



SEGMENT LEMMA VE

UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Sayed Abdul Hannan SADAT

Eskişehir 2019

SEGMENT LEMMA VE UYGULAMALARI

Sayed Abdul Hannan SADAT

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Vakıf CAFER

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sayed Abdul Hannan SADAT'ın “**Segment Lemma ve Uygulamaları**” başlıklı tezi 30/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı)

: Prof.Dr. Vakıf CAFER

.....

Üye

: Prof.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

.....

Üye

: Dr.Öğr. Üyesi Özlem AVUL ESEN

.....

.....

Prof. Dr. Murat TANIŞLI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEGMENT LEMMA VE UYGULAMALARI

SAYED ABDUL HANNAN SADAT

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Prof.Dr. Vakıf CAFER

2019, 70 Sayfa

Bu tez çalışmasında segment lemma ve uygulamaları (segment polinomlarının kararlılığı), ele alınmıştır. İki kararlı polinomları birleştiren polinom segmentlerinin kararlılık problemi birçok uygulamaya sahiptir. Kenar Teoremine göre (The Edge Theorem), bir polinomlar politopunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul politopun uç noktalarını birleştiren polinom segmentlerinin kararlı olmasıdır. Bu polinom segmentlerinden kararlılık sınırında köke sahip olan bir kenar, segment lemma ile belirlenir. Hurwitz segment lemma ile gerçel ve kompleks katsayılı polinomlar aileleri incelenmiştir. Schur segment lemmalar ele alınmış ve örneklerle açıklanmıştır. İki kararlı monik polinomun konveks kombinasyonlarının kararlılıkları Hurwitz matrisi yardımıyla incelenmiştir. Gerçel ve kompleks katsayılı kararlı polinomlar ailesine Sturm dizisi uygulanmış, kompleks katsayılı kararlı polinomlar için bir algoritma verilmiştir. Möbius dönüşümü ele alınmış, bu dönüşümün yardımıyla $[p_1(z), p_2(z)]$ Schur kararlı polinom segmenti, $[\tilde{p}_1(z), \tilde{p}_2(z)]$ Hurwitz kararlı polinom segmentine dönüştürülmüştür. Sektör kararlılıkta gerçel katsayılı polinomlar $z = se^{\pm j(\frac{\pi}{2}-\phi)}$ dönüşümüyle kompleks katsayılı polinomlarla değiştirilmiştir. Gürbüz kararlı polinomlar politopları inşa edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Polinomlar politopu, Hurwitz ve Schur segment lemma, Konveks kombinasyon, Möbius dönüşümü, Sektör kararlılık.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SEGMENT LEMMA AND ITS APPLICATIONS

SAYED ABDUL HANNAN SADAT

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences

Supervisor: Prof.Dr. Vakıf CAFER

2019, 70 pages

In this thesis, segment lemma and its applications (stability of segment polynomials) are discussed. The stability problem of polynomial segments connecting two stable polynomials has many applications. According to the Edge Theorem, the necessary and sufficient condition for a polynomial polytope to be stable is that the polynomial segments joining the extreme points of the polytope are stable. From these polynomial segments, an edge having a root at the stability boundary is determined by the segment lemma. The families of real and complex coefficient polynomials were examined by Hurwitz segment lemma. Schur segment lemmas are discussed and illustrated by examples. The stability of convex combinations of two stable monic polynomials with the help of Hurwitz matrix is investigated. Sturm sequence is used for the family of real and complex coefficient stable polynomials and an algorithm for stability of polynomials with complex coefficients is given. The Möbius transformation is discussed, with the help of this transformation Schur stable polynomial segment $[p_1(z), p_2(z)]$ is transformed into Hurwitz stable polynomial segment $[\tilde{p}_1(z), \tilde{p}_2(z)]$. The polynomials with real coefficients in the sector stability problem have been reduced to complex coefficient polynomials by the transformation $z = se^{\pm j(\frac{\pi}{2}-\phi)}$. Robust stable polynomial polytopes are constructed.

Keywords: Polynomial Polytope, Hurwitz and Schur Segment Lemma, Convex Combination, Möbius Transformation, Sector Stability.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında çok emek sarfeden sayın Prof.Dr. Vakıf CAFER’a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, yardımlarından dolayı Prof.Dr. Taner Büyükköroğlu’na da teşekkürlerimi sunarım.

Sayed Abdul Hannan SADAT



Tarih : 30/12/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Sayed Abdul Hannan SADAT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
1 GİRİŞ.....	1
2 SEGMENT LEMMALAR.....	7
2.1 Gerçel Polinomlar İçin Hurwitz Segment Lemmalar. Geometrik Yorum.....	7
2.2 Gerçel Polinomlar İçin Schur Segment Lemmalar	14
2.2.1 Kompleks polinomlar için Hurwitz segment lemma	25
3 KONVEKS KOMBİNASYONLAR.....	31
4 MÖBİUS DÖNÜŞÜMÜ.....	50
5 SEKTÖR KARARLILIK.....	53
6 GÜRBÜZ KARARLI POLİTOPLAR.....	56
6.1 Hurwitz Kararlı Politopun İnşası.....	62
6.2 Schur kararlı politopun inşası.....	66
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Segment lemma. Geometrik yorum.....	12
Şekil 2.2. Kompleks katsayılı polinomlarda Segment lemma	26
Şekil 2.3. Kompleks katsayılı polinomlar için farklı durumlar.....	27
Şekil 3.1. Segmentin reel kısımlarının $s = j\omega$ da eşitliği.....	34
Şekil 3.2. Segmentin hareket yönü.....	35
Şekil 3.3. Segmentin sanal kısımlarının $s = j\omega$ da eşitliği.....	36
Şekil 3.4. Yatay Segmentin hareket yönü.....	37
Şekil 4.1. Sol açık yarı düzlemin açık birim diske dönüşmesi.....	50
Şekil 5.1. Sektör kararlılık.....	54
Şekil 5.2. Yarı düzlemler $\mathcal{D}^-$ ve $\mathcal{D}^+$	55
Şekil 6.1. Kararsız politop.....	59

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel (kompleks) sayılar kümesi
$p(s)$	: Gerçel veya kompleks polinom
$\mathcal{D}$	: Kararlılık bölgesi
$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$	: n – boyutlu gerçel (kompleks) vektörler kümesi
$H(p)$	: $p(s)$ polinomunun Hurwitz matrisi
$\det H(p)$	: $H(p)$ matrisinin determinantı
$p(s, q)$	: Belirsiz polinom
Q	: ℓ boyutlu kutu
$\text{conv}C$	: C kümesinin konveks zarfı
$\mathcal{P}$	: Polinomlar politopu
$\text{Var}(t)$	: Sturm dizisinin t noktasındaki işaret değişimi
$\text{Re}(z)$	: z kompleks sayısının gerçel kısmı
$\text{im}(z)$	: z kompleks sayısının sanal kısmı
j	: Sanal birim
G^n	: Hurwitz kararlı polinom ailesi
$\mathcal{D}^-$	: Sektör belirleyen alt yarı düzlem
$\mathcal{D}^+$	: Sektör belirleyen üst yarı düzlem

1. GİRİŞ

Kontrol sistemin çıktı fonksiyonunun Laplace dönüşümünün, girdi fonksiyonunun Laplace dönüşümüne oranına o sistemin transfer fonksiyonu denir. Sistemin matematiksel modelinin diferansiyel denklemle verildiğini varsayarsak onun transfer fonksiyonu bir rasyonel fonksiyondur, yani iki polinomun oranı biçimindedir. Paydadaki polinomun kararlı olması sistemin performansı açısından çok önemlidir. Çok boyutlu sistemlerde ise sistem matrisinin karakteristik polinomunun kararlılığı sistemin performansı için çok önemlidir.

Kararlılık kavramı ilk defa 1892 yılında Rus Matematikçi A. M. Lyapunov tarafından lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilebilen sistemlerin denge noktaları için tanımlandı. Bu sistemler için kararlılık Lyapunov matris denklemi denilen denklemin pozitif belirli çözümünün varlığına indirgenmiş oldu. Sonraki yıllarda kararlılık problemleri birçok sistemler için araştırıldı ve halen de araştırılmaya devam etmektedir. Bu sistemlere örnek olarak polinomlar ailesi, polinomlar politopu, matrisler politopu vs. gibi aileleri göstermek mümkündür.

Bu tez çalışmasında biz polinomlar politopunun araştırılmasında önemli olan segment lemmanın çeşitli versiyonlarını ele alacağız.

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini, $\mathbb{C}$ ise kompleks sayılar kümesini gösterebiliriz. n boyutlu gerçel (kompleks) vektörler uzayı ise $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ ile gösterilebilir.

$a_i \in \mathbb{R}$ veya $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) ve $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$p(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \quad (1.1)$$

fonksiyonuna n . dereceden gerçel veya kompleks polinom denir. Bu polinomun yanı sıra kompleks düzlemde basit bağlantılı açık bir $\mathcal{D}$ kümesi verilsin. Eğer (1.1) polinomunun tüm kökleri $\mathcal{D}$ de ise bu polinoma $\mathcal{D}$ -kararlı polinom denir. Eğer $\mathcal{D}$ bölgesi,

- sol açık yarı düzlem ise $\mathcal{D}$ -kararlılığa Hurwitz,
- açık birim diske ise $\mathcal{D}$ -kararlılığa Schur,
- sol açık yarı düzlemde bir sektör ise $\mathcal{D}$ -kararlılığa sektör kararlılık denir.[1,2]

Her bir $n \times n$ boyutlu matrise n . dereceden bir monik polinom olan ve bu matrisin karakteristik polinomu denilen polinom karşı geldiği için yukarıdaki tanımlar bir matris için de verilebilmektedir.

(1.1) polinomunun Hurwitz kararlılığı literatürde daha çok araştırılmıştır. Örneğin, Routh algoritması ve Routh-Hurwitz matris kriterini göstermek mümkündür. Routh-Hurwitz matris kriterini ifade edelim.

Tanım 1.1 (1.1) gerçel polinomu verilsin. $n \times n$ boyutlu

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

matrisine (1.1) polinomunun Hurwitz matrisi denir.[1]

Teorem 1.1 ([1]) (1.1) gerçel polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $H(p)$ matrisinin n tane baş minörlerinin pozitif olmasıdır.

(1.1) in gerçel olması durumunda katsayıların aynı işaretli olması gerekli koşul olup, yeterli değildir. Örneğin, $p(s) = s^3 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}$ polinomu $p(s) = (s + 1)(s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{3}{4})$ gibi çarpanlara ayrılır ve kökleri $s_1 = -1$, $s_{2,3} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{11}i$ dir ve s_2, s_3 kökleri sağ yarı düzlemedir. Şimdi önemli iki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.2 (Orlando formülü [3]) $a_n > 0$ olmak üzere (1.1) polinomu verilsin ve $s_1, s_2, \dots, s_n$ gerçel veya kompleks sayıları onun kökleri olsun. O zaman $H(p)$ matrisi Hurwitz matrisini göstermek üzere

$$\det H(p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_n^{n-1} \cdot a_0 \cdot \prod_{1 \leq i < k \leq n} (s_i + s_k)$$

Teorem 1.3 (Köklerin parametreye göre sürekliliği [4]) $q \in Q$ parametresine bağlı derecesi invariant olan

$$p(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + a_2(q)s^2 + \dots + a_n(q)s^n \quad (1.2)$$

ailesi verilsin ve $a_i(q): Q \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sürekli olsun. O zaman n tane öyle $s_i(q): Q \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sürekli fonksiyonları vardır ki her i için $s_i(q)$ sayısı (1.2) polinomunun köküdür.

Yukarıda vurguladığımız gibi literatürde Hurwitz kararlılık diğer kararlılık çeşitlerine göre (örneğin, Schur, sektör) daha çok araştırılmıştır. Ancak, belli dönüşümler yardımıyla bu problemler Hurwitz problemine dönüştürülebilmektedir. Bunu 4 ve 5 bölümlerinde ele alacağız.

$q \in Q$ olmak üzere bir (1.2) ailesi verilsin. $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p(j\omega, Q) = \{p(j\omega, q): q \in Q\} \subset \mathbb{C}$ kümesine bu ailenin ω frekansına karşı gelen değer kümesi denir. Sıfırı içermeme prensibi ise şöyle ifade edilmektedir.([1,2])

$p(j\omega, q)$ ailesi invaryant dereceli, Q bir kutu, $a_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) fonksiyonları sürekli olsun ve bu ailede en az bir kararlı polinomu mevcut olsun. Her $q \in Q$ için $p(s, q)$ nun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $\omega \geq 0$ için $0 \notin p(j\omega, Q)$ olmasıdır. Sıfırı içermeme prensibi köklerin sürekliliği özelliğinden elde edilmektedir.

Şimdi sonlu boyutlu uzayda konveks kombinasyon, konveks zarf, segment, politop gibi kavramları tanımlayalım.

$C \subset \mathbb{R}^k$ boş olmayan küme verilsin.

Tanım 1.2 ([5]) C kümesinin konveks zarfı, bu kümeyi içeren tüm konveks kümelerin arakesiti olarak tanımlanmaktadır. Başka bir deyişle

$$\text{conv}C = \left\{ \lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2 + \dots + \lambda_m c^m; c^1, c^2, \dots, c^m \in C, \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, m \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bu tanıma göre kümenin konveks zarfı bu kümedeki tüm sonlu tane noktaların konveks kombinasyonlarından oluşmaktadır.

Tanım 1.3 m tane $p^1, p^2, \dots, p^m \in \mathbb{R}^k$ noktaları verilsin. Bu noktaların konveks zarfına $\mathbb{R}^k$ uzayında bir politop denir. $p^1, p^2, \dots, p^m$ noktalarına ise bu politopun üreteçleri (generator) denir.

Düzlemdeki politoplar için bazen poligon terimi kullanılmaktadır. Eğer $m = 2$ ise $\text{conv}\{p^1, p^2\}$ kümesine p^1 ve p^2 noktalarını birleştiren segment denir.

Tanım 1.4 (Köşe noktası) $\mathcal{P}$ bir politop, $p \in \mathcal{P}$ olsun. Eğer p noktası $\mathcal{P}$ kümesinden olan hiçbir doğru parçasının iç noktası değilse bu noktaya köşe noktası denir.

Tanım 1.5 (Politopun kenarı) $\mathcal{P}$ politopu verilsin, p^{i_1} ve p^{i_2} köşe noktaları olsun.

Her $p^a, p^b \in \mathcal{P}$ için $p^a \notin [p^{i_1}, p^{i_2}]$, $p^b \notin [p^{i_1}, p^{i_2}]$ olmak üzere $[p^a, p^b] \cap [p^{i_1}, p^{i_2}] = \emptyset$ ise $[p^{i_1}, p^{i_2}]'$ ye kenar (edge) denir.

$\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$ politop ise $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, $\alpha \cdot \mathcal{P}$, $\text{conv}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ kümeleri de birer politoptur.

Lemma 1.1 (politopların afin dönüşümü [1]) $\mathcal{P} = \text{conv}\{p^i\} \subset \mathbb{R}^k$ politopu verilsin.

$T: \mathbb{R}^{k_1} \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ afin-lineer dönüşüm olsun. O zaman $T\mathcal{P} = \{Tx: x \in \mathcal{P}\}$ kümesi de $\mathbb{R}^{k_2}$

uzayında bir politoptur. Eğer y noktası $T\mathcal{P}$ politopunun kenarı üzerinde bir nokta ise $\mathcal{P}$ politopunun bir x kenar noktası vardır ki $Tx = y$.

$Q = \{(q_1, \dots, q_\ell) \in \mathbb{R}^\ell: a_1 \leq q_1 \leq b_1, \dots, a_\ell \leq q_\ell \leq b_\ell\}$ kümesine $\mathbb{R}^\ell$ uzayında bir kutu (box) denir. Eğer Q bir kutu ve $a_i(q): Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları afin-lineer ise (1.2) ailesine polinomlar politopu denir ve

$$\mathcal{P} = \{p(s, q): q \in Q\} \quad (1.3)$$

gibi gösterilir. (1.3) politopu $\mathcal{P} = \text{conv}\{p^1, p^2, p^3, \dots, p^m\}$ politopun özel halidir, burada $p^i(s)$ ($i = 1, \dots, m$) polinomları n . dereceden polinomlardır.

Tanım 1.5 $x \in [a, b]$ olmak üzere $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)$ gerçel polinomların bir sonlu dizisi verilsin. Eğer

- a) $F_0(a) \neq 0$ ve $F_0(b) \neq 0$,
- b) Her $x \in [a, b]$ için $F_n(x) \neq 0$,
- c) Bir $x \in [a, b]$ için $F_0(x) = 0$ ise $F_1(x) \neq 0$;

$$F_k(x) = 0 \text{ ise } F_{k-1}(x) \cdot F_{k+1}(x) < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

koşulları sağlanıyor ise bu polinomlar dizisine Sturm zinciri denir.[4,6]

İki tane $F_0(x)$ ve $F_1(x)$ polinomları verildiğinde onların oluşturduğu Sturm zinciri Euclidean algoritması ile elde edilebilir.

$$F_0(x) = Q_1(x)F_1(x) - F_2(x),$$

$$F_1(x) = Q_2(x)F_2(x) - F_3(x),$$

$$\vdots$$

$$F_{k-1}(x) = Q_k(x)F_k(x) - F_{k+1}(x),$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}(x) = Q_n(x)F_n(x).$$

Eğer $F_1(x) = F'_0(x)$ ise aşağıdaki teorem geçerlidir [4].

Teorem 1.4 $F_0(x)$ gerçel polinom ve $F_1(x) = F'_0(x)$ olsun, $[a, b]$ aralığı verilsin ve $F_0(a) \cdot F_0(b) \neq 0$ olsun. O zaman $F_0(x)$ polinomunun $[a, b]$ de $Var(a) - Var(b)$ tane farklı sıfırları vardır, burada $Var(t)$ sayısı Euclidean algoritmasından ortaya çıkan $F_0(t), F_1(t), \dots, F_n(t)$ dizisindeki işaret değişimlerinin toplam sayısıdır.

Bu teorem yardımıyla herhangi polinomun herhangi kapalı aralıktaki kökleri sayısı hesaplanabilir.

Teorem 1.5 (Edge teoremi [7]) Derecesi sabit olup n olan bir polinomlar politopu verilsin. Bu politoptaki polinomların hepsinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul bu politopun tüm kenarlarını kararlı olmasıdır.

Kanıt: $\Rightarrow$) $\mathcal{P}$ politopu Gürbüz (Robust) kararlı olsun. Bu politopun her kenarı onun alt kümesi olduğu için kenarlar da kararlıdır.

$\Leftarrow$) $\mathcal{P}$ Politopunda tüm kenarların kararlı olduğunu varsayalım. Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. Bu politopta en az bir kararsız elemanın bulunduğunu varsayalım. Derece sabit olduğu için sıfırı içermeme prensibini uygulayabiliriz. Öyle $\omega_* \in IR$ vardır ki $0 \in \mathcal{P}(j\omega_*) = \{p(j\omega_*): p(s) \in \mathcal{P}\}$.

Yukarıdaki lemma ya göre $\mathcal{P}(j\omega_*)$ görüntü kümesi kompleks düzlemde bir poligondur. (konveks çokgendir) Süreklilikten dolayı görüntü kümesinde öyle bir kenar vardır ki $y = 0$ noktasını içermektedir. O zaman yukarıdaki lemma ya göre $\mathcal{P}$ politopunda öyle kenar vardır ki bu kenarda $s = j\omega$ köküne sahip polinom bulunmaktadır. Ancak politopun tüm kenarları kararlı olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\mathcal{P}$ politopu kararlıdır.



2. SEGMENT LEMMALAR

2.1. Gerçel Polinomlar İçin Hurwitz Segment Lemmalar. Geometrik Yorum.

Segment lemma 2.1 ([2,8]) $\delta_1(\cdot)$ ve $\delta_2(\cdot)$ keyfi polinomlar olsun (bu polinomlar kararlı olmak zorunda değil). O zaman öyle bir $\lambda \in [0,1]$ vardır ki $(1 - \lambda)\delta_1(\cdot) + \lambda\delta_2(\cdot)$ polinomunun bir $j\omega$ kökü var ($\omega > 0$)

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0, \quad (2.1)$$

$$\Leftrightarrow \delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0, \quad (2.2)$$

$$\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0. \quad (2.3)$$

Kanıt: Öyle $\lambda \in [0,1]$ ve $\omega > 0$ vardır ki

$$(1 - \lambda)\delta_1(j\omega) + \lambda\delta_2(j\omega) = 0 \quad (2.4)$$

Burada $\delta_1(j\omega) = \delta_1^e(\omega) + j\omega\delta_1^o(\omega)$ ve $\delta_2(j\omega) = \delta_2^e(\omega) + j\omega\delta_2^o(\omega)$ dir.

$$(1 - \lambda)(\delta_1^e(\omega) + j\omega\delta_1^o(\omega)) + \lambda(\delta_2^e(\omega) + j\omega\delta_2^o(\omega)) = 0 \quad (2.5)$$

Şimdi (2.5) denklemin 'in sıfır olması için denklemin reel ve kompleks kısmı ayrı ayrı sıfır olması gerekiyor. Yani

$$(1 - \lambda)\delta_1^e(\omega) + \lambda\delta_2^e(\omega) = 0 / \delta_1^o(\omega) \quad (2.6)$$

$$(1 - \lambda)\delta_1^o(\omega) + \lambda\delta_2^o(\omega) = 0 / -\delta_1^e(\omega) \quad (2.7)$$

(2.6) ve (2.7)'yi gösterilen ifadelerle çarpıp toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0 \quad (2.8)$$

λ ve $1 - \lambda$ sayıları negatif olmayan sayılar oldukları için (2.6), (2.7) den (2.2), (2.3) elde edilmektedir.

Tersi için iki durum vardır.

Durum1: Farz edelim ki bir $\omega \geq 0$ için

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0, \quad \delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0, \quad \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0$$

sağlansın , ancak $\delta_1^e(\omega) = \delta_2^e(\omega) = 0$ sağlanmasın. O zaman

$$\lambda = \frac{\delta_1^e(\omega)}{\delta_1^e(\omega) - \delta_2^e(\omega)} \in [0,1] \Rightarrow (1 - \lambda)\delta_1^e(\omega) + \lambda\delta_2^e(\omega) = 0$$

$$\delta_2^o(\omega) = \frac{\delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega)}{\delta_1^e(\omega)}, \quad \delta_1^e(\omega) \neq 0$$

$$(1 - \lambda)\delta_1^o(\omega) + \lambda\delta_2^o(\omega) = \delta_1^o(\omega) + \lambda(\delta_2^o(\omega) - \delta_1^o(\omega))$$

$$\begin{aligned} &= \delta_1^o(\omega) + \frac{\delta_1^e(\omega)}{\delta_1^e(\omega) - \delta_2^e(\omega)} \left[\frac{\delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega)}{\delta_1^e(\omega)} - \delta_1^o(\omega) \right] \\ &= \delta_1^o(\omega) + \frac{\delta_1^e(\omega)}{\delta_1^e(\omega) - \delta_2^e(\omega)} \left[\frac{\delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) - \delta_1^o(\omega)\delta_1^e(\omega)}{\delta_1^e(\omega)} \right] \\ &= \delta_1^o(\omega) + \frac{-\delta_1^o(\omega)(\delta_1^e(\omega) - \delta_2^e(\omega))}{\delta_1^e(\omega) - \delta_2^e(\omega)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Durum2: Farz edelim ki öyle $\omega \geq 0$ vardır ki

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0,$$

$$\delta_1^e(\omega) = \delta_2^e(\omega) = 0 \text{ sağlansın. O zaman } \begin{cases} (1 - \lambda)\delta_1^o(\omega) + \lambda\delta_2^o(\omega) = 0 \\ (1 - \lambda)\delta_1^e(\omega) + \lambda\delta_2^e(\omega) = 0 \end{cases} \text{ otomatik}$$

sağlanmaktadır. Buradan

$$(1 - \lambda)\delta_1(j\omega) + \lambda\delta_2(j\omega) = 0.$$

Örnek 2.1 $\delta_1(s) = s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 4s + 11$ ve $\delta_2(s) = s^4 - 4s^3 - 7s^2 - 5s - 19$ polinomları verilsin. Öyle bir $\lambda \in [0,1]$ var mıdır ki $(1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$ polinomunun bir $j\omega$ kökünün olup-olmadığını araştıralım.

Çözüm:

$$\delta_1(s) = s^4 + 6s^2 + 11 + s(5s^2 + 4)$$

$$\delta_2(s) = s^4 - 7s^2 - 19 + s(-4s^2 - 5)$$

$s = j\omega$ aldığımızdan aşağıdakini yazabiliriz

$$\delta_1(j\omega) = \omega^4 - 6\omega^2 + 11 + j\omega(-5\omega^2 + 4)$$

$$\delta_2(j\omega) = \omega^4 + 7\omega^2 - 19 + j\omega(4\omega^2 - 5)$$

Burada

$$\delta_1^e(\omega) = \omega^4 - 6\omega^2 + 11, \quad \delta_1^o(\omega) = -5\omega^2 + 4,$$

$$\delta_2^e(\omega) = \omega^4 + 7\omega^2 - 19, \quad \delta_2^o(\omega) = 4\omega^2 - 5.$$

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0.$$

Bu denklemin köklerini bulalım:

$$(\omega^4 - 6\omega^2 + 11)(4\omega^2 - 5) - (\omega^4 + 7\omega^2 - 19)(-5\omega^2 + 4) = 0,$$

$$(4\omega^6 - 29\omega^4 + 74\omega^2 - 55) - (-5\omega^6 - 31\omega^4 + 123\omega^2 - 76) = 0,$$

$$9\omega^6 + 2\omega^4 - 49\omega^2 + 21 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = \pm 1.6217j, \quad \omega_{3,4} = \pm 1.3976, \quad \omega_{5,6} = \pm 0.6739.$$

$\omega_3 = 1.3976 > 0$ kökü bir pozitif köktür. Bu kök

$\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$ ve $\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0$ 'ı sağlıyor mu?

$$(\omega^4 - 6\omega^2 + 11)(\omega^4 + 7\omega^2 - 19) = \omega^8 + \omega^6 - 50\omega^4 + 191\omega^2 - 209 \leq 0$$

$$\Rightarrow -4.6796 \leq 0 \text{ ve}$$

$$(-5\omega^2 + 4)(4\omega^2 - 5) = -20\omega^4 - 41\omega^2 - 20 \leq 0$$

$$\Rightarrow -16.2218 \leq 0 \text{ dir.}$$

Şimdi $\omega_5 = 0.6739 > 0$ için $\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$ ve $\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0$ 'yı uyguluyoruz.

$$(\omega^4 - 6\omega^2 + 11)(\omega^4 + 7\omega^2 - 19) = \omega^8 + \omega^6 - 50\omega^4 + 191\omega^2 - 209 \leq 0$$

$$\Rightarrow -132.4350 \leq 0 \text{ ve}$$

$$(-5\omega^2 + 4)(4\omega^2 - 5) = -20\omega^4 - 41\omega^2 - 20 \leq 0 \Rightarrow -5.5051 \leq 0 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $(1 - \lambda)\delta_1(s) + \lambda\delta_2(s)$ 'nin $\omega > 0$ olmak üzere iki tane kökü vardır ve sonuçta $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ segmenti kararsızdır.

Örnek 2.2 $\delta_1(s) = s^5 + 6s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 22s + 21$ ve $\delta_2(s) = s^5 - 3s^4 + 4s^3 - 5s^2 - 30s - 40$ polinomları verilsin. Öyle bir $\lambda \in [0,1]$ var mıdır ki $(1 - \lambda)\delta_1(s) + \delta_2(s)$ polinomunun bir $j\omega$ kökünün var olup olmadığını gösterelim.

Çözüm:

$$\delta_1(s) = 6s^4 + 4s^2 + 21 + s(s^4 + 2s^2 + 22),$$

$$\delta_2(s) = -3s^4 - 5s^2 - 40 + s(s^4 + 4s^2 - 30).$$

$s = j\omega$ yazarsak

$$\delta_1(j\omega) = 6\omega^4 - 4\omega^2 + 21 + j\omega(\omega^4 - 2\omega^2 + 22),$$

$$\delta_2(j\omega) = -3\omega^4 + 5\omega^2 - 40 + j\omega(\omega^4 - 4\omega^2 - 30)$$

elde ederiz. Burada

$$\delta_1^e(\omega) = 6\omega^4 - 4\omega^2 + 21, \quad \delta_1^o(\omega) = \omega^4 - 2\omega^2 + 22,$$

$$\delta_2^e(\omega) = -3\omega^4 + 5\omega^2 - 40, \quad \delta_2^o(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 - 30,$$

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0.$$

Lemmadaki üç koşulu sağlayan $\omega > 0$ 'ı bulmak için $\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0$ denklemini çözelim:

$$(6\omega^4 - 4\omega^2 + 21)(\omega^4 - 4\omega^2 - 30) - (-3\omega^4 + 5\omega^2 - 40)(\omega^4 - 2\omega^2 + 22) = 0,$$

$$[6\omega^8 - 28\omega^6 - 143\omega^4 + 36\omega^2 - 630]$$

$$-[-3\omega^8 + 11\omega^6 - 116\omega^4 + 190\omega^2 - 880] = 0,$$

$$9\omega^8 - 39\omega^6 - 27\omega^4 - 154\omega^2 + 250 = 0.$$

Bu denklemin köklerini buluyoruz:

$$\omega_{1,2} = \pm 2.3060, \quad \omega_{3,4} = -0.7393 \pm 1.2664j, \quad \omega_{5,6} = \pm 1.0629$$

$$\text{ve } \omega_{7,8} = 0.7393 \pm 1.2664j.$$

$\omega_1 = 2.3060 > 0$ için $\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$ ve $\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0$ sağlanmaktadır:

$$(6\omega^4 - 4\omega^2 + 21)(-3\omega^4 + 5\omega^2 - 40)$$

$$= -18\omega^8 + 42\omega^6 - 323\omega^4 + 265\omega^2 - 840 \leq 0 \Rightarrow -1.6642e + 04 \leq 0$$

ve

$$(\omega^4 - 2\omega^2 + 22)(\omega^4 - 4\omega^2 - 30) = \omega^8 - 6\omega^6 - 28\omega^2 - 660 \leq 0$$

$\Rightarrow -911.4996 \leq 0$ dir. Şimdi $\omega_5 = 1.0629 > 0$ için de koşullar sağlanmaktadır.

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$$

$$-18\omega^8 + 42\omega^6 - 323\omega^4 + 265\omega^2 - 840 \leq 0 \Rightarrow -921.6362 \leq 0$$

ve

$$\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0 \Rightarrow \omega^8 - 6\omega^6 - 28\omega^2 - 660 \leq 0$$

$$\Rightarrow -698.6559 \leq 0$$

dir.

Segment Lemma 2.2 ([2]) $\delta_1(t)$ ve $\delta_2(t)$ n-inci dereceden baş katsayıları aynı işaretli olan iki Hurwitz polinom olsun. O zaman $[\delta_1(t), \delta_2(t)]$ segment polinomu Hurwitz kararlıdır $\Leftrightarrow$ aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\omega > 0$ sayısı bulunmamaktadır:

$$1. \quad \delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0, \quad (2.9)$$

$$2. \quad \delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0, \quad (2.10)$$

$$3. \quad \delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0. \quad (2.11)$$

Kanıt: $[\delta_1(t), \delta_2(t)]$ bir polinom ailesi olsun. Bu durumda,

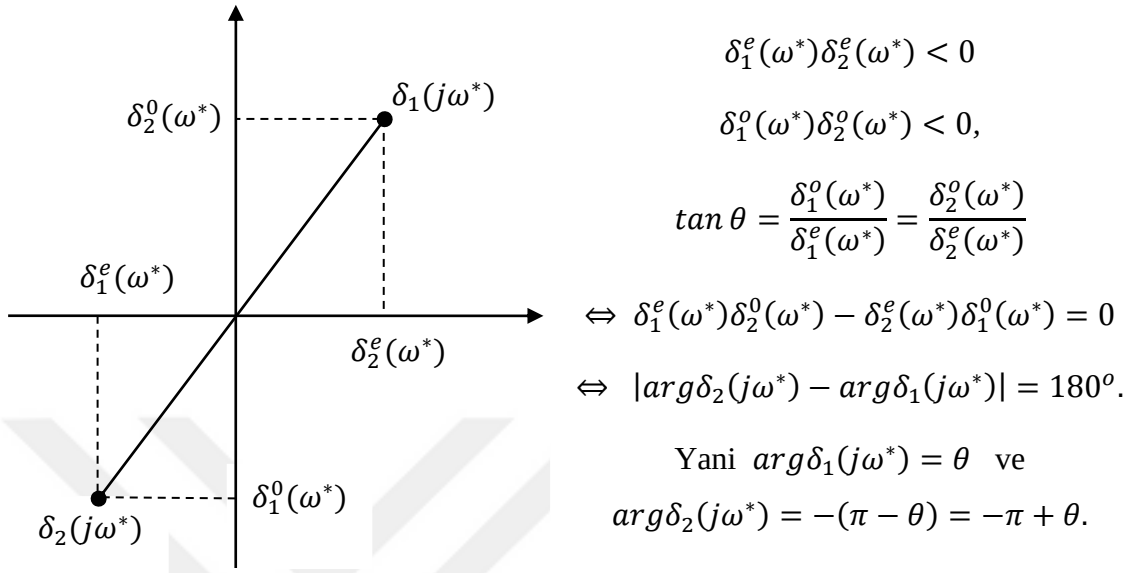
1) Ailede kararlı vardır.

2) Aile gürbüz kararlı olmasaydı en az bir $\lambda_* \in (0,1)$ için $(1 - \lambda_*)\delta_1(t) + \lambda_*\delta_2(t)$ kararsız olurdu.

$$\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \lambda_*$$

geçişinde öyle $\tilde{\lambda} \in (0,1)$ vardır ki $(1 - \tilde{\lambda})\delta_1(t) + \tilde{\lambda}\delta_2(t)$ ' nin $j\omega$ kökü vardır.

Şimdi ise bunun geometrik anlamını açıklayalım. (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Segment lemma. Geometrik yorum

Örnek 2.3

$$\delta_1(t) = t^4 + 6t^3 + 15t^2 + 18t + 10,$$

$$\delta_2(t) = t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 20$$

kararlı polinomlardır. O zaman $[\delta_1(t), \delta_2(t)]$ segmenti kararlı midir?

Çözüm:

$$\delta_1(t) = t^4 + 15t^2 + 10 + t(6t^2 + 18),$$

$$\delta_2(t) = t^4 + 24t^2 + 20 + t(8t^2 + 32).$$

$t = j\omega$ için aşağıdakini yazabiliriz.

$$\delta_1(j\omega) = \omega^4 - 15\omega^2 + 10 + j\omega(-6\omega^2 + 18),$$

$$\delta_2(j\omega) = \omega^4 - 24\omega^2 + 20 + j\omega(-8\omega^2 + 32),$$

$$[\delta_1(j\omega), \delta_2(j\omega)] = \{(1 - \lambda)\delta_1(j\omega) + \lambda\delta_2(j\omega) = 0: \lambda \in [0,1]\},$$

$$\delta_1(j\omega) = \delta_1^e(\omega) + j\omega\delta_1^o(\omega),$$

$$\delta_2(j\omega) = \delta_2^e(\omega) + j\omega\delta_2^o(\omega).$$

$$\begin{aligned}\delta_1^e(\omega)\delta_2^0(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^0(\omega) &= 0, \\ (\omega^4 - 15\omega^2 + 10)(-8\omega^2 + 32) - (\omega^4 - 24\omega^2 + 20)(-6\omega^2 + 18) &= 0, \\ -2\omega^6 - 10\omega^4 - 8\omega^2 - 40 &= 0\end{aligned}$$

denkleminin köklerini buluyoruz, yani

$$\omega_{1,2} = \pm 2.2361j, \quad \omega_{3,4} = -1 \pm j, \quad \omega_{5,6} = 1 \pm j.$$

ve $\delta_1^e(\omega)\delta_2^e(\omega) \leq 0$ ve $\delta_1^o(\omega)\delta_2^o(\omega) \leq 0$ yı sağlayan en az bir gerçel ω var mıdır?

Denklemini sağlayan ω gerçel sayısı bulunmadığından segment kararlıdır.

Örnek 2.4

$$\delta_1(t) = t^5 + 9t^4 + 33t^3 + 63t^2 + 64t + 30,$$

$$\delta_2(t) = t^5 + 7t^4 + 21t^3 + 33t^2 + 28t + 10$$

kararlı polinomlardır. O zaman $[\delta_1(t), \delta_2(t)]$ kararlı mıdır?

Çözüm:

$$\delta_1(t) = 9t^4 + 63t^2 + 30 + t(t^4 + 33t^2 + 64),$$

$$\delta_2(t) = 7t^4 + 33t^2 + 10 + t(t^4 + 21t^2 + 28)$$

$t = j\omega$ olduğundan aşağıdakini yazabiliriz

$$\delta_1(j\omega) = 9\omega^4 - 63\omega^2 + 30 + j\omega(\omega^4 - 33\omega^2 + 64),$$

$$\delta_2(j\omega) = 7\omega^4 - 33\omega^2 + 10 + j\omega(\omega^4 - 21\omega^2 + 28).$$

Burada $\delta_1^e(\omega) = 9\omega^4 - 63\omega^2 + 30$, $\delta_1^o(\omega) = \omega^4 - 33\omega^2 + 64$,

$$\delta_2^e(\omega) = 7\omega^4 - 33\omega^2 + 10 \text{ ve } \delta_2^o(\omega) = \omega^4 - 21\omega^2 + 28$$

dir.

$$\delta_1^e(\omega)\delta_2^o(\omega) - \delta_2^e(\omega)\delta_1^o(\omega) = 0,$$

$$(9\omega^4 - 63\omega^2 + 30)(\omega^4 - 21\omega^2 + 28) - (7\omega^4 - 33\omega^2 + 10)(\omega^4 - 33\omega^2 + 64) = 0,$$

$$(9\omega^8 - 252\omega^6 + 1605\omega^4 - 2394\omega^2 + 840)$$

$$-(7\omega^8 - 264\omega^6 + 1547\omega^4 - 2442\omega^2 + 640) = 0,$$

$$2\omega^8 + 12\omega^6 + 58\omega^4 + 48\omega^2 + 200 = 0.$$

Şimdi denklemin köklerini buluyoruz.

$$\omega_{1,2} = -1 \pm 2j, \quad \omega_{3,4} = 1 \pm 2j, \quad \omega_{5,6} = -1 \pm j \text{ ve } \omega_{7,8} = 1 \pm j.$$

Denklemini sağlayan $\omega > 0$ gerçel sayısı bulunmuyor. Dolayısıyla $[\delta_1(t), \delta_2(t)]$ kararlıdır.

2.1.1. Gerçel polinomlar için Schur segment lemmalar

Segment lemma 2.3 ([23]) $p_1(z)$ ve $p_2(z)$ başkatsayıları aynı işaretli n . dereceden iki Schur kararlı polinomu olsun. $[p_1(z), p_2(z)]$ segmentindeki bir polinomun birim çember üzerinde kökü olması için gerek ve yeter koşul öyle bir z_0 noktasının varlığıdır ki $|z_0| = 1$ ve

$$p_1(z_0)p_2(z_0^{-1}) - p_2(z_0)p_1(z_0^{-1}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{p_1(z_0)}{p_2(z_0)} \right] = 0 \quad (2.13)$$

ve

$$\operatorname{Re} \left[\frac{p_1(z_0)}{p_2(z_0)} \right] \leq 0. \quad (2.14)$$

Kanıt: $\Rightarrow \exists z_0$ vardır ki $|z_0| = 1$ ve $\exists \lambda_* \in [0,1]$ için

$$\lambda_* p_1(z_0) + (1 - \lambda_*) p_2(z_0) = 0 \quad (2.15)$$

ve

$$\lambda_* p_1(z_0^{-1}) + (1 - \lambda_*) p_2(z_0^{-1}) = 0 \quad (2.16)$$

olur. (2.15) ve (2.16)'dan aşağıdakini yazabiliriz:

$$\frac{\lambda_*}{(\lambda_* - 1)} = \frac{p_2(z_0)}{p_1(z_0)} \quad \text{ve} \quad \frac{\lambda_*}{(\lambda_* - 1)} = \frac{p_2(z_0^{-1})}{p_1(z_0^{-1})}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_*}{(\lambda_* - 1)} = \frac{p_2(z_0)}{p_1(z_0)} = \frac{p_2(z_0^{-1})}{p_1(z_0^{-1})}$$

$$\Rightarrow p_1(z_0)p_2(z_0^{-1}) - p_2(z_0)p_1(z_0^{-1}) = 0. \quad (2.17)$$

(2.15)'yi kompleks ve reel kısımlara ayırarak ve $\lambda_* \in [0,1]$ olduğundan şunu yazabiliriz:

$$Re[p_1(z_0)] \cdot Im[p_2(z_0)] - Im[p_1(z_0)] \cdot Re[p_2(z_0)] = 0. \quad (2.18)$$

Farz edelim ki $p_1 = a_1 + jb_1$ ve $p_2 = a_2 + jb_2$ olsun. Buradan aşağıdakini yazabiliriz:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

$$a_1a_2 \leq 0 \text{ ve } b_1b_2 \leq 0,$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}.$$

Bu kesrin pay ve paydasının paydanın eşleneği ile çarpalım:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$Re \left[\frac{p_1}{p_2} \right] = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \leq 0 ; Im \left[\frac{p_1}{p_2} \right] = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \exists z_0, |z_0| = 1 ; \lambda = \frac{p_2^+(z_0)}{p_2^+(z_0) - p_1^-(z_0)} \in [0,1], \text{ alalım.}$$

$$\lambda = \frac{a_2 + jb_2}{a_2 + jb_2 - (a_1 + jb_1)}$$

$$= \frac{a_2(a_2 - a_1) + b_2(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} + j \frac{b_2(a_2 - a_1) - a_2(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Burada $\frac{b_2(a_2 - a_1) - a_2(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = 0$ ve ancak $\frac{a_2(a_2 - a_1) + b_2(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \leq 1$ dir.

Gerçekten, $a_2^2 - a_1a_2 + b_2^2 - b_1b_2 \leq a_2^2 - 2a_1a_2 + a_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 + b_1^2$

$$\Rightarrow a_1^2 - a_1a_2 - b_1b_2 + b_1^2 \geq 0.$$

Dolayısıyla $\lambda \geq 0$ ve $\lambda \leq 1$ dir.

Örnek 2.5

$$p_1(z) = z^3 + 1.5z^2 + 1.2z + 0.5 \quad \text{ve}$$

$$p_2(z) = z^3 - 1.2z^2 + 1.1z - 0.4$$

polinomları Schur kararlı polinomlardır, $[p_1(z), p_2(z)]$ segmentinin kararlı olup olmadığını araştıralım.

$$p_1(z_0)p_2(z_0^{-1}) - p_2(z_0)p_1(z_0^{-1}) = 0,$$

$$(z^3 + 1.5z^2 + 1.2z + 0.5)(-0.4z^3 + 1.1z^2 - 1.2z + 1)$$

$$-(z^3 - 1.2z^2 + 1.1z - 0.4)(0.5z^3 + 1.2z^2 + 1.5z + 1) = 0,$$

$$-0.9z^6 - 0.1z^5 - 0.64z^4 + 0.64z^2 + 0.1z + 0.9 = 0$$

Bu denklemin köklerini buluyoruz:

$$z_{0,1,2} = \pm 1, \quad z_{0,3,4} = 0.2424 \pm 0.9702j, \quad z_{0,5,6} = -0.2980 \pm 0.9546j.$$

Burada, $|z_{0,3,4}| = 1$ ve $|z_{0,5,6}| = \sqrt{1} = 1$ dir.

Şimdi $z_0 = z_{0,3} = 0.2424 + 0.9702j$ için uygun sayıları yazıyoruz:

$$p_1(z_{0,3}) = -1.2032 + 1.1276j,$$

$$p_2(z_{0,3}) = 0.2554 - 0.2394j.$$

$$\frac{p_1(z_{0,3})}{p_2(z_{0,3})} = \frac{-1.2032 + 1.1276j}{0.2554 - 0.2394j}, \text{ pay ve paydayı, paydanın eşleneğiyle çarparak}$$

aşağıdakini yazabiliriz:

$$\frac{p_1(z_{0,3})}{p_2(z_{0,3})} = \frac{-0.5772 - 0.0001j}{0.1225} = -\frac{0.5772}{0.1225} - 0j \leq 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left[\frac{p_1(z_{0,3})}{p_2(z_{0,3})} \right] = -\frac{0.5772}{0.1225} \leq 0 \text{ ve } \operatorname{Im} \left[\frac{p_1(z_{0,3})}{p_2(z_{0,3})} \right] = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi $z_0 = z_{0,5} = -0.2980 + 0.9546j$ kökünü ele alalım:

$$p_1(z_{0,5}) = -0.3031 - 0.3235j,$$

$$p_2(z_{0,5}) = 1.0474 + 1.1172j.$$

$$\frac{p_1(z_{0,5})}{p_2(z_{0,5})} = \frac{-0.3031 - 0.3235j}{1.0474 + 1.1172j},$$

Burada, pay ve paydayı, paydanın eşleneğiyle çarparak aşağıdakini yazabiliriz:

$$\frac{p_1(z_{0,5})}{p_2(z_{0,5})} = \frac{-0.6789 - 0.0002j}{(1.0474)^2 + (1.1172)^2} = \frac{-0.6789}{2.3452} - \frac{0.0002}{2.3452}j = -\frac{0.6789}{2.3452} - 0j \leq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left[\frac{p_1(z_{0,5})}{p_2(z_{0,5})} \right] = -\frac{0.6789}{2.3452} \leq 0 \text{ ve } \operatorname{Im} \left[\frac{p_1(z_{0,5})}{p_2(z_{0,5})} \right] = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi uygun $\lambda_* \in (0,1)$ sayılarını bulalım.

$$\lambda_* p_1(z_0) + (1 - \lambda_*) p_2(z_0) = 0,$$

$$\lambda_* p_1(z_0^{-1}) + (1 - \lambda_*) p_2(z_0^{-1}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lambda_* p_1(z_0) + (1 - \lambda_*) p_2(z_0) = 0 &\Rightarrow \lambda_* = -\frac{p_2(z_{0,3})}{p_1(z_{0,3}) - p_2(z_{0,3})} \\ &= -\frac{0.2554 - 0.2394j}{-1.2032 + 1.1276j} \end{aligned}$$

Pay ve paydayı, paydanın eşleneğiyle çarparak yazabiliriz:

$$\lambda_* = -\frac{-0.6998 + 0.0001j}{3.9962} = \frac{0.6998}{3.9962} = 0.1751.$$

Şimdi $z_0^{-1} = z_{0,4} = 0.2424 - 0.9702j$ için λ_* bulabiliriz:

$$p_1(z_0^{-1}) = -1.2032 - 1.1276j,$$

$$p_2(z_0^{-1}) = 0.2554 + 0.2394j.$$

$$\begin{aligned} \lambda_* &= -\frac{p_2(z_0^{-1})}{p_1(z_0^{-1}) - p_2(z_0^{-1})} = -\frac{0.2554 + 0.2394j}{-1.2032 - 1.1276j - (0.2554 + 0.2394j)} \\ &= \frac{0.2554 + 0.2394j}{1.4586 + 1.3670j} \end{aligned}$$

pay ve paydayı, paydanın eşleneğiyle çarparak yazabiliriz:

$$\lambda_* = \frac{0.6998 + 0.0001j}{(1.3505)^2 + (1.4407)^2} = \frac{0.6998}{3.9962} + \frac{0.0001}{3.9962}j = 0.1751 + 0j = 0.1751.$$

Şimdi $z_{0,5} = -0.2980 + 0.9546j$ için λ_* buluyoruz:

$$p_1(z_{0,5}) = -0.3031 - 0.3235j,$$

$$p_2(z_{0,5}) = 1.0474 + 1.1172j.$$

$$\lambda_* = -\frac{1.0474 + 1.1172j}{-0.3031 - 0.3235j - (1.0474 + 1.1172j)} = \frac{1.0474 + 1.1172j}{1.3505 + 1.4407j},$$

Yukarıdakilere benzer, pay ve paydayı, paydanın eşleniğiyle çarpalım:

$$\lambda_* = -\frac{-3.0241 - 0.0002j}{(1.3505)^2 + (1.4407)^2} = \frac{3.0241}{3.8995} - \frac{0.0002}{3.8995}j = 0.7755 - 0j = 0.7755.$$

$z_0^{-1} = z_{0,6} = -0.2980 - 0.9546j$ için de λ_* buluyoruz:

$$p_1(z_0^{-1}) = p_1(-0.2980 - 0.9546j) = -0.3031 + 0.3235j,$$

$$p_2(z_0^{-1}) = p_2(-0.2980 - 0.9546j) = 1.0474 - 1.1172j.$$

$$\lambda_* = -\frac{1.0474 - 1.1172j}{-0.3031 + 0.3235j - (1.0474 - 1.1172j)} = -\frac{1.0474 - 1.1172j}{-1.3505 + 1.4407j},$$

Pay ve paydayı, paydanın eşleniğiyle çarpıyoruz

$$\lambda_* = \frac{3.0241}{3.8995} + \frac{0.0002}{3.8995}j = 0.7755 + 0j = 0.7755 \in [0,1],$$

Sonuç olarak, $[p_1(z), p_2(z)]$ segmenti $[0, 0.1751) \cup (0.7755, 1]$ kümesinde kararlı, $[0.1751, 0.7755]$ aralığında ise kararsızdır.

Simetrik ve simetrik olmayan ayrışma

Verilen $p(z)$ polinomunu simetrik $h(z)$ ve simetrik olmayan $g(z)$ polinomlarının toplamı olarak yazabiliyoruz.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = h(z) + g(z), \quad (2.19)$$

$$h(z) = \frac{1}{2}(p(z) + z^n p(z^{-1}))$$

ve

$$g(z) = \frac{1}{2}(p(z) - z^n p(z^{-1})).$$

Ayrıca,

$$h(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{ve} \quad g(z) = \beta_n z^n + \dots + \beta_1 z + \beta_0,$$

$$\alpha_i = \frac{a_i + a_{n-i}}{2}, \quad \beta_i = \frac{a_i - a_{n-i}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Bu ayrışma bir polinomun Hurwitz durumundaki çift ve tek ayrışması gibidir. Şimdi bu ayrışmayı kullanarak aşağıdaki lemmayı verelim:

Segment lemma 2.4 $p_1(z)$ ve $p_2(z)$, n -inci dereceden iki polinom simetrik ve simetrik olmayan ayrışmalı biçiminde verilsin:

$$p_1(z) = h_1(z) + g_1(z) \quad \text{ve} \quad p_2(z) = h_2(z) + g_2(z).$$

Öyle $\lambda \in [0, 1]$ ve öyle z_0 vardır ki $|z_0| = 1$ ve $\lambda p_1(z_0) + (1 - \lambda)p_2(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$h_1(z_0)g_2(z_0) - g_1(z_0)h_2(z_0) = 0, \quad (2.21)$$

$$z_0^{-n} h_1(z_0)h_2(z_0) \leq 0, \quad (2.22)$$

$$z_0^{-n} g_1(z_0)g_2(z_0) \geq 0 \quad (2.23)$$

sağlanır.

Kanıt: $\Rightarrow$ $z_0 = e^{j\theta}$ sayısı $\lambda p_1(z) + (1 - \lambda)p_2(z) = 0$ ' ın bir kökü olsun. O zaman

$$\lambda(h_1(z_0) + g_1(z_0)) + (1 - \lambda)(h_2(z_0) + g_2(z_0)) = 0. \quad (2.24)$$

Burada, $|z_0| = 1$ olduğu için aşağıdakini yazabiliriz:

$$\lambda \left(z_0^{-\frac{n}{2}} h_1(z_0) + z_0^{-\frac{n}{2}} g_1(z_0) \right) + (1 - \lambda) \left(z_0^{-\frac{n}{2}} h_2(z_0) + z_0^{-\frac{n}{2}} g_2(z_0) \right) = 0. \quad (2.25)$$

şimdi

$$h(z) = \frac{1}{2}(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 + a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [(a_n + a_0)z_0^n + (a_{n-1} + a_1)z_0^{n-1} + \dots + (a_1 + a_{n-1})z_0 + (a_0 + a_n)] \\
z_0^{-\frac{n}{2}}h(z_0) &= \frac{1}{2} [(a_n + a_0)z_0^{\frac{n}{2}} + (a_{n-1} + a_1)z_0^{\frac{n}{2}-1} + \dots + (a_0 + a_n)z_0^{-\frac{n}{2}}] \\
&= \frac{1}{2} [(a_n + a_0) \left(\cos \frac{n}{2} \theta + j \sin \frac{n}{2} \theta \right) + \dots + (a_0 + a_n) \left(\cos \frac{n}{2} \theta - j \sin \frac{n}{2} \theta \right)] \\
&= (a_n + a_0) \cos \frac{n}{2} \theta + (a_{n-1} + a_1) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots
\end{aligned}$$

sayısı gerçektir ve

$$\begin{aligned}
g(z_0) &= \frac{1}{2} [(a_n - a_0)z_0^n + (a_{n-1} - a_1)z_0^{n-1} + \dots + (a_1 - a_{n-1})z_0 + (a_0 - a_n)] \\
&= \frac{1}{2z_0^{-\frac{n}{2}}} [(a_n - a_0)z_0^{\frac{n}{2}} + (a_{n-1} - a_1)z_0^{\frac{n}{2}-1} + \dots + (a_0 - a_n)z_0^{-\frac{n}{2}}] \\
z_0^{-\frac{n}{2}}g(z_0) &= \frac{1}{2} [(a_n - a_0) \left(\cos \frac{n}{2} \theta + j \sin \frac{n}{2} \theta \right) + \dots + (a_0 - a_n) \left(\cos \frac{n}{2} \theta - j \sin \frac{n}{2} \theta \right)] \\
&= j [(a_n - a_0) \sin \frac{n}{2} \theta + (a_{n-1} - a_1) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots]
\end{aligned}$$

sayısı ise sanaldır.

Böylece (2.25) yi tekrardan şöyle yazabiliyoruz:

$$\lambda \left(z_0^{-\frac{n}{2}}h_1(z_0) + jz_0^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{g_1(z_0)}{j} \right) + (1 - \lambda) \left(z_0^{-\frac{n}{2}}h_2(z_0) + jz_0^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{g_2(z_0)}{j} \right) = 0. \quad (2.26)$$

$z_0^{-\frac{n}{2}}h_1(z_0)$ ve $z_0^{-\frac{n}{2}}h_2(z_0)$ reel kısımlar, $z_0^{-\frac{n}{2}}g_1(z_0)$ ve $z_0^{-\frac{n}{2}}g_2(z_0)$ ise sanal kısımlardır.

Son eşitlikten

$$\lambda z_0^{-\frac{n}{2}}h_1(z_0) + (1 - \lambda) \left(z_0^{-\frac{n}{2}}h_2(z_0) \right) = 0, \quad (2.27)$$

$$\lambda z_0^{-\frac{n}{2}} \frac{g_1(z_0)}{j} + (1 - \lambda) z_0^{-\frac{n}{2}} \frac{g_2(z_0)}{j} = 0 \quad (2.28)$$

yazabiliriz. $z_0 \neq 0$, $\lambda \geq 0$ ve $(1 - \lambda) \geq 0$ olduğu için

$$h_1(z_0)g_2(z_0) - g_1(z_0)h_2(z_0) = 0.$$

$$\lambda z_0^{-\frac{n}{2}} h_1(z_0) + (1 - \lambda) \left(z_0^{-\frac{n}{2}} h_2(z_0) \right) = 0 \Rightarrow z_0^{-n} h_1(z_0) = -\frac{(1 - \lambda)}{\lambda} z_0^{-n} h_2(z_0),$$

$$z_0^{-n} h_1(z_0) h_2(z_0) = -\frac{(1 - \lambda)}{\lambda} z_0^{-n} h_2(z_0) \cdot h_2(z_0) \leq 0$$

Benzer şekilde $z_0^{-n} g_1(z_0) g_2(z_0) \geq 0$ sağlanmaktadır.

$\Leftrightarrow$ İki duruma ayıracağız. a) Kabul edelim ki

$$h_1(z_0) g_2(z_0) - g_1(z_0) h_2(z_0) = 0, \quad z_0^{-n} h_1(z_0) h_2(z_0) \leq 0, \quad z_0^{-n} g_1(z_0) g_2(z_0) \geq 0,$$

ancak $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 0$ sağlanmasın. O zaman

$$\lambda = \frac{h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} \quad (2.29)$$

tanımlarsak (2.24) sağlanır ve hem de kolaylıkla gösterebiliriz ki $\lambda \in [0,1]$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} & \lambda(h_1(z_0) + g_1(z_0)) + (1 - \lambda)(h_2(z_0) + g_2(z_0)) = 0, \\ & \frac{h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} (h_1(z_0) + g_1(z_0)) + \left(1 - \frac{h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} \right) (h_2(z_0) + g_2(z_0)) \\ & = \frac{h_2(z_0)(h_1(z_0) + g_1(z_0)) - h_1(z_0)(h_2(z_0) + g_2(z_0))}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} = 0. \end{aligned}$$

Öte yandan, $h_1(z_0)$ ve $h_2(z_0)$ kompleks sayılar olduğu için

$$h_1(z_0) = a_1 + jb_1 \quad \text{ve} \quad h_2(z_0) = a_2 + jb_2.$$

$$\lambda = \frac{a_2 + jb_2}{a_2 + jb_2 - (a_1 + jb_1)},$$

Pay ve paydayı, paydanın eşleniğiyle çarptığımızda

$$\lambda = \frac{a_2^2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_2^2}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2},$$

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a_2^2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_2^2}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow a_2^2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_2^2 \geq 0 \text{ dir.}$$

b) Kabul edelim ki

$$z_0^{-n} (h_1(z_0)g_2(z_0) - g_1(z_0)h_2(z_0)) = 0,$$

$$h_1(z_0) = h_2(z_0) = 0, \quad z_0^{-n} g_1(z_0)g_2(z_0) \geq 0.$$

ancak $g_1(z_0) = g_2(z_0) = 0$ sağlanmasın. Bu durumda

$$\lambda = \frac{g_2(z_0)}{g_2(z_0) - g_1(z_0)} \in [0,1] \quad (2.30)$$

sayısı (2.24) i sağlamaktadır.

Eğer $g_1(z_0) = g_2(z_0) = 0$ ise, o zaman $\lambda = 0$ ya da $\lambda = 1$ (2.24) i sağlıyor. Böylece lemmanın kanıtı sonlanmış oluyor.

Örnek 2.6 $p_1(z) = z^3 + 1.5z^2 + 1.2z + 0.5$ ve $p_2(z) = z^3 - 1.2z^2 + 1.1z - 0.4$ polinomları Schur kararlı ve her biri ayrı ayrı olarak aşağıdaki gibi simetrik ve simetrik olmayan biçimde yazılabilir.

$$p_1(z) = h_1(z) + g_1(z) \quad \text{ve} \quad p_2(z) = h_2(z) + g_2(z).$$

Yani

$$h_1(z) = 0.75z^3 + 1.35z^2 + 1.35z + 0.75,$$

$$g_1(z) = 0.25z^3 + 0.15z^2 - 0.15z - 0.25,$$

$$h_2(z) = 0.3z^3 - 0.05z^2 - 0.05z + 0.3,$$

$$g_2(z) = 0.7z^3 - 1.15z^2 + 1.15z - 0.7.$$

$$h_1(z)g_2(z) - g_1(z)h_2(z)$$

polinomunun birim çember üzerinde kökü olması için gerek ve yeter şart

$$(z_0)^{-n} h_1(z_0)h_2(z_0) \leq 0 \text{ ve } (z_0)^{-n} g_1(z_0)g_2(z_0) \geq 0$$

olmasıdır.

$$h_1(z)g_2(z) - g_1(z)h_2(z) = 0$$

$$\Rightarrow 0.45z^6 + 0.05z^5 + 0.32z^4 - 0.32z^2 - 0.05z - 0.45 = 0$$

Denklemin kökleri

$$z_{0,1,2} = \pm 1, \quad z_{0,3,4} = 0.2424 \pm 0.9702j, \quad z_{0,5,6} = -0.2980 \pm 0.9546j.$$

$\frac{z_0}{z}$	$\frac{(z_0)^{-n}h_1(z_0)h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)}$	$\frac{(z_0)^{-n}g_1(z_0)g_2(z_0)}{g_2(z_0) - g_1(z_0)}$
$z_{0,3} = 0.2424 + 0.9702j$	-0.4898	0.0874
$z_{0,4} = 0.2424 - 0.9702j$	-0.4898	0.0874
$z_{0,5} = -0.2980 + 0.9546j$	-0.9546	0.5651
$z_{0,6} = -0.2980 - 0.9546j$	-0.9546	0.5651

Burada $z_0 = z_{0,3}$ ve $z_0 = z_{0,4}$ için

$$\lambda_1 = \frac{h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} = 0.1751$$

Ancak $z_0 = z_{0,5}$ ve $z_0 = z_{0,6}$ için

$$\lambda_2 = \frac{h_2(z_0)}{h_2(z_0) - h_1(z_0)} = 0.7755$$

Böylece, Schur segment lemma'dan elden edilen sonucu tekrarlamış oluyoruz.

Trigonometrik versiyon: $p(z)$ n-inci dereceden bir gerçel polinom olsun. ve

$$p(z) = h(z) + g(z) \quad (2.31)$$

$$p(z) = 2z^{\frac{n}{2}} \left(\frac{z^{-\frac{n}{2}}h(z)}{2} + \frac{z^{-\frac{n}{2}}g(z)}{2} \right). \quad (2.32)$$

Burada

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{n}{2}}h(z) = \frac{\alpha_n}{2}z^{\frac{n}{2}} + \frac{\alpha_{n-1}}{2}z^{\frac{n}{2}-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{2}z^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} + \frac{\alpha_0}{2}z^{-\frac{n}{2}} \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{n}{2}}g(z) = \frac{\beta_n}{2}z^{\frac{n}{2}} + \frac{\beta_{n-1}}{2}z^{\frac{n}{2}-1} + \dots + \frac{\beta_1}{2}z^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} + \frac{\beta_0}{2}z^{-\frac{n}{2}} \quad (2.34)$$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_i = \alpha_{n-i}$ ve $\beta_i = -\beta_{n-i}$ ($i = 0,1,2,3,\dots$). $z = e^{j\theta}$ ise

$$\frac{e^{-j\frac{n\theta}{2}} h(e^{j\theta})}{2} = h^*(\theta)$$

$$\frac{e^{-j\frac{n\theta}{2}} g(e^{j\theta})}{2} = jg^*(\theta)$$

Burada

$$h^*(\theta) = \begin{cases} \alpha_n \cos \frac{n}{2} \theta + \alpha_{n-1} \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots + \alpha_{\frac{n}{2}} & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ \alpha_n \cos \frac{n}{2} \theta + \alpha_{n-1} \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots + \alpha_{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.35)$$

ve

$$g^*(\theta) = \begin{cases} \beta_n \sin \frac{n}{2} \theta + \beta_{n-1} \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots + \beta_{\frac{n}{2}+1} & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ \beta_n \sin \frac{n}{2} \theta + \beta_{n-1} \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \dots + \beta_{\frac{n+1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.36)$$

Yazabiliriz

$$p(e^{j\theta}) = e^{jn\frac{\theta}{2}} (h^*(\theta) + g^*(\theta)) \quad (2.37)$$

$$p(e^{j\theta}) = e^{jn\frac{\theta}{2}} \delta(\theta). \quad (2.38)$$

Şimdi segment lemmanın diğer versiyonunu açıklayabiliriz.

Segment lemma 2.5 $p_1(z)$ ve $p_2(z)$ n -inci dereceden iki polinom olsun. ve

$$p_1(e^{j\theta}) = 2e^{jn\frac{\theta}{2}} (h^*_1(\theta) + jg^*_1(\theta)),$$

$$p_2(e^{j\theta}) = 2e^{jn\frac{\theta}{2}} (h^*_2(\theta) + jg^*_2(\theta))$$

olsun $p_1(z)$ ve $p_2(z)$ 'nin birleşiminden elde edilen segmentin birim çember üzerinde en az bir kökü vardır $\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi)$ vardır

$$\begin{aligned} h^*_1(\theta)g^*_2(\theta) - g^*_1(\theta)h^*_2(\theta) &= 0, \\ h^*_1(\theta)h^*_2(\theta) &\leq 0, \\ g^*_1(\theta)g^*_2(\theta) &\leq 0. \end{aligned}$$

Kanıt: $\Rightarrow z_0 = e^{j\theta}$, $\lambda p_1(z) + (1 - \lambda)p_2(z) = 0$ nin bir kökü olsun.

O zaman

$$\lambda \left[2e^{jn\frac{\theta}{2}}(h^*_{-1}(\theta) + jg^*_{-1}(\theta)) \right] + (1 - \lambda) \left[2e^{jn\frac{\theta}{2}}(h^*_{-2}(\theta) + jg^*_{-2}(\theta)) \right] = 0 \text{ dir. Buradan}$$

$$2\lambda e^{jn\frac{\theta}{2}}h^*_{-1}(\theta) + (1 - \lambda) 2e^{jn\frac{\theta}{2}}h^*_{-2}(\theta) = 0 / g^*_{-1}(\theta)$$

$$2\lambda e^{jn\frac{\theta}{2}}g^*_{-1}(\theta) + (1 - \lambda) 2e^{jn\frac{\theta}{2}}g^*_{-2}(\theta) = 0 / -h^*_{-1}(\theta)$$

$$\Rightarrow h^*_{-1}(\theta)g^*_{-2}(\theta) - g^*_{-1}(\theta)h^*_{-2}(\theta) = 0$$

ve $h^*_{-1}(\theta) = -\frac{1-\lambda}{\lambda} h^*_{-2}(\theta)$ ve $g^*_{-1}(\theta) = -\frac{1-\lambda}{\lambda} g^*_{-2}(\theta)$ yi yerinde koyduğumuzda

$\Rightarrow h^*_{-1}(\theta)h^*_{-2}(\theta) \leq 0$ ve $g^*_{-1}(\theta)g^*_{-2}(\theta) \leq 0$ elde ediliyor.

2.1.1.1. Kompleks polinomlar için Hurwitz segment lemma

Kompleks segmentin kararlılığı [9,10] da incelenmiştir.

$$\begin{aligned} p_1(s) &= (a_0 + jb_0) + (a_1 + jb_1)s + (a_2 + jb_2)s^2 + \dots + (a_{n-1} + jb_{n-1})s^{n-1} + s^n \\ &= a(s) + jb(s) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} p_2(s) &= (c_0 + jd_0) + (c_1 + jd_1)s + (c_2 + jd_2)s^2 + \dots + (c_{n-1} + jd_{n-1})s^{n-1} + s^n \\ &= c(s) + jd(s) \end{aligned} \quad (2.40)$$

kompleks polinomları verilsin.

$$p_1(s) = a_1(s^2) + sa_2(s^2) + j(b_1(s^2) + sb_2(s^2)), \quad (2.41)$$

$$p_2(s) = c_1(s^2) + sc_2(s^2) + j(d_1(s^2) + sd_2(s^2)) \quad (2.42)$$

yazalım. $s = j\omega$ ise aşağıdakileri yazabiliriz:

$$p_1(j\omega) = a_1(\omega) + j\omega a_2(\omega) + j[b_1(\omega) + j\omega b_2(\omega)], \quad (2.43)$$

$$p_2(j\omega) = c_1(\omega) + j\omega c_2(\omega) + j[d_1(\omega) + j\omega d_2(\omega)]. \quad (2.44)$$

$$p_1(j\omega) = a_1(\omega) - \omega b_2(\omega) + j[\omega a_2(\omega) + b_1(\omega)], \quad (2.45)$$

$$p_2(j\omega) = c_1(\omega) - \omega d_2(\omega) + j[\omega c_2(\omega) + d_1(\omega)]. \quad (2.46)$$

(2.45) ve (2.46)'ın gerçel ve kompleks kısımlarına

$$A(\omega) = a_1(\omega) - \omega b_2(\omega), \quad B(\omega) = \omega a_2(\omega) + b_1(\omega),$$

$$C(\omega) = c_1(\omega) - \omega d_2(\omega) \quad \text{ve} \quad D(\omega) = \omega c_2(\omega) + d_1(\omega)$$

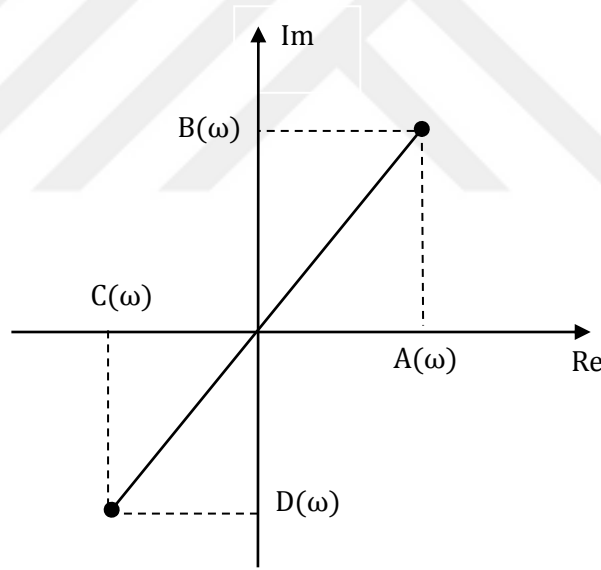
diyelim. O zaman aşağıdaki şekle göre $s = j\omega$ kökünün var olması için

$$A(\omega) \cdot C(\omega) < 0,$$

$$B(\omega) \cdot D(\omega) < 0,$$

$$A(\omega)D(\omega) - C(\omega)B(\omega) = 0$$

sağlanmalıdır. (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Kompleks katsayılı polinomlarda Segment lemma

$$[p_1(j\omega), p_2(j\omega)] = \{(1-t)p_1(j\omega) + tp_2(j\omega), t \in [0,1]\}.$$

Segment lemma 2.6 $[p_1(s), p_2(s)]$ 'nin $s = j\omega$ kökü vardır $\Leftrightarrow$

$$A(\omega)D(\omega) - C(\omega)B(\omega) = 0, \quad (2.47)$$

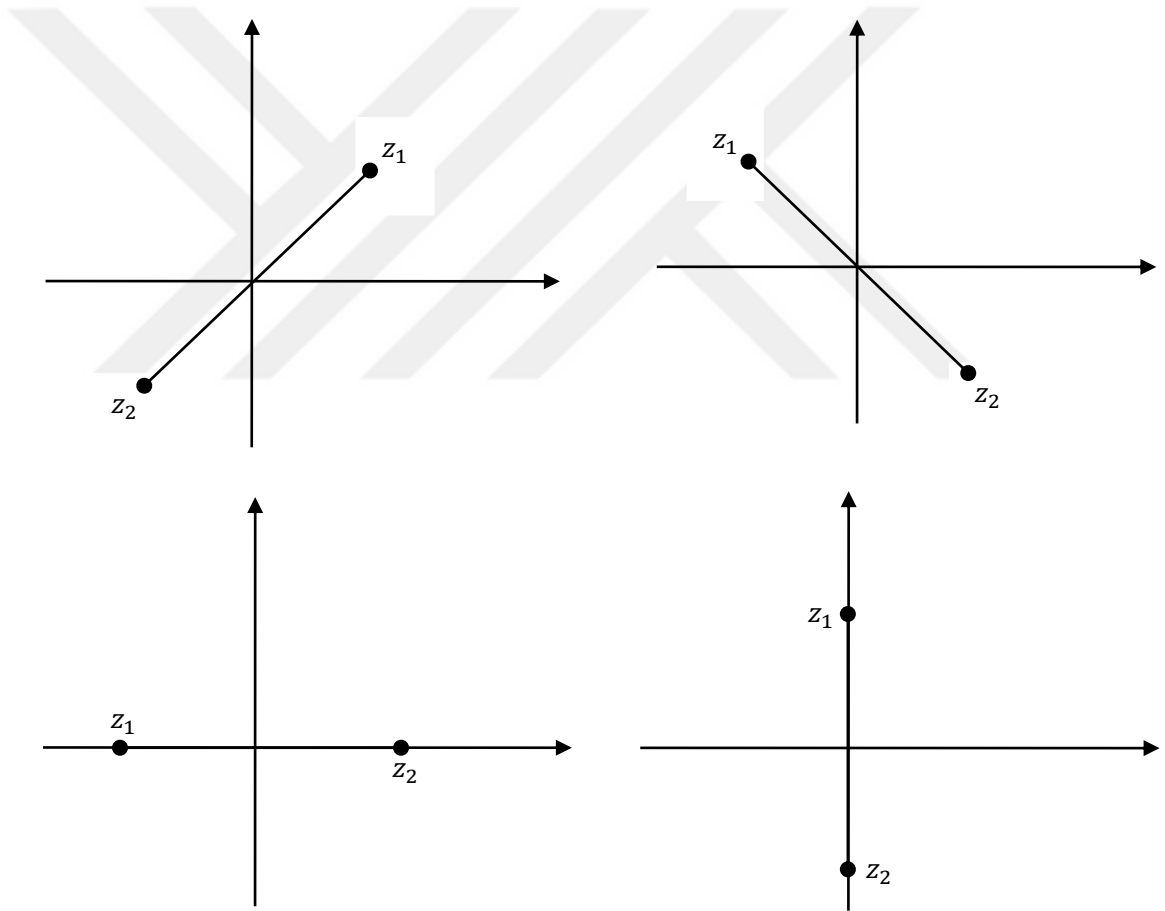
$$A(\omega) \cdot C(\omega) \leq 0, \quad (2.48)$$

$$B(\omega) \cdot D(\omega) \leq 0. \quad (2.49)$$

koşulların sağlayan $\omega \in IR$ vardır.

Kanıt: $[p_1(s), p_2(s)]$ ailesinin $s = j\omega$ daki değer kümesi kompleks düzlemde $z_1 = (A(\omega), B(\omega))$ ve $z_2 = (C(\omega), D(\omega))$ 'yi bileştiren doğru parçasıdır.

$\Rightarrow \exists t \in [0,1]$ için $(1-t)p_1(j\omega) + tp_2(j\omega) = 0$ dolayısıyla $[z_1, z_2]$ segmenti sıfırı içeriyor. Yani böyle bir durumda aşağıdaki dört biçimden biri gerçekleşiyor. (Şekil 2.3).



Şekil 2.3.. Kompleks katsayılı polinomlar için farklı durumlar

Örnek 2.7

$$p_1(s) = s^3 + 6s^2 + (12 - j)s + (7 - j) \text{ ve}$$

$$p_2(s) = s^3 + (5 - j)s^2 + (9 - 4j)s + (5 - 5j)$$

kararlı polinomları verilsin. $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlı mıdır?

Çözüm:

$$p_1(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 7 + j[-s - 1],$$

$$p_2(s) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5 + j[-s^2 - 4s - 5]$$

Bu polinomları şöyle yazalım:

$$p_1(s) = 6s^2 + 7 + s(s^2 + 12) + j[-1 + s(-1)],$$

$$p_2(s) = 5s^2 + 5 + s(s^2 + 9) + j[-s^2 - 5 + s(-4)].$$

Şimdi $s = j\omega$ yazalım:

$$p_1(j\omega) = -6\omega^2 + 7 + j\omega(-\omega^2 + 12) + j[-1 + j\omega(-1)],$$

$$p_2(j\omega) = -5\omega^2 + 5 + j\omega(-\omega^2 + 9) + j[\omega^2 - 5 + j\omega(-4)].$$

Buradan

$$p_1(j\omega) = -6\omega^2 + \omega + 7 + j(-\omega^3 + 12\omega - 1),$$

$$p_2(j\omega) = -5\omega^2 + 4\omega + 5 + j(-\omega^3 + \omega^2 + 9\omega - 5)$$

elde ederiz. Bu örnekte

$$A(\omega) = -6\omega^2 + \omega + 7, \quad B(\omega) = -\omega^3 + 12\omega - 1,$$

$$C(\omega) = -5\omega^2 + 4\omega + 5 \text{ ve } D(\omega) = -\omega^3 + \omega^2 + 9\omega - 5 \text{ dir.}$$

$$A(\omega) \cdot D(\omega) - C(\omega) \cdot B(\omega) = 0 \Rightarrow$$

$$(-6\omega^2 + \omega + 7)(-\omega^3 + \omega^2 + 9\omega - 5) - (-5\omega^2 + 4\omega + 5)(-\omega^3 + 12\omega - 1) = 0.$$

Bu denklemin sadeleştirerek köklerini bulalım:

$$\omega^5 - 3\omega^4 + 5\omega^3 - 7\omega^2 + 2\omega - 30 = 0,$$

$$\omega_1 = 2.6289, \quad \omega_{2,3} = 1 \pm 2j, \quad \omega_{4,5} = -0.8145 \pm 1.2724j.$$

$\omega_1 = 2.6289 \in IR$ için $A(\omega) \cdot C(\omega) \leq 0$ ve $B(\omega) \cdot D(\omega) \leq 0$ eşitsizliklerin her ikisi sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} A(\omega) \cdot C(\omega) &= (-6\omega^2 + \omega + 7)(-5\omega^2 + 4\omega + 5) \\ &= 30\omega^4 - 29\omega^3 - 61\omega^2 + 33\omega + 35 \end{aligned}$$

Burada $\omega = \omega_1$ yazarsak 606.1908 elde ederiz. Yani (2.48) sağlanmamaktadır. Dolayısıyla segment kararlıdır.

Örnek 2.8

$$p_1(s) = s^4 + (8 - j)s^3 + (24 - 5j)s^2 + (32 - 9j)s + (15 - 5j) \text{ ve}$$

$$p_2(s) = s^4 + (7 - j)s^3 + (19 - 6j)s^2 + (23 - 13j)s + (10 - 10j)$$

kararlı polinomları verilsin. $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlı mıdır?

Çözüm:

$$p_1(s) = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 15 + j[-s^3 - 5s^2 - 9s - 5],$$

$$p_2(s) = s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 23s + 10 + j[-s^3 - 6s^2 - 13s - 10].$$

$$p_1(s) = s^4 + 24s^2 + 15 + s(8s^2 + 32) + j[-5s^2 - 5 + s(-s^2 - 9)],$$

$$p_2(s) = s^4 + 19s^2 + 10 + s(7s^2 + 23) + j[-6s^2 - 10 + s(-s^2 - 13)].$$

Şimdi $s = j\omega$ için

$$p_1(j\omega) = \omega^4 - 24\omega^2 + 15 + j\omega(-8\omega^2 + 32) + j[5\omega^2 - 5 + j\omega(\omega^2 - 9)],$$

$$p_2(s) = \omega^4 - 19\omega^2 + 10 + j\omega(-7\omega^2 + 23) + j[6\omega^2 - 10 + j\omega(\omega^2 - 13)].$$

$$p_1(j\omega) = \omega^4 - \omega^3 - 24\omega^2 + 9\omega + 15 + j[-8\omega^3 + 5\omega^2 + 32\omega - 5],$$

$$p_2(j\omega) = \omega^4 - \omega^3 - 19\omega^2 + 13\omega + 10 + j[-7\omega^3 + 6\omega^2 + 23\omega - 10].$$

Burada $A(\omega) = \omega^4 - \omega^3 - 24\omega^2 + 9\omega + 15$, $B(\omega) = -8\omega^3 + 5\omega^2 + 32\omega - 5$,
 $C(\omega) = \omega^4 - \omega^3 - 19\omega^2 + 13\omega + 10$ ve $D(\omega) = -7\omega^3 + 6\omega^2 + 23\omega - 10$
 dir.

$$A(\omega) \cdot D(\omega) - C(\omega) \cdot B(\omega) = 0$$

$$(\omega^4 - \omega^3 - 24\omega^2 + 9\omega + 15)(-7\omega^3 + 6\omega^2 + 23\omega - 10) \\ - (\omega^4 - \omega^3 - 19\omega^2 + 13\omega + 10)(-8\omega^3 + 5\omega^2 + 32\omega - 5) = 0$$

Bu denklemi sadeleştirerek köklerini bulalım. Yani

$$\omega^7 + 6\omega^5 - 4\omega^4 + 25\omega^3 - 24\omega^2 - 100 = 0,$$

$$\omega_1 = 1.5874, \quad \omega_{2,3} = 1 \pm 2j, \quad \omega_{4,5} = -1 \pm 2j, \quad \omega_{6,7} = -0.7937 \pm 1.3747j$$

dir.

$\omega_1 = 1.5874 \in IR$ için $A(\omega) \cdot C(\omega) \leq 0$ ve $B(\omega) \cdot D(\omega) \leq 0$ eşitsizliklerini kontrol etmeliyiz.

$$A(\omega) \cdot C(\omega) = (\omega^4 - \omega^3 - 24\omega^2 + 9\omega + 15)(\omega^4 - \omega^3 - 19\omega^2 + 13\omega + 10) \\ = \omega^8 - 2\omega^7 - 42\omega^6 + 65\omega^5 + 459\omega^4 - 508\omega^3 - 408\omega^2 + 285\omega + 150,$$

ancak bu ifadenin sonucu $\omega = \omega_1$ için 429.4595 dir ve (2.48) sağlanmamaktadır.

Dolayısıyla segment kararlıdır.

3. KONVEKS KOMBİNASYONLAR

Gerçek polinomların konveks kombinasyonlarının Hurwitz kararlılığı problemi [11 – 24] yayınlarında incelenmiştir.

$G^n = \{f_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) : \operatorname{Re}(x_i) < 0, (i = 1, 2, \dots, n)\}$ kararlı polinomların ailesi ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $F_n(x, \lambda) = \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)g_n(x)$ olsun. Farz edelim ki $g_n(x)$ polinomunun ters Hurwitz matrisi mevcut yani $H^{-1}g_n(x)$ var olsun. $W = -H(f_n)H^{-1}(g_n)$ matrisini göz önüne alalım, bu matrisin özdeğerleri $Q_1(W), Q_2(W), \dots, Q_m(W), \gamma_{m+1}(W), \gamma_{m+2}(W), \dots, \gamma_n(W)$ olsun. Öyle ki

$$\operatorname{Im}(Q_i(W)) = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\operatorname{Im}(\gamma_i(W)) \neq 0 \quad ; \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, n); \quad 0 \leq m \leq n.$$

Teorem 3.1 $f_n(x), g_n(x) \in G^n$ olsun. O zaman her $\lambda \in [0, 1]$ için $F_n(x, \lambda) \in G^n \Leftrightarrow$

$$Q_i(W) < 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (3.1)$$

Kanıt: $\Rightarrow$ Varsayalım ki $F_n(x, \lambda) \in G^n \quad (\forall \lambda \in [0, 1])$. Routh-Hurwitz kriterinden şunu yazabiliriz:

$$\det(H(F_n)) = \det(H(\lambda f_n + (1 - \lambda)g_n)) \neq 0, \quad (\lambda \in [0, 1]) \quad (3.2)$$

öte yandan $H^{-1}(g_n)$ mevcuttur.

$$\begin{aligned} \det(HF_n(x, \lambda)) \neq 0 &\Rightarrow \det(\lambda Hf_n(x) + (1 - \lambda)Hg_n(x)) \neq 0 \\ &\Rightarrow \det(\lambda H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n) + (1 - \lambda)I) \cdot \det H(g_n) \neq 0 \quad ; \quad \det H(g_n) \neq 0 \\ &\Rightarrow \det(\lambda H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n) + (1 - \lambda)I) \neq 0 \\ &\Rightarrow \det \lambda \left(H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n) + \frac{1 - \lambda}{\lambda} I \right) \neq 0 \quad ; \quad (\lambda \in (0, 1]) \\ &\Rightarrow \lambda^n \det \left(H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n) + \frac{1 - \lambda}{\lambda} I \right) \neq 0 \\ &\Rightarrow \det \left(H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n) + \frac{1 - \lambda}{\lambda} I \right) \neq 0 \quad ; \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \quad \alpha \in [0, \infty) \\ &\Rightarrow \det(W - \alpha I) \neq 0 \end{aligned}$$

Buradan W nin sıfır veya pozitif özdeğeri yoktur.

$\Leftrightarrow$ Gerçek özdeğerlerin hepsi negatif olsun yani (3.1) sağlansın, o zaman

$[f_n(x), g_n(x)] = \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)g_n(x)$ 'in $\forall \lambda \in [0,1]$ için kararlı olduğunu gösterelim.

$\alpha \geq 0$ ise $\det(W - \alpha I) \neq 0$, ya da $\det(\alpha I - W) \neq 0$, $\alpha = \beta + 1$ ve $\beta \geq -1$ dir.

$$\begin{aligned}
& \det((\beta + 1)I - W) \neq 0 \Rightarrow \det(\beta I + (I - W)) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det(\beta I + (I + H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n))) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det(\beta I + (I + H(f_n) \cdot H^{-1}(g_n)) \cdot \det H(g_n)) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det((\alpha - 1)H(g_n) + H(g_n) + H(f_n)) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det(\alpha H(g_n) + H(f_n)) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} H(g_n) + H(f_n)\right) \neq 0 \\
& \Rightarrow \det(\lambda H(f_n) + (1 - \lambda)H(g_n)) \neq 0 \quad ; \quad \forall \lambda \in [0,1] \\
& \Rightarrow \det[H(\lambda f + (1 - \lambda)g)] \neq 0 \quad ; \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (3.3)
\end{aligned}$$

λ değıştikçe kökler sürekli değışiyor yani $\lambda = 0$ için $\lambda(f_n) + (1 - \lambda)H(g_n)$ kararlı, öyle $\lambda_0 \in [0,1]$ vardır ki bunun için $\lambda_0 f_n + (1 - \lambda_0)g_n$ kararsız ve bir $\lambda = \lambda_1$ için $\lambda_1 f_n + (1 - \lambda_1)g_n$ 'nin $j\omega$ ve $-j\omega$ kökleri vardır ki Orlando formülünden çelişki olduğunu kolayca görebiliriz. Yani

$$\begin{aligned}
& \det[H(F_n)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{n}} \cdot a_n^{n-1} \cdot a_0 \cdot \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_i + x_k) \\
& \Rightarrow \det[H(F_n)] = \det[H(\lambda_1 f_n + (1 - \lambda_1)g_n)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{n}} \cdot a_n^{n-1} \cdot a_0 \cdot \prod 0 = 0
\end{aligned}$$

Bu ise $\det[H(\lambda_1 f_n + (1 - \lambda_1)g_n)] \neq 0$ olmasıyla çelişkidir.

Örnek 3.1 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ ve $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ polinomlarını göz önüne alıyoruz. Burada $f(x), g(x) \in G^3$, teoreme göre aşağıdakileri yazabiliriz:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(g(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W = -H(f) \cdot H^{-1}(g) = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\det(\lambda I - W) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda - 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1(W) = -4, \quad \lambda_2(W) = -1 - i, \quad \lambda_3(W) = -1 + i.$$

W matrisinin reel özdeğeri negatiftir. ($\lambda_1(W) = -4$), yani yukarıdaki teoremden dolayı

$\forall \lambda \in [0,1]$ için $F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ polinomu kararlıdır.

Teorem 3.2 ([14]) $p_1(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n$ ve $p_2(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n$ iki Hurwitz polinomu olsun ve kabul edelim ki

$$a_0 = b_0, \quad a_2 = b_2, \quad a_4 = b_4, \dots$$

O zaman $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlıdır.

Kanıt: $\{(1 - \lambda)p_1(s) + \lambda p_2(s) : s = j\omega, \lambda \in [0,1]\}$ değer kümesini güz önüne alalım.

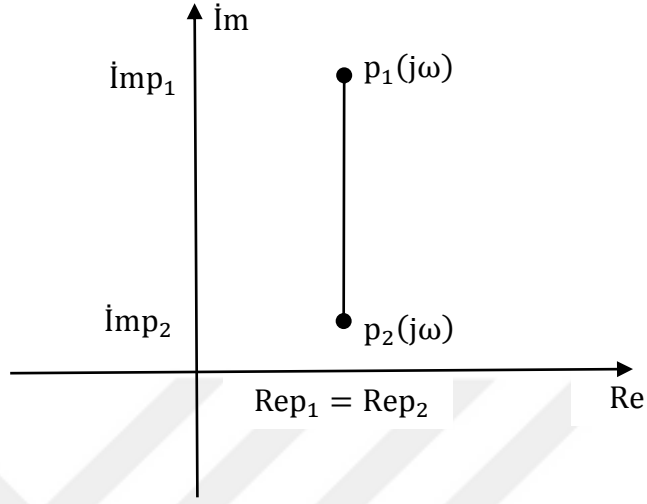
$$p_1(j\omega) = a_0 + a_1j\omega + a_2j^2\omega^2 + a_3j^3\omega^3 + a_4j^4\omega^4 + \dots,$$

$$p_2(j\omega) = b_0 + b_1j\omega + b_2j^2\omega^2 + b_3j^3\omega^3 + b_4j^4\omega^4 + \dots.$$

$$p_1(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \dots),$$

$$p_2(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 + \dots).$$

$\omega \geq 0$ iken değer kümesi daima y-ksenine paralel bir doğru parçasıdır. (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Segmentin reel kısımlarının $s = j\omega$ da eşitliği

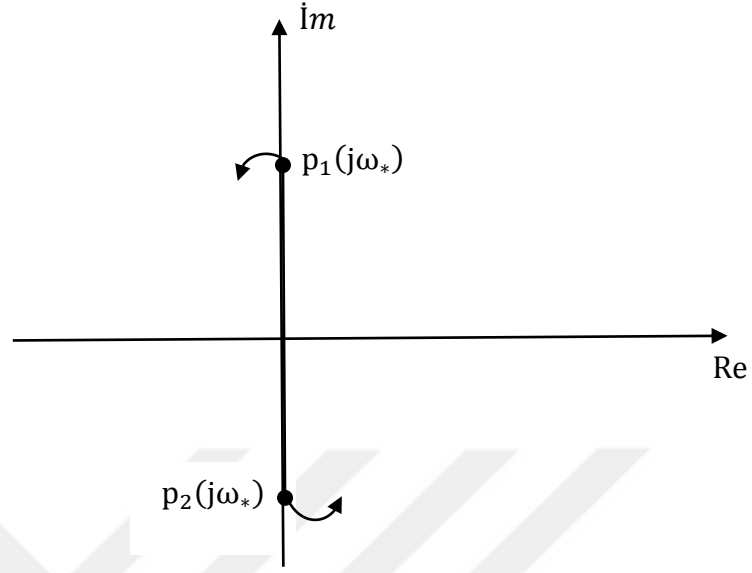
$\omega = 0$ için değer kümesi $a_0 = b_0 \neq 0$ gibi tek noktadan oluşmaktadır. Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. Eğer bir

$$\varphi(s) \in [p_1(s), p_2(s)] \quad (3.4)$$

kararsız olsaydı sürekliliğe göre bir başka $\varphi_1(s) \in [p_1(s), p_2(s)]$ 'nin $s = j\omega_*$ kökü olurdu. Bu durumda

$$0 = \varphi_1(j\omega_*) \in [p_1(j\omega_*), p_2(j\omega_*)] \quad (3.5)$$

sağlanmaktadır. $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ kararlı oldukları için $p_1(j\omega_*)$ ve $p_2(j\omega_*)$ yönü saat yönünün tersidir. Bu ise $[p_1(j\omega_*), p_2(j\omega_*)]$ segmentinin daima y-eksenine paralel kalması ile çelişmektedir. (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Segmentin hareket yönü

Teorem 3.3 ([14]) $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ n-inci dereceden iki polinom olsun. ve

$$a_1 = b_1, a_3 = b_3, a_5 = b_5, \dots$$

sağlansın. Eğer $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ kararlı ise o zaman $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlıdır.

Kanıt: $s = j\omega$ için şunları yazabiliriz:

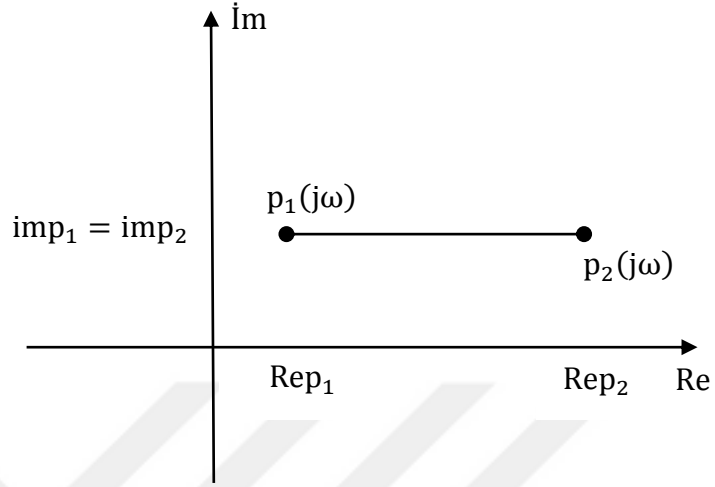
$$p_1(j\omega) = a_0 + a_1j\omega + a_2j^2\omega^2 + a_3j^3\omega^3 + a_4j^4\omega^4 + \dots,$$

$$p_2(j\omega) = b_0 + b_1j\omega + b_2j^2\omega^2 + b_3j^3\omega^3 + b_4j^4\omega^4 + \dots.$$

$$p_1(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \dots),$$

$$p_2(j\omega) = (b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 + \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \dots)$$

$\omega \in [0, \infty)$ iken değer kümesi daima x -eksenine paralel bir doğru parçasıdır. (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Segmentin sanal kısımlarının $s = j\omega$ da eşitliği

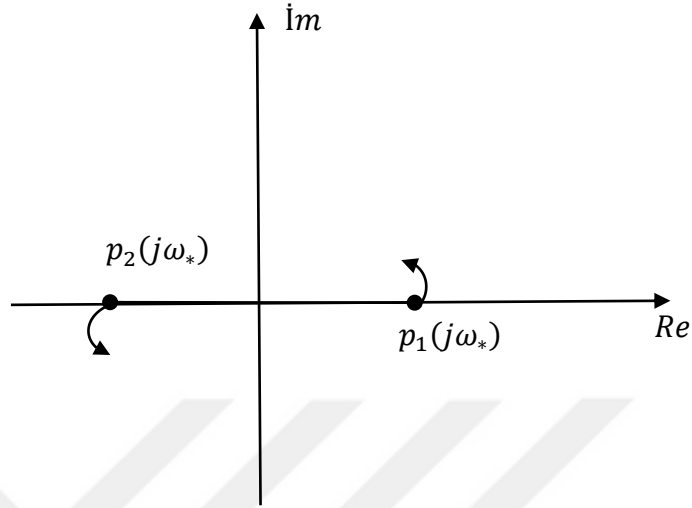
$\omega = 0$ olunca değer kümesi $a_0 = b_0 \neq 0$ gibi tek bir noktadan oluşuyor. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde (olmayana ergi yöntemini uygulayalım). Eğer bir

$$\varphi(s) \in [p_1(s), p_2(s)] \quad (3.6)$$

kararsız olsaydı sürekliliğe göre bir başka $\varphi_1(s) \in [p_1(s), p_2(s)]$ 'nin $s = j\omega_*$ kökü olurdu. Bu durumda

$$0 = \varphi_1(j\omega_*) \in [p_1(j\omega_*), p_2(j\omega_*)] \quad (3.7)$$

sağlanıyor. $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ kararlı oldukları için $p_1(j\omega_*)$ ve $p_2(j\omega_*)$ yönü saat yönünün tersidir. Bu ise $[p_1(j\omega_*), p_2(j\omega_*)]$ segmentinin hep x -eksenine paralel kalması ile çelişiyor. (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. Yatay Segmentin hareket yönü

Sturm zinciri

$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ n-inci dereceden iki polinom olsun. O zaman $p_1(s) = a(s) + sb(s)$ ve $p_2(s) = c(s) + sd(s)$ olarak yazabiliriz. Burada

$$a(s) = a_0 + a_2s^2 + a_4s^4 + \dots,$$

$$b(s) = a_1 + a_3s^2 + a_5s^4 + \dots,$$

$$c(s) = b_0 + b_2s^2 + b_4s^4 + \dots,$$

$$d(s) = b_1 + b_3s^2 + b_5s^4 + \dots$$

dir.

$s = j\omega$, $j^2 = -1$, $x = \omega^2$ alırsak aşağıdakileri yazabiliriz.

$$p_1(j\omega) = a(j\omega) + j\omega \cdot b(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots),$$

$$p_2(j\omega) = c(j\omega) + j\omega \cdot d(j\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \dots).$$

$$\hat{a}(x) = a_0 - a_2x + a_4x^2 - \dots,$$

$$\hat{b}(x) = a_1 - a_3x + a_5x^2 - \dots,$$

$$\hat{c}(x) = b_0 - b_2x + b_4x^2 - \dots,$$

$$\hat{d}(x) = b_1 - b_3x + b_5x^2 - \dots.$$

$$p_1(j\omega) = \hat{a}(x) + j\omega \cdot \hat{b}(x),$$

$$p_2(j\omega) = \hat{c}(x) + j\omega \cdot \hat{d}(x).$$

Eğer $tp_1(j\omega) + (1-t)p_2(j\omega) = 0$ ise

$$t(\hat{a}(x) + j\omega \cdot \hat{b}(x)) + (1-t)(\hat{c}(x) + j\omega \cdot \hat{d}(x)) = 0. \quad (3.8)$$

(3.8) in sıfır olması demek, reel ve kompleks kısımların ayrı ayrı sıfır olması demektir.

Yani

$$t\hat{a}(x) + (1-t)\hat{c}(x) = 0 \quad (3.9)$$

$$t\hat{b}(x) + (1-t)\hat{d}(x) = 0 \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) denklemlerinden aşağıdakiler yazılabilir

$$\frac{t}{1-t} = -\frac{\hat{c}(x)}{\hat{a}(x)},$$

$$\frac{t}{1-t} = -\frac{\hat{d}(x)}{\hat{b}(x)}.$$

veya

$$\hat{a}(x)\hat{d}(x) - \hat{b}(x)\hat{c}(x) = 0. \quad (3.11)$$

Bundan dolayı aşağıdaki iki aşamayı göz önünde alarak $tp_1(s) + (1-t)p_2(s)$, ($t \in [0,1]$) in kararlı olup olmadığını kolayca söyleyebiliriz.

- 1) Dört tane $\hat{a}(x) = 0$, $\hat{b}(x) = 0$, $\hat{c}(x) = 0$ ve $\hat{d}(x) = 0$ denklemlerinin pozitif kökleri (varsa) bulunur.
- 2) Bu köklerden oluşan $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{k-1}, x_k)$ aralıkları içinde öylesi var mıdır ki o aralıkta $\hat{a}(x)\hat{c}(x) < 0$ ve $\hat{d}(x)\hat{b}(x) < 0$ eşitsizliklerinin her ikisi sağlansın? Eğer öyle aralık yoksa $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlıdır. Eğer öyle aralıklar varsa her öyle aralıkta (3.11) in pozitif kökü olup olmadığına bakıyoruz, pozitif kökü varsa kararsız, pozitif kökü yoksa kararlıdır.

Örnek 3.2

$$p_1(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s + 1,$$

$$p_2(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + s + 3$$

polinomları kararlıdır, $[p_1(s), p_2(s)] = tp_1(s) + (1 - t)p_2(s)$, $(t \in [0,1])$ segmentinin kararlı olup olmadığını inceleyelim.

$s = j\omega$, $j^2 = -1$, $x = \omega^2$ aldığımızdan dolayı aşağıdakileri yazabiliyoruz

$$p_1(s) = 1 + 3s^2 + s^4 + s(5s^2 + 2),$$

$$p_2(s) = 3 + 5s^2 + s^4 + s(s^2 + 1).$$

$$\hat{a}(x) = 1 - 3x + x^2,$$

$$\hat{b}(x) = 2 - 5x,$$

$$\hat{c}(x) = 3 - 5x + x^2,$$

$$\hat{d}(x) = 1 - x.$$

Şimdi $\hat{a}(x)$, $\hat{b}(x)$, $\hat{c}(x)$ ve $\hat{d}(x)$ 'nin köklerini ayrı ayrı bularak sırasıyla aralıklar biçiminde yazacağız.

$$\hat{a}(x) \text{ in kökleri} = \{2.618, 0.382\},$$

$$\hat{b}(x) \text{ in kökü} = \{0.4\},$$

$$\hat{c}(x) \text{ in kökleri} = \{4.303, 0.697\},$$

$$\hat{d}(x) \text{ in kökü} = \{1\}.$$

ve $(0.382, 0.697)$, $(0.697, 1)$, $(1, 2.618)$, $(2.618, 4.303)$ gibi dört tane aralıklar elde edilmektedir.

$$\hat{a}(x)\hat{d}(x) - \hat{b}(x)\hat{c}(x) = 0,$$

$$(1 - 3x + x^2)(1 - x) - (2 - 5x)(3 - 5x + x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 23x^2 + 21x - 5 = 0$$

denkleminin kökleri = {4.687, 0.658, 0.406} Burada görüyoruz ki $x \in [0.4, 0.697]$ olduğunda $\hat{a}(x)\hat{c}(x) < 0$ ve $\hat{d}(x)\hat{b}(x) < 0$ dir. Hem de $4x^3 - 23x^2 + 21x - 5 = 0$ denkleminin kökleri $[0.4, 0.697]$ aralığındadır. Dolayısıyla segment kararsızdır.

Şimdi Sturm dizisi uygulayarak aynı sonucu elde edeceğiz.

$$f_0(x) = 4x^3 - 23x^2 + 21x - 5,$$

$$f_1(x) = 12x^2 - 46x + 21,$$

$$f_2(x) = 554x - 303,$$

$$f_3(x) = 87354.$$

$$f_0(0.4) = 4.976,$$

$$f_0(0.697) = -0.1822,$$

$$f_1(0.4) = 4.5200,$$

$$f_1(0.697) = -5.2323,$$

$$f_2(0.4) = -298.6,$$

$$f_2(0.697) = 83.1380,$$

$$f_3(0.4) = 87354.$$

$$f_3(0.697) = 87354.$$

Şimdi f_i ($i = 0,1,2,3$) fonksiyonlarının $[0.4, 0.697]$ aralığın iki ucundaki değerlerinin işaret değişimleri farkını aldığımızda eğer işaretlerin değişimi farkı sıfır ise o zaman segment kararlıdır. Eğer sıfır değilse o zaman segment kararsızdır. Bu örnekte,

$$V(0.4) - V(0.697) = 2 - 1 = 1.$$

İşaret değişimi farkı sıfır olmadığı için segment kararsızdır.

Örnek 3.3 $p_1(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 5s + 1$ ve $p_2(s) = s^4 + 2s^3 + 15s^2 + s + 3$ kararlı polinomlardır. $[p_1(s), p_2(s)] = tp_1(s) + (1 - t)p_2(s)$, ($t \in [0,1]$) kararlı mıdır?

Çözüm: $p_1(s) = 1 + 10s^2 + s^4 + s(5s^2 + 5)$ ve $p_2(s) = 3 + 15s^2 + s^4 + s(2s^2 + 1)$. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi benzer şekilde $s = j\omega$, $j^2 = -1$, $x = \omega^2$ aldığımızda aşağıdakileri yazabiliriz.

$$\hat{a}(x) = 1 - 10x + x^2,$$

$$\hat{b}(x) = 5 - 5x,$$

$$\hat{c}(x) = 3 - 15x + x^2,$$

$$\hat{d}(x) = 1 - 2x.$$

$$\hat{a}(x) \text{ in kökleri} = \{9.899, 0.101\},$$

$$\hat{b}(x) \text{ in kökü} = \{1\},$$

$$\hat{c}(x) \text{ in kökleri} = \{14.797, 0.203\},$$

$$\hat{d}(x) \text{ in kökü} = \{0.5\}.$$

Şimdi köklerin yardımıyla aralıklar yazıyoruz.

$$(0.101, 0.203), \quad (0.203, 0.5), \quad (0.5, 1), \quad (1, 9.899), \quad (9.899, 14.797).$$

Burada görüyoruz ki $x \in (0.101, 0.203)$ ve $x \in (9.899, 14.797)$ olunca $\hat{a}(x)\hat{c}(x) < 0$ ancak $x \in (0.5, 1)$ olduğunda $\hat{d}(x)\hat{b}(x) < 0$ dir.

$$\begin{aligned} \hat{a}(x)\hat{d}(x) - \hat{b}(x)\hat{c}(x) &= 0 \Rightarrow (1 - 10x + x^2)(1 - 2x) - (5 - 5x)(3 - 5x + x^2) = 0 \\ &\Rightarrow 3x^3 - 59x^2 + 78x - 14 = 0 \end{aligned}$$

Denklemin kökleri = $\{18.257, 1.196, 0.214\}$ bu kökleri hiçbirisi $(0.101, 0.203)$,

$(9.899, 14.797)$ ve $(0.5, 1)$ aralığına düşmediğinden segment kararlıdır.

Şimdi Sturm dizisini uyguluyoruz.

$$\begin{cases} \frac{f_0(s)}{f_1(s)} \Rightarrow f_0(s) = Q_1 \cdot f_1(s) - f_2(s) \\ \frac{f_1(s)}{f_2(s)} \Rightarrow f_1(s) = Q_2 \cdot f_2(s) - f_3(s) \\ \frac{f_2(s)}{f_3(s)} \Rightarrow f_2(s) = Q_3 \cdot f_3(s) - f_4(s) \end{cases} \text{ olduğundan dolayı}$$

$$f_0(x) = 3x^3 - 59x^2 + 78x - 14,$$

$$f_1(x) = 9x^2 - 118x + 78,$$

$$f_2(x) = 205.8519x - 156.4444,$$

$$f_3(x) = -6.4801.$$

Şimdi bu zinciri $[0.101, 0.203]$ ve $[9.899, 14.797]$ aralıklarına uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} f_0(-0.101) &= -22.4829, & f_0(0.203) &= -0.5722, \\ f_1(-0.101) &= 90.0098, & f_1(0.203) &= 54.4169, \\ f_2(-0.101) &= -177.2354, & f_2(0.203) &= -114.6565, \\ f_3(-0.101) &= -6.4801. & f_3(0.203) &= -6.4801. \end{aligned}$$

Buradan yazabiliriz ki

$$V(-0.101) - V(0.203) = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{aligned} f_0(9.9) &= -2.1135, & f_0(14.8) &= -2.0576, \\ f_1(9.9) &= -208.1100, & f_1(14.8) &= 302.9600, \\ f_2(9.9) &= 1.8815, & f_2(14.8) &= 2.8902, \\ f_3(9.9) &= -6.4801. & f_3(14.8) &= -6.4801. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(9.9) - V(14.8) = 2 - 2 = 0.$$

Dolayısıyla segment kararlıdır.

Örnek 3.4

$$p_1(s) = 6s^6 + 23s^5 + 84s^4 + 138s^3 + 226s^2 + 151s + 140 \quad \text{ve}$$

$$p_2(s) = 3s^6 + 20s^5 + 78s^4 + 193s^3 + 340s^2 + 358s + 240$$

gibi kararlı polinomlar verilsin. $tp_1(s) + (1-t)p_2(s)$, $(t \in [0,1])$ kararlı mıdır?

Çözüm:

$$p_1(s) = 6s^6 + 84s^4 + 226s^2 + 140 + s(23s^4 + 138s^2 + 151),$$

$$p_2(s) = 3s^6 + 78s^4 + 340s^2 + 240 + s(20s^4 + 193s^2 + 358).$$

$s = j\omega$, $j^2 = -1$, $x = \omega^2$ aldığımızda aşağıdakileri yazabiliriz

$$\hat{a}(x) = -6x^3 + 84x^2 - 226x + 140,$$

$$\hat{b}(x) = 23x^2 - 138x + 151,$$

$$\hat{c}(x) = -3x^3 + 78x^2 - 340x + 240,$$

$$\hat{d}(x) = 20x^2 - 193x + 358.$$

$$\hat{a}(x) \text{ in kökleri} = \{10.677, 2.420, 0.903\},$$

$$\hat{b}(x) \text{ in kökleri} = \{4.560, 1.44\},$$

$$\hat{c}(x) \text{ in kökleri} = \{20.716, 4.409, 0.876\},$$

$$\hat{d}(x) \text{ in kökleri} = \{7.145, 2.505\}.$$

$x \in (0.876, 0.903)$, $x \in (2.505, 4.409)$ ve $x \in (10.68, 20.716)$ iken $\hat{a}(x)\hat{c}(x) < 0$ dir. Ancak $x \in (2.420, 2.505)$ iken $\hat{a}(x)\hat{c}(x) < 0$ ve $\hat{d}(x)\hat{b}(x) < 0$ dir. Yukarıdaki (3.11) denklemi şöyledir:

$$-51x^5 + 630x^4 - 384x^3 + 12272x^2 - 23468x + 13880 = 0$$

Bu denklemin kökleri $\{3.9489 \pm 3.1263j, 1.7618 \pm 2.9005j, 0.9315\}$ dir. Buradan açıkça görebiliriz ki (3.11) denkleminin hiçbir kökü $(2.420, 2.505)$ aralığına düşmüyor, dolayısıyla segment kararlıdır.

Sturm yöntemini de uygulayalım:

$$f_0(x) = -51x^5 + 630x^4 - 384x^3 + 12272x^2 - 23468x + 13880,$$

$$f_1(x) = -255x^4 + 2520x^3 - 11529x^2 + 24544x - 23468,$$

$$f_2(x) = (1.0e + 0.3)(0.2920x^3 - 1.6665x^2 + 6.6468x - 2.2840,$$

$$f_3(x) = (1.0e + 0.4)(-0.0352x^2 + 0.1686x + 1.5140),$$

$$f_4(x) = (1.0e + 0.4)(-1.7923x + 1.3806),$$

$$f_5(x) = -16230.$$

$$f_0(2.420) = -8.1333e + 03,$$

$$f_1(2.420) = -4.6211e + 03,$$

$$f_2(2.420) = 8.1799e + 03,$$

$$f_3(2.420) = 1.7159e + 03,$$

$$f_4(2.420) = -2.9568e + 04,$$

$$f_5(2.420) = -16230.$$

$$f_0(2.505) = -8.5317e + 03,$$

$$f_1(2.505) = -4.7592e + 03,$$

$$f_2(2.505) = 8.4988e + 03,$$

$$f_3(2.505) = 1.7155e + 04,$$

$$f_4(2.505) = -3.1091e + 04,$$

$$f_5(2.505) = -16230.$$

Buradan $V(2.420) - V(2.505) = 2 - 2 = 0$ dir, dolayısıyla segmentin kararlılığı bir daha kanıtlanmış olur.

Kompleks durum

$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ kompleks katsayılı polinomlar verilsin ve bu polinomlar kararlı olsun. $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlı mıdır?

$$p_1(s) = (a_0 + jb_0) + (a_1 + jb_1)s + (a_2 + jb_2)s^2 + \dots = a(s) + jb(s),$$

$$p_2(s) = (c_0 + jd_0) + (c_1 + jd_1)s + (c_2 + jd_2)s^2 + \dots = c(s) + jd(s).$$

$a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ ve $d(s)$ gerçel polinomlarını çift ve tek kısımlara ayıralım:

$$\begin{cases} a(s) = a_e(s) + sa_o(s) \\ b(s) = b_e(s) + sb_o(s) \\ c(s) = c_e(s) + sc_o(s) \\ d(s) = d_e(s) + sd_o(s) \end{cases} \quad \text{Burada } s = j\omega, j^2 = -1, \text{ koyarsak}$$

$a(s)$ nin çift ve tek kısımları için

$$\hat{a}_e(\omega^2) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots,$$

$$\hat{a}_o(\omega^2) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots$$

ifadelerini elde ediyoruz. Benzer ifadeleri $b(s)$, $c(s)$ ve $d(s)$ nin de çift ve tek kısımları için yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & t[a_e(s) + sa_o(s) + j(b_e(s) + sb_o(s))] \\ & + (1 - t)[c_e(s) + sc_o(s) + j(d_e(s) + sd_o(s))] = 0 \end{aligned}$$

denklemini yazalım. Konveks kombinasyonun kararsızlığı için bu denklemin $s = j\omega$ kökü olmalıdır. Bu denklemde $s = j\omega$ yazarsak

$$\begin{aligned}
& t[a_e(j\omega) + j\omega \cdot a_o(j\omega) + j(b_e(j\omega) + j\omega \cdot b_o(j\omega))] \\
& + (1-t)[c_e(j\omega) + j\omega \cdot c_o(j\omega) + j(d_e(j\omega) + j\omega \cdot d_o(j\omega))] = 0, \\
& t[\hat{a}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + j(\hat{b}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2))] \\
& + (1-t)[\hat{c}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + j(\hat{d}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2))] = 0, \\
& t[\hat{a}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + j\hat{b}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2)] \\
& + (1-t)[\hat{c}_e(\omega^2) + j\omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + j\hat{d}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2)] = 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Reel ve sanal kısmını ayrı ayrı sıfıra eşit alarak

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{c}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2)}{\hat{a}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2)} &= -\frac{t}{1-t} \quad \text{ve} \\
\frac{\omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + \hat{d}_e(\omega^2)}{\omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + \hat{b}_e(\omega^2)} &= -\frac{t}{1-t}
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki iki eşitlikten

$$\begin{aligned}
& \omega \hat{c}_e(\omega^2) \hat{a}_o(\omega^2) + \hat{c}_e(\omega^2) \hat{b}_e(\omega^2) - \omega^2 \hat{d}_o(\omega^2) \hat{a}_o(\omega^2) - \omega \hat{d}_o(\omega^2) \hat{b}_e(\omega^2) \\
& - \omega \hat{a}_e(\omega^2) \hat{c}_o(\omega^2) - \hat{a}_e(\omega^2) \hat{d}_e(\omega^2) + \omega^2 \hat{b}_o(\omega^2) \hat{c}_o(\omega^2) + \omega \hat{b}_o(\omega^2) \hat{d}_e(\omega^2) = 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Gerçel durumdakine benzer olarak

$$\begin{aligned}
& \hat{c}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2), \\
& \hat{a}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2), \\
& \omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + \hat{d}_e(\omega^2), \\
& \omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + \hat{b}_e(\omega^2)
\end{aligned}$$

polinomlarının gerçel köklerini küçükten büyüğe doğru sıralayıp uygun eşitsizlikleri kontrol ediyoruz.

Örnek 3.4

$$p_1(s) = s^3 + (4 - 5j)s^2 - (2 + 14j)s - (8 + 6j),$$

$$p_2(s) = s^3 + (5 - j)s^2 - (13 - 2j)s - (11 + 3j)$$

kompleks polinomları kararlıdır. $[p_1(s), p_2(s)] = tp_1(s) + (1 - t)p_2(s), (t \in [0,1])$
kararlı mıdır?

Çözüm:

$$p_1(s) = s^3 + 4s^2 - 2s - 8 + j(-5s^2 - 14s - 6),$$

$$p_2(s) = s^3 + 5s^2 + 13s + 11 + j(-s^2 - 2s + 3).$$

$$\begin{array}{ll} a(s) = s^3 + 4s^2 - 2s - 8 & a(s) = 4s^2 - 8 + s(s^2 - 2) \\ b(s) = -5s^2 - 14s - 6 & b(s) = -5s^2 - 6 + s(-14) \\ c(s) = s^3 + 5s^2 + 13s + 11 & c(s) = 5s^2 + 11 + s(s^2 + 13) \\ d(s) = -s^2 - 2s + 3 & d(s) = -s^2 + 3 + s(-2) \end{array} \Rightarrow$$

$$a_e(s) = 4s^2 - 8,$$

$$a_o(s) = s^2 - 2.$$

$$b_e(s) = -5s^2 - 6,$$

$$b_o(s) = -14.$$

$$c_e(s) = 5s^2 + 11,$$

$$c_o(s) = s^2 + 13.$$

$$d_e(s) = -s^2 + 3,$$

$$d_o(s) = -2.$$

$s = j\omega, j^2 = -1$, yazarsak

$$\hat{a}_e(\omega^2) = -4\omega^2 - 8 \quad ; \quad \hat{a}_o(\omega^2) = -\omega^2 - 2.$$

$$\hat{b}_e(\omega^2) = 5\omega^2 - 6 \quad ; \quad \hat{b}_o(\omega^2) = -14.$$

$$\hat{c}_e(\omega^2) = -5\omega^2 + 11 \quad ; \quad \hat{c}_o(\omega^2) = -\omega^2 + 13.$$

$$\hat{d}_e(\omega^2) = \omega^2 + 3 \quad ; \quad \hat{d}_o(\omega^2) = -2$$

elde ederiz. Şimdi polinomial denklemleri ve onların gerçel köklerini yazalım.

$$\hat{c}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2) = 0 \Rightarrow -5\omega^2 + 11 - \omega(-2) = 0 \Rightarrow -5\omega^2 + 2\omega + 11 = 0,$$

$$\text{kökleri} = \{1.697, -1.297\};$$

$$\hat{a}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2) = 0 \Rightarrow -4\omega^2 - 8 - \omega(-14) = 0 \Rightarrow -4\omega^2 + 14\omega - 8 = 0,$$

$$\text{kökleri} = \{2.781, 0.719\};$$

$$\omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + \hat{d}_e(\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega(-\omega^2 + 13) + \omega^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^3 + \omega^2 + 13\omega + 3 = 0, \text{ kökleri} = \{4.236, -3, -0.236\};$$

$$\omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + \hat{b}_e(\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega(-\omega^2 - 2) + 5\omega^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^3 + 5\omega^2 - 2\omega - 6 = 0, \text{ kökleri} = \{4.177, 1.678, -0.856\};$$

$$\omega(-5\omega^2 + 11)(-\omega^2 - 2) + (-5\omega^2 + 11)(5\omega^2 - 6) - \omega^2(-2)(-\omega^2 - 2)$$

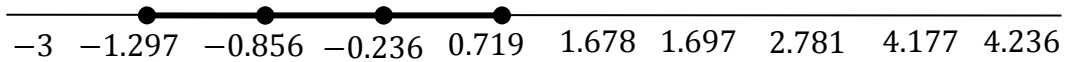
$$- \omega(-2)(5\omega^2 - 6) - \omega(-4\omega^2 - 8)(-\omega^2 + 13) - (-4\omega^2 - 8)(\omega^2 + 3)$$

$$+ \omega^2(-14)(-\omega^2 + 13) + \omega(-14)(\omega^2 + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^5 - 9\omega^4 + 39\omega^3 - 8\omega^2 + 28\omega - 42 = 0$$

$$\text{Denklemin kökleri} = \{2.4359 \pm 3.4684j, 4.0425, 0.0428 \pm 0.7593j\}.$$

Yukarıdaki denklemlerin köklerini artma sırasıyla yazıyoruz.



Burada görüyoruz ki soldan 2'nci, 3'üncü ve 4'üncü aralıklarda

$$\frac{\hat{c}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{d}_o(\omega^2)}{\hat{a}_e(\omega^2) - \omega \cdot \hat{b}_o(\omega^2)} \text{ ve } \frac{\omega \cdot \hat{c}_o(\omega^2) + \hat{d}_e(\omega^2)}{\omega \cdot \hat{a}_o(\omega^2) + \hat{b}_e(\omega^2)} \text{ negatiftir. Yani}$$

$$\frac{-5\omega^2 + 2\omega + 11}{-4\omega^2 + 14\omega - 8} < 0 \text{ ve}$$

$$\frac{-\omega^3 + \omega^2 + 13\omega + 3}{-\omega^3 + 5\omega^2 - 2\omega - 6} < 0$$

dir.

$\omega^5 - 9\omega^4 + 39\omega^3 - 8\omega^2 + 28\omega - 42 = 0$ denklemin kökleri eşitsizlikleri sağlayan aralıklara denk gelmediği için segment kararlıdır.

Şimdi Sturm zincirini uygulayalım:

$$f_0(\omega) = \omega^5 - 9\omega^4 + 39\omega^3 - 8\omega^2 + 28\omega - 42,$$

$$f_1(\omega) = 5\omega^4 - 36\omega^3 - 117\omega^2 - 162\omega + 28,$$

$$f_2(\omega) = -2.6400\omega^3 + 6.4800\omega^2 + 35.9200\omega + 31.9200,$$

$$f_3(\omega) = -126.7906\omega^2 + 424.3802\omega + 258.8843,$$

$$f_4(\omega) = -22.6427\omega - 27.1088,$$

$$f_5(\omega) = 430.9420.$$

$$f_0(-1.297) = -328.8048,$$

$$f_0(-0.856) = -155.0730,$$

$$f_1(-1.297) = 529.6273,$$

$$f_1(-0.856) = 277.6666,$$

$$f_2(-1.297) = 1.9925,$$

$$f_2(-0.856) = 7.577,$$

$$f_3(-1.297) = -504.825,$$

$$f_3(-0.856) = -197.2892,$$

$$f_4(-1.297) = 2.2588,$$

$$f_4(-0.856) = -7.727,$$

$$f_5(-1.297) = 430.9420.$$

$$f_5(-0.856) = 430.942.$$

$$V(-1.297) - V(-0.856) = 0$$

dir.

$$f_0(-0.856) = -155.0730,$$

$$f_0(-0.236) = -53.6607,$$

$$f_1(-0.856) = 277.6666,$$

$$f_1(-0.236) = 73.2371,$$

$$f_2(-0.856) = 7.577,$$

$$f_2(-0.236) = 23.8385,$$

$$f_3(-0.856) = -197.2892,$$

$$f_3(-0.236) = 151.6688,$$

$$f_4(-0.856) = -7.727,$$

$$f_4(-0.236) = -21.7651,$$

$$f_5(-0.856) = 430.942.$$

$$f_5(-0.236) = 430.942.$$

$$V(-0.856) - V(-0.236) = 0$$

dir.

$$f_0(-0.236) = -53.6607,$$

$$f_0(0.719) = -51.4588,$$

$$f_1(-0.236) = 73.2371,$$

$$f_1(0.719) = -40.0383,$$

$$f_2(-0.236) = 23.8385,$$

$$f_2(0.719) = 60.1151,$$

$$f_3(-0.236) = 151.6688,$$

$$f_3(0.719) = 498.4679,$$

$$f_4(-0.236) = -21.7651,$$

$$f_4(0.719) = -43.3889,$$

$$f_5(-0.236) = 430.942.$$

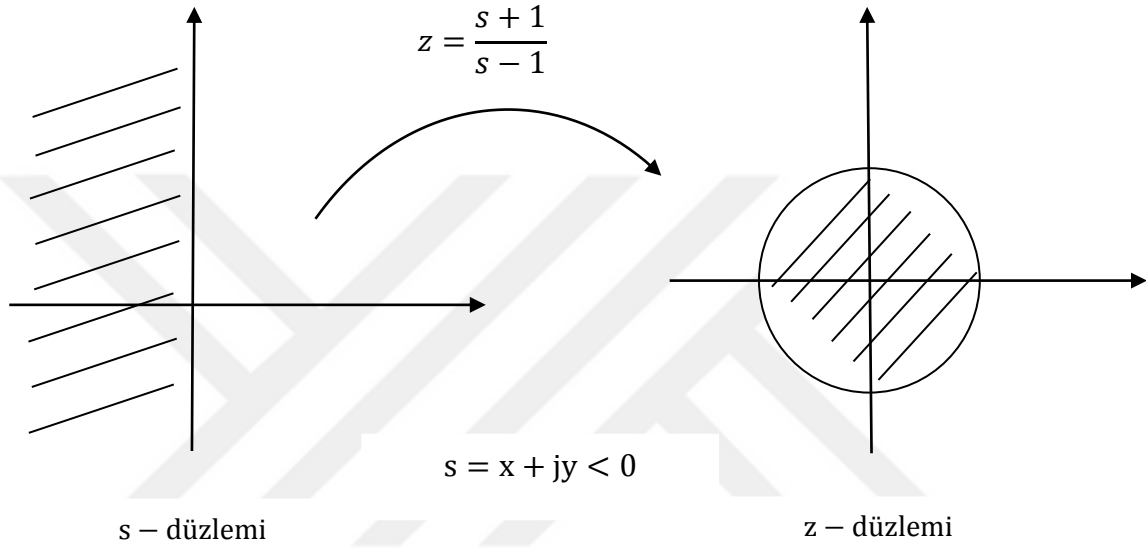
$$f_5(0.719) = 430.9420.$$

$$V(-0.236) - V(0.719) = 0$$

dir. Dolayısıyla ele aldığımız kompleks segment kararlıdır.

4. MÖBIUS DÖNÜŞÜMÜ

Lemma 4.1 ([1]) $z = \frac{s+1}{s-1}$ dönüşümü sol açık yarı düzlemi açık birim diske dönüştürür. (Şekil 4.1).



Şekil 4.1. Sol açık yarı düzlemin açık birim diske dönüşmesi

Kanıt: Eğer $|z| < 1$ ise $\text{Re}(s) < 0$ dir. Gerçekten,

$$|z| = \left| \frac{s+1}{s-1} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|s+1|}{|s-1|} < 1 \Leftrightarrow |s+1| < |s-1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$\Leftrightarrow$ Dönüşümde s 'yi bulursak $s = \frac{z+1}{z-1}$ olur. $\text{Re}(s) < 0$ ise $|z| < 1$ dir. Gerçekten,

$z = x + jy$, $x^2 + y^2 < 1$ ise

$$s = \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} \Rightarrow \text{Re}(s) = \frac{(x^2 - 1 + y^2)}{((x-1)^2 + y^2)} < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

olur.

Teorem 4.1 $p(z)$ polinomu n -inci dereceden Schur kararlı polinomdur $\Leftrightarrow \tilde{p}(s) = (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ polinomu Hurwitz kararlıdır.

Kanıt: $\Rightarrow$ $p(z)$ Schur kararlı olsun. $\tilde{p}(s)$ 'nin Hurwitz kararlı olduğunu gösterelim. s_i sayısı $\tilde{p}(s)$ 'nin herhangi bir kökü olsun. $\tilde{p}(s_i) = 0$ ise

$$(s_i - 1)^n p\left(\frac{s_i + 1}{s_i - 1}\right) = 0,$$

$s_i \neq 1$ dir. Gerçekten,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$(s_i - 1)^n \left[a_n \frac{(s_i + 1)^n}{(s_i - 1)^n} + a_{n-1} \frac{(s_i + 1)^{n-1}}{(s_i - 1)^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{(s_i + 1)}{s_i - 1} + a_0 \right] = 0,$$

$$a_n (s_i + 1)^n + a_{n-1} (s_i + 1)^{n-1} (s_i - 1) + \dots + a_0 (s_i - 1)^n = 0 \quad \text{ve} \quad s_i = 1 \quad \text{olsaydı}$$

$a_n \cdot 2^n = 0 \Rightarrow a_n = 0$ olurdu, ancak $p(z)$ polinomu n . dereceden olduğu için $a_n \neq 0$ olmalıdır.

$$p\left(\frac{s_i + 1}{s_i - 1}\right) = 0 \quad \text{olur} \quad z_i = \frac{s_i + 1}{s_i - 1} \quad \text{alırsak,}$$

yukarıdaki önermeye göre

$$p(z_i) = 0 \quad \text{ve} \quad |z_i| < 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(s_i) < 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Teorem 4.2 $z = \frac{s+1}{s-1}$ olmak üzere eğer $\operatorname{Re}(s) = 0$ ise $|z| = 1$ dir.

Kanıt: $s = \frac{z+1}{z-1}$, $z = x + jy$ olsun.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s) = \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} &\Rightarrow \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 \\ &\Rightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

Teorem 4.3 $s = \frac{z+1}{z-1}$, $|z| = 1$ ise $\operatorname{Re}(s) = 0$ dir.

Kanıt: $s = \frac{z+1}{z-1}$, $|z| = \left| \frac{s+1}{s-1} \right| = \frac{|s+1|}{|s-1|} = 1 \Leftrightarrow |s+1| = |s-1|$

$$\Leftrightarrow |s+1|^2 = |s-1|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\operatorname{Re}(s) = 0$$

Teorem 4.4 $p(z) \rightarrow \tilde{p}(s) = (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ 'yi karşı koyalım. O zaman $[p_1(z), p_2(z)]$ segmenti Schur kararlıdır $\Leftrightarrow [\tilde{p}_1(s), \tilde{p}_2(s)]$ segmenti Hurwitz kararlıdır.

Kanıt: $(1-\lambda)p_1(z) + \lambda p_2(z)$ Schur kararlı $\Leftrightarrow (1-\lambda)\tilde{p}_1(s) + \lambda\tilde{p}_2(s)$ Hurwitz kararlı?

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\tilde{p}_1(s) + \lambda\tilde{p}_2(s) &= (1-\lambda)(s-1)^n p_1\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + \lambda(s-1)^n p_2\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \\ &= (s-1)^n [(1-\lambda)p_1 + \lambda p_2]\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \end{aligned}$$

ve aranan sonuç Teorem 4.1 den elde edilmektedir.

5. SEKTÖR KARARLILIK

Pratikte öne çıkan birçok problemde kararlılık bölgesi bir sektör bölgesi olmaktadır. Böyle problemleri direkt araştırmak yerine belli dönüşümler yardımıyla verilmiş problemi kompleks katsayılı başka polinomların Hurwitz kararlılığına dönüştürmek daha çok kullanılmaktadır. Kullanılan dönüşümler sektör bölgesinin dönmesidir ve verilmiş sektör problemi iki tane Hurwitz problemine dönüşmektedir.

$\mathcal{P} = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$ gerçel katsayılı polinomlar ailesi, $\mathcal{D}$, $p(s, q)$ nun kökleri için verilsin. Elimizdeki reel katsayılı gürbüz $\mathcal{D}$ - kararlılık problemini (değişmez sol yarı düzlem) kompleks katsayılı gürbüz kararlılık biçimine dönüştürebiliriz. İlk önce $\mathcal{D}$ yi iki yarı düzlemin arakesiti biçiminde yazıyoruz; diğer bir değişle $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$ yazabiliriz.

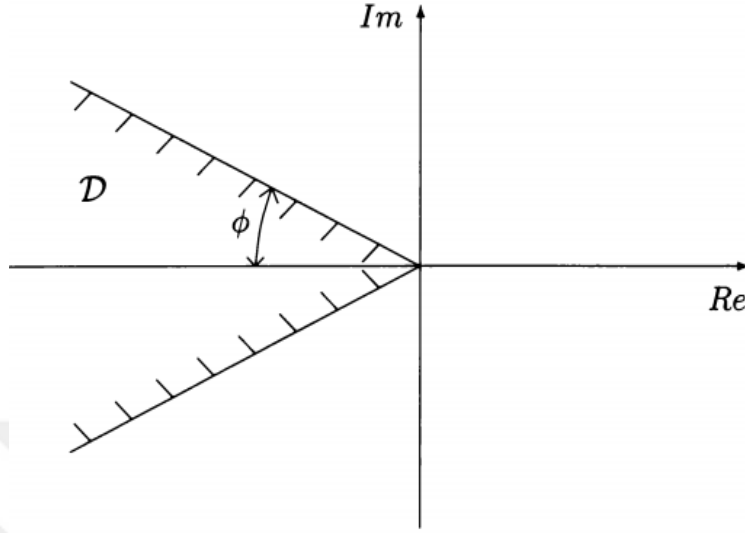
Burada

$$\mathcal{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : \pi - \phi < \angle z < 2\pi - \phi\} \text{ alt yarı düzlem ve}$$

$$\mathcal{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \phi < \angle z < \pi + \phi\} \quad \text{üst yarı düzlem}$$

dir.

Şimdi görüyoruz ki $\mathcal{P}$ gürbüz $\mathcal{D}$ kararlı ancak ve ancak $\mathcal{P}$ gürbüz $\mathcal{D}^+$ kararlı ve $\mathcal{P}$ gürbüz $\mathcal{D}^-$ kararlıdır. Bu yüzden, biz gürbüz $\mathcal{D}^+$ kararlılık ve gürbüz $\mathcal{D}^-$ kararlılığını ayrı ayrı inceleyebiliyoruz. $p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q)s^i$ reel katsayılı polinom ise ve $z = se^{\pm j(\frac{\pi}{2}-\phi)}$ dönüşümü $p(s, q)$ polinomu, kompleks katsayılı polinoma dönüştüren bir dönüşümdür. Kararlılık kümesi ise sol yarı açık düzleme dönüşmektedir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Sektör kararlılık

$$\begin{aligned}\tilde{p}(z, q) &= p\left(ze^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)}, q\right) = a_0(q) + a_1(q) ze^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)} + \dots + a_n(q) z^n e^{jn(\frac{\pi}{2}-\phi)} \\ &= a_0(q) + a_1(q)[\sin \phi + j \cos \phi]z + \dots + a_n(q) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right) + j \sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right)\right] z^n.\end{aligned}$$

Teorem 5.1 ([1]) $p(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n$ ailesi ve $\mathcal{D}$ sektörü verilsin.

$$s = ze^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)} \quad , \quad \tilde{p}_1(z, q) = p\left(ze^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)}, q\right),$$

$$s = ze^{j(\phi-\frac{\pi}{2})} \quad , \quad \tilde{p}_2(z, q) = p\left(ze^{j(\phi-\frac{\pi}{2})}, q\right)$$

olmak üzere $\tilde{p}_1(z, q)$ ve $\tilde{p}_2(z, q)$ kompleks polinomları tanımlansın. O zaman $p(s, q)$ ailesi $\mathcal{D}$ sektör kararlıdır $\Leftrightarrow \tilde{p}_1(z, q)$ ailesi ve $\tilde{p}_2(z, q)$ ailesi Hurwitz kararlıdır.

Kanıt: $s_* \in \mathbb{C}$, $p(s_*, q) = 0$ olsun.

$$\tilde{p}(z_*, q) = p\left(z_* e^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)}, q\right) = 0,$$

$$\operatorname{Re} z_* < 0,$$

$$s_* = z_* e^{j(\frac{\pi}{2}-\phi)}.$$

Yukarıdaki şekilden yazabiliriz ki $\pi - \phi < \arg s_* < \pi + \phi$,

$$\frac{\pi}{2} < \arg z_* < \frac{3\pi}{2},$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \frac{\pi}{2} < \arg s_* < \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \frac{3\pi}{2},$$

$$\pi - \phi < \arg s_* < 2\pi - \phi.$$

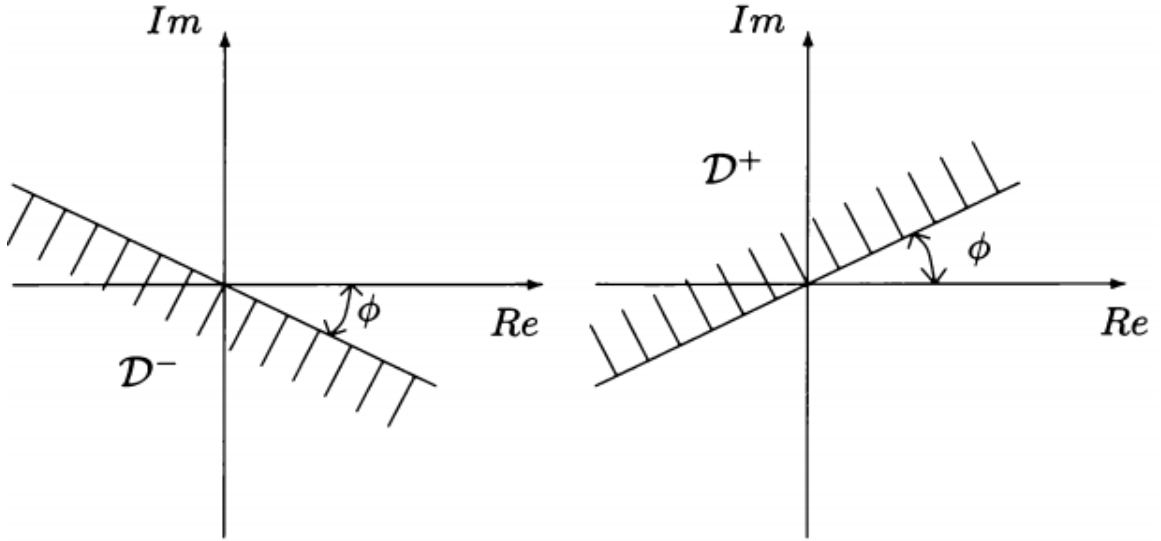
Şimdi eğer $s_* = z_* e^{j(\phi - \frac{\pi}{2})}$ ise

$$\frac{\pi}{2} < \arg z_* < \frac{3\pi}{2},$$

$$\phi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} < \arg s_* < \phi - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \phi < \arg s_* < \phi + \pi,$$

ve kanıt sonuçlanmaktadır.



Şekil 5.2. Yarı düzlemler $\mathcal{D}^-$ ve $\mathcal{D}^+$

6. GÜRBÜZ KARARLI POLİTOPLAR

Bu bölümde Segment Lemma ve Kenar Teoremi kullanılarak Hurwitz anlamında gürbüz kararlı politoplar inşa edilecektir. Önce kompleks durum için bir örnek çözülüp, gerçel durum için genel sonuçlar verilecektir.

Örnek 6.1

$$p_1(s) = s^4 + (7 + j)s^3 + (18 + 7j)s^2 + (18 + 14j)s + (6 + 8j),$$

$$p_2(s) = s^4 + (7 + 2j)s^3 + (18 + 9j)s^2 + (19 + 16j)s + (7 + 9j),$$

$$p_3(s) = s^4 + (8 + j)s^3 + (22 + 3j)s^2 + (28 + j)s + (13 - j)$$

polinomları kararlıdır. $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ politopu kararlı mıdır?

Çözüm: Kenar Teoremine göre $[p_1(s), p_2(s)]$, $[p_1(s), p_3(s)]$ ve $[p_2(s), p_3(s)]$ segmentlerinin üçü de kararlı ise o zaman $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ politopu da kararlıdır.

$$p_1(s) = s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 18s + 6 + j(s^3 + 7s^2 + 14s + 8),$$

$$p_2(s) = s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 19s + 7 + j(2s^3 + 9s^2 + 16s + 9),$$

$$p_3(s) = s^4 + 8s^3 + 22s^2 + 28s + 13 + j(s^3 + 3s^2 + s - 1).$$

Bu üç polinom diğeri bir biçimde böyle yazılabilirler:

$$p_1(s) = s^4 + 18s^2 + 6 + s(7s^2 + 18) + j[7s^2 + 8 + s(s^2 + 14)],$$

$$p_2(s) = s^4 + 18s^2 + 7 + s(7s^2 + 19) + j[9s^2 + 9 + s(2s^2 + 16)],$$

$$p_3(s) = s^4 + 22s^2 + 13 + s(s^2 + 28) + j[3s^2 - 1 + s(s^2 + 1)].$$

Bir segment üzerindeki polinomun kararsız olması için gerek ve yeter şart segmentin bir $s = j\omega$ kökünün olmasıdır. Dolayısıyla her bir polinomda s yerinde $j\omega$ yazalım:

$$p_1(j\omega) = \omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6 + j[-7\omega^3 - 7\omega^2 + 18\omega + 8],$$

$$p_2(j\omega) = \omega^4 + 2\omega^3 - 18\omega^2 - 16\omega + 7 + j[-7\omega^3 - 9\omega^2 + 19\omega + 9],$$

$$p_3(j\omega) = \omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13 + j[-\omega^3 - 3\omega^2 + 28\omega - 1].$$

Bu polinomlar için segment lemmadaki gerçel polinomları yazalım:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6, & B(\omega) &= -7\omega^3 - 7\omega^2 + 18\omega + 8, \\
C(\omega) &= \omega^4 + 2\omega^3 - 18\omega^2 - 16\omega + 7, & D(\omega) &= -7\omega^3 - 9\omega^2 + 19\omega + 9, \\
E(\omega) &= \omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13, & F(\omega) &= -\omega^3 - 3\omega^2 + 28\omega - 1.
\end{aligned}$$

Önce $[p_1(s), p_2(s)]$ segmentinin kararlı olup olmadığını inceleyelim.

$$A(\omega)D(\omega) - C(\omega)B(\omega) = 0$$

denkleminde değerleri yerine koyalım:

$$\begin{aligned}
&(\omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6)(-7\omega^3 - 9\omega^2 + 19\omega + 9) \\
&- (\omega^4 + 2\omega^3 - 18\omega^2 - 16\omega + 7)(-7\omega^3 - 7\omega^2 + 18\omega + 8) = 0, \\
&5\omega^6 + 6\omega^5 + 6\omega^4 - 4\omega^3 - \omega^2 - 10\omega - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Son denklemin kökleri şöyledir:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -0.2, \quad \omega_{3,4} = \pm j, \quad \omega_{5,6} = -1 \pm j.$$

Reel kökler için $A(\omega)C(\omega) \leq 0$ ve $B(\omega)D(\omega) \leq 0$ 'nin sağlanıp sağlanmadığına bakıyoruz.

$$\begin{aligned}
A(\omega)C(\omega) &= (\omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6)(\omega^4 + 2\omega^3 - 18\omega^2 - 16\omega + 7) \\
&= \omega^8 + 3\omega^7 - 34\omega^6 - 84\omega^5 + 293\omega^4 + 559\omega^3 - 10\omega^2 - 194\omega + 42.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sol tarafı $\omega_1 = 1$ için 576 ve $\omega_2 = -0.2$ için 76.4215 olduğundan dolayı $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlıdır. Birinci eşitsizlik sağlanmadığı için ikinciye bakmak gerekmiyor.

$[p_1(s), p_3(s)]$ segmentinin kararlı olup olmadığına bakalım.

$$A(\omega)F(\omega) - E(\omega)B(\omega) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&(\omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6)(-\omega^3 - 3\omega^2 + 28\omega - 1) \\
&- (\omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13)(-7\omega^3 - 7\omega^2 + 18\omega + 8) = \\
&6\omega^7 + 10\omega^6 - 122\omega^5 - 92\omega^4 + 3\omega^3 - 107\omega^2 - 44\omega - 110 = 0
\end{aligned}$$

denkleminin köklerini buluyoruz:

$$\omega_1 = -5.0576, \omega_2 = 4.1635, \omega_3 = -1.3500, \omega_{4,5} = 0.6196 \pm 0.7611j,$$

$$\omega_{6,7} = -0.3309 \pm 0.7484j.$$

Reel kökler için $A(\omega)E(\omega) \leq 0$ ve $B(\omega)F(\omega) \leq 0$ 'nin her ikisinin sağlanıp sağlanmadığına bakıyoruz.

$$A(\omega)E(\omega) \leq 0 \Rightarrow (\omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 14\omega + 6)(\omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13)$$

$$= \omega^8 + 2\omega^7 - 39\omega^6 - 55\omega^5 + 400\omega^4 + 345\omega^3 - 352\omega^2 - 188\omega + 78 \leq 0.$$

$\omega_1 = -5.0576$ için $-2.7917e + 03 < 0$ dir.

$$B(\omega)F(\omega) \leq 0 \Rightarrow (\omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13)(-\omega^3 - 3\omega^2 + 28\omega - 1)$$

$$= 7\omega^6 + 28\omega^5 - 193\omega^4 - 252\omega^3 + 484\omega^2 + 234\omega - 9 \leq 0.$$

Son ifade $\omega_1 = -5.0576$ için $-5.7992e + 04 < 0$ dir. Dolayısıyla $[p_1(s), p_3(s)]$ segmenti kararsızdır.

Şimdi $[p_2(s), p_3(s)]$ segmentini inceleyelim:

$$C(\omega)F(\omega) - E(\omega)D(\omega) = 0,$$

$$(\omega^4 + 2\omega^3 - 18\omega^2 - 16\omega + 7)(-\omega^3 - 3\omega^2 + 28\omega - 1)$$

$$-(\omega^4 + \omega^3 - 22\omega^2 - \omega + 13)(-7\omega^3 - 9\omega^2 + 19\omega + 9) = 0,$$

Bu denklemi sadeleştirerek köklerini bulalım:

$$6\omega^7 + 11\omega^6 - 124\omega^5 - 108\omega^4 + 26\omega^3 - 117\omega^2 - 26\omega - 124 = 0,$$

$$\omega_1 = -5.1217, \omega_2 = 4.1700, \omega_3 = -1.5148, \omega_{4,5} = 0.6352 \pm 0.7347j,$$

$$\omega_{6,7} = -0.3186 \pm 0.7588j.$$

$\omega_1 = -5.1217$ için yukarıdaki iki eşitsizliklerin sağlanıp sağlanmadıklarına bakıyoruz.

$$C(\omega_1)E(\omega_1)$$

$$= \omega^8 + 3\omega^7 - 38\omega^6 - 79\omega^5 + 398\omega^4 + 403\omega^3 - 372\omega^2 - 215\omega + 91$$

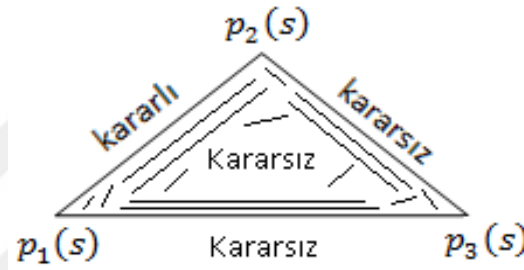
$$= -188.9190 < 0,$$

$$D(\omega_1)F(\omega_1)$$

$$\begin{aligned}
&= 7\omega^6 + 30\omega^5 - 188\omega^4 - 311\omega^3 + 514\omega^2 + 233\omega - 9 \\
&= -5.4676e + 04 < 0
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $[p_2(s), p_3(s)]$ segmenti de kararsızdır.

Sonuçta $[p_1(s), p_2(s)]$ kararlı, $[p_1(s), p_3(s)]$ ve $[p_2(s), p_3(s)]$ segmentleri kararsız olduğundan dolayı $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ polinomlar politopu kararsızdır. (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. Kararsız politop

Örnek 6.2

$$p_1(s) = s^4 + (8 + 4j)s^3 + (18 + 25j)s^2 + (7 + 49j)s + (-10 + 30j),$$

$$p_2(s) = s^4 + (5 + j)s^3 + (10 + 3j)s^2 + (10 + 4j)s + (4 + 2j) \text{ ve}$$

$$p_3(s) = s^4 + (7 + j)s^3 + (18 + 5j)s^2 + (22 + 8j)s + (12 + 6j)$$

polinomları kararlıdır. $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ politopunun kararlı olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm: $[p_1(s), p_2(s)]$, $[p_1(s), p_3(s)]$ ve $[p_2(s), p_3(s)]$ segmentleri kararlı ise o zaman Kenar Teoremine göre $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ de kararlıdır.

$$p_1(s) = s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 7s - 10 + j(4s^3 + 25s^2 + 49s + 30),$$

$$p_2(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 + j(5s^3 + 3s^2 + 4s + 2),$$

$$p_3(s) = s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 22s + 12 + j(s^3 + 5s^2 + 8s + 6).$$

Bu üç polinom diğer bir biçimde şöyle yazılabilir:

$$p_1(s) = s^4 + 18s^2 - 10 + s(8s^2 + 7) + j[25s^2 + 30 + s(4s^2 + 49)],$$

$$p_2(s) = s^4 + 10s^2 + 4 + s(5s^2 + 10) + j[3s^2 + 2 + s(5s^2 + 4)],$$

$$p_3(s) = s^4 + 18s^2 + 12 + s(7s^2 + 22) + j[5s^2 + 6 + s(s^2 + 8)].$$

Bir segment üzerindeki polinomun kararsız olması için gerek ve yeter şart segmentin bir $s = j\omega$ kökünün olmasıdır. Dolayısıyla, her bir polinomda s yerinde $j\omega$ yazalım.

$$p_1(j\omega) = \omega^4 + 4\omega^3 - 18\omega^2 - 49\omega - 10 + j[-8\omega^3 - 25\omega^2 + 7\omega + 30],$$

$$p_2(j\omega) = \omega^4 + 5\omega^3 - 10\omega^2 - 4\omega + 4 + j[-5\omega^3 - 3\omega^2 + 10\omega + 2],$$

$$p_3(j\omega) = \omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 8\omega + 12 + j[-7\omega^3 - 5\omega^2 + 22\omega + 6].$$

Burada

$$A(\omega) = \omega^4 + 4\omega^3 - 18\omega^2 - 49\omega - 10, \quad B(\omega) = -8\omega^3 - 25\omega^2 + 7\omega + 30$$

$$C(\omega) = \omega^4 + 5\omega^3 - 10\omega^2 - 4\omega + 4, \quad D(\omega) = -5\omega^3 - 3\omega^2 + 10\omega + 2,$$

$$E(\omega) = \omega^4 + \omega^3 - 18\omega^2 - 8\omega + 12, \quad F(\omega) = -7\omega^3 - 5\omega^2 + 22\omega + 6.$$

Önce $[p_1(s), p_2(s)]$ segmentinin kararlı olup olmadığını inceleyelim.

$$A(\omega)D(\omega) - C(\omega)B(\omega)$$

$$= 3\omega^7 + 42\omega^6 + 126\omega^5 - 6\omega^4 - 123\omega^3 - 68\omega^2 - 106\omega - 140 = 0.$$

Bu denklemin kökleri

$$\omega_1 = -9.6850, \quad \omega_2 = -4.0398, \quad \omega_3 = 1.2950, \quad \omega_{4,5} = -0.9928 \pm 0.4237j,$$

$$\omega_{6,7} = 0.2077 \pm 0.8645j$$

dir. Yukarıdaki örneğe benzer olarak gerçel kökler için $A(\omega)C(\omega) \leq 0$ ve $B(\omega)D(\omega) \leq 0$ 'nin her ikisinin sağlanıp sağlanmadığına bakıyoruz.

$$A(\omega)C(\omega) = \omega^8 + 9\omega^7 - 8\omega^6 - 183\omega^5 - 87\omega^4 + 528\omega^3 + 244\omega^2 - 156\omega - 40,$$

$$\omega_1 = -9.6850 \text{ için } A(\omega_1)C(\omega_1) = 1.3244e + 07 > 0,$$

$$\omega_2 = -4.0398 \text{ için } A(\omega_2)C(\omega_2) = 2.1292e + 04 > 0,$$

$$\omega_3 = 1.2950 \text{ için } A(\omega_3)C(\omega_3) = 394.2851 > 0.$$

Dolayısıyla $[p_1(s), p_2(s)]$ segmenti kararlıdır.

$[p_1(s), p_3(s)]$ 'nin kararlı olup olmadığını inceliyoruz.

$$\begin{aligned} & A(\omega)F(\omega) - E(\omega)B(\omega) \\ &= \omega^7 + 2\omega^5 - 24\omega^4 - 65\omega^3 - 240\omega^2 - 358\omega - 420 = 0. \end{aligned}$$

Bu denklemin kökleri şöyledir:

$$\omega_1 = 3.8575, \quad \omega_{2,3} = 0.3640 \pm 2.5984j, \quad \omega_{4,5} = -1 \pm 2j, \quad \omega_{6,7} = -1.2928 \pm 1.2215j.$$

$$\begin{aligned} & A(\omega)E(\omega) \\ &= \omega^8 + 5\omega^7 - 32\omega^6 - 147\omega^5 + 245\omega^4 + 1064\omega^3 + 356\omega^2 - 508\omega - 120. \end{aligned}$$

$$\omega_1 = 3.8575 \text{ için } A(\omega_1)E(\omega_1) = 124.8099 > 0.$$

Dolayısıyla $[p_1(s), p_3(s)]$ segmenti kararlıdır.

Şimdi $[p_2(s), p_3(s)]$ 'nin kararlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & C(\omega)F(\omega) - E(\omega)D(\omega) \\ &= -2\omega^7 - 32\omega^6 - 30\omega^5 + 88\omega^4 + 16\omega^3 - 16\omega^2 - 40\omega = 0. \end{aligned}$$

Bu denklemin kökleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -14.7870, \quad \omega_3 = -2.3629, \quad \omega_{4,5} = 1.0253 \pm 0.2485j, \\ \omega_{6,7} = -0.4504 \pm 0.5581j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C(\omega)E(\omega) \\ &= \omega^8 + 6\omega^7 - 23\omega^6 - 112\omega^5 + 152\omega^4 + 216\omega^3 - 160\omega^2 - 80\omega + 48. \end{aligned}$$

$$\omega_1 = 0 \text{ için } A(\omega_1)C(\omega_1) = 48 > 0,$$

$$\omega_2 = -14.7870 \text{ için } A(\omega_2)C(\omega_2) = 1.2036e + 09 > 0,$$

$$\omega_3 = -2.3629 \text{ için } A(\omega_3)C(\omega_3) = 3.9833e + 03 > 0.$$

Sonuç olarak $[p_2(s), p_3(s)]$ segmenti kararlıdır.

$[p_1(s), p_2(s)]$, $[p_1(s), p_3(s)]$ ve $[p_2(s), p_3(s)]$ segmentinin üçüde kararlı olduğundan dolayı $\mathcal{P} = \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), p_3(s)\}$ polinomlar politopu kararlıdır.[1,2,7,24,25]

Bundan sonra Hurwitz ve Schur segment lemmalar uygulanarak kararlılık uzaylarında politoplar inşa edilecektir (bakınız [3,4,7,24-27]). Bunun için ikinci mertebeden çarpanlarına ayrılmış kararlı polinomdan yola çıkıp sınıra kadar ışınlar uzatılacaktır ve bu ışınlar sınıra kadar kümeden dışarı çıkmayacaktır.

Bu ışınların uçlarını katarak politop oluşturulacak ve bu politopun kalan kenarlarının kararlı olup olmadığı segment lemmalar yardımıyla test edilecektir. Eğer tüm kenarlar kararlı ise Kenar Teoremine göre tanımlanan politop gürbüz kararlı olacaktır.

6.1. Hurwitz kararlı politopun inşası

Tüm katsayıları pozitif olan

$$p(s) = (s^2 + b_m s + c_m) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \quad (n = 2m)$$

veya

$$p(s) = (s + b_m)(s^2 + b_{m-1} s + c_{m-1}) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \quad (n = 2m - 1)$$

başlangıç polinomlarını alalım. b_i ve c_i katsayılarını sıra ile sıfır alıp n tane

$$\begin{aligned} p_1(s) &= (s^2 + c_m) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \\ p_2(s) &= (s^2 + b_m s) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \\ &\vdots \\ p_n(s) &= (s^2 + b_m s + c_m) \cdots (s^2 + b_1 s); \end{aligned} \quad (n = 2m)$$

veya

$$\begin{aligned} p_1(s) &= (s + b_m)(s^2 + c_{m-1}) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \\ p_2(s) &= (s + b_m)(s^2 + b_{m-1} s) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1), \\ &\vdots \\ p_n(s) &= (s)(s^2 + b_{m-1} s + c_{m-1}) \cdots (s^2 + b_1 s + c_1); \end{aligned} \quad (n = 2m - 1)$$

sınır polinomlarını oluşturalım.

Bu polinomlar yardımıyla

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{p(s), p_1(s), \dots, p_n(s)\} \quad (6.1)$$

politopunu tanımlayalım.

Lemma 6.1 1) $p(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4), \quad (\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, 4)$

$$p_1(s) = (s^2 + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4),$$

$$p_2(s) = (s^2 + \alpha_1 s)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4),$$

$$p_3(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_4),$$

$$p_4(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s)$$

dördüncü mertebeden polinomlar olsun. Bu durumda $[p(s), p_1(s)], [p(s), p_2(s)], [p(s), p_3(s)], [p(s), p_4(s)], (p_1(s), p_2(s)), (p_3(s), p_4(s)), (p_1(s), p_3(s))$ ve $(p_2(s), p_4(s))$ segmentleri Hurwitz kararlıdır.

2) $p(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4)(s + \alpha_5), \quad (\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5),$

$$p_1(s) = (s^2 + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4)(s + \alpha_5),$$

$$p_2(s) = (s^2 + \alpha_1 s)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4)(s + \alpha_5),$$

$$p_3(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_4)(s + \alpha_5),$$

$$p_4(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s)(s + \alpha_5),$$

$$p_5(s) = (s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)(s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4) \cdot s$$

beşinci mertebeden polinomlar olsun. Bu durumda $[p(s), p_i(s)], (i = 1, \dots, 5)$

$(p_1(s), p_3(s)), (p_2(s), p_4(s)), (p_1(s), p_5(s)), (p_2(s), p_5(s)), (p_3(s), p_5(s)), (p_4(s), p_5(s))$ segmentleri Hurwitz kararlıdır.

Kanıt: 1) $[p(s), p_i(s)], (p_1(s), p_2(s)), (p_3(s), p_4(s))$ segmentlerinin kararlılığı katsayıları pozitif olan ikinci dereceden polinomların kararlılığından çıkıyor.

$(p_1(s), p_3(s))$ segmentinin kararlılığı: $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere $(1 - \lambda)p_1(s) + \lambda p_3(s) = s^4 + (\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_3 + \alpha_3)s^3 + (\alpha_2 + \alpha_4)s^2 + (\lambda\alpha_1\alpha_4 - \lambda\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)s + \alpha_2\alpha_4$ ve dördüncü mertebeden $b_1 + b_2s + b_3s^2 + b_4s^3 + s^4$ polinomunun kararlılık koşuluna göre

$$b_2b_3b_4 - b_1b_4^2 - b_2^2 = \lambda\alpha_1\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_4)^2(1 - \lambda) \geq 0.$$

$(p_2(s), p_4(s))$ nin kararlılığı: $(1 - \lambda)p_2(s) + \lambda p_4(s) =$

$$s[s^3 + (\alpha_1 + \alpha_3)s^2 + (\lambda\alpha_2 - \lambda\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_4)s - \lambda\alpha_1\alpha_4 + \lambda\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4]$$

ve üçüncü mertebeden $b_1 + b_2s + b_3s^2 + s^3$ polinomunun kararlılık koşuluna göre

$$b_2b_3 - b_1 = \lambda\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_4(1 - \lambda) > 0.$$

2. nin kanıtı da benzer yolla yapılmaktadır.

Teorem 6.1 $\mathcal{P}$ (6.1) politopunun kararlılığı için:

1. $n = 2m$ olması durumunda $\frac{n(n-2)}{4}$ tane
2. $n = 2m - 1$ olması durumunda $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$ tane kenarın kararlılığı test edilmelidir.

Agoritma 1.

1. Çarpımlarına ayrılmış $p(s)$ kararlı polinomu alınsın ve n tane $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s)$ sınır polinomları oluşturulsun.
2. Tanım gereği $[p(s), p_1(s)], \dots, [p(s), p_n(s)], (p_1(s), p_2(s)), (p_3(s), p_4(s)), \dots$ segmentleri kararlıdır. Kalan $m(m - 1)$ veya $(m - 1)(m - 2)$ tane segmentler için segment lemma uygulansın. Burda $n = 2m$ veya $n = 2m - 1$ dir. Eğer bir $(p_i(s), p_j(s))$ açık segmenti kararsız ise $t \in [0,1]$ parametresine bağlı olup bu segmente paralel olan $[(1 - t)p(s) + tp_i(s), (1 - t)p(s) + tp_j(s)]$ kapalı segmenti oluşturulsun.
3. $[0,1]$ aralığından başlayıp bu aralığı yarıya bölme yöntemi uygulansın ve her adımda segment lemma uygulanarak sınıra mümkün olduğu kadar yakın kararlı segmente ulaşılsın.
4. Yeni oluşan kararlı segmentlerin uç noktalarını kullanıp daha küçük yeni $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ politopu oluşturulsun. Bu politop gürbüz kararlı olacaktır.

Örnek 6.3

$$p(s) = (s^2 + 10s + 9)(s^2 + s + 8),$$

polinomu verilsin. Bu polinoma karşılık gelen sınır polinomları şöyledir:

$$\begin{aligned}
p_1(s) &= (s^2 + 9)(s^2 + s + 8), \\
p_2(s) &= (s^2 + 10s)(s^2 + s + 8), \\
p_3(s) &= (s^2 + 10s + 9)(s^2 + 8), \\
p_4(s) &= (s^2 + 10s + 9)(s^2 + s).
\end{aligned}$$

Burada $(p_1(s), p_2(s))$, $(p_1(s), p_3(s))$, $(p_2(s), p_3(s))$, $(p_2(s), p_4(s))$ ve $(p_3(s), p_4(s))$ segmentleri Hurwitz kararlıdır. $(p_1(s), p_4(s))$ segmenti Hurwitz kararlı olmadığından Algoritma 1'in 3) ve 4) adımları uygulanarak yarıya bölme yöntemiyle 11 adımda $t_* = 0.908691$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1(s) &= (1 - t_*)p(s) + t_*p_1(s), \\
\tilde{p}_4(s) &= (1 - t_*)p(s) + t_*p_4(s)
\end{aligned}$$

olmak üzere $(\tilde{p}_1(s), \tilde{p}_4(s))$ kararlı segmenti elde edilir. Buna göre

$$\tilde{\mathcal{P}} = \text{conv}\{p(s), \tilde{p}_1(s), p_2(s), p_3(s), \tilde{p}_4(s)\}$$

politopu gürbüz kararlıdır.

Örnek 6.4

$$p(s) = (s^2 + 4s + 3)(s^2 + s + 5)(s + 1),$$

polinomu için sınır polinomları

$$\begin{aligned}
p_1(s) &= (s^2 + 3)(s^2 + s + 5)(s + 1), \\
p_2(s) &= (s^2 + 4s)(s^2 + s + 5)(s + 1), \\
p_3(s) &= (s^2 + 4s + 3)(s^2 + 5)(s + 1), \\
p_4(s) &= (s^2 + 4s + 3)(s^2 + s)(s + 1), \\
p_5(s) &= (s^2 + 4s + 3)(s^2 + s + 5)s
\end{aligned}$$

olur. Bu polinomlar için $(p_1(s), p_4(s))$ segmenti Hurwitz kararlı değildir. Algoritma 1 kullanılarak 11 adımda $t_* = 0.946289$ olarak elde edilir ve bu değer için

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1(s) &= (1 - t_*)p(s) + t_*p_1(s), \\
\tilde{p}_4(s) &= (1 - t_*)p(s) + t_*p_4(s)
\end{aligned}$$

olmak üzere $(\tilde{p}_1(s), \tilde{p}_4(s))$ Hurwitz kararlı bir segmenttir. Bu durumda

$$\tilde{\mathcal{P}} = \text{conv}\{p(s), \tilde{p}_1(s), p_2(s), p_3(s), \tilde{p}_4(s), p_5(s)\}$$

politopu gürbüz kararlıdır.

6.1.1. Schur kararlı politopun inşası

Yansıma katsayıları $k_i \in (-1,1)$ ($i = 1,2, \dots, n$) olmak üzere çarpanlarına ayrılmış Schur kararlı

$$a(s) = [s^2 + (k_1 k_2 + k_1)s + k_2] \cdots [s^2 + (k_{m-1} k_m + k_{m-1})s + k_m], \quad (n = 2m)$$

veya

$$a(s) = [s^2 + (k_1 k_2 + k_1)s + k_2] \cdots [s^2 + (k_{m-2} k_{m-1} + k_{m-2})s + k_{m-1}][s + k_m],$$

$$(n = 2m - 1)$$

polinomlarını ele alalım.

k_i parametrelerinin hepsini sıra ile +1 alıp n tane

$$\begin{aligned} a_1(s) &= [s^2 + (k_2 + 1)s + k_2] \cdots [s^2 + (k_{m-1} k_m + k_{m-1})s + k_m], \\ a_2(s) &= [s^2 + 2k_1 s + 1] \cdots [s^2 + (k_{m-1} k_m + k_{m-1})s + k_m], \\ &\vdots \\ a_n(s) &= [s^2 + (k_1 k_2 + k_1)s + k_2] \cdots [s^2 + 2k_{m-1} s + 1], \end{aligned} \quad (n = 2m)$$

veya

$$\begin{aligned} a_1(s) &= [s^2 + (k_2 + 1)s + k_2] \cdots [s^2 + (k_{m-2} k_{m-1} + k_{m-2})s + k_{m-1}](s + k_m), \\ a_2(s) &= [s^2 + 2k_1 s + 1] \cdots [s^2 + (k_{m-2} k_{m-1} + k_{m-2})s + k_{m-1}](s + k_m), \\ &\vdots \\ a_n(s) &= [s^2 + (k_1 k_2 + k_1)s + k_2] \cdots [s^2 + (k_{m-2} k_{m-1} + k_{m-2})s + k_{m-1}](s + 1), \end{aligned}$$

$$(n = 2m - 1)$$

gibi sınır polinomlarını oluşturalım. Bunların yardımıyla

$$S = \text{conv}\{a(s), a_1(s), \dots, a_n(s)\}$$

politopunu tanımlayalım. S politopunda $[a(s), a_i(s)]$ segmentleri Schur kararlıdır. Kalan $(a_i(s), a_j(s))$ segmentlerinin kararlılık testi için Möbius dönüşümünü uygulayarak görüntü segmentlerinin Hurwitz kararlılığını segment lemma yardımıyla test edebiliriz.

Agoritma 2.

1. Çarpanlarına ayrılmış Schur kararlı $a(s)$ polinomu alınsın ve yansıma katsayıları +1 alınarak n tane $a_1(s), a_2(s), \dots, a_n(s)$ sınır polinomları oluşturulsun.

$[a(s), a_1(s)), \dots, [a(s), a_n(s)), (a_1(s), a_2(s)), (a_3(s), a_4(s)), \dots$ gibi segmentler Schur kararlıdır.

2. Geriye kalan segmentlere Möbius dönüşümü uygulansın ve görüntü segmentlerine Algoritma 1'deki 3), 4) adımları uygulansın.

Örnek 6.5 $k_1 = -0.5, \quad k_2 = 0.3, \quad k_3 = -0.8, \quad k_4 = 0.7$ katsayıları için

$$\begin{aligned} a(s) &= (s^2 + (k_1 k_2 + k_1)s + k_2)(s^2 + (k_3 k_4 + k_3)s + k_4) \\ &= (s^2 - 0.65s + 0.3)(s^2 - 1.36s + 0.7) \end{aligned}$$

Schur kararlı polinomu ele alalım. Bu yansıma katsayılarını sırayla +1 alarak

$$\begin{aligned} a_1(s) &= (s^2 + 1.3s + 0.3)(s^2 - 1.36s + 0.7), \\ a_2(s) &= (s^2 - s + 1)(s^2 - 1.36s + 0.7), \\ a_3(s) &= (s^2 - 0.65s + 0.3)(s^2 + 1.7s + 0.7), \\ a_4(s) &= (s^2 - 0.65s + 0.3)(s^2 - 1.6s + 1) \end{aligned}$$

sınır polinomları bulunur. Bu polinomlar için $(a_2(s), a_3(s))$ segmenti Schur kararlı değildir. Algoritma 2 uygulanarak bulunan $t_* = 0.6220703$ sayısı için

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(s) &= (1 - t_*)a(s) + t_*a_2(s), \\ \tilde{a}_3(s) &= (1 - t_*)a(s) + t_*a_3(s) \end{aligned}$$

olmak üzere $(\tilde{a}_2(s), \tilde{a}_3(s))$ segmenti Schur kararlıdır. Sonuç olarak

$$\tilde{\mathcal{P}} = \text{conv}\{a(s), a_1(s), \tilde{a}_2(s), \tilde{a}_3(s), a_4(s)\}$$

gümbüz Schur kararlıdır.

Bu tezde elde edilen bazı sonuçlar [28] yayınında sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] BARMISH, B. R. (1994). New Tools for robustness of liner systems. United States of America. Macmillan Publishing Company, a division of Macmillan, Inc. 102-104.
- [2] BHATTCHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H. Ve KEEL, L. H. (1995). Robust Control. Prentice Hall PRT, NJ, 79-91.
- [3] ACKERMANN, J. E. ve BARMISH, B. R. (1988). Robust Schur Stability of a Polytope of Polynomials. IEEE Transactions on Automatic Control, 33 (10), 984-985.
- [4] MARDEN, M. (1966). Geometry of Polynomials. American Mathematical Society, Providence, R.I. (3), s 171.
- [5] ROCKAFELLAR, R.T. (1970). Convex Analysis, Princeton. Priceton University Press.
- [6] HWANG, C. ve FENG YANG, S. (2001). The use of Routh array for testing the Hurwitz property of a segment of polynomials. Department of Chemical Engineering, National Chung Cheng University, Department of Chemical Engineering, National Cheng Kung University. 37, 294-295.
- [7] BARTLETT, A.C., HOLLOT, C.V. ve HUANG, L. (1978). Rootlocations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check The Edges, Mathematics Control, 1, 61-71.
- [8] CHAPPELLAT, H. ve BHATTCHARYYA, S. P. (1989). An alternative proof of kharitonov's theorem. IEEE Transactions on Automatic Control, 34 (4), 448-450.
- [9] DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T. (2001a). Kompleks Polinomların Konveks Kombinasyonunun Kararlılığı, 14. Ulusal Matematik Sempozyumu, Eskişehir, Anadolu Üniversitesi, s.22.
- [10] FENG YANG, S. ve HWANG. C. (2010). robust Testing the Schur stability of a complex polinomials. International journal of systems science, 32 (10), 1243-1247.
- [11] BIALAS, S. ve GARLOFF, J. (1985). Convex Combinations of Stable Polynomials. J. Franklin Institute, 319 (3), 373-376.
- [12] BIALAS, S. (1985). A Necessary and Sufficient Condition for The Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials or Matrices. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 33 (9-10), 473-480.

- [13] BIALAS, S. (2004). A necessary and sufficient condition for stability of the convex combination of polynomials. *Control and Cybernetics*, 33 (4), 590-597.
- [14] BIALAS, S. (2004). A sufficient condition for Hurwitz stability of the convex combination of two matrices. *Control and Cybernetics*, 33 (1), 110-112.
- [15] BIALAS, S. (2005). A necessary and sufficient condition for σ -Hurwitz stability of the convex combination of the polynomials. *Opuscula Mathematica*, 25 (2), 166-168.
- [16] BOUGHERRA, H., CHANG, B.C., YEH, H.H. ve BANDA, S.S. (1990). Fast Stability Checking for The Convex Combination of Stable Polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 (5), 586-588.
- [17] Bollepalli, B. S. ve Pujara, L. R. (1994). On the Stability of a segment of polynomials. *IEEE Transactions and systems-i: Fundamental theories and applications*, 41 (12), 900-901.
- [18] BOSE, N. K. (1989). Tests for Hurwitz and Schur Properties of Convex Combination of Complex polynomials. *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS*, 36 (9), 1245-1246.
- [19] DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T. (2001b). Line Segment in the Space of Hurwitz Polynomials. *International Conference on Applicable General Topology*, Ankara, Hacettepe University, s 13.
- [20] DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T. (2003). An Algorithm for Segment Stability, *Mathematical and Computational Applications*. 8,111-118.
- [21] FELL, H. J. (1980). On the zeros of convex combinations of polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, 89 (1), 43-46.
- [22] GÖRA, M. (2007). Stability of the convex combination of polynomials. *Department of Applied Mathematics AGH University of Science and Technology*, 36 (2), 433-434.
- [23] HERNÁNDEZ, B. A., SOSA, F. R. G., VILLALOBOS, C. A. L., SEGURA, R. V. ve CANTÓN, E. C. (2018). Open Problems Related to the Hurwitz Stability of Polynomials Segments. *Hindawi, Mathematicle problem in Engineering*, 2018, 1-6.
- [24] RANTZER, A. (1992). Stability condition for politopes of polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 (1), 79-80.

- [25] SOH, Y. C. ve FOO, Y.K. (1989). Generalized edge thoerem. Systems & Control Letters, 12, 220-222.
- [26] PUJARA, L.R. ve SHANDHAG, N. (1992). Some Stability Theorems for Polygons of Polynomials. IEEE Trans. Automat. Contr., 37, 1845-1849.
- [27] KHARITONOV, V.L. (1978). On a Generalization of a Stability Criterion. Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR Seriya Fizika Matematika, 1, 33-57.
- [28] SADAT, S. A. H., CAFER, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T. (2019). Segment Lemmalar ve Bazı Uygulamaları. V. Uluslararası öğrenci sempozyumu, 6-8 aralık, Edirne, Trakya Üniversitesi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı/Soyad : Sayed Abdul Hannan SADAT
Uyruk : Afgan
Doğum Tarih : 04/04/1990
Doğum yeri : Afganistan/Sar-e-pol

EĞİTİM GEÇMİŞİ

2008-2011, Jawzjan üniversite / Eğitim Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

2016-2019, Anadolu üniversite / Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı,
Yüksek Lisans

İş DENEYİMİ

2011-2012 Afganistan'ın kuzeyinde Khatib Abad Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak çalıştım, 2013-2016 yılları arasında Sar-e-pol Üniversitesi'nde Eğitim Fakültesi'nde Öğretim üyesi olarak görev yaptım.