyonuna $\mathcal{X}$ sedeniyonunun eşleniği denir. Eşlenik işlemi hiper kompleks sayılarda oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde standart eşlenik tanımı ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonraki bölümlerde sedeniyonların özel tanımlı eşlenikler incelenecektir.

Teorem 1.5. $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıda verilen eşlenik özellikleri sağlanır. (Imaeda-Imaeda, 2000)

1. $\overline{\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}} = \bar{\mathcal{X}} \oplus_s \bar{\mathcal{Y}}$
2. $\bar{\bar{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$
3. $\overline{\lambda \bullet \mathcal{X}} = \lambda \bullet \bar{\mathcal{X}}$
4. $\overline{\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}} \neq \bar{\mathcal{X}} \otimes_s \bar{\mathcal{Y}}$
5. $\overline{\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}} = \bar{\mathcal{Y}} \otimes_s \bar{\mathcal{X}}$
6. $S_x = \frac{x \oplus_s \bar{x}}{2}, \vec{V}_x = \frac{x - \bar{x}}{2}$

Tanım 1.11. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$ ve $\mathcal{Y} = \sum_{i=0}^{15} y_i e_i$ sedeniyonları için skaler (iç) çarpım işlemi

$$\langle, \rangle: \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle &= \frac{1}{2} ((\mathcal{X} \otimes_s \bar{\mathcal{Y}}) \oplus_s (\bar{\mathcal{X}} \otimes_s \mathcal{Y})) \\ &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{15} y_{15} = \sum_{i=0}^{15} x_i y_i \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Imaeda-Imaeda, 2000).

Tanım 1.12. $\forall \mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$ sedeniyonu için norm işlemi skaler (iç) çarpımdan

$$\| \cdot \|: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{X} \rightarrow \|\mathcal{X}\| = \sqrt{\mathcal{X} \otimes_s \bar{\mathcal{X}}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{15} (x_i)^2}$$

olarak tanımlanır (Imaeda-Imaeda, 2000).

Teorem 1.6. $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathbb{S}$ sedeniyonları için skaler (iç) çarpımın aşağıdaki özellikleri sağlanır (Imaeda-Imaeda, 2000; Chan-Dokovic; 2006).

1. $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$
2. $\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle = \|\mathcal{X}\|^2 \geq 0$
3. $\langle \mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \bar{\mathcal{X}} \otimes_s \mathcal{Z} \rangle = \langle \mathcal{X}, \mathcal{Z} \otimes_s \bar{\mathcal{Y}} \rangle$

Teorem 1.7. $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ sedeniyonu için aşağıdaki norm özellikleri sağlanır.

1. $\|\mathcal{X}\| \geq 0, \|\mathcal{X}\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{X} = 0_s$
2. $\|\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}\| \leq \|\mathcal{X}\| + \|\mathcal{Y}\|$
3. $\|\mathcal{X}\| = \|-\mathcal{X}\| = \|\bar{\mathcal{X}}\| = \|-\bar{\mathcal{X}}\|$
4. $\|\mathcal{X}\| = 1$ ise $\mathcal{X}$ birim sedeniyondur.
5. $\|\mathcal{X}\| \neq 1$ iken $\vec{n} = \frac{\mathcal{X}}{\|\mathcal{X}\|}$ birim sedeniyonu elde edilir.
6. $\|\mathcal{X}\|^2 + \|\mathcal{Y}\|^2 = \frac{1}{2} (\|\mathcal{X} \oplus_s \mathcal{Y}\|^2 + \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|^2)$
7. $\|\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}\| = \|\mathcal{Y} \otimes_s \mathcal{X}\| = \|\bar{\mathcal{X}} \otimes_s \mathcal{Y}\| = \|\mathcal{X} \otimes_s \bar{\mathcal{Y}}\|$

Tanım 1.13. $\mathcal{X} \neq 0_s$ sedeniyonu için $\mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \otimes_s \mathcal{X} = 0_s$ şartını sağlayan $\mathcal{Z} \neq 0_s$ sedeniyonuna $\mathcal{X}$ sedeniyonunun sıfır böleni denir. Cayley-Dickson süreci göz önüne alındığında $\mathbb{S}$ cebirinden itibaren bu süreçle üretilen cebirler sıfır bölen eleman içermektedir (Smith, 1994; Imaeda-Imaeda, 2000).

Sonuç 1.6. $\mathbb{S}$ cebiri bölüm cebiri değildir.

Teorem 1.8. $e_a, e_b, e_c, e_d \in E_{16}$ için $1 \leq a \leq 6, 9 \leq d \leq 15, 9 \leq b \leq 15, -9 \geq d \geq -15$ ve $c > a$ olmak üzere $(e_a + e_b) \otimes_s (e_c + e_d) = 0_s$ şartı sağlanır. Bu koşulu sağlayan baz elemanlarının listesi **Tablo 3.**'de verilmiştir. (Gillard-Gresnight, 2019; Imaeda-Imaeda, 2000).

Tablo 3. Sedeniyonların Sıfır Bölen Listesi

e_a, e_b, e_c, e_d
$\{e_1, e_{10}, e_5, e_{14}\}, \{e_1, e_{10}, e_7, e_{12}\}, \{e_1, e_{10}, e_6, -e_{13}\}, \{e_1, e_{11}, e_6, -e_{12}\},$ $\{e_1, e_{11}, e_5, e_{15}\}, \{e_1, e_{11}, e_7, -e_{13}\}, \{e_1, e_{12}, e_2, e_{15}\}, \{e_1, e_{12}, e_3, -e_{14}\},$ $\{e_1, e_{12}, e_6, e_{11}\}, \{e_1, e_{12}, e_7, -e_{10}\}, \{e_1, e_{13}, e_6, e_{10}\}, \{e_1, e_{13}, e_7, -e_{14}\},$ $\{e_1, e_{13}, e_7, e_{11}\}, \{e_1, e_{13}, e_3, -e_{15}\}, \{e_1, e_{14}, e_2, e_{13}\}, \{e_1, e_{14}, e_4, -e_{11}\},$ $\{e_1, e_{14}, e_3, e_{12}\}, \{e_1, e_{14}, e_5, -e_{10}\}, \{e_1, e_{15}, e_3, e_{13}\}, \{e_1, e_{15}, e_2, -e_{12}\},$ $\{e_1, e_{15}, e_4, e_{10}\}, \{e_1, e_{15}, e_5, -e_{11}\}, \{e_2, e_9, e_4, e_{15}\}, \{e_2, e_9, e_5, -e_{14}\},$ $\{e_2, e_9, e_6, e_{13}\}, \{e_2, e_9, e_7, -e_{12}\}, \{e_2, e_{11}, e_5, e_{12}\}, \{e_2, e_{11}, e_4, -e_{13}\},$ $\{e_2, e_{11}, e_7, -e_{14}\}, \{e_2, e_{12}, e_3, e_{13}\}, \{e_2, e_{12}, e_5, -e_{11}\}, \{e_2, e_{12}, e_7, e_9\},$ $\{e_2, e_{13}, e_3, -e_{12}\}, \{e_2, e_{13}, e_4, e_{11}\}, \{e_2, e_{13}, e_6, -e_9\}, \{e_2, e_{14}, e_5, e_9\},$ $\{e_2, e_{14}, e_3, -e_{15}\}, \{e_2, e_{14}, e_7, e_{11}\}, \{e_2, e_{15}, e_4, -e_9\}, \{e_2, e_{15}, e_3, e_{14}\},$ $\{e_2, e_{15}, e_6, -e_{11}\}, \{e_3, e_9, e_6, e_{12}\}, \{e_3, e_9, e_4, -e_{14}\}, \{e_3, e_9, e_5, -e_{15}\},$ $\{e_3, e_{12}, e_5, e_{10}\}, \{e_3, e_{12}, e_6, -e_9\}, \{e_3, e_{14}, e_4, e_9\}, \{e_3, e_{13}, e_4, -e_{10}\},$ $\{e_3, e_{15}, e_5, e_9\}, \{e_3, e_{13}, e_7, -e_9\}, \{e_3, e_{15}, e_6, e_{10}\}, \{e_3, e_{14}, e_7, -e_{10}\},$ $\{e_4, e_9, e_7, e_{10}\}, \{e_4, e_9, e_6, -e_{11}\}, \{e_4, e_{10}, e_5, e_{11}\}, \{e_4, e_{10}, e_7, -e_9\},$ $\{e_4, e_{11}, e_6, e_9\}, \{e_4, e_{11}, e_5, -e_{10}\}, \{e_4, e_{13}, e_6, e_{15}\}, \{e_4, e_{13}, e_7, -e_{14}\},$ $\{e_4, e_{14}, e_7, e_{13}\}, \{e_4, e_{14}, e_5, -e_{15}\}, \{e_4, e_{15}, e_5, e_{14}\}, \{e_4, e_{15}, e_6, -e_{13}\},$ $\{e_5, e_{12}, e_7, e_{14}\}, \{e_5, e_{12}, e_6, -e_{15}\}, \{e_5, e_{15}, e_6, e_{12}\}, \{e_5, e_{14}, e_7, -e_{12}\},$ $\{e_6, e_{11}, e_7, e_{10}\}, \{e_6, e_{10}, e_7, -e_{11}\}, \{e_6, e_{13}, e_7, e_{12}\}, \{e_6, e_{10}, e_7, -e_{13}\},$ $\{e_1, e_{11}, e_4, e_{14}\}, \{e_2, e_{11}, e_6, -e_{15}\}, \{e_4, e_{15}, e_5, e_{14}\}, \{e_4, e_{14}, e_5, -e_{15}\}$

Tanım 1.14. $\forall \mathcal{X} \neq 0_s$ sedeniyonunun çarpımsal tersi $\mathcal{X}^{-1}$ olmak üzere

$$\mathcal{X}^{-1} = \frac{\bar{\mathcal{X}}}{\|\mathcal{X}\|^2}$$

olarak tanımlanır (Imaeda-Imaeda, 2000; Brown-Rice, 2021; Bektaş, 2021).

Tanım 1.15. Sedeniyonlar cebiri bölüm cebiri olmadığı için herhangi iki $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sedeniyonu için $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}$ şeklinde bölme işlemi tanımlanamaz. Fakat sağ ve sol bölüm işlemleri tanımlanır. Oktoniyonların sağ ve sol bölümlerine benzer olarak $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \neq 0_s$ sedeniyonları için

$$R_1 : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow R_1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}^{-1}$$

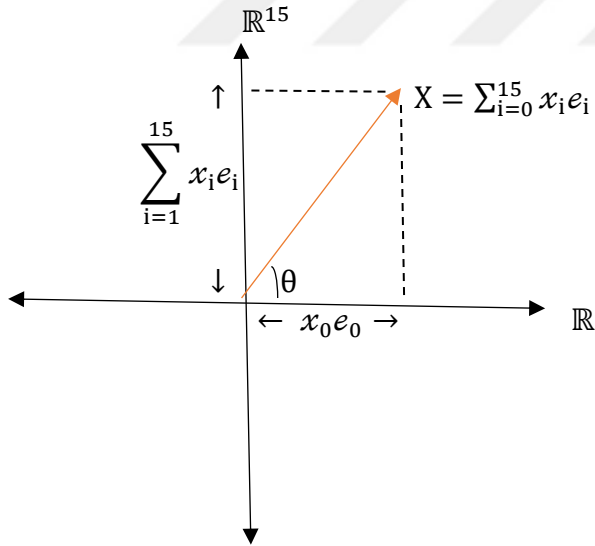
işlemine $\mathcal{X}$ sedeniyonunun $\mathcal{Y}$ sedeniyonu ile sağdan bölümü,

$$R_2 : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow R_2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}^{-1} \otimes_s \mathcal{X}$$

işlemine $\mathcal{X}$ sedeniyonunun $\mathcal{Y}$ sedeniyonu ile soldan bölümü olarak tanımlanır.

Tanım 1.16. Kompleks sayıların kutupsal gösterimlerine benzer olarak bir $\mathcal{X}$ reel sedeniyonu için kutupsal gösterimi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.



Şekil 1. Bir Sedeniyonun Reel Eksen ve Uzaysal Eksene İz Düşümü

Şekil 1.'de gösterilen koordinat sistemi temsili olarak $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{15} = \mathbb{R}^{16}$ uzayıdır. $\mathcal{X}$ sedeniyonunun reel eksenle iz düşümü $S_x = x_0 e_0$ ve $\mathbb{R}^{15}$ eksenine iz düşümü $\vec{V}_x = \sum_{i=1}^{15} x_i e_i$, $\mathcal{X}$ sedeniyonunun reel eksenle yaptığı açı θ ve $\mathcal{X}$ sedeniyonun normunu $\mathbb{R}^{16}$ 'da $\|\vec{OX}\| = \|\mathcal{X}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{15} (x_i)^2}$ olarak yazılır.

$$\cos \theta = \frac{x_0 e_0}{\|\mathcal{X}\|} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}}{\|\mathcal{X}\|} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \|\mathcal{X}\| \cdot \left(\frac{x_0 e_0}{\|\mathcal{X}\|} + \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i e_i}{\|\mathcal{X}\|} \right) \\ &= \|\mathcal{X}\| \cdot \left(\frac{x_0 e_0}{\|\mathcal{X}\|} + \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i e_i}{\|\mathcal{X}\|} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}} \right) \\ &= \|\mathcal{X}\| \cdot \left(\frac{x_0 e_0}{\|\mathcal{X}\|} + \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}}{\|\mathcal{X}\|} \right) \\ \vec{n} &= \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2}} \text{ olup} \end{aligned}$$

Burada $\cos \theta$, $\sin \theta$ ifadeleri yerine yazılırsa $\mathcal{X}$ sedeniyonunun kutupsal gösterimi

$$\mathcal{X} = \|\mathcal{X}\| \cdot (\cos \theta + \vec{n} \cdot \sin \theta)$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.17. Sedeniyonlar cebiri birleşimli olmadığından lineer dönüşüm tanımlanamaz. Fakat sırasıyla sol ve sağ dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ sedeniyonları için

$$L_x: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$\mathcal{X} \rightarrow L_x(\mathcal{Y}) = \mathcal{X} \otimes_s \mathcal{Y}$$

ve

$$R_x: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$\mathcal{X} \rightarrow R_x(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} \otimes_s \mathcal{X}$$

Tanım 1.18. $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{S}$ sedeniyonu için L_x ve R_x dönüşümleri dikkate alınırsa bir $\mathcal{X}$ sedeniyonunun sol ve sağ matris gösterimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
L_x(e_0) &= \mathcal{X} \otimes_s e_0 \\
&= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 + x_8 e_8 \\
&\quad + x_9 e_9 + x_{10} e_{10} + x_{11} e_{11} + x_{12} e_{12} + x_{13} e_{13} + x_{14} e_{14} + x_{15} e_{15} \\
L_x(e_1) &= \mathcal{X} \otimes_s e_1 \\
&= x_0 e_1 - x_1 e_0 - x_2 e_3 + x_3 e_2 - x_4 e_5 + x_5 e_4 + x_6 e_7 - x_7 e_6 - x_8 e_9 \\
&\quad + x_9 e_8 + x_{10} e_{11} - x_{11} e_{10} + x_{12} e_{13} - x_{13} e_{12} - x_{14} e_{15} + x_{15} e_{14} \\
L_x(e_2) &= \mathcal{X} \otimes_s e_2 \\
&= x_0 e_2 + x_1 e_3 - x_2 e_0 - x_3 e_1 - x_4 e_6 - x_5 e_7 + x_6 e_4 + x_7 e_5 - x_8 e_{10} \\
&\quad - x_9 e_{11} + x_{10} e_8 + x_{11} e_9 + x_{12} e_{14} + x_{13} e_{15} - x_{14} e_{12} - x_{15} e_{13} \\
L_x(e_3) &= \mathcal{X} \otimes_s e_3 \\
&= x_0 e_3 - x_1 e_2 + x_2 e_1 - x_3 e_0 - x_4 e_7 + x_5 e_6 - x_6 e_5 + x_7 e_4 - x_8 e_{11} \\
&\quad + x_9 e_{10} - x_{10} e_9 + x_{11} e_8 + x_{12} e_{15} - x_{13} e_{14} + x_{14} e_{13} - x_{15} e_{12} \\
L_x(e_4) &= \mathcal{X} \otimes_s e_4 \\
&= x_0 e_4 + x_1 e_5 + x_2 e_6 + x_3 e_7 - x_4 e_0 - x_5 e_1 - x_6 e_2 - x_7 e_3 - x_8 e_{12} \\
&\quad - x_9 e_{13} - x_{10} e_{14} - x_{11} e_{15} + x_{12} e_8 + x_{13} e_9 + x_{14} e_{10} + x_{15} e_{11} \\
L_x(e_5) &= \mathcal{X} \otimes_s e_5 \\
&= x_0 e_5 - x_1 e_4 + x_2 e_7 - x_3 e_6 + x_4 e_1 - x_5 e_0 + x_6 e_3 - x_7 e_2 - x_8 e_{13} \\
&\quad + x_9 e_{12} - x_{10} e_{15} + x_{11} e_{14} - x_{12} e_9 + x_{13} e_8 - x_{14} e_{11} + x_{15} e_{10} \\
L_x(e_6) &= \mathcal{X} \otimes_s e_6 \\
&= x_0 e_6 - x_1 e_7 - x_2 e_4 + x_3 e_5 + x_4 e_2 - x_5 e_3 - x_6 e_0 + x_7 e_1 - x_8 e_{14} \\
&\quad + x_9 e_{15} + x_{10} e_{12} - x_{11} e_{13} - x_{12} e_{10} + x_{13} e_{11} + x_{14} e_8 - x_{15} e_9 \\
L_x(e_7) &= \mathcal{X} \otimes_s e_7 \\
&= x_0 e_7 + x_1 e_6 - x_2 e_5 - x_3 e_4 + x_4 e_3 + x_5 e_2 - x_6 e_1 - x_7 e_0 - x_8 e_{15} \\
&\quad - x_9 e_{14} + x_{10} e_{13} + x_{11} e_{12} - x_{12} e_{11} - x_{13} e_{10} + x_{14} e_9 + x_{15} e_8 \\
L_x(e_8) &= \mathcal{X} \otimes_s e_8 \\
&= x_0 e_8 + x_1 e_9 + x_2 e_{10} + x_3 e_{11} + x_4 e_{12} + x_5 e_{13} + x_6 e_{14} + x_7 e_{15} - x_8 e_0 \\
&\quad - x_9 e_1 - x_{10} e_2 - x_{11} e_3 - x_{12} e_4 - x_{13} e_5 - x_{14} e_6 - x_{15} e_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_x(e_9) &= \mathcal{X} \otimes_s e_9 \\
&= x_0 e_9 - x_1 e_8 + x_2 e_{11} - x_3 e_{10} + x_4 e_{13} - x_5 e_{12} - x_6 e_{15} + x_7 e_{14} + x_8 e_1 \\
&\quad - x_9 e_0 + x_{10} e_3 - x_{11} e_2 + x_{12} e_5 - x_{13} e_4 - x_{14} e_7 + x_{15} e_6 \\
L_x(e_{10}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{10} \\
&= x_0 e_{10} - x_1 e_{11} - x_2 e_8 + x_3 e_9 + x_4 e_{14} + x_5 e_{15} - x_6 e_{12} - x_7 e_{13} + x_8 e_2 \\
&\quad - x_9 e_3 - x_{10} e_0 + x_{11} e_1 + x_{12} e_6 + x_{13} e_7 - x_{14} e_4 - x_{15} e_5 \\
L_x(e_{11}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{11} \\
&= x_0 e_{11} + x_1 e_{10} - x_2 e_9 - x_3 e_8 + x_4 e_{15} - x_5 e_{14} + x_6 e_{13} - x_7 e_{12} + x_8 e_3 \\
&\quad + x_9 e_2 - x_{10} e_1 - x_{11} e_0 + x_{12} e_7 - x_{13} e_6 + x_{14} e_5 - x_{15} e_4 \\
L_x(e_{12}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{12} \\
&= x_0 e_{12} - x_1 e_{13} - x_2 e_{14} - x_3 e_{15} - x_4 e_8 + x_5 e_9 + x_6 e_{10} + x_7 e_{11} \\
&\quad + x_8 e_4 - x_9 e_5 - x_{10} e_6 - x_{11} e_7 - x_{12} e_0 + x_{13} e_1 + x_{14} e_2 + x_{15} e_3 \\
L_x(e_{13}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{13} \\
&= x_0 e_{13} + x_1 e_{12} - x_2 e_{15} + x_3 e_{14} - x_4 e_9 - x_5 e_8 - x_6 e_{11} + x_7 e_{10} \\
&\quad + x_8 e_5 + x_9 e_4 - x_{10} e_7 + x_{11} e_6 - x_{12} e_{12} - x_{13} e_0 - x_{14} e_3 + x_{15} e_2 \\
L_x(e_{14}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{14} \\
&= x_0 e_{14} + x_1 e_{15} + x_2 e_{12} - x_3 e_{13} - x_4 e_{10} + x_5 e_{11} - x_6 e_8 - x_7 e_9 \\
&\quad + x_8 e_6 + x_9 e_7 + x_{10} e_4 - x_{11} e_5 - x_{12} e_2 + x_{13} e_3 - x_{14} e_0 - x_{15} e_1 \\
L_x(e_{15}) &= \mathcal{X} \otimes_s e_{15} \\
&= x_0 e_{15} - x_1 e_{14} + x_2 e_{13} + x_3 e_{12} - x_4 e_{11} - x_5 e_{10} + x_6 e_9 - x_7 e_8 \\
&\quad + x_8 e_7 - x_9 e_6 + x_{10} e_5 + x_{11} e_4 - x_{12} e_3 - x_{13} e_2 + x_{14} e_1 - x_{15} e_0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_x(e_0) &= e_0 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 + x_8 e_8 \\
&\quad + x_9 e_9 + x_{10} e_{10} + x_{11} e_{11} + x_{12} e_{12} + x_{13} e_{13} + x_{14} e_{14} + x_{15} e_{15} \\
R_x(e_1) &= e_1 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_1 - x_1 e_0 + x_2 e_3 - x_3 e_2 + x_4 e_5 - x_5 e_4 - x_6 e_7 + x_7 e_6 + x_8 e_9 \\
&\quad - x_9 e_8 - x_{10} e_{11} + x_{11} e_{10} - x_{12} e_{13} + x_{13} e_{12} + x_{14} e_{15} - x_{15} e_{14} \\
R_x(e_2) &= e_2 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_2 - x_1 e_3 - x_2 e_0 + x_3 e_1 + x_4 e_6 + x_5 e_7 - x_6 e_4 - x_7 e_5 + x_8 e_{10} \\
&\quad + x_9 e_{11} - x_{10} e_8 - x_{11} e_9 - x_{12} e_{14} - x_{13} e_{15} + x_{14} e_{12} + x_{15} e_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(e_3) &= e_3 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_3 + x_1 e_2 - x_2 e_1 - x_3 e_0 + x_4 e_7 - x_5 e_6 + x_6 e_5 - x_7 e_4 + x_8 e_{11} \\
&\quad - x_9 e_{10} + x_{10} e_9 - x_{11} e_8 - x_{12} e_{15} + x_{13} e_{14} - x_{14} e_{13} + x_{15} e_{12} \\
R_x(e_4) &= e_4 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_4 - x_1 e_5 - x_2 e_6 - x_3 e_7 - x_4 e_0 + x_5 e_1 + x_6 e_2 + x_7 e_3 + x_8 e_{12} \\
&\quad + x_9 e_{13} + x_{10} e_{14} + x_{11} e_{15} - x_{12} e_8 - x_{13} e_9 - x_{14} e_{10} - x_{15} e_{11} \\
R_x(e_5) &= e_5 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_5 + x_1 e_4 - x_2 e_7 + x_3 e_6 - x_4 e_1 - x_5 e_0 - x_6 e_3 + x_7 e_2 + x_8 e_{13} \\
&\quad - x_9 e_{12} + x_{10} e_{15} - x_{11} e_{14} + x_{12} e_9 - x_{13} e_8 + x_{14} e_{11} - x_{15} e_{10} \\
R_x(e_6) &= e_6 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_6 + x_1 e_7 + x_2 e_4 - x_3 e_5 - x_4 e_2 + x_5 e_3 + x_6 e_0 - x_7 e_1 + x_8 e_{14} \\
&\quad - x_9 e_{15} - x_{10} e_{12} + x_{11} e_{13} + x_{12} e_{10} - x_{13} e_{11} - x_{14} e_8 + x_{15} e_9 \\
R_x(e_7) &= e_7 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_7 - x_1 e_6 + x_2 e_5 + x_3 e_4 - x_4 e_3 - x_5 e_2 + x_6 e_1 - x_7 e_0 + x_8 e_{15} \\
&\quad + x_9 e_{14} - x_{10} e_{13} - x_{11} e_{12} + x_{12} e_{11} + x_{13} e_{10} - x_{14} e_9 - x_{15} e_8 \\
R_x(e_8) &= e_8 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_8 - x_1 e_9 - x_2 e_{10} - x_3 e_{11} - x_4 e_{12} - x_5 e_{13} - x_6 e_{14} - x_7 e_{15} - x_8 e_0 \\
&\quad + x_9 e_1 + x_{10} e_2 + x_{11} e_3 + x_{12} e_4 + x_{13} e_5 + x_{14} e_6 + x_{15} e_7 \\
R_x(e_9) &= e_9 \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_9 + x_1 e_8 - x_2 e_{11} + x_3 e_{10} - x_4 e_{13} + x_5 e_{12} + x_6 e_{15} - x_7 e_{14} - x_8 e_1 \\
&\quad - x_9 e_0 - x_{10} e_3 + x_{11} e_2 - x_{12} e_5 + x_{13} e_4 + x_{14} e_7 - x_{15} e_6 \\
R_x(e_{10}) &= e_{10} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{10} + x_1 e_{11} + x_2 e_8 - x_3 e_9 - x_4 e_{14} - x_5 e_{15} + x_6 e_{12} + x_7 e_{13} - x_8 e_2 \\
&\quad + x_9 e_3 - x_{10} e_0 - x_{11} e_1 - x_{12} e_6 - x_{13} e_7 + x_{14} e_4 + x_{15} e_5 \\
R_x(e_{11}) &= e_{11} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{11} - x_1 e_{10} + x_2 e_9 + x_3 e_8 - x_4 e_{15} + x_5 e_{14} - x_6 e_{13} + x_7 e_{12} - x_8 e_3 \\
&\quad - x_9 e_2 + x_{10} e_1 - x_{11} e_0 - x_{12} e_7 + x_{13} e_6 - x_{14} e_5 + x_{15} e_4 \\
R_x(e_{12}) &= e_{12} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{12} + x_1 e_{13} + x_2 e_{14} + x_3 e_{15} + x_4 e_8 - x_5 e_9 - x_6 e_{10} - x_7 e_{11} \\
&\quad - x_8 e_4 + x_9 e_5 + x_{10} e_6 + x_{11} e_7 - x_{12} e_0 - x_{13} e_1 - x_{14} e_2 - x_{15} e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(e_{13}) &= e_{13} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{13} - x_1 e_{12} + x_2 e_{15} - x_3 e_{14} + x_4 e_9 - x_5 e_8 + e_{11} - x_7 e_{10} - x_8 e_5 \\
&\quad - x_9 e_4 + x_{10} e_7 - x_{11} e_6 - x_{12} e_{12} - x_{13} e_0 + x_{14} e_3 - x_{15} e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(e_{14}) &= e_{14} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{14} - x_1 e_{15} - x_2 e_{12} + x_3 e_{13} + x_4 e_{10} - x_5 e_{11} + x_6 e_8 + x_7 e_9 \\
&\quad - x_8 e_6 - x_9 e_7 - x_{10} e_4 + x_{11} e_5 + x_{12} e_2 - x_{13} e_3 - x_{14} e_0 + x_{15} e_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_x(e_{15}) &= e_{15} \otimes_s \mathcal{X} \\
&= x_0 e_{15} + x_1 e_{14} - x_2 e_{13} - x_3 e_{12} + x_4 e_{11} + x_5 e_{10} - x_6 e_9 + x_7 e_8 \\
&\quad - x_8 e_7 + x_9 e_6 - x_{10} e_5 - x_{11} e_4 + x_{12} e_3 + x_{13} e_2 - x_{14} e_1 - x_{15} e_0
\end{aligned}$$

olduğundan ve $\mathbb{S} = \text{Sp}\{E_{16}\}$ olduğu göz önüne alınırsa sedeniyonların sırasıyla sol ve sağ reel matris gösterimleri sırasıyla $[\mathbb{S}]_{16 \times 16}^L$ ve $[\mathbb{S}]_{16 \times 16}^R$ olmak üzere

$$[\mathbb{S}]_{16 \times 16}^L = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 & -x_9 & -x_{10} & -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 & x_7 & -x_6 & -x_9 & x_8 & x_{11} & x_{10} & x_{13} & -x_{12} & -x_{15} & x_{14} \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & x_6 & -x_7 & x_4 & x_5 & -x_{10} & -x_{11} & x_8 & x_9 & x_{14} & x_{15} & -x_{12} & -x_{13} \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & -x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & -x_{11} & x_{10} & -x_9 & x_8 & x_{15} & -x_{14} & x_{13} & -x_{12} \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_{12} & -x_{13} & x_{14} & -x_{15} & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \\ x_5 & -x_4 & x_7 & x_6 & x_1 & x_0 & x_3 & x_2 & -x_{13} & x_{12} & -x_{15} & x_{14} & -x_9 & x_8 & -x_{11} & x_{10} \\ x_6 & -x_7 & -x_4 & x_5 & x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 & -x_{14} & x_{15} & x_{12} & -x_{13} & -x_{10} & x_{11} & x_8 & -x_9 \\ x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 & -x_{15} & -x_{14} & x_{13} & x_{12} & -x_{11} & -x_{10} & x_9 & x_8 \\ x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_9 & -x_8 & x_{11} & -x_{10} & x_{13} & -x_{12} & -x_{15} & x_{14} & x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 & x_5 & -x_4 & -x_7 & x_6 \\ x_{10} & -x_{11} & -x_8 & x_9 & x_{14} & x_{15} & -x_{12} & -x_{13} & x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 & x_6 & x_7 & -x_4 & -x_5 \\ x_{11} & x_{10} & -x_9 & -x_8 & x_{15} & -x_{14} & -x_{13} & -x_{12} & x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 & x_7 & -x_6 & x_5 & -x_4 \\ x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} & -x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{13} & x_{12} & -x_{15} & x_{14} & -x_9 & -x_8 & -x_{11} & x_{10} & x_5 & x_4 & -x_7 & x_6 & -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_{14} & x_{15} & x_{12} & -x_{13} & -x_{10} & x_{11} & -x_8 & -x_9 & x_6 & x_7 & x_4 & -x_5 & -x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_{15} & -x_{14} & x_{13} & x_{12} & -x_{11} & -x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & -x_6 & x_5 & x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

ve

$$[\mathbb{S}]_{16 \times 16}^R = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 & -x_9 & -x_{10} & -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 & x_5 & -x_4 & -x_7 & x_6 & x_9 & x_8 & -x_{11} & x_{10} & -x_{13} & x_{12} & x_{15} & -x_{14} \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 & x_6 & -x_7 & x_4 & x_5 & -x_{10} & -x_{11} & x_8 & x_9 & x_{14} & x_{15} & -x_{12} & -x_{13} \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_7 & -x_6 & x_5 & -x_4 & x_{11} & -x_{10} & x_9 & -x_8 & -x_{15} & x_{14} & -x_{13} & x_{12} \\ x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & -x_8 & -x_9 & -x_{10} & -x_{11} \\ x_5 & x_4 & -x_7 & x_6 & -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & x_{13} & -x_{12} & x_{15} & -x_{14} & x_9 & -x_8 & x_{11} & -x_{10} \\ x_6 & -x_7 & x_4 & -x_5 & -x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & x_{14} & -x_{15} & -x_{12} & x_{13} & x_{10} & -x_{11} & -x_8 & x_9 \\ x_7 & -x_6 & x_5 & x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_{15} & x_{14} & -x_{13} & -x_{12} & x_{11} & x_{10} & -x_9 & -x_8 \\ x_8 & -x_9 & -x_{10} & -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & -x_{15} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_9 & x_8 & -x_{11} & x_{10} & -x_{13} & x_{12} & x_{15} & -x_{14} & -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 & x_7 & -x_6 \\ x_{10} & -x_{11} & x_8 & -x_9 & -x_{14} & -x_{15} & x_{12} & x_{13} & -x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & -x_6 & -x_7 & x_4 & x_5 \\ x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & -x_{15} & x_{14} & -x_{13} & x_{12} & -x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & -x_7 & x_6 & -x_5 & x_4 \\ x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_8 & -x_9 & -x_{10} & -x_{11} & -x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_{13} & -x_{12} & x_{15} & -x_{14} & x_9 & x_8 & x_{11} & -x_{10} & -x_5 & -x_4 & x_7 & -x_6 & x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_{14} & -x_{15} & -x_{12} & x_{13} & x_{10} & -x_{11} & x_8 & x_9 & -x_6 & -x_7 & -x_4 & x_5 & x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_{15} & x_{14} & -x_{13} & -x_{12} & x_{11} & -x_{10} & -x_9 & x_8 & -x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

1.3. Sedeniyonlarda Fonksiyon Teorileri

Bu bölümde bazı özel sedeniyonik fonksiyonlar tanımları ve bu fonksiyonların regülerlik şartları incelenmiştir. Daha sonra sedeniyonik değişkenli regüler fonksiyonlara örnekler verilmiştir. Cauchy-Riemann diferansiyellenebilme şartları hiper kompleks değişkenli fonksiyonlar için uygulandığında pek çok kısıtlayıcı ve ilgi çekici olmayan durumla karşılaşmıştır. İlk olarak kuaterniyonlar için (Fueter-Helvetici, 1935) tarafından geliştirilen regüler fonksiyonlar ve şartları daha sonradan Cayley-Dickson cebirleri için genelleştirilip geliştirilmiştir.

1.3.1. Sedeniyonik Fonksiyonlarda Regülerlik

Imaeda K. ve Imaeda M. tarafından sedeniyonik fonksiyonların regülerlik şartları 16 boyutlu Euclid uzayında fonksiyonun integralinin varyasyonları cinsinden tanımlanmıştır (Imaeda-Imaeda, 2000).

$Z = \sum_{i=0}^{15} z_i e_i$; $x_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere sedeniyon değişkenli $F(Z)$ fonksiyonu için S^{15} kapalı hiper yüzeyi üzerinde bir integral verilsin.

$$J[S^{15}] = \int_{S^{15}} F(Z) dZ$$

S^{15} hiperyüzeyinin yüzey elementi, dZ ; dz_i 'nin diferansiyelleri cinsinden ya da yönlü kosinüs γ_i ve hacim elementi $d\sigma$ cinsinden yazılır.

$$dZ = \sum_{i=0}^{15} \partial z_i e_i = \sum_{i=0}^{15} \gamma_i d\sigma e_i$$

S^{15} hiperyüzeyinde Stokes teoremi kullanılırsa $J[S^{15}]$ 'i, V^{16} kapalı yüzeyi üzerinde hacim integrali olarak

$$J[S^{15}] = \int_{V^{16}} (DF(Z)) dV$$

şeklinde yazılır. Burada

$$D = \sum_{i=0}^{15} \partial_i e_i, dV = \prod_{i=0}^{15} dz_i \text{ olarak yazılır.}$$

S_A^{15} yüzeyi üzerindeki bir Z noktasının komşuluğunda S_A^{15} 'ten S_B^{15} 'e tanımlı sonsuz küçüklükte bir yüzey verilsin. Bu iki yüzey tarafından kapatılan hacim

$$\delta V = \int_{S_A-S_B} dV^{16} \in \mathbb{R} \text{ biçiminde yazılır.}$$

Burada

$$\frac{\delta J[S]}{\delta S} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{[J[S_A^{15}] - J[S_B^{15}]]}{\delta V} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{[\int_{\delta V} (DF) dV]}{\delta V} = DF(Z)$$

Eğer $J[S]$, Z_0 noktasında yüzeyin sonsuz küçük değişim altında sabit ise $F(Z)$ fonksiyonu $Z_0 \in S^{15}$ noktasında sol regülerdir.

$\frac{\delta J[S]}{\delta S}|_{z=z_0} = DF(Z)|_{z=z_0} = 0$ Burada $DF(Z) = 0$ olması S^{15} 'in seçiminden bağımsızdır. Sağ regülerlik kavramı da benzer şekilde tanımlanır (Imaeda-Imaeda, 2000).

1.3.2. Bazı Özel Tipte Sedeniyonik Fonksiyonlarda Regülerlik

Sedeniyonik değişkenli bazı regüler fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1.3.2.1. Analitik Fonksiyonlar

$$(z) = u(x_0, x) + iv(x_0, x)$$

$z = x_0 + ix$ kompleks değişkeninde $i = \sqrt{-1}$, pür sedeniyon ile yer değiştirirse

$$i \rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{15} x_j e_j}{x},$$

Burada

$$x = \sqrt{\sum_{j=1}^{15} x_j^2} \text{ olur ve fonksiyon aşağıdaki forma dönüşür.}$$

$$G(X) = u(x_0, x) + \frac{\sum_{j=1}^{15} v(x_0, x) x_j e_j}{x}$$

ve burada X sedeniyonik değişkendir.

$$F(X) = \mathcal{D}^7 G(X); \mathcal{D} = D\bar{D} = \sum_{i=1}^{15} \delta_i^2$$

fonksiyonu sol regülerdir (Imaeda-Imaeda, 2000).

1.3.2.2. Polinom Fonksiyonlar

Sedeniyonik değişkenli bir F fonksiyonu verilsin.

$$F_n(X, T) = \frac{[(XT + TX)]^2}{2} = \left[\sum_{j=1}^{15} (x_0 e_j - x_j) t_j \right]^n$$

Burada $X = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$, $T = \sum_{j=1}^{15} t_j e_j \in \mathbb{S}$ olarak tanımlanır.

$F_n(X, T)$ fonksiyonu kuvvet alma işleminin birleşme özelliği göz önünde alınır, t_k 'da kuvvet serisi olarak yazılır.

$$F_n(X, T) = \sum_{(n_r)} n! \mathbb{P}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{15}}(x_0, x_1, \dots, x_{15}) t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_{15}^{n_{15}}$$

Burada $n = \sum_{j=1}^{15} n_j$ ve $\mathbb{P}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{15}}$ ise sedeniyonik değişkenin polinom fonksiyonu

$$\mathbb{P}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{15}}(x_0, x_1, \dots, x_{15}) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_r)} (x_0 e_{k_1} - x_{k_1}) \dots (x_0 e_{k_n} - x_{k_n})$$

Yukarıda belirtilen serinin $(k_r) = (k_1, \dots, k_n)$, $\{k_1, \dots, k_n\} = \{1, 2, \dots, 15\}$ tüm olası permütasyonlarıdır ve $\forall 1, 2, \dots, 15$ için her defasında $n_1, n_2, \dots, n_{15}$ 'e karşılık gelir. Buradan hareketle $F_n(X, T)$ ve $\mathbb{P}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{15}}$ polinomları sağdan ve soldan D-regülerdir (Imaeda-Imaeda, 2000).

1.3.2.3. Üstel Fonksiyon

Sedeniyonik değişkenli bir F fonksiyonu verilsin. $F(X) = \sum_{j=1}^{15} (x_0 e_j - x_j)$ olmak üzere sedeniyonlarda üstel fonksiyonunu $\text{Exp}[iF(X, T)] = \frac{i^n}{n!} F^n(X, T)$ olarak tanımlanır. Bu fonksiyon sağdan ve soldan D-regülerdir (Imaeda-Imaeda, 2000).

1.3.2.4. Cauchy Tipi Çekirdek Fonksiyonu

X değişkeninin $H(X) = \frac{X}{\|X\|}$ fonksiyonu için $2^N (= m)$ boyutlu Cayley-Dickson cebirlerinde aşağıdaki ifadeler kolayca gösterilebilir.

$$\mathcal{D}^n H(X) = \frac{C_n H(X)}{(\|X\|)^n}, n \in \mathbb{Z}^+,$$

Burada $C_n = (-1)^n 2^n n! \prod_{k=1}^n (m - 2k)$ ve $\mathcal{D} = D\bar{D} = \sum_{i=1}^{15} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ olarak tanımlanır ve burada m boyutlu Cayley-Dickson cebirlerinde $\mathcal{D}^n H(X)$ sağdan ve soldan D-regülerdir (Imaeda-Imaeda, 2000).

1.4. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ Katsayılı Sedeniyonlar ve Özellikleri

Cayley-Dickson süreci ile elde edilen cebirlerde $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S}$ ilişkisi olduğundan sedeniyonlar kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı olarak ifade edilebilir. Bu bölümde bu ifadelerdeki işlemleri ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

1.4.1. Sedeniyonların Oktoniyonik Katsayılı Olarak Gösterilmesi

$\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$ sedeniyonu verilsin. $e_1 e_8 = e_9, e_2 e_8 = e_{10}, e_3 e_8 = e_{11}, e_4 e_8 = e_{12}, e_5 e_8 = e_{13}, e_6 e_8 = e_{14}, e_7 e_8 = e_{15}$ olduğundan sedeniyonlar iki farklı oktoniyon cinsinden

$$\mathcal{X} = (x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7) + (x_8 e_0 + x_9 e_1 + x_{10} e_2 + x_{11} e_3 + x_{12} e_4 + x_{13} e_5 + x_{14} e_6 + x_{15} e_7) e_8$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\mathcal{O}_1 = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 \in \mathbb{O}$$

$$\mathcal{O}_2 = x_8 e_0 + x_9 e_1 + x_{10} e_2 + x_{11} e_3 + x_{12} e_4 + x_{13} e_5 + x_{14} e_6 + x_{15} e_7 \in \mathbb{O}$$

ve $e = e_8$ denirse $\mathcal{X}$ reel sedeniyonu oktoniyonik katsayılı olarak

$$\mathcal{X} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e$$

şeklinde yazılır. Oktoniyonik katsayılı sedeniyonların kümesini $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki ifadeler göz önüne alınırsa $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi

$$\mathbb{S}_{\mathbb{O}} = \{ \mathcal{X} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e \mid \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathbb{O}, e^2 = -1 \}$$

şeklinde tanımlanır (Bektaş, 2021).

Tanım 1.19. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4 \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{X} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e, \mathcal{Y} = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 e$ olmak üzere

$$\oplus_{\mathbb{O}} : \mathbb{S}_{\mathbb{O}} \times \mathbb{S}_{\mathbb{O}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{O}}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\rightarrow \mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y} = (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 e) \\ &= (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4) e \end{aligned}$$

olarak tanımlanan işleme $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi üzerinde toplama işlemi denir. Burada $+$ işlemi kısaca oktoniyonik toplama işlemini temsil etmektedir (Bektaş, 2021).

Teorem 1.9. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6 \in \mathbb{O}$ olmak üzere $\mathcal{X} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e$, $\mathcal{Y} = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 e$ ve $\mathcal{Z} = \mathcal{O}_5 + \mathcal{O}_6 e \in \mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ olmak üzere oktoniyonik katsayılı sedeniyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $(\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y}) \oplus_s \mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{Y} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Z})$
2. $0_s \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{X} = \mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} 0_s = \mathcal{X}$
3. $\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ vardır.
4. $\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{X}$

İspat :

$$\begin{aligned}
 1. \quad (\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y}) \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Z} &= ((\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 e)) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_5 + \mathcal{O}_6 e) \\
 &= ((\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3) + (\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4) e) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_5 + \mathcal{O}_6 e) \\
 &= ((\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_5) + (\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4 + \mathcal{O}_6) e) \\
 &= (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e) \oplus_{\mathbb{O}} ((\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_5) + (\mathcal{O}_4 + \mathcal{O}_6) e) \\
 &= (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e) \oplus_{\mathbb{O}} ((\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 e) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_5 + \mathcal{O}_6 e)) \\
 &= \mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{Y} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Z})
 \end{aligned}$$

$\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi $\oplus_{\mathbb{O}}$ işlemine göre birleşme özelliği sağlar.

2. $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi üzerinde toplamsal birim eleman $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{O}}} = 0_{\mathbb{O}} + 0_{\mathbb{O}} e = 0_s$ olarak yazılır.

Burada $0_{\mathbb{O}}$ oktoniyonik toplamsal birim elemandır.

$$\begin{aligned}
 0_s \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{X} &= (0_{\mathbb{O}} + 0_{\mathbb{O}} e) \oplus_{\mathbb{O}} (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e) \\
 &= (0_{\mathbb{O}} + \mathcal{O}_1) + (0_{\mathbb{O}} + \mathcal{O}_2) e \\
 &= \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e \\
 &= \mathcal{X}
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} 0_s = \mathcal{X}$ olduğu gösterilir. $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi $\oplus_{\mathbb{O}}$ işlemine göre birim elemanı vardır ve $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{O}}} = 0_{\mathbb{O}} + 0_{\mathbb{O}} e = 0_s$ sedeniyonudur.

3. $\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y} = 0_s$ olsun. O halde $\mathcal{X} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{Y} = (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3) + (\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4) e = 0_{\mathbb{O}} + 0_{\mathbb{O}} e$ olur. Buradan $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3 = 0_{\mathbb{O}}$ ve $(\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4) e = 0_{\mathbb{O}}$ elde edilir. $\mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_1$ ve $\mathcal{O}_4 = -\mathcal{O}_2$ olur. Yani $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} = -\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 e$ ifadesi oktoniyonik katsayılı sedeniyondur. Benzer şekilde $\mathcal{Y} \oplus_{\mathbb{O}} \mathcal{X} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} \in \mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ vardır.

$$\begin{aligned}
4. \quad \mathcal{X} \oplus_o \mathcal{Y} &= (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_3) + (\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_4)e \\
&= (\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_1) + (\mathcal{O}_4 + \mathcal{O}_2)e \\
&= \mathcal{Y} \oplus_o \mathcal{X}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{S}_0$ kümesi $\oplus_o$ işlemine göre değişme özelliği sağlar.

Sonuç 1.7. $(\mathbb{S}_0, \oplus_o)$ yapısı Abel gruptur.

Tanım 1.20. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4 \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{X} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2e$, $\mathcal{Y} = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4e$ ve $e^2 = -1$ için

$$\otimes_o: \mathbb{S}_0 \times \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_0$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \otimes_o \mathcal{Y} &= (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2e) \otimes_o (\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4e) \\
&= (\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3 - \overline{\mathcal{O}_4}\mathcal{O}_2) + (\mathcal{O}_2\overline{\mathcal{O}_3} + \mathcal{O}_4\mathcal{O}_1)e
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan işleme $\mathbb{S}_0$ kümesi üzerinde çarpma işlemi denir (Bektaş, 2021).

Sonuç 1.8. $(\mathbb{S}_0, \oplus_o, \otimes_o)$ yapısı halka değildir.

1.4.2. Sedeniyonların Kuaterniyonik Katsayılı Olarak Gösterilmesi

$\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$ sedeniyonu verilsin. $e_1 e_4 = e_5$, $e_2 e_4 = e_6$, $e_1 e_8 = e_9$, $e_4 e_3 = e_7$, $e_2 e_8 = e_{10}$, $e_3 e_8 = e_{11}$, $e_1 e_{12} = -e_{13}$, $e_2 e_{12} = -e_{14}$, $e_3 e_{12} = -e_{15}$ olduğundan sedeniyonlar dört farklı kuaterniyonik sayı cinsinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + (x_4 e_0 + x_5 e_1 + x_6 e_2 + x_7 e_3) e_4 \\
&\quad + (x_8 e_0 + x_9 e_1 + x_{10} e_2 + x_{11} e_3) e_8 + (x_{12} e_0 - x_{13} e_1 - x_{14} e_2 - x_{15} e_3) e_{12}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$q_1 = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{H}$$

$$q_2 = x_4 e_0 + x_5 e_1 + x_6 e_2 + x_7 e_3 \in \mathbb{H}$$

$$q_3 = x_8 e_0 + x_9 e_1 + x_{10} e_2 + x_{11} e_3 \in \mathbb{H}$$

$$q_4 = x_{12} e_0 - x_{13} e_1 - x_{14} e_2 - x_{15} e_3 \in \mathbb{H}$$

ve e_4, e_8, e_{12} sanal birim olmak üzere $\mathcal{X}$ reel sedeniyonu kuaterniyonik katsayılı olarak

$$\mathcal{X} = q_1 + q_2 e_4 + q_3 e_8 + q_4 e_{12} = \sum_{i=0}^4 q_i e_{4i-4}$$

şeklinde yazılır.

Kuaterniyonik katsayılı sedeniyonların kümesini $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ ile gösterilir. Yukarıdaki ifadeler göz önüne alınırsa $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi;

$\mathbb{S}_{\mathbb{H}} = \{ \mathcal{X} = q_1 + q_2 e_4 + q_3 e_8 + q_4 e_{12} \mid q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{H}, i = 1, 2, 3, 4, e_i^2 = -1 \}$ olarak tanımlanır (Bektaş, 2021).

Tanım 1.21. $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i, p_i \in \mathbb{H}$, $\sum_{i=1}^4 q_i e_{4i-4}$ ve $\sum_{i=1}^4 p_i e_{4i-4} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ için

$$\oplus_h : \mathbb{S}_{\mathbb{H}} \times \mathbb{S}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^4 (q_i + p_i) e_{4i-4}$$

olarak tanımlanan işleme $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi üzerinde toplama işleme denir. Burada $+$ işlemi kısaca kuaterniyonik toplama işlemini temsil etmektedir.

Teorem 1.10. $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i, p_i, t_i \in \mathbb{H}$; $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^4 q_i e_{4i-4}$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^4 p_i e_{4i-4}$ ve $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^4 t_i e_{4i-4} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ olmak üzere kuaterniyonik katsayılı sedeniyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $(\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y}) \oplus_h \mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus_h (\mathcal{Y} \oplus_h \mathcal{Z})$
2. $0_s \oplus_h \mathcal{X} = \mathcal{X} \oplus_h 0_s = \mathcal{X}$
3. $\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} \in \mathbb{S}$ vardır.
4. $\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \oplus_h \mathcal{X}$

İspat :

$$\begin{aligned} 1. (\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y}) \oplus_h \mathcal{Z} &= \left(\sum_{i=1}^4 (q_i + p_i) e_{4i-4} \right) \oplus_h \left(\sum_{i=1}^4 t_i e_{4i-4} \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 ((q_i + p_i) e_{4i-4} + t_i e_{4i-4}) \\ &= \sum_{i=1}^4 (q_i + p_i + t_i) e_{4i-4} \\ &= \left(\sum_{i=1}^4 (q_i e_{4i-4} + (p_i + t_i) e_{4i-4}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^4 q_i e_{4i-4} \right) \oplus_h \left(\sum_{i=1}^4 (p_i + t_i) e_{4i-4} \right) \\
&= \mathcal{X} \oplus_h (\mathcal{Y} \oplus_h \mathcal{Z})
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi $\oplus_h$ işlemine göre birleşme özelliğini sağlar.

2. $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kuaterniyonik katsayılı sedeniyonlar kümesi üzerinde toplamsal birim eleman $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}} = 0_{\mathbb{H}} + 0_{\mathbb{H}}e_4 + 0_{\mathbb{H}}e_8 + 0_{\mathbb{H}}e_{12} = 0_s$ olarak bulunur. Burada $0_{\mathbb{H}}$ kuaterniyonik toplamsal birim elemandır.

$$\begin{aligned}
0_s \oplus_h \mathcal{X} &= \left(\sum_{i=1}^4 (0_{\mathbb{H}} + q_i) e_{4i-4} \right) \\
&= \sum_{i=1}^4 q_i e_{4i-4} \\
&= \mathcal{X}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\mathcal{X} \oplus_h 0_s = \mathcal{X}$ olduğu gösterilir. $\oplus_h$ işlemine göre $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesinin birim elemanı vardır. Bu birim eleman $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{H}}}$ sedeniyonudur.

3. $\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} = 0_s$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} &= \left(\sum_{i=1}^4 (q_i + p_i) e_{4i-4} \right) \\
&= \sum_{i=1}^4 0_{\mathbb{H}} e_{4i-4}
\end{aligned}$$

olur. Buradan $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i + p_i = 0_{\mathbb{H}}$ elde edilir. $\mathbb{H}$ abel grup olduğundan

$p_i = -q_i$ elde edilir. $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} = -q_1 - q_2 e_4 - q_3 e_8 - q_4 e_{12}$ ifadesi kuaterniyonik katsayılı sedeniyondur. Benzer şekilde $\mathcal{Y} \oplus_h \mathcal{X} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ vardır.

$$\begin{aligned}
4. \mathcal{X} \oplus_h \mathcal{Y} &= \sum_{i=1}^4 (q_i + p_i) e_{4i-4} \\
&= \sum_{i=1}^4 (p_i + q_i) e_{4i-4}
\end{aligned}$$

$$= \mathcal{Y} \oplus_h \mathcal{X}$$

olduğundan $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi $\oplus_h$ işlemine göre değişme özelliği sağlar.

Sonuç 1.9. $(\mathbb{S}_{\mathbb{H}}, \oplus_h)$ yapısı Abel gruptur.

Tanım 1.22. $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i, p_i \in \mathbb{H}$, $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^4 q_i e_{4i-4}$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^4 p_i e_{4i-4}$ kuaterniyonik katsayılı sedeniyonları için

$$\otimes_h: \mathbb{S}_{\mathbb{H}} \times \mathbb{S}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \otimes_h \mathcal{Y} = & (q_1 p_1 - q_2 \bar{p}_2 - q_3 \bar{p}_3 - q_4 \bar{p}_4) \\ & + (q_1 p_2 + q_2 \bar{p}_1 + q_3 \bar{p}_4 - q_4 \bar{p}_3) e_4 \\ & + (q_1 p_3 - q_2 \bar{p}_4 + q_3 \bar{p}_1 + q_4 \bar{p}_2) e_8 \\ & + (q_1 p_4 + q_2 \bar{p}_3 - q_3 \bar{p}_2 + q_4 \bar{p}_1) e_{12} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan işleme $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi denir (Bektaş, 2021).

Sonuç 1.10. $(\mathbb{S}_{\mathbb{H}}, \oplus_h, \otimes_h)$ yapısı halka değildir.

1.4.3. Sedeniyonların Kompleks Katsayılı Olarak Gösterilmesi

$\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{15} x_i e_i$ sedeniyonu verilsin. $e_1 e_2 = e_3$, $e_1 e_4 = e_5$, $e_1 e_6 = -e_7$, $e_1 e_8 = e_9$, $e_1 e_{14} = e_{15}$, $e_1 e_{10} = -e_{11}$, $e_1 e_{12} = -e_{13}$ olduğundan sedeniyonlar sekiz farklı kompleks sayı cinsinden

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & (x_0 + x_1 e_1) + (x_2 + x_3 e_1) e_2 + (x_4 + x_5 e_1) e_4 + (x_6 - x_7 e_1) e_6 \\ & + (x_8 + x_9 e_1) e_8 + (x_{10} - x_{11} e_1) e_{10} + (x_{12} - x_{13} e_1) e_{12} + (x_{14} + x_{15} e_1) e_{14} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$z_1 = x_0 + x_1 e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_2 = x_2 + x_3 \in \mathbb{C}$$

$$z_3 = x_4 + x_5 e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_4 = x_6 - x_7 e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_5 = x_8 + x_9 e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_6 = x_{10} - x_{11} e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_7 = x_{12} - x_{13} e_1 \in \mathbb{C}$$

$$z_8 = x_{14} + x_{15} e_1 \in \mathbb{C}$$

ve $e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}, e_{14}$ sedeniyonik sanal birimler olmak üzere

$\mathcal{X}$ sedeniyonu kompleks katsayılı olarak;

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= z_1 + z_2 e_2 + z_3 e_4 + z_4 e_6 + z_5 e_8 + z_6 e_{10} + z_7 e_{12} + z_8 e_{14} \\ &= \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Kompleks katsayılı sedeniyonların kümesi $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki ifadeler göz önüne alınırsa $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesi

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \left\{ \mathcal{X} = \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2} \mid \forall i = 1, 2, \dots, 8 \text{ için } z_i \in \mathbb{C} \text{ ve } e_i^2 = -1 \right\}$$

olarak tanımlanır (Bektaş, 2021).

Tanım 1.23. $i = 1, \dots, 8$ için $z_i, w_i \in \mathbb{C}$; $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2}$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^8 w_i e_{2i-2}$ kompleks katsayılı sedeniyonları verilsin.

$$\oplus_c : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^8 (z_i + w_i) e_{2i-2}$$

olarak tanımlanan işleme $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesi üzerinde toplama işlemi denir (Bektaş, 2021).

Teorem 1.11. $i = 1, 2, \dots, 8$ için $z_i, w_i, t_i \in \mathbb{C}$; $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2}$, $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^8 w_i e_{2i-2}$ ve $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^8 t_i e_{2i-2}$ olmak üzere kompleks katsayılı sedeniyonları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $(\mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y}) \oplus_c \mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus_c (\mathcal{Y} \oplus_c \mathcal{Z})$
2. $0_s \oplus_c \mathcal{X} = \mathcal{X} \oplus_c 0_s = \mathcal{X}$
3. $\mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ vardır.
4. $\mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \oplus_c \mathcal{X}$

İspat :

$$\begin{aligned}
1. (\mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y}) \oplus_c \mathcal{Z} &= \left(\sum_{i=1}^8 (z_i + w_i) e_{2i-2} \right) \oplus_c \left(\sum_{i=1}^8 t_i e_{2i-2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^8 ((z_i + w_i) e_{2i-2} + t_i e_{2i-2}) \\
&= \sum_{i=1}^8 (z_i + w_i + t_i) e_{2i-2} \\
&= \sum_{i=1}^8 (z_i e_{2i-2} + (w_i + t_i) e_{2i-2}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2} \right) \oplus_c \left(\sum_{i=1}^8 (w_i + t_i) e_{2i-2} \right) \\
&= \mathcal{X} \oplus_c (\mathcal{Y} \oplus_c \mathcal{Z})
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kompleks katsayılı sedeniyonlar kümesi üzerinde toplamsal birim eleman $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}} = \sum_{i=1}^8 0_{\mathbb{C}} e_{2i-2} = 0_s$ olarak yazılır. Burada $0_{\mathbb{C}}$ kompleks katsayılı toplamsal birimdir.

$$\begin{aligned}
0_s \oplus_c \mathcal{X} &= \sum_{i=1}^8 (0_{\mathbb{C}} + z_i) e_{2i-2} \\
&= \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2} \\
&= \mathcal{X}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\mathcal{X} \oplus_c 0_s = \mathcal{X}$ olduğu gösterilir. $\oplus_c$ işlemine göre $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesinin birim elemanı vardır. Bu birim eleman $0_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}}$ sedeniyonudur.

3. $\mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y} = 0_s$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^8 (z_i + w_i) e_{2i-2} = \sum_{i=1}^8 0_{\mathbb{C}} e_{2i-2}$$

olur.

Buradan $i = 1, 2, \dots, 8$ için $z_i + w_i = 0_{\mathbb{C}}$ elde edilir. $\mathbb{C}$ cisim olduğundan $w_i = -z_i$ elde edilir. $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} = -\sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2}$ ifadesi kompleks katsayılı sedeniyondur. Benzer şekilde $\mathcal{Y} \oplus_c \mathcal{X} = 0_s$ olacak şekilde $\mathcal{Y} = -\mathcal{X} \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ vardır.

$$\begin{aligned} 4. \mathcal{X} \oplus_c \mathcal{Y} &= \sum_{i=1}^8 (z_i + w_i) e_{2i-2} \\ &= \sum_{i=1}^8 (w_i + z_i) e_{2i-2} \\ &= \mathcal{Y} \oplus_c \mathcal{X} \end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesi $\oplus_c$ işlemine göre değişme özelliği sağlar.

Sonuç 1.11. $(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \oplus_c)$ yapısı Abel gruptur.

Tanım 1.24. $i = 1, 2, \dots, 8$ için $z_i, w_i \in \mathbb{C}$; $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2}$ ve $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^8 w_i e_{2i-2}$ kompleks katsayılı sedeniyonları için çarpım işlemi

$$\otimes_c: \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\rightarrow \mathcal{X} \otimes_c \mathcal{Y} = \left(\sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2} \right) \otimes_c \left(\sum_{i=1}^8 w_i e_{2i-2} \right) \\ &= (z_1 w_1 - z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3 - z_4 \bar{w}_4 - z_5 \bar{w}_5 - z_6 \bar{w}_6 - z_7 \bar{w}_7 - z_8 \bar{w}_8) \\ &\quad + (z_1 w_2 + z_2 \bar{w}_1 + z_3 \bar{w}_4 - z_4 \bar{w}_3 + z_5 \bar{w}_6 - z_6 \bar{w}_5 + z_7 \bar{w}_8 - z_8 \bar{w}_7) e_2 \\ &\quad + (z_1 w_3 - z_2 \bar{w}_4 + z_3 \bar{w}_1 + z_4 \bar{w}_2 + z_5 \bar{w}_7 - z_6 \bar{w}_8 - z_7 \bar{w}_5 - z_8 \bar{w}_6) e_4 \\ &\quad + (z_1 w_4 + z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2 + z_4 \bar{w}_1 + z_5 \bar{w}_8 - z_6 \bar{w}_7 - z_7 \bar{w}_6 - z_8 \bar{w}_5) e_6 \\ &\quad + (z_1 w_5 - z_2 \bar{w}_6 - z_3 \bar{w}_7 + z_4 \bar{w}_8 + z_5 \bar{w}_1 + z_6 \bar{w}_2 + z_7 \bar{w}_3 + z_8 \bar{w}_8) e_8 \\ &\quad + (z_1 w_6 + z_2 \bar{w}_5 - z_3 \bar{w}_8 + z_4 \bar{w}_7 - z_5 \bar{w}_2 + z_6 \bar{w}_1 - z_7 \bar{w}_4 + z_8 \bar{w}_3) e_{10} \\ &\quad + (z_1 w_7 + z_2 \bar{w}_4 + z_3 \bar{w}_5 - z_4 \bar{w}_6 - z_5 \bar{w}_3 + z_6 \bar{w}_4 + z_7 \bar{w}_1 + z_8 \bar{w}_2) e_{12} \\ &\quad + (z_1 w_8 + z_2 \bar{w}_7 + z_3 \bar{w}_6 + z_4 \bar{w}_5 - z_5 \bar{w}_4 - z_6 \bar{w}_3 - z_7 \bar{w}_2 + z_8 \bar{w}_1) e_{14} \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Bektaş, 2021).

Sonuç 1.12. $(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \oplus_c, \otimes_c)$ yapısı halka değildir.

1.5. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ Katsayılı Sedeniyonların Özel Tanımlı Eşlenikleri

Bu kısımda sedeniyonların Tanım 1.10'da verilen eşlenik tanımından farklı olarak kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı sedeniyonların her biri için 6 farklı tipte eşlenik tanımları incelenmiştir. Bu eşlenik tanımlarının çarpım özelliklerinden yararlanılarak sedeniyonların kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı matris gösterimleri incelenmiştir.

1.5.1. Sedeniyonların Kompleks, Kuaterniyonik ve Oktoniyonik Eşlenik Gösterimleri ve Norm Özellikleri

Tanım 1.26. $z_1 = x_0 + x_1 e_1, z_2 = x_2 + x_3 e_1, z_3 = x_4 + x_5 e_1, z_4 = x_6 - x_7 e_1,$
 $z_5 = x_8 + x_9 e_1, z_6 = x_{10} - x_{11} e_1, z_7 = x_{12} - x_{13} e_{12}, z_8 = x_{14} + x_{15} e_1 \in \mathbb{C}$
 $q_1 = \sum_{i=0}^3 e_i x_i, q_2 = \sum_{i=4}^7 e_{i-4} x_i, q_3 = \sum_{i=8}^{11} e_{i-8} x_i, q_4 = \sum_{i=12}^{15} e_{i-12} x_i \in \mathbb{H}$
ve $\mathcal{O}_1 = \sum_{i=0}^7 e_i x_i, \mathcal{O}_2 = \sum_{i=8}^{15} e_{i-8} x_i \in \mathbb{O}$ olmak üzere;
 $X = z_1 + z_2 e_2 + z_3 e_4 + z_4 e_6 + z_5 e_8 + z_6 e_{10} + z_7 e_{12} + z_8 e_{14}$
 $= q_1 + q_2 e_4 + q_3 e_8 + q_4 e_{12}$
 $= \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e_8$
sedeniyonu verilsin.

1. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların 1. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri;

$$\bar{X}^1 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 e_2 + \bar{z}_3 e_4 + \bar{z}_4 e_6 + \bar{z}_5 e_8 + \bar{z}_6 e_{10} + \bar{z}_7 e_{12} + \bar{z}_8 e_{14},$$

$$\bar{z}_1 = x_0 - e_1 x_1, \dots, \bar{z}_8 = x_{14} - e_1 x_{15}$$

$$\bar{X}^1 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 e_4 + \bar{q}_3 e_8 + \bar{q}_4 e_{12}$$

$$\bar{q}_1 = x_0 - \sum_{i=1}^3 e_i x_i, \dots, \bar{q}_4 = x_{12} - \sum_{i=11}^{13} e_{i-10} x_i$$

$$\bar{X}^1 = \bar{\mathcal{O}}_1 + \bar{\mathcal{O}}_2 e_8$$

$$\bar{\mathcal{O}}_1 = x_0 - \sum_{i=1}^7 e_i x_i, \bar{\mathcal{O}}_2 = x_8 - \sum_{i=9}^{15} e_{i-8} x_i \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ katsayılı sedeniyonların sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken hepsi için standart eşlenik tanımları kullanılmıştır (Bektaş, 2021).

2. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların 2. tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri

$$\bar{X}^2 = z_1 - z_2 e_2 - z_3 e_4 - z_4 e_6 - z_5 e_8 - z_6 e_{10} - z_7 e_{12} - z_8 e_{14}$$

$$\bar{X}^2 = q_1 - q_2 e_4 - q_3 e_8 - q_4 e_{12},$$

$$\bar{X}^2 = \mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 e_8$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken, standart eşlenik tanımlamaları kullanılmamıştır. Kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik birimler işaret değiştirerek önüne (-) gelmiştir (Bektaş, 2021).

3. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların ikili kompleks, ikili kuaterniyon ve ikili oktoniyon eşlenikleri sırasıyla,

$$\bar{X}^3 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 e_2 - \bar{z}_3 e_4 - \bar{z}_4 e_6 - \bar{z}_5 e_8 - \bar{z}_6 e_{10} - \bar{z}_7 e_{12} - \bar{z}_8 e_{14}$$

$$\bar{X}^3 = \bar{q}_1 - \bar{q}_2 e_4 - \bar{q}_3 e_8 - \bar{q}_4 e_{12}$$

$$\bar{X}^3 = \bar{\mathcal{O}}_1 - \bar{\mathcal{O}}_2 e_8$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken, eşlenik tanımlamaları sırasıyla kullanılmış ve kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik birimler işaret değiştirerek önüne (-) gelmiştir (Bektaş, 2021).

4. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların 1.tip kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik standart eşlenikleri sırasıyla,

$$\bar{X}^4 = \bar{z}_1 - z_2 e_2 - z_3 e_4 - z_4 e_6 - z_5 e_8 - z_6 e_{10} - z_7 e_{12} - z_8 e_{14}$$

$$\bar{X}^4 = \bar{q}_1 - q_2 e_4 - q_3 e_8 - q_4 e_{12},$$

$$\bar{X}^4 = \bar{\mathcal{O}}_1 - \mathcal{O}_2 e_8$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların, sırasıyla kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenikleri bulunurken, reel kısımdaki kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenik tanımları kullanılmış ve vektör kısmında kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik birimler işaret değiştirerek önüne (-) gelmiştir (Bektaş, 2021).

5. $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların 2.tip kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon standart eşlenikleri sırasıyla,

$$\bar{X}^5 = z_1 - \bar{z}_2 e_2 - \bar{z}_3 e_4 - \bar{z}_4 e_6 - \bar{z}_5 e_8 - \bar{z}_6 e_{10} - \bar{z}_7 e_{12} - \bar{z}_8 e_{14}$$

$$\bar{X}^5 = q_1 - \bar{q}_2 e_4 - \bar{q}_3 e_8 - \bar{q}_4 e_{12},$$

$$\bar{X}^5 = \mathcal{O}_1 - \bar{\mathcal{O}}_2 e_8$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ katsayılı sedeniyonların, sırasıyla eşlenikleri bulunurken, reel kısımdaki kompleks sayı, kuaterniyon ve oktoniyon eşlenik tanımları kullanılmamış fakat vektör kısmında kompleks, kuaterniyon ve oktoniyonların ayrı ayrı eşlenikleri alınmıştır (Bektaş, 2021).

6. $\mathbb{O}$ -katsayılı sedeniyonların anti-oktoniyon eşleniği $\bar{X}^6 = \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_1 e_8$ şeklinde tanımlanır. Burada eşlenik tanımlanırken, $X = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e_8$, sedeniyonunda $\mathcal{O}_1$ ve $\mathcal{O}_2$ oktoniyonlarının sırası değiştirilip kompleks sayı eşleniği kullanılmıştır. $\bar{X}^6 = \bar{Y} = \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_1 e_8$ şeklindedir (Bektaş, 2021).

Teorem 1.12. Sedeniyonların modül ve eşlenikleri ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır (Bektaş, 2021).

$X = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 e_8$ oktoniyonik katsayılı reel sedeniyonu verilsin.

1. $X + \bar{X}^1 = 2\text{Re}(\mathcal{O}_1) + 2\text{Re}(\mathcal{O}_2)e_8$
2. $X\bar{X}^1 = (\|\mathcal{O}_1\|^2 - (\mathcal{O}_2)^2) + (\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1 + \bar{\mathcal{O}}_2\mathcal{O}_1)e_8$
3. $X + \bar{X}^2 = 2\mathcal{O}_1$
4. $X\bar{X}^2 = ((\mathcal{O}_1)^2 + \|\mathcal{O}_2\|^2) + (\mathcal{O}_2\bar{\mathcal{O}}_1 - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1)e_8$
5. $X + \bar{X}^3 = 2\mathcal{O}_1 = 2\text{Re}(\mathcal{O}_1) + 2\text{Im}(\mathcal{O}_2)e_8$
6. $X\bar{X}^3 = (\|\mathcal{O}_1\|^2 + (\mathcal{O}_2)^2) + (\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1 - \bar{\mathcal{O}}_2\mathcal{O}_1)e_8$
7. $X + \bar{X}^4 = 2\text{Re}(\mathcal{O}_1)$
8. $X\bar{X}^4 = (\|\mathcal{O}_1\|^2 + \|\mathcal{O}_2\|^2)$
9. $X + \bar{X}^5 = 2\mathcal{O}_1 + 2\text{Im}(\mathcal{O}_2)e_8$
10. $X\bar{X}^5 = ((\mathcal{O}_1)^2 + (\mathcal{O}_2)^2) + (\mathcal{O}_2\bar{\mathcal{O}}_1 - \bar{\mathcal{O}}_2\mathcal{O}_1)e_8$
11. $X + \bar{X}^6 = (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2) + (\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_1)e_8$
12. $X\bar{X}^6 = (\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 + \bar{\mathcal{O}}_1\mathcal{O}_2) + (\|\mathcal{O}_2\|^2 - \mathcal{O}_1^2)e_8$

Teorem 1.13. $\mathcal{O}, P \in \mathbb{O}$, $q \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$ ve $e_8 \in \mathbb{S}$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır (Bektaş, 2021).

1. $(\mathcal{O}e_8)e_8 = \mathcal{O}(e_8e_8) = -\mathcal{O}$, $e_8(e_8\mathcal{O}) = (e_8e_8)\mathcal{O} = -\mathcal{O}$
2. $\mathcal{O}e_8 = e_8\bar{\mathcal{O}}$, $e_8(\mathcal{O}e_8) = e_8(e_8\bar{\mathcal{O}}) = -\bar{\mathcal{O}}$
3. $(\mathcal{O}P)e_8 = (P\mathcal{O})e_8$
4. $(\mathcal{O}e_4)P = (\mathcal{O}\bar{P})e_8$
5. $(\mathcal{O}e_8)(Pe_8) = \bar{P}\mathcal{O}$
6. $e_iq = \bar{q}e_i$, $1 \leq i \leq 15$
7. $qe_i = e_i\bar{q}$, $1 \leq i \leq 15$
8. $e_i(qe_i) = e_i(e_i\bar{q}) = -\bar{q}$, $1 \leq i \leq 15$
9. $e_i(qe_j) = e_i(e_j\bar{q}) = (e_ie_j)\bar{q}$, $1 \leq i, j \leq 15$
10. $e_i(ze_i) = e_i(e_i\bar{z}) = -\bar{z}$, $1 \leq i \leq 15$
11. $e_i(ze_j) = e_i(e_j\bar{z}) = (e_ie_j)\bar{z}$, $1 \leq i, j \leq 15$

Teorem 1.14. $X, X_1, X_2 \in \mathbb{S}$ sedeniyonları için ifadeler sağlanır.

1. $\bar{\bar{X}}^i = X$, $1 \leq i \leq 5$
2. $\bar{\bar{X}}^6 = -X$
3. $\overline{X_1 + X_2}^i = \bar{X}_1^i + \bar{X}_2^i$, $1 \leq i \leq 6$
4. $\overline{X_1X_2}^i \neq \bar{X}_2^i\bar{X}_1^i$, $1 \leq i \leq 5$ özellikleri sağlanır (Bektaş, 2021).

1.5.2. Sedeniyonların Kompleks, Kuaterniyonik, Oktoniyonik Matris Gösterimi

Bu bölümde önceki bölümlerde tanımlanan $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ ve $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümeleri ve cebirsel özellikleri göz önüne alınarak kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon katsayılı yazılan sedeniyonların Teorem 1.12. ve Teorem 1.13.'te verilen çarpım özellikleri kullanılarak özel matris gösterimleri incelenmiştir.

1.5.2.1. $\mathbb{O}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathbb{O}$ ve $X = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2e_8 \in \mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ sedeniyonu verilsin.

$R_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$

$X \rightarrow R_X(Z) = ZX$ dönüşümüne $\mathbb{S}_{\mathbb{O}}$ kümesi üzerinde sağ dönüşüm denir.

$$L_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$X \rightarrow L_X(Z) = XZ$ dönüşümüne $\mathbb{S}_0$ kümesi üzerinde sol dönüşüm denir.

Sedeniyonlar cebiri birleşme özelliğini sağlamadığından R_X ve L_X dönüşümleri lineer dönüşümler değildir. Buna rağmen bu dönüşümlerin çarpım şeklinde kullanılmasının nedeni Teorem 1.12. ile verilen özelliklerin çarpım şeklinde olmasıdır. Buradan hareketle aşağıda verilen ifadelerin bazı özel durumları temsil ettiği söylenebilir. Oktoniyon katsayılı sedeniyonlar R_X ve L_X dönüşümleri göz önüne alındığında özel sağ ve özel sol olmak üzere iki farklı 2×2 tipinde matris ile temsil edilir. Sırasıyla bu matrisler:

$$[\mathbb{S}_0]_{2 \times 2}^R = \left\{ X_R = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_2 \\ -\overline{\mathcal{O}_2} & \overline{\mathcal{O}_1} \end{pmatrix} : \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathbb{O} \right\}$$

ve

$$[\mathbb{S}_0]_{2 \times 2}^L = \left\{ X_L = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_2 \\ -\mathcal{O}_2 & \overline{\mathcal{O}_1} \end{pmatrix} : \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathbb{O} \right\}$$

şeklindedir (Bektaş, 2021).

1.5.2.2. $\mathbb{H}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

$X = q_1 + q_2 e_4 + q_3 e_8 + q_4 e_{12} \in \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ sedeniyonu verilsin.

$$R_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$X \rightarrow R_X(Z) = ZX$ dönüşümüne $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi üzerinde sağ dönüşüm denir.

$$L_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$X \rightarrow L_X(Z) = XZ$ dönüşümüne $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ kümesi üzerinde sol dönüşüm denir.

Kuaterniyonik katsayılı sedeniyonlar R_X ve L_X dönüşümleri gözönüne alındığında özel sağ ve özel sol olmak üzere iki farklı 4×4 tipinde matris ile temsil edilir.

$$[\mathbb{S}_{\mathbb{H}}]_{4 \times 4}^R = \left\{ X_R = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ -\overline{q_2} & \overline{q_1} & -q_4 & \overline{q_3} \\ -\overline{q_3} & q_4 & \overline{q_1} & -q_2 \\ -\overline{q_4} & -q_3 & q_2 & \overline{q_1} \end{pmatrix} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{H} \right\}$$

ve

$$[\mathbb{S}_{\mathbb{H}}]_{4 \times 4}^L = \left\{ X_L = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ -q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ -q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{H} \right\}$$

şeklinde (Bektaş, 2021).

1.5.2.3. $\mathbb{C}$ -Katsayılı Sedeniyonların Matris Gösterimleri

$X = \sum_{i=1}^8 z_i e_{2i-2} \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ sedeniyonu verilsin.

$R_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$

$$X \rightarrow R_X(Z) = ZX$$

dönüşümüne $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesi üzerinde sağ dönüşüm denir.

$L_X: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$

$$X \rightarrow L_X(Z) = XZ$$

dönüşümüne $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ kümesi üzerinde sol dönüşüm denir.

Kompleks katsayılı sedeniyonlar R_X ve L_X dönüşümleri göz önüne alındığında özel sağ ve özel sol olmak üzere iki farklı 8×8 tipinde matris ile temsil edilir. Sırasıyla bu matrisler:

$$[\mathbb{S}_{\mathbb{C}}]_{8 \times 8}^R = \left\{ X_R = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 & -\bar{z}_3 & -\bar{z}_4 & -\bar{z}_5 & -\bar{z}_6 & -\bar{z}_7 & -\bar{z}_8 \\ z_2 & \bar{z}_1 & \bar{z}_4 & -\bar{z}_3 & \bar{z}_6 & -\bar{z}_5 & -\bar{z}_8 & \bar{z}_7 \\ z_3 & -\bar{z}_4 & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_7 & \bar{z}_8 & -\bar{z}_5 & -\bar{z}_6 \\ z_4 & \bar{z}_3 & -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 & \bar{z}_8 & -\bar{z}_7 & \bar{z}_6 & -\bar{z}_5 \\ z_5 & -\bar{z}_6 & -\bar{z}_7 & -\bar{z}_8 & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \\ z_6 & \bar{z}_5 & -\bar{z}_8 & \bar{z}_7 & -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 & -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \\ z_7 & \bar{z}_8 & \bar{z}_5 & -\bar{z}_6 & -\bar{z}_3 & \bar{z}_4 & \bar{z}_1 & -\bar{z}_2 \\ z_8 & -\bar{z}_7 & \bar{z}_6 & \bar{z}_5 & -\bar{z}_4 & -\bar{z}_3 & \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} : z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$[\mathbb{S}_{\mathbb{C}}]_{8 \times 8}^L = \left\{ X_L = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 & -z_5 & -z_6 & -z_7 & -z_8 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 & -z_6 & z_5 & z_8 & -z_7 \\ z_3 & z_4 & z_1 & -z_2 & -z_7 & -z_8 & z_5 & z_6 \\ z_4 & -z_3 & z_2 & z_1 & -z_8 & z_7 & -z_6 & z_5 \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ z_6 & -z_5 & z_8 & -z_7 & z_2 & z_1 & z_4 & -z_3 \\ z_7 & z_8 & -z_5 & z_6 & z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_8 & -z_7 & -z_6 & -z_5 & z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{pmatrix} : z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde (Bektaş, 2021).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu kısım çalışmanın orijinal bölümüdür. Sedeniyonik katsayılı matrislerin reel, karmaşık, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı matris formları araştırılmıştır. Sedeniyonik matrislerin toplamı, çarpımı, eşlenikleri, transpoz, eşlenik transpozları, izi ve tersi işlemleri tanımlanmış ve cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Daha sonra sedeniyonik matrisler kümesi üzerindeki cebirsel yapılar araştırılmıştır.

2.1. Sedeniyonik Matrisler ve İşlemler

Tanım 2.1. $a_{st}^i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\check{a}_{st} = \sum_{i=0}^{15} a_{st}^i e_i \in \mathbb{S}$ için $\check{A} = [\check{a}_{st}]_{m \times n}$ ($1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$) şeklinde tanımlanan matrislere sedeniyonik matris adı verilir. Bu şekildeki matrislerin kümesi $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ile gösterilir. $m = n$ için $M_n(\mathbb{S})$ karesel sedeniyonik matrislerin kümesidir. Sedeniyonik matrisler reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı olarak sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir.

1. $\check{A}$ sedeniyonik matrisi, $\check{A} = [\check{a}_{st}] = [\sum_{i=0}^{15} a_{st}^i e_i] = [a_{st}^0] + [a_{st}^1]e_1 + \dots + [a_{st}^{15}]e_{15}$ şeklinde yazılır. Burada $A_0 = [a_{st}^0]$, $A_1 = [a_{st}^1]e_1, \dots, A_{15} = [a_{st}^{15}]e_{15} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ve ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n$) olmak üzere sedeniyonik matrisler 16 adet reel matrisin toplamı cinsinden

$$A_0 + A_1 + \dots + A_{15} = \check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$$

olarak yazılır.

2. $\hat{A}_1 = A_0 + A_1 e_1$, $\hat{A}_2 = A_2 + A_3 e_1$, $\hat{A}_3 = A_4 + A_5 e_1$, $\hat{A}_4 = A_6 - A_7 e_1$,
 $\hat{A}_5 = A_8 + A_9 e_1$, $\hat{A}_6 = A_{10} - A_{11} e_1$, $\hat{A}_7 = A_{12} - A_{13} e_1$,
 $\hat{A}_8 = A_{14} + A_{15} e_1 \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$ sedeniyonik matrisi 8 adet kompleks katsayılı matrisin toplamı cinsinden

$$\check{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14}$$

olarak yazılır.

3. $\tilde{A}_1 = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$, $\tilde{A}_2 = A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3$,
 $\tilde{A}_3 = A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3$ ve
 $\tilde{A}_4 = A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{H})$ olmak üzere $\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$
sedeniyonik matrisi 4 adet kuaterniyonik katsayılı matrisin toplamı cinsinden

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 e_4 + \tilde{A}_3 e_8 + \tilde{A}_4 e_{12} \text{ olarak yazılır.}$$

4. $\tilde{\tilde{A}}_1 = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4 + A_5 e_5 + A_6 e_6 + A_7 e_7$,
 $\tilde{\tilde{A}}_2 = A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{O})$
olmak üzere $\tilde{\tilde{A}} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$ sedeniyonik matrisi 2 adet oktoniyonik katsayılı
matrisin toplamı cinsinden

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{A}}_1 + \tilde{\tilde{A}}_2 e_8 \text{ olarak yazılır.}$$

2.1.1. Sedeniyonik Matrislerin Eşitliği

Tanım 2.2. $\tilde{A} = [\tilde{a}_{st}]$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{st}] \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$) olmak üzere
 $\forall s, t$ için $\tilde{a}_{st} = \tilde{b}_{st}$ ise bu iki matris eşittir denir ve $\tilde{A} = \tilde{B}$ yazılır. Eşit matrisler reel,
kuaterniyonik, oktoniyonik cinsten aşağıdaki gibi ifade edilir.

1. $\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$, $\tilde{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ birer sedeniyonik matris olmak üzere
 $\tilde{A} = \tilde{B}$ olması için gerek ve yeter şart $\forall i = 0, 1, \dots, 15$ için $A_i = B_i$ olmasıdır.
2. $\tilde{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14}$,
 $\tilde{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 e_2 + \hat{B}_3 e_4 + \hat{B}_4 e_6 + \hat{B}_5 e_8 + \hat{B}_6 e_{10} + \hat{B}_7 e_{12} + \hat{B}_8 e_{14} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$
kompleks katsayılı sedeniyonik matrisler olmak üzere $\tilde{A} = \tilde{B}$ olması için gerek ve
yeter şart $\forall i = 1, \dots, 8$ için $\hat{A}_i = \hat{B}_i$ olmasıdır.
3. $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 e_4 + \tilde{A}_3 e_8 + \tilde{A}_4 e_{12}$ ve $\tilde{B} = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 e_4 + \tilde{B}_3 e_8 + \tilde{B}_4 e_{12} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$
kuaterniyonik katsayılı matrisler olmak üzere $\tilde{A} = \tilde{B}$ olması için gerek ve yeter şart
 $\forall i = 1, 2, 3, 4$ için $\tilde{A}_i = \tilde{B}_i$ olmasıdır.

4. $\check{A} = \check{\check{A}}_1 + \check{\check{A}}_2 e_8$ ve $\check{B} = \check{\check{B}}_1 + \check{\check{B}}_2 e_8 \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ oktoniyonik katsayılı matrisler olmak üzere $\check{A} = \check{B}$ olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2$ için $\check{\check{A}}_i = \check{\check{B}}_i$ olmasıdır.

2.1.2. Sedeniyonik Birim Matris ve Sedeniyonik Sıfır Matrisi

Tanım 2.3. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_n(\mathbb{S})$ sedeniyonik matrisi verilsin. $A_0 = I_n \in M_n(\mathbb{R})$ ve $\forall i = 1, \dots, 15$ için $A_i = 0$ ise $\check{A}$ matrisine sedeniyonik birim matris denir ve $\check{A} = \check{I}_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ sedeniyonik matrisi verilsin. $\forall \check{a}_{st} = 0$ ise $\check{A}$ matrisine sedeniyonik sıfır matrisi denir ve $\check{A} = \check{O}_{m \times n} = \check{O}$ ile gösterilir. $m = n$ olması durumunda $\check{O}_{n \times n} = \check{O}_n$ 'dir. Sıfır matrisi reel, kuaterniyonik, oktoniyonik cinsten sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir.

1. Reel katsayılı matrisler cinsinden $\check{O}_{m \times n} = \sum_{i=0}^{15} 0e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olarak ifade edilir.
2. Kompleks katsayılı matris cinsinden $\check{O}_{m \times n} = \hat{O} + \hat{O}e_2 + \hat{O}e_4 + \hat{O}e_6 + \hat{O}e_8 + \hat{O}e_{10} + \hat{O}e_{12} + \hat{O}e_{14} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olarak ifade edilir.
3. Kuaterniyonik katsayılı matrisler cinsinden $\check{O}_{m \times n} = \tilde{O} + \tilde{O}e_4 + \tilde{O}e_8 + \tilde{O}e_{12} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olarak ifade edilir.
4. Oktoniyonik katsayılı matrisler cinsinden $\check{O}_{m \times n} = \check{\check{O}} + \check{\check{O}}e_8 \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olarak ifade edilir.

2.1.3. Sedeniyonik Matrislerde Toplama İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.5. $\check{A} = [\check{a}_{st}]$ ve $\check{B} = [\check{b}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$) sedeniyonik matrisleri verilsin.

$$\begin{aligned} \oplus: M_{m \times n}(\mathbb{S}) \times M_{m \times n}(\mathbb{S}) &\rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{S}) \\ (\check{A}, \check{B}) &\rightarrow \check{A} \oplus \check{B} = [\check{a}_{st} \oplus_s \check{b}_{st}] \\ &= \begin{pmatrix} \check{a}_{11} \oplus_s \check{b}_{11} & \check{a}_{12} \oplus_s \check{b}_{12} & \dots & \check{a}_{1n} \oplus_s \check{b}_{1n} \\ \check{a}_{21} \oplus_s \check{b}_{21} & \check{a}_{22} \oplus_s \check{b}_{22} & \dots & \check{a}_{2n} \oplus_s \check{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{a}_{m1} \oplus_s \check{b}_{m1} & \check{a}_{m2} \oplus_s \check{b}_{m2} & \dots & \check{a}_{mn} \oplus_s \check{b}_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme sedeniyonik matrisler üzerinde toplama işlemi denir. Sedeniyonik matrislerin toplamı reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik cinsten sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir.

1. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$, $\check{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $i = 0, 1, \dots, 15$ $A_i, B_i \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ olmak üzere sedeniyonik matrislerin reel kombinasyonları cinsinden toplamı

$$\check{A} + \check{B} = \sum_{i=0}^{15} (A_i + B_i) e_i$$

olarak yazılır.

2. $\check{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14}$,
 $\check{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 e_2 + \hat{B}_3 e_4 + \hat{B}_4 e_6 + \hat{B}_5 e_8 + \hat{B}_6 e_{10} + \hat{B}_7 e_{12} + \hat{B}_8 e_{14} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve
 $i = 1, \dots, 7$ için $\hat{A}_i, \hat{B}_i \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere sedeniyonik matrislerin kompleks kombinasyonu cinsinden toplamı

$$\check{A} + \check{B} = \sum_{i=1}^7 (\hat{A}_i + \hat{B}_i) e_{2i}$$

olarak yazılır.

3. $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 e_4 + \tilde{A}_3 e_8 + e_{12} \tilde{A}_4, \tilde{B} = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 e_4 + \tilde{B}_3 e_8 + \tilde{B}_4 e_{12} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $i = 1, 2, 3, 4$ için $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{H})$ olmak üzere sedeniyonik matrislerin kuaterniyonik kombinasyonu cinsinden toplamı

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) + (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) e_4 + (\tilde{A}_3 + \tilde{B}_3) e_8 + (\tilde{A}_4 + \tilde{B}_4) e_{12} \\ &= \sum_{i=1}^4 (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i) e_{4i} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

4. $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}_1 + \tilde{\tilde{A}}_2 e_8, \tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}_1 + \tilde{\tilde{B}}_2 e_8 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $i = 1, 2$ için $\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{B}}_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{O})$ olmak üzere sedeniyonik matrislerin oktoniyonik kombinasyonu cinsinden toplamı

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (\tilde{\tilde{A}}_1 + \tilde{\tilde{B}}_1) + (\tilde{\tilde{A}}_2 + \tilde{\tilde{B}}_2) e_8$$

olarak yazılır.

Teorem 2.1. $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ ve $\tilde{0} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \oplus \tilde{C} = \tilde{A} \oplus (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$
2. $\tilde{A} \oplus \tilde{0} = \tilde{0} \oplus \tilde{A} = \tilde{A}$
3. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A} = \tilde{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{B} = -\tilde{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ vardır.
4. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A}$

İspat :

$$\begin{aligned} 1. \quad (\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \oplus \tilde{C} &= ([\tilde{a}_{\text{st}}] \oplus [\tilde{b}_{\text{st}}]) \oplus [\tilde{c}_{\text{st}}] \\ &= [(\tilde{a}_{\text{st}} \oplus_s \tilde{b}_{\text{st}}) \oplus_s \tilde{c}_{\text{st}}] \\ &= [\tilde{a}_{\text{st}} \oplus_s (\tilde{b}_{\text{st}} \oplus_s \tilde{c}_{\text{st}})] \\ &= [\tilde{a}_{\text{st}}] \oplus ([\tilde{b}_{\text{st}} \oplus_s \tilde{c}_{\text{st}}]) \\ &= \tilde{A} \oplus (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) \end{aligned}$$

olduğundan $M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ kümesinde $\oplus$ işlemine göre birleşme özelliği sağlanır.

2. $\forall \check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ için

$$\begin{aligned}\check{A} \oplus \check{0} &= [\check{a}_{st}] \oplus [\check{0}_{st}] \\ &= [\check{a}_{st} \oplus_s \check{0}_{st}] \\ &= [\check{a}_{st}] \\ &= \check{A}\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\check{0} \oplus \check{A} = \check{A}$ olduğu gösterilir. $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ kümesinin toplamsal birim elemanı vardır ve $\check{0} = [\check{0}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ matrisidir.

3. $\check{A} \oplus \check{B} = \check{0}$ olsun. $\forall \check{A} = [\check{a}_{st}], \check{B} = [\check{b}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ için

$$\begin{aligned}\check{A} \oplus \check{B} &= [\check{a}_{st}] \oplus [\check{b}_{st}] \\ &= [\check{a}_{st} \oplus_s \check{b}_{st}] \\ &= \check{0} \\ &= [\check{0}_{st}]\end{aligned}$$

olur ve buradan $\check{a}_{st} \oplus_s \check{b}_{st} = \check{0}$ olur. $(\mathbb{S}, \oplus_s)$ Abel grup olduğundan $\check{b}_{st} = -\check{a}_{st}$ elde edilir. Buradan $\check{B} = -\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ elde edilir. Benzer şekilde $\check{B} \oplus \check{A} = \check{0}$ eşitliğinden de $\check{B} = -\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olarak bulunur. $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ her elemanın $\oplus$ işlemine göre ters elemanı vardır.

$$\begin{aligned}4. \check{A} \oplus \check{B} &= [\check{a}_{st}] \oplus [\check{b}_{st}] \\ &= [\check{a}_{st} \oplus_s \check{b}_{st}] \\ &= [\check{b}_{st} \oplus_s \check{a}_{st}] \\ &= [\check{b}_{st}] \oplus [\check{a}_{st}] \\ &= \check{B} \oplus \check{A}\end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işlemine göre değişme özelliği vardır.

Sonuç 2.1. $(M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus)$ yapısı Abel gruptur.

2.1.4. Sedeniyonik Matrislerde Çarpma İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.6. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S}), \check{B} = [\check{b}_{tr}] \in M_{n \times p}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n, 1 \leq r \leq p$) matrisleri için

$$\otimes: M_{m \times n}(\mathbb{S}) \times M_{n \times p}(\mathbb{S}) \rightarrow M_{m \times p}(\mathbb{S})$$

$$(\check{A}, \check{B}) \rightarrow \check{A} \otimes \check{B} = \left[\sum_{t=1}^n \check{a}_{st} \otimes_s \check{b}_{tr} \right]_{m \times p}$$

olarak tanımlanan işleme sedeniyonik matrislerin çarpımı denir.

$$\sum_{t=1}^n \check{a}_{st} \otimes_s \check{b}_{tr} = \check{c}_{sr} \quad (1 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq p) \text{ olmak üzere,}$$

$$\check{c}_{11} = \sum_{t=1}^n \check{a}_{1t} \otimes_s \check{b}_{t1} = \check{a}_{11} \otimes_s \check{b}_{11} \oplus_s \check{a}_{12} \otimes_s \check{b}_{21} \oplus_s \dots \oplus_s \check{a}_{1n} \otimes_s \check{b}_{n1}$$

$$\check{c}_{12} = \sum_{t=1}^n \check{a}_{1t} \otimes_s \check{b}_{t2} = \check{a}_{11} \otimes_s \check{b}_{12} \oplus_s \check{a}_{12} \otimes_s \check{b}_{22} \oplus_s \dots \oplus_s \check{a}_{1n} \otimes_s \check{b}_{n2}$$

.

.

.

$$\check{c}_{1p} = \sum_{t=1}^n \check{a}_{1t} \otimes_s \check{b}_{tp} = \check{a}_{11} \otimes_s \check{b}_{1p} \oplus_s \check{a}_{12} \otimes_s \check{b}_{2p} \oplus_s \dots \oplus_s \check{a}_{1n} \otimes_s \check{b}_{np} \quad \text{olarak yazılır. O halde}$$

$$\check{A} \otimes \check{B} = \begin{pmatrix} \check{a}_{11} & \check{a}_{12} & \dots & \check{a}_{1n} \\ \check{a}_{21} & \check{a}_{22} & \dots & \check{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{a}_{m1} & \check{a}_{m2} & \dots & \check{a}_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \check{b}_{11} & \check{b}_{12} & \dots & \check{b}_{1p} \\ \check{b}_{21} & \check{b}_{22} & \dots & \check{b}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{b}_{n1} & \check{b}_{n2} & \dots & \check{b}_{np} \end{pmatrix} = (\check{c}_{mp}) = \check{C}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.2. Sedeniyonik matrislerde çarpma işlemi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$, $\check{B} \in M_{n \times o}(\mathbb{S})$ ve $\check{C} \in M_{o \times p}(\mathbb{S})$ sedeniyonik katsayılı matrisleri verilsin.

$$(\check{A} \otimes \check{B}) \otimes \check{C} \neq \check{A} \otimes (\check{B} \otimes \check{C}) \text{ (Genellikle)}$$

2. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\check{B}, \check{C} \in M_{n \times o}(\mathbb{S})$ sedeniyonik katsayılı matrisleri verilsin.

$$\check{A} \otimes (\check{B} \oplus \check{C}) \neq \check{A} \otimes \check{B} \oplus \check{A} \otimes \check{C} \text{ (Genellikle)}$$

3. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\check{B}, \check{C} \in M_{p \times m}(\mathbb{S})$ sedeniyonik katsayılı matrisleri verilsin.

$$(\check{B} \oplus \check{C}) \otimes \check{A} \neq \check{B} \otimes \check{A} \oplus \check{C} \otimes \check{A} \text{ (Genellikle)}$$

4. $\check{A}, \check{B} \in M_n(\mathbb{S})$ sedeniyonik katsayılı matrisleri verilsin.

$\check{A} \otimes \check{B} \neq \check{B} \otimes \check{A}$ (Genellikle)

Sonuç 2.2. $M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ kümesi $\otimes$ işlemine göre genel olarak birleşimli ve değişimli değildir.

Sonuç 2.3. $(M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}), \oplus, \otimes)$ yapısı halka değildir.

Not 2.1. Sedeniyonlarda birleşme özelliği sağlanmadığından iki sedeniyonik matrisin kompleks, kuaterniyon ve oktoniyon kombinasyonu cinsinden çarpma işlemleri ifade edilemez. Fakat reel kombinasyonları cinsinden çarpımı ifade edilebilir.

$\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$, $\check{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_{\text{npx}}(\mathbb{S})$ ve $A_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{R})$,

$B_i \in M_{\text{npx}}(\mathbb{R})$ sedeniyonik matrislerinin reel kombinasyonu cinsinden çarpımı

$$\begin{aligned} \check{A} \otimes \check{B} &= \left(\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{i=0}^{15} B_i e_i \right) \\ &= (A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 - A_4 B_4 - A_5 B_5 - A_6 B_6 - A_7 B_7 - A_8 B_8 \\ &\quad - A_9 B_9 - A_{10} B_{10} - A_{11} B_{11} - A_{12} B_{12} - A_{13} B_{13} - A_{14} B_{14} - A_{15} B_{15}) e_0 \\ &\quad + (A_0 B_1 + A_1 B_0 + A_2 B_3 - A_3 B_2 + A_4 B_5 - A_5 B_4 - A_6 B_7 + A_7 B_6 + A_8 B_9 \\ &\quad - A_9 B_1 - A_{10} B_{11} + A_{11} B_{10} - A_{12} B_{13} - A_{13} B_9 + A_{14} B_{15} - A_{15} B_{14}) e_1 \\ &\quad + (A_0 B_2 - A_1 B_3 + A_2 B_0 + A_3 B_1 + A_4 B_6 + A_5 B_7 - A_6 B_4 - A_7 B_5 + A_8 B_{10} \\ &\quad + A_9 B_{11} - A_{10} B_8 - A_{11} B_9 - A_{12} B_{14} - A_{13} B_{15} + A_{14} B_{12} + A_{15} B_{13}) e_2 \\ &\quad + (A_0 B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_0 + A_4 B_7 - A_5 B_6 + A_6 B_5 - A_7 B_4 + A_8 B_{11} \\ &\quad - A_9 B_{10} + A_{10} B_9 - A_{11} B_8 - A_{12} B_{15} + A_{13} B_{14} - A_{14} B_{13} + A_{15} B_{12}) e_3 \\ &\quad + (A_0 B_4 - A_1 B_5 - A_2 B_6 - A_3 B_7 + A_4 B_0 + A_5 B_1 + A_6 B_2 + A_7 B_3 + A_8 B_{12} \\ &\quad + A_9 B_{13} + A_{10} B_{14} + A_{11} B_{15} - A_{12} B_8 - A_{13} B_9 - A_{14} B_{10} - A_{15} B_{11}) e_4 \\ &\quad + (A_0 B_5 + A_1 B_4 - A_2 B_7 + A_3 B_6 - A_4 B_1 + A_5 B_0 - A_6 B_3 + A_7 B_2 + A_8 B_{13} \\ &\quad - A_9 B_{12} + A_{10} B_{15} - A_{11} B_{14} + A_{12} B_9 - A_{13} B_8 + A_{14} B_{11} - A_{15} B_{10}) e_5 \\ &\quad + (A_0 B_6 + A_1 B_3 + A_2 B_4 - A_3 B_5 - A_4 B_2 + A_5 B_3 + A_6 B_0 - A_7 B_1 - A_8 B_{14} \\ &\quad - A_9 B_{15} - A_{10} B_{12} + A_{11} B_{13} + A_{12} B_{10} - A_{13} B_{11} - A_{14} B_8 + A_{15} B_9) e_6 \\ &\quad + (A_0 B_7 - A_1 B_6 + A_2 B_5 + A_3 B_4 - A_4 B_3 - A_5 B_2 + A_6 B_1 + A_7 B_0 + A_8 B_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_9B_{14} - A_{10}B_{13} + A_{11}B_{12} + A_{12}B_{11} + A_{13}B_{10} - A_{14}B_9 - A_{15}B_8)e_7 \\
& + (A_0B_8 - A_1B_9 - A_2B_{10} - A_3B_9 - A_4B_{12} - A_5B_{13} - A_6B_{14} - A_7B_{15} \\
& + A_8B_0 + A_9B_1 + A_{10}B_2 + A_{11}B_3 + A_{12}B_4 + A_{13}B_5 + A_{14}B_6 + A_{15}B_7)e_8 \\
& + (A_0B_9 + A_1B_8 - A_2B_{11} + A_3B_{10} - A_4B_{13} + A_5B_{12} + A_6B_{15} - A_7B_{14} \\
& - A_8B_1 + A_9B_0 - A_{10}B_3 + A_{11}B_2 - A_{12}B_5 + A_{13}B_4 + A_{14}B_7 - A_{15}B_6)e_9 \\
& + (A_0B_{10} + A_1B_{11} + A_2B_8 - A_3B_9 - A_4B_{14} - A_5B_{15} + A_6B_{12} + A_7B_{13} \\
& - A_8B_2 + A_9B_3 + A_{10}B_0 - A_{11}B_1 - A_{12}B_6 - A_{13}B_7 + A_{14}B_4 + A_{15}B_5)e_{10} \\
& + (A_0B_{11} - A_1B_{10} + A_2B_9 + A_3B_8 - A_4B_{15} + A_5B_{14} - A_6B_{13} + A_7B_{12} \\
& - A_8B_3 - A_9B_2 + A_{10}B_1 + A_{11}B_0 - A_{12}B_7 + A_{13}B_6 - A_{14}B_5 + A_{15}B_4)e_{11} \\
& + (A_0B_{12} + A_1B_{13} + A_2B_{14} + A_3B_{15} + A_4B_8 - A_5B_9 - A_6B_{10} - A_7B_{11} \\
& - A_8B_4 + A_9B_5 + A_{10}B_6 + A_{11}B_7 + A_{12}B_0 - A_{13}B_1 - A_{14}B_2 - A_{15}B_3)e_{12} \\
& + (A_0B_{13} - A_1B_{12} + A_2B_{15} - A_3B_{14} + A_4B_9 + A_5B_8 + A_6B_{11} - A_7B_{10} \\
& - A_8B_5 - A_9B_4 + A_{10}B_7 - A_{11}B_6 + A_{12}B_1 + A_{13}B_0 + A_{14}B_3 - A_{15}B_2)e_{13} \\
& + (A_0B_{14} - A_1B_{15} - A_2B_{12} + A_3B_{13} + A_4B_{10} - A_5B_{11} + A_6B_8 + A_7B_9 \\
& - A_8B_6 - A_9B_7 - A_{10}B_4 + A_{11}B_5 + A_{12}B_2 - A_{13}B_3 + A_{14}B_0 + A_{15}B_1)e_{14} \\
& + (A_0B_{15} + A_1B_{14} - A_2B_{13} - A_3B_{12} + A_4B_{11} + A_5B_{10} - A_6B_9 + A_7B_8 \\
& - A_8B_7 + A_9B_6 - A_{10}B_5 - A_{11}B_4 + A_{12}B_3 + A_{13}B_2 - A_{14}B_1 + A_{15}B_0)e_{15}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2.1.5. Sedeniyonik Matrislerde Eşlenik İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.7. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$) olmak üzere

$$\bar{\cdot} : M_{m \times n}(\mathbb{S}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{S})$$

$$\begin{aligned}
\check{A} & \rightarrow \bar{\check{A}} = [\bar{\check{a}}_{st}] \\
& = \left[\sum_{i=0}^{15} a_{st}^i e_i \right] \\
& = a_{st}^0 - \left[\sum_{i=1}^{15} a_{st}^i e_i \right]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme sedeniyonik matrislerde eşlenik işlemi denir.

Sedeniyonik matrislerin reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı matrislerinin eşlenikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ reel katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin eşleniği $\bar{\check{A}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\bar{\check{A}} &= \overline{\left[\sum_{i=0}^{15} a_{\text{st}}^i e_i \right]} = \left[a_{\text{st}}^0 - \sum_{i=1}^{15} a_{\text{st}}^i e_i \right] \\ &= [a_{\text{st}}^0] - \sum_{i=1}^{15} [a_{\text{st}}^i] e_i \\ &= A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2. $\check{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ kompleks katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin eşleniği $\bar{\check{A}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= A_0 + A_1 e_1, & \hat{A}_2 &= A_2 + A_3 e_1, & \hat{A}_3 &= A_4 + A_5 e_1, & \hat{A}_4 &= A_6 - A_7 e_1, \\ \hat{A}_5 &= A_8 + A_9 e_1, & \hat{A}_6 &= A_{10} - A_{11} e_1, & \hat{A}_7 &= A_{12} - A_{13} e_1, & & \text{ve} \\ \hat{A}_8 &= A_{14} + A_{15} e_1 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{C}) \text{ olduğundan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\check{A}} &= \overline{\hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14}} \\ &= \overline{(A_0 + A_1 e_1) + (A_2 + A_3 e_1) e_2 + (A_4 + A_5 e_1) e_4 + (A_6 - A_7 e_1) e_6} \\ &\quad \overline{+ (A_8 + A_9 e_1) e_8 + (A_{10} - A_{11} e_1) e_{10} + (A_{12} - A_{13} e_1) e_{12} + (A_{14} + A_{15} e_1) e_{14}} \\ &= \overline{\left[\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right]} \\ &= A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \\ &= (A_0 - A_1 e_1) - (A_2 + A_3 e_1) e_2 - (A_4 + A_5 e_1) e_4 - (A_6 - A_7 e_1) e_6 \\ &\quad - (A_8 + A_9 e_1) e_8 - (A_{10} - A_{11} e_1) e_{10} - (A_{12} - A_{13} e_1) e_{12} - (A_{14} + A_{15} e_1) e_{14} \\ &= \bar{\hat{A}_1} - \hat{A}_2 e_2 - \hat{A}_3 e_4 - \hat{A}_4 e_6 - \hat{A}_5 e_8 - \hat{A}_6 e_{10} - \hat{A}_7 e_{12} - \hat{A}_8 e_{14}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3. $\check{A} = \check{A}_1 + \check{A}_2 e_4 + \check{A}_3 e_8 + e_{12} \check{A}_4 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ kuaterniyonik katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin eşleniği $\bar{\check{A}}$ olmak üzere;

$$\check{A}_1 = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

$$\check{A}_2 = A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3$$

$$\check{A}_3 = A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3$$

$$\check{A}_4 = A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{H}) \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \bar{\check{A}} &= \overline{\check{A}_1 + \check{A}_2 e_4 + \check{A}_3 e_8 + e_{12} \check{A}_4} \\ &= \overline{(A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) + (A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3) e_4} \\ &\quad + \overline{(A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3) e_8 + (A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3) e_{12}} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right] \\ &= A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \\ &= (A_0 - A_1 e_1 - A_2 e_2 - A_3 e_3) - (A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3) e_4 \\ &\quad - (A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3) e_8 - (A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3) e_{12} \\ &= \check{\check{A}}_1 - \check{\check{A}}_2 e_4 - \check{\check{A}}_3 e_8 - \check{\check{A}}_4 e_{12} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

4. $\check{\check{A}} = \check{\check{A}}_1 + \check{\check{A}}_2 e_8 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ oktoniyonik katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{\check{A}}$ matrisinin eşleniği $\bar{\check{\check{A}}}$ olmak üzere,

$$\check{\check{A}}_1 = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4 + A_5 e_5 + A_6 e_6 + A_7 e_7 \text{ ve}$$

$$\check{\check{A}}_2 = A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{O})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\check{\check{A}}} &= \overline{\check{\check{A}}_1 + \check{\check{A}}_2 e_8} \\ &= \overline{A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4 + A_5 e_5 + A_6 e_6 + A_7 e_7} \\ &\quad + \overline{(A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7) e_8} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \\
&= (A_0 - A_1 e_1 - A_2 e_2 - A_3 e_3 - A_4 e_4 - A_5 e_5 - A_6 e_6 - A_7 e_7) \\
&\quad - (A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7) e_8 \\
&= \bar{\bar{A}}_1 - \bar{\bar{A}}_2 e_8
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.3. $\forall \check{A}, \check{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{S}), \check{C} \in M_{n \times r}(\mathbb{S})$ ve $\lambda \in \mathbb{S}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\bar{\bar{A}} = \check{A}$
2. $\bar{\lambda} \otimes \bar{\check{A}} = \overline{\check{A} \otimes \lambda}$
3. $\overline{(\check{A} + \check{B})} = \bar{\check{A}} + \bar{\check{B}}$
4. $\overline{(\check{A} \otimes \check{C})} \neq \bar{\check{A}} \otimes \bar{\check{C}}$ (Genellikle)

İspat :

1. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere $\bar{\bar{A}} = A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i$ olduğundan

$$\bar{\bar{A}} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$$

elde edilir.

2. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n$), $\lambda = \sum_{i=0}^{15} \lambda_i e_i \in \mathbb{S}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} \otimes_s \bar{\check{A}} &= \bar{\lambda} \otimes_s [\bar{\check{a}}_{st}] \\
&= [\bar{\lambda} \otimes_s \bar{\check{a}}_{st}] \\
&= [\overline{\check{a}_{st} \otimes_s \lambda}] \\
&= \overline{[\check{a}_{st}] \otimes_s \lambda} \\
&= \bar{\check{A}} \otimes_s \lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i, \check{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ matrisleri verilsin.

$$\begin{aligned} \overline{(\check{A} + \check{B})} &= \overline{\left(\sum_{i=0}^{15} (A_i + B_i) e_i \right)} \\ &= A_0 + B_0 - \left(\sum_{i=1}^{15} (A_i + B_i) e_i \right) \\ &= A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i + B_0 - \sum_{i=1}^{15} B_i e_i \\ &= \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} \end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}), \check{C} = \sum_{i=0}^{15} C_i e_i \in M_{\text{nxr}}(\mathbb{S})$ matrisleri verilsin.

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{C}} &= \left(A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \right) \otimes \left(C_0 - \sum_{i=1}^{15} C_i e_i \right) \\ &= A_0 C_0 - \sum_{i=1}^{15} (A_i C_i) \\ &\quad -(A_0 C_1 + A_1 C_0 - \dots + A_{15} C_{14}) e_1 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad -(A_0 C_{15} - A_1 C_{14} + \dots + A_{15} C_0) e_{15} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{C}}} &= A_0 C_0 - \sum_{i=1}^{15} (A_i C_i) \\ &\quad -(A_0 C_1 + A_1 C_0 + \dots - A_{15} C_{14}) e_1 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad -(A_0 C_{15} + A_1 C_{14} + \dots + A_{15} C_0) e_{15} \end{aligned}$$

elde edilir. İki ifade eşit olmadığından $\overline{(\bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{C}})} \neq \bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{C}}$ olarak bulunur.

2.1.6. Sedeniyonik Matrislerin Transpozu ve Özellikleri

Tanım 2.8. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n$) sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}^t = [\check{a}_{ts}] \in M_{n \times m}(\mathbb{S})$ şeklinde tanımlanan matrise $\check{A}$ matrisinin devriği (transpozu) denir. Sedeniyonik matrislerin reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı matrislerinin transpozları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ reel katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin transpozu $\check{A}^t$ olmak üzere; $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$, $\check{a}_{st} = \sum_{i=0}^{15} a_{st}^i e_i$ için

$$\begin{aligned}\check{A}^t &= \sum_{i=1}^{15} a_{ts}^i e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} A_i^t e_i\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. $\check{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ kompleks katsayılı sedeniyonik matrisi için $\check{A}$ matrisinin transpozu $\check{A}^t$ olmak üzere;
 $\hat{A}_1 = A_0 + A_1 e_1$, $\hat{A}_2 = A_2 + A_3 e_1$, $\hat{A}_3 = A_4 + A_5 e_1$, $\hat{A}_4 = A_6 - A_7 e_1$
 $\hat{A}_5 = A_8 + A_9 e_1$, $\hat{A}_6 = A_{10} - A_{11} e_1$, $\hat{A}_7 = A_{12} - A_{13} e_1$ ve
 $\hat{A}_8 = A_{14} + A_{15} e_1 \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ olduğundan

$$\begin{aligned}\check{A}^t &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14})^t \\ &= (A_0 + A_1 e_1 + (A_2 + A_3 e_1) e_2 + (A_4 + A_5 e_1) e_4 + (A_6 - A_7 e_1) e_6 \\ &\quad + (A_8 + A_9 e_1) e_8 + (A_{10} - A_{11} e_1) e_{10} + (A_{12} - A_{13} e_1) e_{12} + (A_{14} + A_{15} e_1) e_{14})^t \\ &= A_0^t + A_1^t e_1 + (A_2^t + A_3^t e_1) e_2 + (A_4^t + A_5^t e_1) e_4 + (A_6^t - A_7^t e_1) e_6 \\ &\quad + (A_8^t + A_9^t e_1) e_8 + (A_{10}^t - A_{11}^t e_1) e_{10} + (A_{12}^t - A_{13}^t e_1) e_{12} \\ &\quad + (A_{14}^t + A_{15}^t e_1) e_{14} \\ &= \hat{A}_1^t + \hat{A}_2^t e_2 + \hat{A}_3^t e_4 + \hat{A}_4^t e_6 + \hat{A}_5^t e_8 + \hat{A}_6^t e_{10} + \hat{A}_7^t e_{12} + \hat{A}_8^t e_{14}\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} = \check{A}_1 + \check{A}_2 e_4 + \check{A}_3 e_8 + \check{A}_4 e_{12} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ kuaterniyonik katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin transpozu $\check{A}^t$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\check{A}_1 &= A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, & \check{A}_2 &= A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3, \\ \check{A}_3 &= A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3, & \check{A}_4 &= A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{H})\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\check{A}^t &= (\check{A}_1 + \check{A}_2 e_4 + \check{A}_3 e_8 + \check{A}_4 e_{12})^t \\ &= (A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + (A_4 + A_5 e_1 + A_6 e_2 + A_7 e_3) e_4 \\ &\quad + (A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3) e_8 + (A_{12} - A_{13} e_1 - A_{14} e_2 - A_{15} e_3) e_{12})^t \\ &= +A_1^t e_1 + A_2^t e_2 + A_3^t e_3 + (A_4^t + A_5^t e_1 + A_6^t e_2 + A_7^t e_3) e_4 \\ &\quad + (A_8^t + A_9^t e_1 + A_{10}^t e_2 + A_{11}^t e_3) e_8 + (A_{12}^t - A_{13}^t e_1 - A_{14}^t e_2 - A_{15}^t e_3) e_{12} \\ &= \check{A}_1^t + \check{A}_2^t e_4 + \check{A}_3^t e_8 + \check{A}_4^t e_{12}\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\check{\check{A}} = \check{\check{A}}_1 + \check{\check{A}}_2 e_8 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ oktoniyonik katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{\check{A}}$ matrisinin transpozu $\check{\check{A}}^t$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\check{\check{A}}_1 &= A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4 + A_5 e_5 + A_6 e_6 + A_7 e_7 \text{ ve} \\ \check{\check{A}}_2 &= A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{O})\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\check{\check{A}}^t &= (\check{\check{A}}_1 + \check{\check{A}}_2 e_8)^t \\ &= (A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4 + A_5 e_5 + A_6 e_6 + A_7 e_7 \\ &\quad + (A_8 + A_9 e_1 + A_{10} e_2 + A_{11} e_3 + A_{12} e_4 + A_{13} e_5 + A_{14} e_6 + A_{15} e_7) e_8)^t \\ &= \check{\check{A}}_1^t + \check{\check{A}}_2^t e_8\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4. $\forall \check{A}, \check{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{S}), \forall \check{C} \in M_{n \times r}(\mathbb{S})$ ve $\lambda \in \mathbb{S}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$1. (\check{A} + \check{B})^t = \check{A}^t + \check{B}^t$$

$$2. (\check{A}^t)^t = \check{A}$$

$$3. (\lambda \otimes \check{A})^t = \lambda \otimes \check{A}^t$$

$$4. (\check{A} \otimes \check{C})^t \neq \check{C}^t \otimes \check{A}^t$$

İspat :

1. $\check{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i, \check{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\check{A} + \check{B})^t &= \left(\sum_{i=0}^{15} (A_i + B_i) e_i \right)^t \\ &= \sum_{i=0}^{15} (A_i + B_i)^t e_i \\ &= \sum_{i=0}^{15} A_i^t e_i + \sum_{i=0}^{15} B_i^t e_i \\ &= \check{A}^t + \check{B}^t \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\check{A}^t)^t &= [\check{a}_{ts}]^t \\ &= [\check{a}_{st}] \\ &= \check{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\lambda \in \mathbb{S}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \check{A})^t &= (\lambda \otimes [\check{a}_{st}])^t \\ &= [\lambda \otimes \check{a}_{ts}] \\ &= \lambda \otimes [\check{a}_{ts}] \\ &= \lambda \otimes \check{A}^t \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

4. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\check{C} \in M_{n \times r}(\mathbb{S})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 (\check{A} \otimes \check{C})^t &= \left(\left(\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{i=0}^{15} C_i e_i \right) \right)^t \\
 &= C_0^t A_0^t + \sum_{i=1}^{15} (C_i^t A_i^t) e_i \\
 &\quad + (C_1^t A_0^t + C_0^t A_1^t + \dots - C_{14}^t A_{15}^t) e_1 \\
 &\quad + (C_2^t A_0^t - C_3^t A_1^t + \dots + C_{13}^t A_{15}^t) e_2 \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad + (C_{15}^t A_0^t + C_{14}^t A_1^t + \dots + C_0^t A_{15}^t) e_{15}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \check{C}^t \otimes \check{A}^t &= \left(\sum_{i=0}^{15} C_i^t e_i \right) \otimes \left(\sum_{i=0}^{15} A_i^t e_i \right) \\
 &= C_0^t A_0^t + \sum_{i=1}^{15} (C_i^t A_i^t) e_i \\
 &\quad + (C_0^t A_1^t + C_1^t A_0^t + \dots - C_{15}^t A_{14}^t) e_1 \\
 &\quad + (C_0^t A_2^t - C_1^t A_3^t + \dots + C_{15}^t A_2^t) e_2 \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad + (C_0^t A_{15}^t + C_1^t A_0^t + \dots + C_{15}^t A_0^t) e_{15}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan $(\check{A} \otimes \check{C})^t \neq \check{C}^t \otimes \check{A}^t$ olarak bulunur.

2.1.7. Sedeniyonik Matrislerde Eşlenik Transpoz ve Özellikleri

Tanım 2.9. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ($1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n$) sedeniyonik matrisi verilsin. $(\check{A})^t = (\overline{\check{a}_{ts}})^t \in M_{n \times m}(\mathbb{S})$ şeklinde tanımlanan matrise $\check{A}$ matrisinin eşlenik transpozu denir. Sedeniyonik matrislerin reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı matrislerinin eşlenik transpozları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

1. $\check{A} = \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ reel katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$

matrisinin eşlenik transpozu $(\check{A})^t$ olmak üzere, $\check{A}$ matrisinin eşleniği

$$\bar{\check{A}} = A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} (\check{A})^t &= \left(A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \right)^t \\ &= A_0^t - \sum_{i=1}^{15} A_i^t e_i \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

2. $\check{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 e_2 + \hat{A}_3 e_4 + \hat{A}_4 e_6 + \hat{A}_5 e_8 + \hat{A}_6 e_{10} + \hat{A}_7 e_{12} + \hat{A}_8 e_{14} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$

kompleks katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\check{A}$ matrisinin eşlenik transpozu

$(\check{A})^t$ olmak üzere, $\check{A}$ matrisinin eşleniği

$$\bar{\check{A}} = \bar{\hat{A}}_1 - \hat{A}_2 e_2 - \hat{A}_3 e_4 - \hat{A}_4 e_6 - \hat{A}_5 e_8 - \hat{A}_6 e_{10} - \hat{A}_7 e_{12} - \hat{A}_8 e_{14}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (\check{A})^t &= \left(\bar{\hat{A}}_1 - \hat{A}_2 e_2 - \hat{A}_3 e_4 - \hat{A}_4 e_6 - \hat{A}_5 e_8 - \hat{A}_6 e_{10} - \hat{A}_7 e_{12} - \hat{A}_8 e_{14} \right)^t \\ &= \left(\bar{\hat{A}}_1 \right)^t - \hat{A}_2^t e_2 - \hat{A}_3^t e_4 - \hat{A}_4^t e_6 - \hat{A}_5^t e_8 - \hat{A}_6^t e_{10} - \hat{A}_7^t e_{12} - \hat{A}_8^t e_{14} \end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 e_4 + \tilde{A}_3 e_8 + \tilde{A}_4 e_{12} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ kuaterniyonik katsayılı

sedeniyonik matris verilsin. $\check{A}$ matrisinin eşlenik transpozu $(\check{A})^t$ olmak üzere,

$\check{A}$ matrisinin eşleniği $\bar{\check{A}} = \bar{\tilde{A}}_1 - \tilde{A}_2 e_4 - \tilde{A}_3 e_8 - \tilde{A}_4 e_{12}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(\overline{\tilde{A}})^t &= (\overline{\tilde{A}_1} - \tilde{A}_2 e_4 - \tilde{A}_3 e_8 - \tilde{A}_4 e_{12})^t \\
&= (\overline{\tilde{A}_1})^t - \tilde{A}_2^t e_4 - \tilde{A}_3^t e_8 - \tilde{A}_4^t e_{12}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}_1 + \tilde{\tilde{A}}_2 e_8 \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ oktoniyonik katsayılı sedeniyonik matrisi verilsin. $\tilde{A}$ matrisinin eşlenik transpozu $(\overline{\tilde{A}})^t$ olmak üzere,

$\tilde{A}$ matrisinin eşleniği $\overline{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_1 - \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_2 e_8$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(\overline{\tilde{A}})^t &= (\tilde{\tilde{\tilde{A}}}_1 - \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_2 e_8)^t \\
&= (\tilde{\tilde{\tilde{A}}}_1)^t - \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_2^t e_8
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.5. $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}), \forall \tilde{C} \in M_{\text{nxr}}(\mathbb{S})$ sedeniyonik matrisleri ve $\lambda \in \mathbb{S}$ reel katsayılı sedeniyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\overline{\lambda \otimes_s \tilde{A}})^t = (\overline{\tilde{A}})^t \otimes_s \bar{\lambda}$
2. $(\overline{\tilde{A}})^t = (\overline{\tilde{A}^t})$
3. $(\overline{\tilde{A} + \tilde{B}})^t = (\overline{\tilde{A}})^t + (\overline{\tilde{B}})^t$
4. $(\overline{\tilde{A} \otimes \tilde{C}})^t \neq (\overline{\tilde{C}})^t \otimes (\overline{\tilde{A}})^t$

İspat :

$$\begin{aligned}
1. \quad (\overline{\lambda \otimes_s \tilde{A}})^t &= (\overline{\tilde{A}} \otimes_s \bar{\lambda})^t \\
&= (\overline{\tilde{A}})^t \otimes_s \bar{\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} = [\check{a}_{st}] = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $A_i \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\check{A})^t &= [\check{a}_{st}]^t \\ &= \left(A_0 - \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \right)^t \\ &= A_0^t - \sum_{i=1}^{15} A_i^t e_i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\check{A}^t) &= [\check{a}_{ts}] = [\overline{a_{ts}^0 + a_{ts}^1 + \dots + a_{ts}^{15}}] \\ &= [a_{ts}^0] - [a_{ts}^1]e_1 - \dots - [a_{ts}^{15}]e_{15} \\ &= A_0^t - \sum_{i=1}^{15} A_i^t e_i \end{aligned}$$

olduğundan

$$(\check{A})^t = (\check{A}^t)$$

elde edilir.

3. $\check{A} = [\check{a}_{st}]$, $\check{B} = [\check{b}_{st}] \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\check{A} + \check{B})^t &= [\check{a}_{st} + \check{b}_{st}]^t \\ &= [\check{a}_{st} + \check{b}_{st}]^t \\ &= [\check{a}_{ts}] + [\check{b}_{st}] \\ &= (\check{A})^t + (\check{B})^t \end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $\check{C} \in M_{\text{nxp}}(\mathbb{S})$ olmak üzere

$$(\check{A} \otimes \check{C})^t = \left(\left(\sum_{i=0}^{15} A_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{i=0}^{15} C_i e_i \right) \right)^t$$

$$\begin{aligned}
&= C_0^t A_0^t - \sum_{i=1}^{15} (C_i^t A_i^t) \\
&\quad - (C_1^t A_0^t + C_0^t A_1^t + \dots - C_{14}^t A_{15}^t) e_1 \\
&\quad - (C_2^t A_0^t - C_3^t A_1^t + \dots + C_{13}^t A_{15}^t) e_2 \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad - (C_{15}^t A_0^t + C_{14}^t A_1^t + \dots + C_0^t A_{15}^t) e_{15}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\bar{C})^t \otimes (\bar{A})^t &= \left(\sum_{i=0}^{15} C_i^t e_i \right) \otimes \left(\sum_{i=0}^{15} A_i^t e_i \right) \\
&= C_0^t A_0^t - \sum_{i=1}^{15} (C_i^t A_i^t) e_i \\
&\quad - (C_0^t A_1^t + C_1^t A_0^t + \dots + C_{15}^t A_{14}^t) e_1 \\
&\quad - (A_0^t C_2^t + C_1^t A_3^t + \dots - C_{15}^t A_{13}^t) e_2 \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad - (C_0^t A_{15}^t - C_1^t A_{14}^t + \dots + C_{15}^t A_0^t) e_{15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\bar{A} \otimes \bar{C})^t \neq (\bar{C})^t \otimes (\bar{A})^t$ olarak bulunur.

2.1.8. Sedeniyonik Matrislerin Tersleri

Tanım 2.10. Herhangi bir $\check{A} \in M_n(\mathbb{S})$ için $\check{A} \otimes \check{B} = I_n$ ise $\check{B}$ sedeniyonik matrisine $\check{A}$ sedeniyonik matrisinin sağ tersi denir. $\check{B} \otimes \check{A} = I_n$ ise $\check{B}$ sedeniyonik matrisine $\check{A}$ sedeniyonik matrisinin sol tersi denir. Sağ ve sol terslere sahip ve bu tersleri eşit olan $\check{A}$ matrisine tersinir matris denir ve $\check{A}$ matrisinin tersi $\check{A}^{-1}$ ile gösterilir.

2.1.9. Sedeniyonik Matrislerde İz İşlemi ve Özellikleri

Tanım 2.11. $\tilde{A} = [\tilde{a}_{st}] = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_n(\mathbb{S})$ olmak üzere $\tilde{A}$ sedeniyonik kare matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanların toplamına $\tilde{A}$ matrisinin izi denir ve $\text{İz}(\tilde{A})$ ile gösterilir.

$$\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i \in M_n(\mathbb{S}) \text{ sedeniyonik matrisinin izi}$$

$$\begin{aligned} \text{İz}(\tilde{A}) &= \sum_{r=1}^n \tilde{a}_{rr} \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i=0}^{15} \tilde{a}_{rr}^i \right) \\ &= \sum_{r=1}^n (\tilde{a}_{rr}^0 + \tilde{a}_{rr}^1 + \dots + \tilde{a}_{rr}^{15}) \\ &= \sum_{r=1}^n (\tilde{a}_{rr}^0) + \sum_{r=1}^n (\tilde{a}_{rr}^1) + \dots + \sum_{r=1}^n (\tilde{a}_{rr}^{15}) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \text{İz}(\tilde{A}) &= \text{İz}(A_0) + \text{İz}(A_1)e_1 + \text{İz}(A_2)e_2 + \dots + \text{İz}(A_{15})e_{15} \\ &= \sum_{i=0}^{15} \text{İz}(A_i)e_i \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.6. $\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i, \tilde{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_n(\mathbb{S}), \lambda \in \mathbb{S}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\text{İz}(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = \text{İz}(\tilde{A}) \oplus_s \text{İz}(\tilde{B})$
2. $\text{İz}(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \neq \text{İz}(\tilde{A}) \otimes_s \text{İz}(\tilde{B})$
3. $\text{İz}(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \neq \text{İz}(\tilde{B} \otimes \tilde{A})$
4. $\text{İz}(\tilde{A} \otimes_s \lambda) \neq \text{İz}(\tilde{A}) \otimes_s \lambda$ veya $\text{İz}(\lambda \otimes_s \tilde{A}) \neq \lambda \otimes_s \text{İz}(\tilde{A})$
5. $\text{İz}(\tilde{A}^t) = \text{İz}(\tilde{A})$

İspat :

1. $\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$, $\tilde{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_n(\mathbb{S})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{İz}(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) &= \text{İz} \left(\sum_{i=0}^{15} (A_i + B_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} \text{İz}(A_i + B_i) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} (\text{İz}(A_i) + \text{İz}(B_i)) e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{15} \text{İz}(A_i) e_i \right) \oplus_s \left(\sum_{i=0}^{15} \text{İz}(B_i) e_i \right) \\ &= \text{İz}(\tilde{A}) \oplus_s \text{İz}(\tilde{B}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\tilde{A} = \sum_{i=0}^{15} A_i e_i$, $\tilde{B} = \sum_{i=0}^{15} B_i e_i \in M_n(\mathbb{S})$ olmak üzere

Sedeniyonik matrislerin reel kombinasyonlarının çarpımından;

$$\begin{aligned} \text{İz}(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) &= \text{İz}(A_0 B_0) - \text{İz} \left(\sum_{i=1}^{15} A_i B_i \right) \\ &\quad + \text{İz}(A_0 B_1 + A_1 B_0 + A_2 B_3 - A_3 B_2 + A_4 B_5 - A_5 B_4 - A_6 B_7 + A_7 B_6 + A_8 B_9 \\ &\quad - A_9 B_1 - A_{10} B_{11} + A_{11} B_{10} - A_{12} B_{13} - A_{13} B_9 + A_{14} B_{15} - A_{15} B_{14}) e_1 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad + \text{İz}(A_0 B_{15} + A_1 B_{14} - A_2 B_{13} - A_3 B_{12} + A_4 B_{11} + A_5 B_{10} - A_6 B_9 + A_7 B_8 \\ &\quad - A_8 B_7 + A_9 B_6 - A_{10} B_5 - A_{11} B_4 + A_{12} B_3 + A_{13} B_2 - A_{14} B_1 + A_{15} B_0) e_{15} \end{aligned}$$

ve

$$\text{İz}(\tilde{A}) = \sum_{i=0}^{15} \text{İz}(A_i) e_i \text{ ve } \text{İz}(\tilde{B}) = \sum_{i=0}^{15} \text{İz}(B_i) e_i \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
\text{İz}(\check{A}) \otimes_s \text{İz}(\check{B}) &= \text{İz}(A_0 B_0) - \text{İz}\left(\sum_{i=1}^{15} A_i B_i\right) \\
&+ \text{İz}(A_0 B_1 + A_1 B_0 + A_2 B_3 - A_3 B_2 + A_4 B_5 - A_5 B_4 - A_6 B_7 + A_7 B_6 + A_8 B_9 \\
&- A_9 B_1 - A_{10} B_{11} + A_{11} B_{10} - A_{12} B_{13} - A_{13} B_9 + A_{14} B_{15} - A_{15} B_{14})e_1 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&+ \text{İz}(A_0 B_{15} + A_1 B_{14} - A_2 B_{13} - A_3 B_{12} + A_4 B_{11} + A_5 B_{10} - A_6 B_9 + A_7 B_8 \\
&- A_8 B_7 + A_9 B_6 - A_{10} B_5 - A_{11} B_4 + A_{12} B_3 + A_{13} B_2 - A_{14} B_1 + A_{15} B_0)e_{15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Reel katsayılı matrislerde $\text{İz}(A \otimes B) \neq \text{İz}(A) \otimes_s \text{İz}(B)$ olduğundan bulunan fonksiyonlar her zaman eşit değildir. Bu yüzden $\text{İz}(\check{A} \otimes \check{B}) \neq \text{İz}(\check{A}) \otimes_s \text{İz}(\check{B})$ 'dir.

3. Sedeniyonlar değişmeli olmadığından $\text{İz}(\check{A} \otimes \check{B}) \neq \text{İz}(\check{B} \otimes \check{A})$ genelde sağlanmaz.

4. $\lambda \in \mathbb{S}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] = \sum_{i=1}^{15} A_i e_i \in M_n(\mathbb{S})$ ve $\lambda \otimes_s \check{A} = [\lambda \otimes_s \check{a}_{st}]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\text{İz}(\lambda \otimes \check{A}) &= \sum_{r=1}^n \lambda \otimes \check{a}_{rr} = \sum_{r=1}^n \lambda \otimes \left(\sum_{i=1}^{15} a_{rr}^i e_i \right) \\
&= \sum_{r=1}^n \lambda \otimes_s (a_{rr}^0 + a_{rr}^1 + \cdots + a_{rr}^{15}) \\
&= \sum_{r=1}^n (\lambda \otimes_s a_{rr}^0 + \lambda \otimes_s a_{rr}^1 + \cdots + \lambda \otimes_s a_{rr}^{15}) \\
&= \sum_{r=1}^n (\lambda \otimes_s a_{rr}^0) + \sum_{r=1}^n (\lambda \otimes_s a_{rr}^1) + \cdots + \sum_{r=1}^n (\lambda \otimes_s a_{rr}^{15}) \\
&= \lambda \otimes_s \sum_{r=1}^n (a_{rr}^0) + \lambda \otimes_s \sum_{r=1}^n (a_{rr}^1) + \cdots + \lambda \otimes_s \sum_{r=1}^n (a_{rr}^{15}) \\
&= \lambda \otimes_s \text{İz}(A_0) + \lambda \otimes_s (\text{İz}(A_1))e_1 + \cdots + \lambda \otimes_s (\text{İz}(A_{15}))e_{15}
\end{aligned}$$

$$= \lambda \otimes_s \sum_{i=0}^{15} \text{İz}(A_i e_i)$$

elde edilir.

5. $\check{A} = [\check{a}_{st}] = M_n(\mathbb{S})$ matrisi için $\text{İz}(\check{A}) = \sum_{r=1}^n \check{a}_{rr}$ olarak yazılır. Ayrıca $s = t$ için $[\check{a}_{st}] = [\check{a}_{ts}]$ olduğundan $\check{A}^t = [\check{a}_{ts}]$ matrisinin izi $\text{İz}(\check{A}^t) = \sum_{r=1}^n \check{a}_{rr}$ şeklinde bulunur. Böylece $\text{İz}(\check{A}^t) = \text{İz}(\check{A})$ elde edilir.

2.2. Sedeniyonik Matrisler Üzerinde Cebirsel Yapılar

2.2.1. $\mathbb{R}$ Cismi Üzerinde Vektör Uzayı Yapısı

Tanım 2.12. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olmak üzere bir reel sayı ile sedeniyonik matrisin çarpımı

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}) &\rightarrow M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}) \\ (\lambda, \check{A}) &\rightarrow \lambda \odot \check{A} = \lambda \odot [\check{a}_{st}] \\ &= [\lambda \check{a}_{st}]_{\text{mxn}} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ olduğundan $\lambda \check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ olur. Yani $\lambda \check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olup; $\odot$ işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 2.7. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\lambda_1 \odot (\check{A} \oplus \check{B}) = \lambda_1 \odot \check{A} \oplus \lambda_1 \odot \check{B}$
2. $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot \check{A} = \lambda_1 \check{A} \oplus \lambda_2 \check{A}$
3. $(\lambda_1 \lambda_2) \odot \check{A} = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot \check{A})$
4. $1_\lambda, \mathbb{R}$ cisminin birim elemanı olmak üzere $1_\lambda \odot \check{A} = \check{A}$

İspat :

1. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lambda_1 \odot (\check{A} \oplus \check{B}) &= \lambda_1 \odot ([\check{a}_{st}] \oplus [\check{b}_{st}]) \\ &= \lambda_1 \odot [\check{a}_{st} + \check{b}_{st}] \\ &= [\lambda_1(\check{a}_{st} + \check{b}_{st})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\lambda_1 \check{a}_{st} + \lambda_1 \check{b}_{st}] \\
&= [\lambda_1 \check{a}_{st}] \oplus [\lambda_1 \check{b}_{st}] \\
&= \lambda_1 \odot [\check{a}_{st}] + \lambda_1 \odot [\check{b}_{st}] \\
&= \lambda_1 \odot \check{A} \oplus \lambda_1 \odot \check{B}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2) \odot \check{A} &= [(\lambda_1 + \lambda_2) \check{a}_{st}] \\
&= [\lambda_1 \check{a}_{st} + \lambda_2 \check{a}_{st}] \\
&= [\lambda_1 \check{a}_{st}] \oplus [\lambda_2 \check{a}_{st}] \\
&= \lambda_1 \odot [\check{a}_{st}] \oplus \lambda_2 \odot [\check{a}_{st}] \\
&= \lambda_1 \odot \check{A} \oplus \lambda_2 \odot \check{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \lambda_2) \odot \check{A} &= [(\lambda_1 \lambda_2) \check{a}_{st}] \\
&= [\lambda_1 (\lambda_2 \check{a}_{st})] \\
&= \lambda_1 \odot [(\lambda_2 \check{a}_{st})] \\
&= \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot [\check{a}_{st}]) \\
&= \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot \check{A})
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere $1_\lambda, \mathbb{R}$ cisminin birim elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
1_\lambda \odot \check{A} &= [1_\lambda \check{a}_{kl}] \\
&= [\check{a}_{kl}] \\
&= \check{A}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus)$ yapısının Abel grubu olduğu daha önceden gösterilmiştir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4. $\{M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ yapısı vektör uzayıdır.

Tanım 2.13. $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $\check{a}_{st} = \sum_{i=0}^{15} a_{st}^i e_i$ olmak üzere

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \check{a}_{11} & \check{a}_{12} & \cdots & \check{a}_{1n} \\ \check{a}_{21} & \check{a}_{22} & \cdots & \check{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{a}_{m1} & \check{a}_{m2} & \cdots & \check{a}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\check{A} = a_{11}^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{11}^1 \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{11}^{15} \begin{bmatrix} e_{15} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{1n}^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{1n}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & e_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{1n}^{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & e_{15} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{m1}^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{m1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{m1}^{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{15} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{mn}^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + a_{mn}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{bmatrix} + \cdots + a_{mn}^{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{15} \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$M_{m \times n}(\mathbb{S}) = \text{Sp}\{S_1\} = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} e_{15} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & e_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & e_{15} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{15} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{15} \end{bmatrix} \Bigg\}$$

elde edilir. Bu durumda S_1 sisteminin lineer bağımsız olduğu gösterilirse, S_1 sisteminin $\mathbb{R}$ cismi üzerindeki $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ vektör uzayının bir bazı olduğu gösterilmiş olur.

$q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}, q_{m1}, q_{m2}, \dots, q_{mn}, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}, r_{m1}, r_{m2}, \dots, r_{mn},$
 $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}, t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mn} \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
& q_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + r_{11} \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + t_{11} \begin{bmatrix} e_{15} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
& + \dots + q_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + r_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & e_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + t_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & e_{15} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
& + \dots + q_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + r_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + t_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{15} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
& + \dots + q_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + r_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_1 \end{bmatrix} + \dots + t_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{15} \end{bmatrix} \\
& = \check{O}_{m \times n} \text{ olsun.}
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} q_{11} + r_{11}e_1 + \dots + t_{11}e_{15} & q_{12} + r_{12}e_1 + \dots + t_{12}e_{15} & \dots & q_{1n} + r_{1n}e_1 + \dots + t_{1n}e_{15} \\ q_{21} + r_{21}e_1 + \dots + t_{21}e_{15} & q_{22} + r_{22}e_1 + \dots + t_{22}e_{15} & \dots & q_{2n} + r_{2n}e_1 + \dots + t_{2n}e_{15} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} + r_{m1}e_1 + \dots + t_{m1}e_{15} & q_{m2} + r_{m2}e_1 + \dots + t_{m2}e_{15} & \dots & q_{mn} + r_{mn}e_1 + \dots + t_{mn}e_{15} \end{bmatrix} = \check{O}_{m \times n}$$

olur. O halde

$q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}, q_{m1}, q_{m2}, \dots, q_{mn}, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}, r_{m1}, r_{m2}, \dots, r_{mn},$
 $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}, t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mn} = 0$ elde edilir. S_1 lineer bağımsızdır.

Sonuç 2.5. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ vektör uzayı için

1. S_1 sistemi lineer bağımsızdır.
2. $M_{m \times n}(\mathbb{S}) = \text{Sp}\{S_1\}$ olduğundan S_1 matris sistemi $M_{m \times n}(\mathbb{S})$ vektör uzayının standart bazıdır. Böylece $\text{boy}(M_{m \times n}(\mathbb{S})) = 16mn$ elde edilir.

2.2.2. $\mathbb{C}$ Cismi Üzerinde Sol (Sağ) Vektör Uzayı Yapısı

Tanım 2.14. $z \in \mathbb{C}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere bir kompleks sayı ile bir sedeniyonik matrisin sol çarpımı

$$z \odot \check{A} = z \odot [\check{a}_{st}] = [z\check{a}_{st}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır. $z \in \mathbb{C}$ ve $\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ için $z\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ şeklindedir. $z\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olup

$$\odot: \mathbb{C} \times M_{m \times n}(\mathbb{S}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{S})$$

$$(z, \check{A}) \rightarrow z \odot \check{A} = [z\check{a}_{st}]_{m \times n}$$

işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 2.8. $\check{A}, \check{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $z_1 \odot (\check{A} + \check{B}) = z_1 \odot \check{A} \oplus z_1 \odot \check{B}$
2. $(z_1 + z_2)\check{A} = z_1 \odot \check{A} \oplus z_2 \odot \check{A}$
3. $(z_1 z_2) \odot \check{A} \neq z_1 \odot (z_2 \odot \check{A})$
4. $1_z, \mathbb{C}$ cisminin birim elemanı olmak üzere $1_z \odot \check{A} = \check{A}$

İspat :

1. $\check{A}, \check{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $z_1 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} z_1 \odot (\check{A} + \check{B}) &= z_1 \odot ([\check{a}_{st}] \oplus [\check{b}_{st}]) \\ &= z_1 \odot [\check{a}_{st} + \check{b}_{st}] \\ &= [z_1(\check{a}_{st} + \check{b}_{st})] \\ &= [z_1\check{a}_{st} + z_1\check{b}_{st}] \\ &= [z_1\check{a}_{st}] \oplus [z_1\check{b}_{st}] \\ &= z_1 \odot [\check{a}_{st}] + z_1 \odot [\check{b}_{st}] \\ &= z_1 \odot \check{A} + z_1 \odot \check{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) \odot \check{A} &= [(z_1 + z_2)\check{a}_{st}] \\ &= [z_1\check{a}_{st} + z_2\check{a}_{st}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [z_1 \check{a}_{st}] \oplus [z_2 \check{a}_{st}] \\
&= z_1 \odot [\check{a}_{st}] \oplus z_2 \odot [\check{a}_{st}] \\
&= z_1 \odot \check{A} + z_2 \odot \check{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) \odot \check{A} &= [(z_1 z_2) \check{a}_{st}] \\
&\neq [z_1 (z_2 \check{a}_{st})] \\
&= z_1 \odot [(z_2 \check{a}_{st})] \\
&= z_1 \odot (z_2 \odot [\check{a}_{st}]) \\
&= z_1 \odot (z_2 \odot \check{A})
\end{aligned}$$

Sedeniyonlar birleşme özelliğini sağlamadığından $(z_1 z_2) \odot \check{A} \neq z_1 \odot (z_2 \odot \check{A})$ bulunur.

4. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere 1_z , $\mathbb{C}$ cisminin birim elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
1_z \odot \check{A} &= [1_z \check{a}_{st}] \\
&= [\check{a}_{st}] \\
&= \check{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.6. $\{M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ yapısı sol vektör uzayı değildir.

Tanım 2.15. $z \in \mathbb{C}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere bir kompleks sayı ile bir sedeniyonik matrisin sağ çarpımı

$\check{A} \odot z = [\check{a}_{st}] \odot z = [\check{a}_{st} z]_{m \times n}$ şeklinde tanımlanır. $z \in \mathbb{C}$ ve $\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ için $\check{a}_{st} z \in \mathbb{S}$ şeklindedir. Yani $\check{A} z \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olup

$$\begin{aligned}
\odot: M_{m \times n}(\mathbb{S}) \times \mathbb{C} &\rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{S}) \\
(\check{A}, z) &\rightarrow \check{A} \odot z = [\check{a}_{st} z]_{m \times n}
\end{aligned}$$

işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 2.9. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\check{A} \oplus \check{B}) \odot z_1 = z_1 \odot \check{A} \oplus z_1 \odot \check{B}$
2. $\check{A} (z_1 + z_2) = z_1 \odot \check{A} \oplus z_2 \odot \check{A}$
3. $\check{A} \odot (z_1 z_2) \neq (\check{A} \odot z_1) \odot z_2$
4. $1_z, \mathbb{C}$ cisminin birim elemanı olmak üzere $\check{A} \odot 1_z = \check{A}$

İspat :

1. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $z_1 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (\check{A} \oplus \check{B}) \odot z_1 &= ([\check{a}_{\text{st}}] \oplus [\check{b}_{\text{st}}]) \odot z_1 \\
 &= [\check{a}_{\text{st}} + \check{b}_{\text{st}}] \odot z_1 \\
 &= [(\check{a}_{\text{st}} + \check{b}_{\text{st}})z_1] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}z_1 + \check{b}_{\text{st}}z_1] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}z_1] \oplus [\check{b}_{\text{st}}z_1] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}] \odot z_1 \oplus [\check{b}_{\text{st}}] \odot z_1 \\
 &= \check{A} \odot z_1 \oplus \check{B} \odot z_1
 \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \check{A} \odot (z_1 + z_2) &= [\check{a}_{\text{st}}(z_1 + z_2)] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}z_1 + \check{a}_{\text{st}}z_2] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}z_1] \oplus [\check{a}_{\text{st}}z_2] \\
 &= [\check{a}_{\text{st}}] \odot z_1 + [\check{a}_{\text{st}}] \odot z_2 \\
 &= \check{A} \odot z_1 + \check{A} \odot z_2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \check{A} \odot (z_1 z_2) &= [\check{a}_{\text{st}}(z_1 z_2)] \\
 &\neq [(\check{a}_{\text{st}}z_1)z_2] \\
 &= [(\check{a}_{\text{st}}z_1)] \odot z_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ([\check{a}_{st}]) \odot z_1 \odot z_2 \\
&= (\check{A} \odot z_1) \odot z_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Sedeniyonlarda birleşme özelliğini sağlamadığından $\check{A} \odot (z_1 z_2) \neq (\check{A} \odot z_1) \odot z_2$ bulunur.

4. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere 1_z , $\mathbb{C}$ cisminin birim elemanı olsun.

$$\begin{aligned}
\check{A} \odot 1_z &= [\check{a}_{st} 1_z] \\
&= [\check{a}_{st}] \\
&= \check{A}
\end{aligned}$$

elde edilir

Sonuç 2.7. $\{M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ yapısı sağ vektör uzayı değildir.

2.2.3. $\mathbb{H}$ Halkası Üzerinde Sol (Sağ) Modül Yapısı

Tanım 2.16. $q \in \mathbb{H}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere bir kuaterniyon ile bir sedeniyonik matrisin sol çarpımı $q \odot \check{A} = q \odot [\check{a}_{st}] = [q\check{a}_{st}]_{m \times n}$ şeklinde tanımlanır.

$q \in \mathbb{H}$ ve $\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ için $q\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ şeklindedir. Yani $q\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olup

$$\begin{aligned}
\odot : \mathbb{H} \times M_{m \times n}(\mathbb{S}) &\rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{S}) \\
(q, \check{A}) &\rightarrow q \odot \check{A} = [q\check{a}_{st}]_{m \times n}
\end{aligned}$$

işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 2.10. $\check{A}, \check{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $q_1 \odot (\check{A} \oplus \check{B}) = q_1 \odot \check{A} \oplus q_1 \odot \check{B}$
2. $(q_1 + q_2) \odot \check{A} = q_1 \odot \check{A} \oplus q_2 \odot \check{A}$
3. $(q_1 q_2) \odot \check{A} \neq q_1 \odot (q_2 \odot \check{A})$
4. 1_q , $\mathbb{H}$ halkasının birim elemanı olmak üzere $1_q \odot \check{A} = \check{A}$

İspat :

1. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $q_1 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 q_1 \odot (\check{A} + \check{B}) &= q_1 \odot ([\check{a}_{\text{st}}] + [\check{b}_{\text{st}}]) \\
 &= q_1 \odot [\check{a}_{\text{st}} + \check{b}_{\text{st}}] \\
 &= [q_1(\check{a}_{\text{st}} + \check{b}_{\text{st}})] \\
 &= [q_1\check{a}_{\text{st}} + q_1\check{b}_{\text{st}}] \\
 &= [q_1\check{a}_{\text{st}}] \oplus [q_1\check{b}_{\text{st}}] \\
 &= q_1 \odot [\check{a}_{\text{st}}] + q_1 \odot [\check{b}_{\text{st}}] \\
 &= q_1 \odot \check{A} + q_1 \odot \check{B}
 \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (q_1 + q_2)\check{A} &= [(q_1 + q_2)\check{a}_{\text{st}}] \\
 &= [q_1\check{a}_{\text{st}} + q_2\check{a}_{\text{st}}] \\
 &= [q_1\check{a}_{\text{st}}] \oplus [q_2\check{a}_{\text{st}}] \\
 &= q_1[\check{a}_{\text{st}}] \oplus q_2[\check{a}_{\text{st}}] \\
 &= q_1\check{A} \oplus q_2\check{A}
 \end{aligned}$$

bulunur.

3. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (q_1 q_2) \odot \check{A} &= [(q_1 q_2)\check{a}_{\text{st}}] \\
 &\neq [q_1(q_2\check{a}_{\text{st}})] \\
 &= q_1 \odot [(q_2\check{a}_{\text{st}})] \\
 &= q_1 \odot (q_2 \odot [\check{a}_{\text{st}}]) \\
 &= q_1 \odot (q_2 \odot \check{A})
 \end{aligned}$$

sedeniyonlar birleşme özelliğini sağlamadığından $(q_1 q_2) \odot \check{A} \neq q_1 \odot (q_2 \odot \check{A})$ olarak bulunur.

4. $\check{A} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olmak üzere 1_q , $\mathbb{H}$ halkasının birim elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1_q \odot \check{A} &= [1_q \check{a}_{st}] \\ &= [\check{a}_{st}] \\ &= \check{A} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Sonuç 2.8. $\{M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}), \oplus, \mathbb{H}, +, \cdot, \odot\}$ yapısı sol modül değildir.

Tanım 2.17. $q \in \mathbb{H}$ ve $\check{A} = [\check{a}_{st}] \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olmak üzere bir kuaterniyon ile bir sedeniyonik matrisin sağ çarpımı $\check{A} \odot q = [\check{a}_{st}] \odot q = [\check{a}_{st}q]_{\text{mxn}}$ şeklinde tanımlanır. $q \in \mathbb{H}$ ve $\check{a}_{st} \in \mathbb{S}$ için $\check{a}_{st}q \in \mathbb{S}$ şeklindedir. Yani $\check{A}q \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ olup

$$\begin{aligned} \odot: M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}) \times \mathbb{H} &\rightarrow M_{\text{mxn}}(\mathbb{S}) \\ (\check{A}, q) &\rightarrow \check{A} \odot q = [\check{a}_{st}q]_{\text{mxn}} \end{aligned}$$

işlemi bir dış işlemdir.

Teorem 2.11. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(\check{A} \oplus \check{B}) \odot q_1 = q_1 \odot \check{A} \oplus q_1 \odot \check{B}$
2. $\check{A} \odot (q_1 + q_2) = q_1 \odot \check{A} \oplus q_2 \odot \check{A}$
3. $\check{A} \odot (q_1 q_2) \neq (\check{A} \odot q_1) \odot q_2$
4. 1_q , $\mathbb{H}$ halkasının birim elemanı olmak üzere $\check{A} \odot 1_q = \check{A}$

İspat :

1. $\check{A}, \check{B} \in M_{\text{mxn}}(\mathbb{S})$ ve $q_1 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (\check{A} \oplus \check{B}) \odot q_1 &= ([\check{a}_{st}] \oplus [\check{b}_{st}]) \odot q_1 \\ &= [\check{a}_{st} + \check{b}_{st}] \odot q_1 \\ &= [(\check{a}_{st} + \check{b}_{st})q_1] \\ &= [\check{a}_{st}q_1 + \check{b}_{st}q_1] \\ &= [\check{a}_{st}q_1] \oplus [\check{b}_{st}q_1] \\ &= [\check{a}_{st}] \odot q_1 \oplus [\check{b}_{st}] \odot q_1 \\ &= \check{A} \odot q_1 \oplus \check{B} \odot q_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \check{A} \odot (q_1 + q_2) &= [\check{a}_{st}(q_1 + q_2)] \\
 &= [\check{a}_{st}q_1 + \check{a}_{st}q_2] \\
 &= [\check{a}_{st}q_1] \oplus [\check{a}_{st}q_2] \\
 &= [\check{a}_{st}] \odot q_1 \oplus [\check{a}_{st}] \odot q_2 \\
 &= \check{A} \odot q_1 \oplus \check{A} \odot q_2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ ve $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \check{A} \odot (q_1 q_2) &= [\check{a}_{st}(q_1 q_2)] \\
 &\neq [(\check{a}_{st}q_1)q_2] \\
 &= [(\check{a}_{st}q_1)] \odot q_2 \\
 &= ([\check{a}_{st}] \odot q_1) \odot q_2 \\
 &= (\check{A} \odot q_1) \odot q_2
 \end{aligned}$$

sedeniyonlar birleşme özelliğini sağlamadığından $\check{A} \odot (q_1 q_2) \neq (\check{A} \odot q_1) \odot q_2$ olarak bulunur.

4. $\check{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{S})$ olmak üzere 1_q , $\mathbb{H}$ halkasının birim elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \check{A} \odot 1_q &= [\check{a}_{st}1_q] \\
 &= [\check{a}_{st}] \\
 &= \check{A}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.9. $M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus, \mathbb{H}, +, \cdot, \odot$ yapısı sağ modül değildir.

Not 2.2. Oktoniyonlar ve sedeniyonlar kümeleri halka yapısına sahip olmadığından $\mathbb{S}$ üzerinde modül yapısı araştırılamaz.

3. TARTIŞMALAR VE SONUÇLAR

Çalışmada ilk olarak sedeniyonlar ile ilgili literatürde var olan bilgiler verilmiştir. Bu bilgilerden yararlanılarak $(\mathbb{S}, \oplus_s)$ yapısının Abel grup olduğu ve $\mathbb{S}$ kümesinin $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ cismi üzerinde 16 boyutlu vektör uzayı olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{S}$ kümesinden $\mathbb{R}^{16}$ uzayına bir dönüşüm tanımlanarak $\mathbb{S}$ ile $\mathbb{R}^{16}$ vektör uzayının izomorf olduğu gösterilmiştir. Diğer Cayley-Dickson cebirlerinden farklı olarak $\mathbb{S}$ kümesi sıfır bölen elemanları incelenmiştir. $\mathbb{S}$ bölme cebiri olmadığından ters eleman özelliğinden yararlanılarak sağ ve sol bölme işlemleri tanımlanmıştır. Daha sonra oktoniyonlar cebirindeki kutupsal gösterime benzer olarak sedeniyonların kutupsal gösterimi elde edilmiştir. Sedeniyonlar üzerinde sağ ve sol dönüşümlerden bir reel sedeniyonun sağdan ve soldan reel matris gösterimleri elde edilmiştir. İlk bölümün ikinci kısmında sedeniyonik fonksiyonların tanımı yapılmıştır. Daha sonra sedeniyonik fonksiyonların regüler olması için sağlaması gereken şartlar incelenmiş ve bazı özel tipteki sedeniyonların regülerlikleri incelenmiştir. Üçüncü kısımda reel sedeniyonların kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik katsayılı gösterimleri incelenmiştir. $\mathbb{S}_\mathbb{O}$, $\mathbb{S}_\mathbb{H}$, $\mathbb{S}_\mathbb{C}$ kümeleri üzerindeki cebirsel işlemler incelenmiş ve bu kümelerin Abel grup olduğu gösterilmiştir. Dördüncü kısımda reel sedeniyonların kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik olarak sırasıyla 6 farklı tipte özel eşlenik tanımları ve norm özellikleri incelenmiştir. Sedeniyonların kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik olarak sağ ve sol matris gösterimleri incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde sedeniyonik katsayılı matris tanımlanmıştır. Sedeniyonik matrisin reel, kompleks, oktoniyonik katsayılı matris gösterimleri elde edilmiştir. Sedeniyonik matrisler kümesi üzerindeki toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri tanımlanmıştır. Reel matrislerdeki çarpma ve toplama işlemlerinin özelliklerinin sedeniyonik matrislerde sağlanmadığı gösterilmiştir. $(M_{m \times n}(\mathbb{S}), \oplus)$ yapısının Abel grup olduğu gösterilmiştir. Sedeniyonik matrislerde eşlenik, transpoz, eşlenik transpoz işlemleri tanımlanmış ve sırasıyla bu işlemlerin reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik olarak aynı işlemler tanımlanmıştır. Sedeniyonik kare matrisler üzerinde iz işlemi tanımlanmış ve cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Reel sayılardaki iz işleminin pek çok özelliğini sağlamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Son olarak sedeniyonik matrisler kümesinin $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayı olduğu

gösterilmiş ve bu uzayın tabanı tanımlanmıştır. $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayı olup olmadığı araştırıldığında vektör uzayı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde $\mathbb{H}$ halkası üzerinde modül özelliklerini sağlamadığı sonucuna ulaşılmıştır.

3.1. Öneriler

Bu tez çalışmasında ayrıntılı bir şekilde incelenen sedeniyonik matrisler için reel katsayılı adjoint matrisleri araştırılabilir. Reel adjoint matrislerinden yararlanarak sedeniyonik katsayılı lineer denklem sistemleri araştırılabilir. Sedeniyonların sıfır bölen elemanlarının uygulama alanları üzerine araştırmalar yapılabilir. Sedeniyonların Cayley-Dickson süreci ile tekrar ikiye katlanması ile elde edilen 32 boyutlu-trigintaduonions- hiper kompleks sayıları için benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Akpınar Karanlık A. 2021. Padovan, pell-padovan perrin oktoniyonları ve sedeniyonları. Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üni.
- Bektaş Ö. 2021. Some Properties and Special Matrix Representations of $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ -Coefficient Sedenion Numbers. BEU Journal of Science, 10 (4): 1416-1425.
- Bilgici G., Tokeser Ü., Ünal Z. 2017. Fibonacci and Lucas Sedenions. Journal of Integer Sequences, 20 (1): 17-18.
- Biss. D.K., Dugger D., Isaksen D.C. 2005. Large annihilators in Cayley-Dickson algebras. <https://arxiv.org/abs/math/0511691>
- Brešar M., Šemrl P., Špenko Š. 2009. On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras. Journal of Algebra, 327 (2011): 107-125.
- Brown E., Rice A. 2021. Cayley-Dickson Construction for Beginners: An Accessible Proof of Hurwitz's Sum of Squares Theorem.
- Carmody K. 1988. Circular and Hyperbolic Quaternions, Octonions, and Sedenions. Applied Mathematics and computation, 84 (1): 27-47.
- Catarino P. 2019. k-Pell, k-Pell–Lucas and modified k-Pell sedenions. Asian-European Journal of Mathematics, 12 (2):1950018
- Cawagas R.E. 2004. On The Structure And Zero Divisors of The Cayley-Dickson Sedenion Algebra. Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, 24(2): 251-265.
- Chan K.C., Dokovic D.Z. 2006. Conjugacy Class of Subalgebras of the Real Sedenions. Canad. Math. Bull, 49 (4): 492–507
- Çimen C., İpek A., Çimen E. 2019. On Horodam Sedenions. Journal Science and Art, 4(49),887-889
- Fueter R., Helvetici. 1935. Comm. Math. Vol. 7, No. 1, 307-330
- Gillard B.A., Gresnigt N.G. 2019. Three fermion generations with two unbroken gauge symmetries from the complex sedenions. The European Physical Journal, 79,446
- Cayley Dickson yapısı, Wikipedia , Adres: https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%E2%80%93Dickson_construction
- Sedeniyonlar, Wikipedia, Adres: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sedenion>
- Kuaterniyonlar, Wikipedia, Adres: <https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rdey>

- Hamilton W.R. 1843. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. Proceeding of the Royal Irish Academy, Vol.2.
- Imaeda K., Imaeda M. 2000. Sedenions: algebra and analysis. Applied Mathematics and Computation, 115: 77-88.
- J.H. Conway and D.A. Smith, 2003. On Quaternions and Octonions: Their Geometry and Symmetry, A.K. Peters Ltd., Natick, MA,
- Kantor I. L., Solodovnikov A. S., 1989. Hypercomplex Numbers—An Elementary Introduction to Algebras.
- Kırlak S. 2020. A New Generalization of Fibonacci and Lucas Sedenions. Yüksek Lisans Tezi, Zonguldak Bülent Ecevit Üni.
- Musés C. 1980. Hypernumbers and Quantum Field Theory with a Summary of Physically Applicable Hypernumber Arithmetics and Their Geometries.
- Moreno G. 1998. The zero divisors of the Cayley-Dickson algebras over the real numbers. <https://arxiv.org/abs/q-alg/9710013v1>
- Smith J.D.H. 1994. A Left Loop on the 15-Sphere. Journal of algebra, 176 (1):128-138
- Soykan Y. 2019. Tribonacci and Tribonacci-Lucas Sedenions. <https://arxiv.org/abs/1808.09248>
- Soykan Y., Okumuş İ., Taşdemir E. 2020. On generalized tribonacci sedenions. Sarajevo Journal of Mathematics, 16 (1): 103-122.
- Sümer D. 2022. Plazma fiziğinin Maxwell tipi denklemlerinin sedeniyonlarla yeniden formülasyonu, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Teknik Üni.
- Taşyurdu Y., Akpınar A. 2020. Perrin octonions and Perrin sedenions. Konuralp Journal of Mathematics, 8 (2): 384-390.