

ÖZET

Senkronizasyon olgusu günlük yaşamımızın pek çok noktasında mevcuttur. Bu olguyu tanımlamak için her biri $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^m$ diferansiyel denklemi ile kurulan n özdeş mekanik veya biyolojik sistemi ele aldık. Daha sonra bu sistem içinde bazı etkileşimlerin olduğunu kabul edip aşağıdaki n çiftli özdeş sistem üzerinde çalıştık.

$$\dot{x} = f(x_i) + \sum_{j=1}^n g(x_i, x_j), i = 1, \dots, n$$

f fonksiyonunun ve $g_{i,j}$ çiftlisinin hangi özellikleri için sistemin senkronize olduğunu

inceleyen pek çok literatür vardır. Araştırdığımız makalelerde yalnızca lineer çiftlilerin çeşitli tipleri incelenmiştir. Biz bu çalışmada onların elde ettiği sonucu genelleyerek n çiftli özdeş lineer olmayan sistemler için senkronizasyonu ele alacağız.

Bu tez aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 1. Kısımda senkronizasyon hakkında genel bilgiler verdik. 2. Kısımda dinamik sistemler hakkında bazı tanım ve özellikleri vereceğiz. 3. Kısımda n çiftli özdeş sistemlerin global çözümleri için senkronizasyonu inceleyeceğiz. 4. Kısımda f için kesin yaklaşımlar altında yukardaki sistemin kompakt global etkileyicisinin olduğunu gösterdik. 5. Kısımda elde ettiğimiz analizleri uyguladığımız bir biyolojik model tanımladık.

Anahtar kelimeler: Senkronizasyon (eş zamanlama), n özdeş çiftli lineer olmayan denklem sistemi, etkileyiciler, salınımlar.

ABSTRACT

The phenomenon of synchronization is present in many situations of our everyday life. In order to describe this phenomenon, we assume to have n identical mechanical or biological systems, each of which is modelled by an ordinary differential equation $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. We suppose that some interaction occurs among these systems and then we are led to consider n coupled identical systems

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^n g(x_i, x_j); \quad i = 1, \dots, n$$

There is a vast literature investigating which properties of f and of the couplings g_{ij} guarantee that the system synchronizes. In all the papers that I researched, only linear couplings of various kinds are considered. Our starting point is the paper of Schneider and Yanchuk, where two linearly coupled systems are considered. In this thesis we shall generalize their result so as to obtain synchronization for n identical nonlinearly coupled systems.

The thesis is organized as follows. In Chapter 1 we give general information about synchronization. In Chapter 2 we recall some basic definitions and properties of abstract dynamical systems. In Chapter 3 we consider the problem of complete synchronization of global solutions of the n coupled identical systems. In Chapter 4 we prove that under certain auxiliary assumptions on f , the above system possesses a compact global attractor Λ , which is contained in the diagonal $\Delta := \{(x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$. In Chapter 5 we describe a biological model to which our analysis can be applied.

Keywords: Synchronization, n identical nonlinearly coupled systems, attractors, oscillators

1. GİRİŞ

Günlük yaşamımızın pek çok noktasında Senkronizasyonun etkileri görülmektedir, örneğin kalp atışlarımızda ve biyolojik reaksiyonlarda (Gonze, Bernard, Watermann, Kramer ve Herzel). Senkronizasyonun saatler üzerindeki etkisi Christian Huygens (1665) tarafından gösterilmiştir. Aynı zamanda mekanik ve elektriksel salınım çiftleri üzerinde de uygulamaları vardır. Senkronizasyonu tanımlamak için n özdeş biyolojik veya mekanik sistem olduğunu ve bu sistemlerin her birinin

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^m$$

diferansiyel denklemi ile kurulduğunu kabul edelim. Eğer bu sistemler arasında hiçbir etkileşim yoksa her biri bağımsız hareket eder. Şimdi bazı etkileşimlerin olduğunu varsayalım ve aşağıdaki n çiftli özdeş sistemi düşünelim.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + \sum_{j=1}^n g_{1,j}(x_1, x_j) \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + \sum_{j=1}^n g_{2,j}(x_2, x_j) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x_n) + \sum_{j=1}^n g_{n,j}(x_n, x_j) \end{cases} \quad (1.1)$$

$(x_1^o, \dots, x_n^o)$ başlangıç noktası verildiğinde (1.1) sisteminin $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümünü başlangıç koşulu ile birlikte $\varphi_i(0) = x_i^o, i = 1, \dots, n$ şeklinde gösteririz.

Eğer $t \rightarrow +\infty$ iken her $i, j = 1, \dots, n$ için $|\varphi_i(t) - \varphi_j(t)| \rightarrow 0$ ise $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümü senkronize olur deriz. Bunun anlamı (1.1) sisteminin farklı kısımları için farklı başlangıç noktaları olsa dahi onlar asimptotik olarak özdeş davranırlar. f ve $g_{i,j}$ 'nin hangi özellikleri için (1.1) sisteminin senkronize olduğu daha önce pek çok kişi tarafından araştırılmıştır. Biz n özdeş lineer olmayan çiftlilerin senkronizasyonu için genelleme yaptık. Çalışmalarımızı kolaylaştırması açısından her $i, j = 1, \dots, n$ için $g_{i,j} = g$ olarak alalım.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Dinamik Sistemler ve Çekiciler

Bu bölümde dinamik sistemler hakkında bazı tanımlar ve özellikleri vereceğiz. Bu bilgiler Temam (1988)'in kitabından yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 2.1.1 : (X, d) Tam metrik uzay olsun. X üzerindeki yarı akışkanı π ile gösterelim. π Sürekli bir fonksiyondur ve $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ şeklinde tanımlanmıştır öyle ki;

- i) $\pi(x, 0) = x \quad \forall x \in X$
- ii) $\pi(x, s + t) = \pi(\pi(x, s), t) \quad \forall s, t \geq 0.$

Tanım 2.1.2 : Eğer (X, d) bir metrik uzay ve π bir yarı akışkan ise π nin bir çözümü $u :]\alpha, \beta[\rightarrow X$ fonksiyonudur ve

$$\pi(u(s), t) = u(s + t) ; \quad \forall s \in]\alpha, \beta[, \quad \forall t \geq 0$$

şeklinde tanımlanmıştır öyle ki $s + t \in]\alpha, \beta[$ 'dır.

Tanım 2.1.3 : $] - \infty, + \infty [$ Aralığında tanımlanan π nin bir çözümü "tam çözüm" olarak adlandırılır. Eğer $u(0) = x$ ise u 'ya " x boyunca tam çözüm" denir.

Tanım 2.1.4 : Eğer $x \in X$ ise ω – limit x noktalarının bir kümesidir ve $\omega(x)$ şeklinde gösterilir. Bir y noktasının $y \in \omega(x)$ olması için gerek ve yeter şart $t_k \rightarrow +\infty$ iken $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin var olmasıdır, öyle ki $\pi(x, t_k) \rightarrow y$. Buradan $\omega(x) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \{\pi(t, x)\}}$

yazılabilir.

Eğer $B \subseteq X$ ise

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \{\pi(t, B)\}}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Aynı zamanda bu ifade şuna eşittir; $y \in \omega(B)$ olması için gerek ve yeter şart B 'nin elemanlarından oluşan $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ve sonsuza giden bir t_k dizisinin varolmasıdır. Öyle ki:

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(t_k, x_k)$$

Tanım 2.1.5 : $A \subseteq X$ olsun. Ancak ve ancak $\forall t \geq 0$ için $\pi(t, A) = A$ olduğunda A invaryant ‘tır deriz.

Önerme 2.1.6 : A ’nın invaryant olması için gerek ve yeter şart her $x \in A$ için $t \in]-\infty, +\infty[$ aralığında $u(0) = x$ koşulunu sağlayan $u(t)$ tam çözümünün varolmasıdır. Öyle ki $t \in]-\infty, +\infty[$ için $u(t) \in A$ dır.

İspat : " $\Leftarrow$ ": $\pi(t, A) \subseteq A$ olduğu açıktır. Aynı zamanda $x \in A$ ise $x = \pi(t, u(-t))$ dir. Buradan $A \subseteq \pi(A)$ yazabiliriz. Bunu $A = \pi(A)$ olması takip eder.

" $\Rightarrow$ ": A üzerinde bir x noktası alalım. Her $t \in [0, +\infty[$ için $\pi(t, x) \in A$ olduğunu biliyoruz. Hatta her $T > 0$ için $y_T \in A$ vardır öyle ki $\pi(T, y_T) = x$ dir. Buradan $[-T, 0]$ üzerinde $u(t) : \pi(t + T, y_T)$ fonksiyonu tanımlayabiliriz.

$$t = 0 \text{ için } u(0) = x$$

$$t = -T \text{ için } u(-T) = y_T$$

elde ederiz. Bu tanımın tutarlı olduğunu kontrol etmek kolaydır ve buradan u ’nun π ’nin bir tam çözümü olduğunu görürüz.

Önerme 2.1.7 : $B \subseteq X$ olduğunu varsayalım öyle ki: B içindeki her (x_k) dizisi ve her $t_k \rightarrow +\infty$ dizisi için $\pi(t_k, x_k)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır ve $\omega(B)$ boştan farklı, kompakt ve invaryanttır (sabittir).

İspat : $\omega(B)$ ‘nın boş olmadığı aşıkardır. Şimdi $\omega(B)$ ‘nın sabit olduğunu gösterelim. $y \in \omega(B)$ olsun. O zaman

$$y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi(t_k, x_k)$$

dır. Buradan;

$$\pi(t, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(t + t_k, x_k) \Rightarrow \pi(t, \omega(B)) \subseteq \omega(B)$$

olduğu görülür. Şimdi de $\omega(B) \subseteq \pi(t, \omega(B))$ olduğunu gösterelim. $y \in \omega(B)$ olsun. Sabit bir $t > 0$ için $\pi(t_k - t, x_k)$ dizisini düşünelim. Bu dizinin bir alt dizisi vardır öyle ki;

$$\pi(t_{k,j} - t, x_{k,j}) \rightarrow z \in \omega(B), \quad j \rightarrow +\infty$$

Buradan;

$$\pi(t, \pi(t_{k,j} - t, x_{k,j})) \rightarrow \pi(t, z), \quad j \rightarrow +\infty$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\pi(t, \pi(t_{k,j} - t, x_{k,j})) = \pi(t_{k,j}, x_k) \rightarrow y$$

Buradan $y = \pi(t, z)$ elde ederiz. Dolayısıyla her t için $\omega(B) = \pi(t, \omega(B))$ dır. Yani $\omega(B)$ nın sabit olduğunu elde ederiz. Son olarak $\omega(B)$ nın kompakt olduğunu gösterelim. $\omega(B)$ içinde bir (y_k) dizisi alalım. $y \in \omega(B)$ ya yakınsayan (y_{k_v}) alt dizisinin var olduğunu göstermek istiyoruz. Her k için $(x_{k,j})_j$ dizisi ve $j \rightarrow +\infty$ iken $(t_{k,j})_j$, $t_{k,j} \rightarrow +\infty$ dizisi mevcuttur. Öyle ki:

$$y_k = \lim_{j \rightarrow +\infty} \pi(t_{k,j}, x_{k,j})$$

dır. Her k için $j(k)$ dizisi mevcuttur ve

$$d(y_k, \pi(t_{k,j(k)}, x_{k,j(k)})) \leq \frac{1}{k}$$

yazabiliriz. Buradan $(x_{k,j(k)})$ nın B içinde bir dizi olduğunu elde ederiz ve $k \rightarrow +\infty$ iken $t_{k,j(k)} \rightarrow +\infty$ olduğunu görürüz. Hipotez gereğince bir (k_v) alt dizisi alabiliriz, öyle ki;

$$\pi(t_{k_v, j(k_v)}, x_{k_v, j(k_v)}) \rightarrow \bar{y}, \quad \bar{y} \in \omega(B)$$

Buradan

$$d(y_{k_v}, \pi(t_{k_v, j(k_v)}, x_{k_v, j(k_v)})) \leq \frac{1}{k_v} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow +\infty$$

Dolayısıyla $y_{k_v} \rightarrow \bar{y}$ olur.

Tanım 2.1.8 : $\mathcal{A} \subseteq X$ kümesinin π 'nin global çekicisi olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ 'nın sabit, kompakt ve $\forall B \subseteq X$ sınırlı kümesi için $\mathcal{A}$ 'nın B 'yi çekmesidir, öyle ki $\omega(B) = \mathcal{A}$ 'dır.

Teorem 2.1.9 : Global Çekicinin Varlığı Teoremi

(X, d) tam metrik uzay olsun ve $S(t)$ bir yarı grup olsun.

1. Sınırlı bir absorbing (emici) kümesi olduğunu kabul edelim. Her $B \subseteq X$ sınırlı kümesi için Z gibi sınırlı bir küme mevcuttur, ve $\forall t \geq T$ için $S(t)B \subseteq Z$ olmasını sağlayan pozitif T mevcuttur.
2. Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; X içinde bir sınırlı dizi ve (t_n) bir dizi ise öyle ki $t_n \rightarrow +\infty$, $S(t_n)x_n$ nin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Bu şartlar sağlanırsa $S(t)$ global çekiciye sahiptir.

NOT : Eğer $X = \mathbb{R}^m$ ise, 2. koşulun sağlanması için 1. koşulun sağlanması yeterlidir. Çünkü $\mathbb{R}^m$ deki her sınırlı dizinin bir yakınsak alt dizisi vardır.

İspat : $\mathcal{A}$ kümesini $\mathcal{A} = \omega(Z)$ şeklinde tanımlayalım ve $\mathcal{A}$ 'nın global çekici olduğunu gösterelim. Önerme 2.1.7 'ye göre $\mathcal{A}$ boştan farklı, kompakt ve invaryanttır. Bir sonraki adımda $\mathcal{A}$ 'nın çektiğini gösterelim. $B \subseteq X$ sınırlı olsun ve $U ; \mathcal{A}$ 'nın açık komşuluğu olsun. $\forall t > T$ için $S(t)B \subseteq U$ eşitliğini sağlayan bir $T > 0$ bulmalıyız. Fakat çelişki ile bunun yanlış olduğunu gösterebiliriz. Çünkü $t_n \rightarrow +\infty$ dizisi ve $x_n \in B$ mevcuttur ve $s(t_n)x_n \notin U$ 'dur. O zaman 2.hipotez ile yakınsak bir alt dizi mevcuttur öyle ki $S(t_{n_j})x_{n_j} \rightarrow \bar{x}$, $j \rightarrow +\infty$. U açık olduğundan $\bar{x} \notin U$ 'dur. Ancak bu bir çelişkidir. Çünkü $\bar{x} \in \omega(B) \subseteq \omega(z) = \mathcal{A} \subseteq U$ 'dur.

Önerme 2.1.10: Yukardaki hipotezden

$$\mathcal{A} = \{x \in X \mid x \text{ boyunca sınırlı bir tam çözüm vardır}\}$$

diyebiliriz.

İspat: Eğer $x \in \mathcal{A}$ ise önerme 2.1.7 ve $\mathcal{A}$ 'nın kompakt olması sayesinde x boyunca sınırlı bir tam çözüm vardır. Tersine olarak eğer x boyunca $u(t)$ sınırlı tam çözümü varsa

$x = \pi(t, u(-t))$, $\forall t \geq 0$ elde edilir. Ancak $B := \{ u(t), t \in \mathbb{R} \}$ sınırlı bir kümedir. O halde $x \in \omega(B) \subseteq \mathcal{A}$ olur.

2.2 Adi Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde diferansiyel denklemler hakkında bazı teorem ve sonuçları inceleyeceğiz.

Tanım 2.2.1: $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

koşulunu sağlayan bir $L > 0$ sabit sayısı varsa f Lipschitz koşulunu sağlar deriz.

Tanım 2.2.2 : f 'nin tek taraflı global Lipschitz koşulunu sağlaması için gerek şart

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \leq l|x - y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

eşitliğini sağlayan bir l sabit sayısının varolmasıdır.

Teorem 2.2.2 : Temel Local Varlık – Teklik Teoremi:

$E ; x_0$, içeren $\mathbb{R}^m$ nin açık alt kümesi olsun. $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ nin local Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım. O halde öyle bir $a > 0$ sayısı vardır ki:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç değer probleminin $[-a, +a]$ aralığında tek bir $u(t)$ çözümü vardır.

Tanım 2.2.3 : u_1 ve u_2 $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$ aralıklarında (2.1) in birer çözümü olsun. Eğer $]a_1, b_1[\subseteq]a_2, b_2[$ ise $u_2 ; u_1$ 'in uzantısıdır ve $]a_1, b_1[$ aralığında $u_1 \equiv u_2$ dir.

Teorem 2.2.2 : $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ (2.1)'in bir çözümü olsun. O halde u 'nun $\tilde{u}$ gibi tek bir maximal uzantısı mevcuttur öyle ki;

$$\tilde{u} :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^m$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.3 : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $u :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^m$ $\dot{x} = f(x)$ 'in bir maximal çözümü olsun. O zaman herhangi bir $K \subseteq E$ kompakt kümesi için $\delta > 0$ mevcuttur. Öyle ki her $t > \beta - \delta$ ve her $t < \alpha + \delta$ için $u(t) \notin K$ 'dır.

Sonuç 2.2.4 : $E = \mathbb{R}^m$ olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ve $u :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^m$ $\dot{x} = f(x)$ in maximal çözümü olsun. Her $\tau < \beta$ için $M(\tau) : \max_{t \in [0, \tau]} |u(t)|$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $\beta < +\infty$ ise

$$\limsup_{\tau \rightarrow \beta^-} M(\tau) = +\infty$$

dur.

Teorem 2.2.5 : $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun local Lipschitz olduğunu ve her $x_0 \in \mathbb{R}^m$ için (2.1) maximal çözümü $u(t, x_0)$ ın her $t \in [0, +\infty[$ için tanımlı olduğunu varsayalım. O halde $(t, x_0) \rightarrow u(t, x_0)$ eşlemesi $\mathbb{R}^m$ üzerinde yarı akışkan bir fonksiyon tanımlar.

3. SENKRONİZASYON

3.1 Çözümler İçin Senkronizasyon

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin local Lipschitz olduğunu varsayalım, hatta $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ local Lipschitz olsun. Bazı $l, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} g(x_1, y) - g(x_2, y), x_1 - x_2 \rangle \leq \beta |x_1 - x_2|^2 \\ g(x, y_1) - g(x, y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq \gamma |y_1 - y_2|^2 \\ f(x) - f(y), x - y \rangle \leq l |x - y|^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Şimdi aşağıdaki n değişkenli n tane diferansiyel denklem sistemini düşünelim. Aynı zamanda n çiftten oluşan simetrik bir sistemdir.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1, x_2) + g(x_1, x_3) + \dots + g(x_1, x_n) \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + g(x_2, x_1) + g(x_2, x_3) + \dots + g(x_2, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x_n) + g(x_n, x_1) + g(x_n, x_2) + \dots + g(x_n, x_{n-1}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Tanım 3.1.1 : $W ; \underbrace{IR^m \times \dots \times IR^m}_{n \text{ times}}$ nin bazı alt kümeleri olsun, öyle ki her $t \geq 0$ için (3.2) nin

$z \in W$ koşulunu sağlayan $\varphi(z, t)$ çözümü varolsun. Eğer $z \in W$ için $t \rightarrow \infty$ iken

$$|\varphi_i(z, t) - \varphi_j(z, t)| \rightarrow 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

sağlanırsa sistem (3.2) tamamen senkronize olur deriz. Şimdi sistem (3.2) nin $t \geq 0$ için tanımlanan tüm çözümlerinin senkronize olması için gereken koşulları verelim. Aşağıdaki teorem Schneider ve Yanchuch(2003)'ün makalesindeki önerme 3.1'in bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.1.2 : (3.1) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu ve her $t \geq 0$ için (3.2) nin $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümünün var olduğunu kabul edelim.

$$\bar{\varphi}(t) := \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n}$$

olsun. $\alpha := -l - (n-1)\beta + \gamma$ için

$$|(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - (\bar{\varphi}(t), \dots, \bar{\varphi}(t))| \leq Ce^{-\alpha t}$$

yaklaşımı sağlanır. $\alpha > 0$ koşulu altında sistem (3.2) senkronize olur. Hatta $g(x, x) = 0$ ise $\alpha = -l - n\beta$ şeklinde seçebiliriz.

İspat : Sistem (3.1) in $\varphi(t)$ çözümü için

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = |(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - (\bar{\varphi}(t), \dots, \bar{\varphi}(t))|^2$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu eşitliği açarsak

$$\begin{aligned} V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) &= \left| \varphi_1(t) - \left(\frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right) \right|^2 \\ &\quad + \left| \varphi_2(t) - \left(\frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right) \right|^2 + \dots \\ &\quad + \left| \varphi_n(t) - \left(\frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Biraz daha basitleştirmek için

$$\begin{aligned} V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) &= \left| \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{n} + \dots + \frac{\varphi_1(t) - \varphi_n(t)}{n} \right|^2 \\ &\quad + \left| \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{n} + \dots + \frac{\varphi_2(t) - \varphi_n(t)}{n} \right|^2 + \dots \\ &\quad + \left| \frac{\varphi_n(t) - \varphi_1(t)}{n} + \dots + \frac{\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)}{n} \right|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitliğinden

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$(\mathbb{R}^m)^n$ nin bazı W alt kümeleri için

$$W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ için türev hesaplırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), \dot{\varphi}_i(t) - \dot{\varphi}_j(t) \rangle \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. İşlemleri kolaylaştırmak için $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ diyelim. İşlemlere devam edersek

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) + \sum_{k=1}^n g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) - g(\varphi_i(t), \varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^n g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) + g(\varphi_j(t), \varphi_j(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n 2 \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n 2 \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_i(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_j(t)) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n 2 \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_i(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_j(t)) \rangle \\
& = - \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_i(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_i(t)) \rangle \\
& \quad - \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_j(t), \varphi_i(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_j(t)) \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Bütün açılımları yaptığımızda son olarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} W(\varphi(t)) &= \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \\
& \quad - \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_j(t), \varphi_i(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_j(t)) \rangle \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k \neq i} 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle
\end{aligned}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu eşitlik için (3.1) kullanıp yerine yazarsak

$$\frac{d}{dt} W(\varphi(t)) = \sum_{i,j=1}^n 2\ell \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2 + \sum_{i,j=1}^n 2(n-1)\beta \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2 - \sum_{i,j=1}^n 2\gamma \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2$$

çıkar. Sonuç olarak

$$\frac{d}{dt} W(\varphi(t)) \leq \sum_{i,j}^n 2 \underbrace{(\ell + (n-1)\beta - \gamma)}_{=-\alpha} \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2$$

buluruz ve bu eşitsizliği de düzenlersek

$$\frac{d}{dt} W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \leq -2\alpha W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

olur. Eğer $g(x, x) = 0$ olarak alırsak $\alpha = -\ell - n\beta$ olduğu görülebilir. İşlemleri sonlandırmak için $W(\varphi(t))$ nin her iki tarafını $e^{2\alpha t}$ ile çarpıp integre edersek

$$e^{2\alpha t} \frac{d}{dt} W(\varphi(t)) + e^{2\alpha t} 2\alpha W(\varphi(t)) \leq 0$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{2\alpha s} W(\varphi(s)) \right) ds \leq 0$$

$$e^{2\alpha t} W(\varphi(t)) - W(\varphi(0)) \leq 0$$

$$W(\varphi(t)) \leq e^{-2\alpha t} W(\varphi(0))$$

şeklinde hesaplarız.

Sonuç olarak

$$n \left| (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - \left(\frac{\bar{\varphi}(t) + \dots + \bar{\varphi}(t)}{n} \right) \right|^2 \leq |W(\varphi(0))| e^{-2\alpha t}$$

$$n \left| (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - \left(\frac{\bar{\varphi}(t) + \dots + \bar{\varphi}(t)}{n} \right) \right| \leq |W(\varphi(0))|^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha t}$$

Eğer $\alpha > 0$ ise $t \rightarrow +\infty$ iken

$$|(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - (\bar{\varphi}(t), \dots, \bar{\varphi}(t))| \rightarrow 0.$$

Dolayısıyla incelediğimiz sistem $(\mathbb{R}^m)^n$ de tamamen senkronize olur.

3.2 Global Varlık İçin Koşullar

Bir önceki teoremde (3.1) eşitsizlikleri sağlandığında $t \geq 0$ için tanımlanan çözümlerin senkronize olduğunu ispat ettik. Bu bölümde her $t \geq 0$ için çözümlerin varolmasını sağlayan koşulları vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.2.1 : Bazı K_1, K_2 sabit sayıları için

$$\begin{aligned} K_1 \left(|x_1 - x_2|^2 + \dots + |x_{n-1} - x_n|^2 + \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right|^2 \right) \\ \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq K_2 \left(|x_1 - x_2|^2 + \dots + \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

bağıntısı vardır.

İspat : $x_1, \dots, x_n$ için aşağıdaki eşitlikleri tanımlayabiliriz.

$$z_1 = x_1 - x_2$$

$$z_2 = x_2 - x_3$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

$$w = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Kontrol edersek $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_{n-1}, w)$ atamasının içine fonksiyon olduğu görülür. $(z_1, \dots, z_{n-1}, w) = (0, \dots, 0)$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$x_1 = x_2, x_2 = x_3, \dots, x_{n-1} = x_n \text{ ve } \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 0$$

olur. Buradan $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_{n-1}, w)$ değişkenlerin değişimidir ve yardımcı teorem sağlanır.

Teorem 3.2.2 : (3.1) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu kabul edelim. Hatta $g(x, y) = -g(y, x)$ olsun. $\forall t \geq 0$ için (3.2) nin $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümü mevcuttur.

İspat : $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ (3.2)nin bir çözümü olsun. ν 'yü sonradan seçmek koşuluyla

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{i,j=1}^n \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bir önceki bölümdeki gibi $V(\varphi(t))$ nin türevini hesaplarsak

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t)) = \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), \dot{\varphi}_i(t) - \dot{\varphi}_j(t) \rangle + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) + g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle$$

sonucu çıkar ve buradan da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) + \sum_{k=1}^n g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) \right. \\ &\quad \left. - f(\varphi_j(t)) - \sum_{k=1}^n g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \right\rangle \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitliği biraz düzenlersek;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \underbrace{\frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle}_0. \end{aligned}$$

Buradaki problemi çözmek için aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

$$\sum_{i,j}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$$

Bu denklemden $\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$ ifadesini hesaplamalıyız.

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t) - \varphi_i(t), f(\varphi_i(t)) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \end{aligned}$$

Bu işlemlerden sonra $\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$ ifadesi yerine aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$$

Bütün işlemleri tamamladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad + 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad - \frac{\nu}{n^2} \sum_{u,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \end{aligned}$$

İlk baştaki kabulümüzde ν ' yü sonradan seçeceğiz demiştik. Şimdi $\nu = 2n^2$ şeklinde seçersek

$2 - \frac{\nu}{n^2} = 0$ olur. Dolayısıyla $\sum_{u,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle$ nin katsayısını 0 olarak elde ederiz.

Daha sonra işlemleri devam ettirirsek ve gerekli açılımları yaparsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &\leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j(t) - 0, f(\varphi_j(t)) - f(0) \rangle \\ &\quad + 4 \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(0) \rangle \\ &\leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4\ell \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^2 + 4 \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} |\varphi_j(t)|^2 + \frac{1}{2} |f(0)|^2 \right) \\ &\leq 2n\beta |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^2 + 2 |f(0)|^2 \end{aligned}$$

Yardımcı önerme 3.2.1'den yararlanarak $\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^2$ yerine bulduğumuz sonucu yazabiliriz ve

böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2 \right) \\
& \leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \left(\ell + \frac{1}{2} \right) K_2 \left(\sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2 \right) \\
& + 2n |f(0)|^2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi biraz daha genelleştirelim. Bazı $\tilde{K}, M > 0$ sabit sayıları için eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2 \right) \\
& \leq \tilde{K} \left(\sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2 \right) + M
\end{aligned}$$

Buradan parantez içindeki ifadelerin yerine değerlerini yazarsak

$$\frac{dV}{dt} \leq \tilde{K}V + M$$

olduğunu görürüz.

Bu denklemin her iki tarafı $e^{-\tilde{K}t}$ ile çarpılıp integre edilirse

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{-\tilde{K}s} V(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) \right) ds \leq M \int_0^t e^{-\tilde{K}s} ds,$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$e^{-\tilde{K}t} V(\varphi(t)) - V(\varphi(0)) \leq M \left[-\frac{1}{\tilde{K}} (e^{-\tilde{K}t} - 1) \right] \leq \frac{M}{\tilde{K}}$$

olur ve sonuç olarak

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \leq e^{\tilde{K}t} \left(\frac{M}{\tilde{K}} + V(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) \right)$$

bulunur. Tekrar Yardımcı Teorem 3.2.1'i göz önüne alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$|\varphi_1(t)|^2 + \dots + |\varphi_n(t)|^2 \leq K_2 V(\varphi(t)) \leq K_2 e^{\tilde{K}t} \left(\frac{M}{\tilde{K}} + V(\varphi(0)) \right)$$

Buradan $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümünün var olduğu görülür. Sonuç 2.2.4'ten yararlanarak bu çözümün $[0, +\infty[$ aralığındaki her t için varolmak zorunda olduğunu söyleriz.

4. SENKRONİZE OLMUŞ SİSTEMLER İÇİN ÇEKİCİLER

Bu bölümde

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^n g(x_i, x_j); \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

sisteminin global çekiciye sahip olmasını garantileyen koşulları vereceğiz. Bir önceki bölümde

$$\begin{cases} g(x, y) = -g(y, x) \quad (g(x, x) = 0) \\ \langle f(x) - f(y), (x - y) \rangle \leq \ell |x - y|^2 \\ \langle g(x_1, y) - g(x_2, y), (x_1 - x_2) \rangle \leq \beta |x_1 - x_2|^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

koşulları altında (4.1) sisteminin her $t \geq 0$ için bir çözümü olduğunu göstermiştik. Öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı teorem 4.1 : Daha önce seçtiğimiz $\nu = 2n^2$ için

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{i,j=1}^n |x_i(t) - x_j(t)|^2 + \nu \left| \frac{x_1(t) + \dots + x_n(t)}{n} \right|^2$$

olsun. Daha sonra

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i(t) - x_j(t)|^2 \geq \frac{1}{6n} V(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

olduğunu gösterelim.

İspat : Üçgen eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki şekilde bir denklem yazabiliriz.

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i(t) - x_j(t)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n (|x_i(t)| + |x_j(t)|)^2 \leq 2 \left(\sum_{i,j=1}^n |x_i(t)|^2 + |x_j(t)|^2 \right) \leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2$$

Daha sonra her iki tarafa $\nu |w|^2$ ekleyerek işlemleri devam ettirirsek

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i(t) - x_j(t)|^2 + \nu |w|^2 \leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + \nu |w|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + \nu \left| \frac{x_1(t) + \dots + x_n(t)}{n} \right|^2 \\
&\leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + \frac{\nu}{n^2} (|x_1(t)| + \dots + |x_n(t)|)^2 \\
&\leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + \frac{\nu}{n^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&\leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + \frac{\nu}{n^2} n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \\
&\leq 4n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 + 2n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \\
&\leq 6n \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Buradan

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \geq \frac{1}{6n} V(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

olduğu görülür.

Bir sonraki teorem Schneider ve Yanchuck (2003)'ün teoreminin bir versiyonudur.

Teorem 4.2 : (4.2) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu kabul edelim ve $\beta < 0$ olsun. Hatta $\mu > 0, C > 0$ sabit sayılarının olduğunu varsayalım öyle ki:

$$\langle f(x), x \rangle \leq -\mu x^2 + C \quad (4.3)$$

olsun. O halde (4.1) sisteminin global çekicisi vardır.

İspat : Global çekicinin varlığı teoremine göre emici bir kümenin varlığını ispat etmek yeterli.

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ (4.1) sisteminin bir çözümü olsun ve

$$V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{i,j=1}^n \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2 + \nu \left| \frac{\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} \right|^2$$

şeklinde tanımlayalım. Daha önceki bölümlerde olduğu gibi ν daha sonra seçilecektir. Tüm ara işlemler yapılsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= \sum_{i,j=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), \dot{\varphi}_i(t) - \dot{\varphi}_j(t) \rangle \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \langle (\varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)), \dot{\varphi}_1(t) + \dots + \dot{\varphi}_n(t) \rangle \\ \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \left\langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) + \sum_{k=1}^n g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) \right. \\ &\quad \left. - f(\varphi_j(t)) - \sum_{k=1}^n g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \right\rangle \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} V(\varphi(t)) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n 2 \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), g(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) - g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (4.2) eşitsizliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle + 2 \sum_{i,j,k=1}^n \beta \left| \varphi_i(t) - \varphi_j(t) \right|^2 \\ &\quad + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \frac{2\nu}{n^2} \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^n \langle \varphi_i(t), g(\varphi_j(t), \varphi_k(t)) \rangle}_0 \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

Daha önceki bölümde hesapladığımız gibi

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t) - \varphi_i(t), f(\varphi_i(t)) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Sonuç olarak

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t), f(\varphi_j(t)) \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$$

elde ederiz. Bulduğumuz sonucu yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad + 2n\beta \sum_{i,j=1}^n |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + \frac{2\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle \\ &\quad - \frac{\nu}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) - \varphi_j(t), f(\varphi_i(t)) - f(\varphi_j(t)) \rangle \end{aligned}$$

olur. Şimdi tekrar $\nu = 2n^2$ seçersek ve denklemde yerine yazarsak

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^2 |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j(t), f(\varphi_j(t)) \rangle$$

çıkar. (4.3) bağıntısının sağlandığını kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\phi(t)) &\leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^2 |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 + 4 \sum_{j=1}^n \left(-\mu |\varphi_j(t)|^2 + C \right) \\ &\leq 2n\beta \sum_{i,j=1}^2 |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)|^2 - 4\mu \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^2 + 4nC \end{aligned}$$

$\beta < 0$ olduğunu düşünürsek bu ifadeyi biraz daha genelleştirebiliriz.

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \leq -4\mu \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)|^2 + 4nC$$

Yardımcı teorem 4.1'den elde ettiğimiz sonucu üstteki denklemde yerine yazarsak

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \leq -4\mu \frac{1}{6n} V(\varphi(t)) + 4nC$$

elde ederiz. Herhangi bir pozitif λ sayısını alalım ve $\lambda = \frac{4\mu}{6n}$ olsun.

Dolayısıyla

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \leq -\lambda V(\varphi(t)) + 4nC$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin her iki tarafını $e^{\lambda t}$ ile çarpıp integre edersek

$$e^{\lambda t} \frac{d}{dt}V(\varphi(t)) + e^{\lambda t} \lambda V(\varphi(t)) \leq e^{\lambda t} 4nC$$

$$\int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{\lambda s} V(\varphi(s)) \right) ds \leq \int_0^t e^{\lambda s} 4nC ds$$

$$e^{\lambda t} V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - V(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) \leq 4nC \left(\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right)$$

$$e^{\lambda t} V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \leq 4nC \left(\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right) + V(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0))$$

ifadesini elde ederiz. Bu eşitsizliği biraz daha basitleştirebiliriz.

$$e^{\lambda t} V(\varphi(t)) \leq 4nC \left(\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right) + V(\varphi(0))$$

$$V(\varphi(t)) \leq e^{-\lambda t} 4nC \left(\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right) + e^{-\lambda t} V(\varphi(0))$$

$$\leq 4nC \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) + e^{-\lambda t} V(\varphi(0))$$

sonuç olarak

$$V(\varphi(t)) \leq e^{-\lambda t} V(\varphi(0)) + \frac{1}{\lambda} 4nC$$

elde ederiz. Yardımcı teorem 3.2.1'den yararlanarak

$$|\varphi_1(t)|^2 + \dots + |\varphi_n(t)|^2 \leq K_2 V(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \leq e^{-\lambda t} V(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) + \frac{1}{\lambda} 4nC$$

yazılabilir. Yardımcı teorem 4.1'i de göz önüne alırsak

$$e^{-\lambda t} V(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) + \frac{1}{\lambda} 4nC \leq e^{-\lambda t} 6n \left(|\varphi_1(0)|^2 + \dots + |\varphi_n(0)|^2 \right) + \frac{1}{\lambda} 4nC$$

olur. Buradan da yeteri kadar büyük t için

$$|\varphi_1(t)|^2 + \dots + |\varphi_n(t)|^2 \leq 2 \frac{1}{\lambda} 4nC.$$

elde ederiz. $\lambda = \frac{4\mu}{6n}$ olarak seçmiştik. Bulduğumuz bu sonuca dayanarak aşağıdaki emici kümeyi elde ederiz.

$$\left\{ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \left| \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \leq \frac{12n^2 C}{\mu} \right. \right\}$$

Dolayısıyla (4.1) sistemi için bir çekici vardır.

NOT: Eğer $\alpha := -l - n\beta > 0$ ise (4.1) sistemi senkronize olur. Sistem (4.1)'in çekicisi olan $\tilde{\mathcal{A}}$, Δ diyagonalı tarafından kapsanır. Öyle ki $\Delta := \{(x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$. Δ Diyagonalı sistem (4.1) için sabit olduğundan önerme 2.1.10. 'un de yardımıyla eğer $\tilde{\mathcal{A}}; \dot{x} = f(x)$ denkleminin bir çekicisi ise $\mathcal{A} = \Delta(\tilde{\mathcal{A}})$ diyebiliriz. Öyle ki $\Delta: \mathbb{R}^m \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ defa}}$ şeklinde tanımlanmıştır ve diyagonal eşleştirmesi de $x \rightarrow \Delta(x) = (x, \dots, x)$ şeklindedir. Bunun anlamı sınırlı bir kümedeki çözümler için “kolektif” bir senkronizasyon mevcuttur.

NOT: Emici küme β' ya bağlı değildir.

5. BİYOLOJİK SALINIMLAR

Bizim biyolojik ritmimiz gündüz ve gecenin değişimine bağlıdır. Daha açık bir dille gün içerisinde aldığımız ışık şiddetine bağlıdır. Örneğin ışığın şiddeti zayıf ise bir çeşit içsel ritim elde edilir. Bu görüş vücudumuzun biyolojik salınımlarının senkronizasyonuna bağlıdır. (Ancak ışığın şiddeti güçlü ise bu ifade doğru değildir.)

Biz bu görüşü Goodwin salınımlarını analize ederek destekledik. Goodwin (1965) hücre bölünmelerinin bağımsız salınım sinyalleri içerdiğini öne sürdü ve negatif geri beslenme kontrol metotlarını inceledi. Özel olarak salınım özelliklerini taşıyan protein sentezleri için kesin modeller kurdu. Onun incelediği ana model periyodik çözüme sahip değildir. Biz bu modeli modifiye ederek periyodik olarak davrandığını göstereceğiz. Aşağıdaki tanımlamalar J.D. Murray'ın (1977) kitabından yararlanılarak yapılmıştır.

İncelediğimiz modelde düzenleyici gen G taşıyıcı ribonükleik asit ($mRNA$) üretir. Bunun konsantrasyonunu X ile gösterelim. Bu ($mRNA$) ribozomlarla etkileşerek enzim moleküllerini oluşturur. Bunun konsantrasyonunu da Y ile gösterelim. Daha sonra enzim S konsantrasyonunun bazı substratlarıyla bir reaksiyon katalize eder. Bu reaksiyonun ürününün bir bölümü gen represörleridir. Bunların konsantrasyonunu da Z ile gösterelim. Bu represör düzenleyici genin aktivitesini bastırmak için ona geri beslenir. Bu da basit bir kapalı devre geri beslenme kontrol döngüsüdür. G genlerinin sayısını n ve onların represör moleküllerine bağlı olmayan fraksiyonunu f ile gösterelim. Öyle ki fn ve $(1-f)n$ represörlerle ilişkili genlerin sayılarıyla ilgilidir. Sistem içinde reaksiyonların zamanında denge noktasında olabilmesi için diğerleriyle yeterince hızlı karşılaştırılmalıdır. Öyle ki

$$(1-fn)n = afnZ$$

Burada a reaksiyonun denge sabitidir. Bu denklemden bastırılmayan genlerin f fraksiyonu $f = (1+aZ)^{-1}$ şeklinde yazılır. ($mRNA$) oranının f ile orantılı olduğunu varsayalım. Böylece ($mRNA$) konsantrasyonu için

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{b}{1+aZ} - cX \quad (5.1)$$

denklemini yazılabilir. Burada a, b, c pozitif sabitlerdir. Ribozomların konsantrasyonunun hissedilir bir şekilde değişmemesi için onların yeterli sayıda olduğunu kabul edelim. Böylece enzimler için

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} = dX - eY \quad (5.2)$$

denklemini yazabiliriz. Burada d ve e pozitif sabitlerdir. Z represörlerinin Y enzimleri ile ilgili orantısını

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = hY - gZ \quad (5.3)$$

şeklinde yazarız. Denklemdaki h ve g pozitif sabitlerdir. Sistemi analiz etmek için denklemleri boyutsuz formda yazalım.

$$\begin{cases} x = \left(\frac{had}{b^2} \right)^{\frac{1}{3}} X, & y = \left(\frac{h^2 a^2}{bd} \right)^{\frac{1}{3}} Y, & z = aZ \\ \tau = (habd)^{\frac{1}{3}} t, & \alpha = \frac{c}{(habd)^{\frac{1}{3}}}, & \beta = \frac{c}{(habd)^{\frac{1}{3}}}, & \gamma = \frac{g}{(habd)^{\frac{1}{3}}} \end{cases} \quad (5.4)$$

Böylece

$$\dot{x} = \frac{1}{1+z} - \alpha x, \quad y = x - \beta y, \quad \dot{z} = y - \gamma z \quad (5.5)$$

modelini elde etmiş oluruz. Elde ettiğimizi sistem için yapılan analiz sistem (5.1), (5.2) ve (5.3) için sınırlı bir periyodik döngünün olmadığını gösterir. Şimdi model (5.5)i modifiye edelim ve tekrar biyolojik yorumunu yapalım. Griffith (1968) bu model için bir modifikasyon öne sürmüştür. Öyle ki G düzenleyici genlerini etkisiz hale getirmek için birden fazla Z represör molekülünün olduğunu varsayalım. Eğer m tane represör molekülünün var olduğunu düşünürsek (5.1) denkleminin yerine aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\dot{X} = \frac{b}{1+az^m} - cX \quad (5.6)$$

Buradaki m "*Hill katsayısı*" olarak adlandırılır. Yeni sistemimizi şu şekilde yazabiliriz;

$$\dot{x} = \frac{1}{1+z^m} - \alpha x, \quad \dot{y} = x - \beta y, \quad \dot{z} = y - \gamma z \quad (5.7)$$

Eğer $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ ve $m \geq 8$ olarak seçersek yeni sistemimizin periyodik bir çözümü olduğu Murray (1977) tarafından gösterilmiştir. Bu yaklaşımlar altında

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{1+z^m} - x \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = y - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. Şimdi bizim genel sonucumuzu bu probleme uygulayalım. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonunu tanımlayalım. Öyle ki:

$$(x, y, z) \rightarrow (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

öncelikle aşağıdaki özelliklerin sağlandığını gösterelim.

Teorem 5.1 : f fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını gösterelim.

1) f Lipschitz koşulunu sağlar, öyle ki bazı L sabitleri için

$$\|f(x, y, z) - f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathbb{R}^3} \leq L \|(x, y, z) - (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathbb{R}^3}$$

2) Bazı $\mu > 0$ ve $C > 0$ tamsayıları için

$$\langle f(x), x \rangle \leq -\mu x^2 + C$$

İspat : Öncelikle Jacobien matrisini hesaplayalım.

$$J f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{mz^{m-1}}{(1+z^m)^2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$J f(x, y, z)$ matrisi sınırlıdır. Dolayısıyla $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Şimdi Lipschitz sabitini hesaplayabiliriz.

$$(h_1, h_2, h_3) = h$$

alalım.

$$Jf[h] = \left(-h_1 - \frac{mz^{m-1}}{(1+z^m)^2} h_3, h_1 - h_2, h_2 - \frac{1}{2} h_3 \right)$$

$$|Jf[h]|^2 = h_1^2 + \left(\frac{mz^{m-1}}{(1+z^m)^2} \right)^2 h_3^2 + 2h_1h_3 \frac{mz^m - 1}{(1+z^m)^2} + h_1^2 + h_2^2$$

$$-2h_1h_2 + h_2^2 + \frac{1}{4}h_3^2 - h_2h_3$$

$$\leq h_1^2 + m^2h_3^2 + h_1^2 + m^2h_3^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_1^2 + h_2^2h_2^2 + \frac{1}{4}h_3^2 + \frac{1}{2}h_2^2 + \frac{1}{2}h_3^2$$

$$\leq 4h_1^2 + 4h_2^2 + (2m^2 + 1)h_3^2$$

$m \geq 2$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$|Jf[h]|^2 \leq (2m^2 + 1)|h_1, h_2, h_3|^2$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan Lipschitz sabitini $L = (2m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ olarak hesaplarız.

2) $\mu > 0$ ve $C > 0$ için $\langle f(x), x \rangle \leq -\mu x^2 + C$ iddiasının doğru olduğunu gösterelim.

$$\left\langle \left(\frac{1}{1+z^m} - x, x - y, y - \frac{1}{2}z \right), (x, y, z) \right\rangle = \left(\frac{1}{1+z^m} - x \right)x + (x - y)y + \left(y - \frac{1}{2}z \right)z$$

$$= -x^2 - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + xy + yz + \frac{1}{1+z^m}x$$

Hölder eşitsizliğini kullanarak, bazı $\varepsilon, \delta, \eta$ sabit sayıları için

$$\begin{aligned}
xy &\leq \frac{1}{2}\varepsilon x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}y^2 \\
yz &\leq \frac{1}{2}\delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\delta}z^2 \\
\frac{1}{1+z^m}x &\leq \eta x^2 + C_\eta
\end{aligned}$$

denklem sistemini oluştururuz. Daha sonra bulduğumuz bu değerleri denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\langle f(x), x \rangle &\leq -x^2 - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}y^2 + \frac{1}{2}\delta y^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{\delta}z^2 + nx^2 + C_\eta \\
&\leq -x^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \eta\right) - y^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\delta\right) \\
&\quad - z^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\delta}\right) + C_\eta
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. İddiamızın doğru olması için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \eta &> 0 \\
1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\delta &> 0 \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\delta} &> 0
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemini çözdüğümüzde;

$$\begin{aligned}
1 &< \delta < \frac{3}{2} \\
\frac{1}{2-\delta} &< \varepsilon < 2 \\
0 &< \eta < \frac{2-\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $\varepsilon, \delta, \eta$ 'yı bu aralıklar içinde seçersek $\langle f(x), x \rangle \leq -\mu x^2 + C$ eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısını bulabiliriz. Böylece iddiamızı kanıtlamış olduk.

İspatladığımız teorem tekil Goodwin salınımlarının global çekiciye sahip olduğunu garantiler. n çiftli Goodwin salınımlarının neredeyse her çözümü tekil Goodwin salınımlarının periyodik çözümüne senkronize olur. Nümerik uygulamalar Li, Chen, Aihora (2006) ve Schineder, Yanchuch (2003) makalelerinde örneklenmiştir.

KAYNAKLAR

V.S. Afraimovich, S.N. Chow, J.K. Hale, (1997), "Synchronization in Lattices of Coupled Oscillators", Phys. D, 103, no. 1-4, 442--451.

V.S. Afraimovich, H.M. Rodrigues, (Lisboa, 1995), "Uniform Dissipativeness and Synchronization on Nonautonomous Equations", International Conference on Differential Equations, 3--17, World Sci Publ., River Edge, NJ.

A.N. Carvalho, H.M. Rodrigues, T. Dlotko, (1998), "Upper Semicontinuity of Attractors and Synchronization", J. Math. Anal. Appl. 220, no. 1, 13--41.

M. Gameiro, H.M. Rodrigues, (2001), "Applications of Robust Synchronization to Communication Systems", App. Anal. 79, no. 1-2, 21--45.

D. Gonze, S. Bernard, C. Waltermann, A. Kramer and H. Herzel, (2005), "Spontaneous Synchronization of Coupled Circadian Oscillators", Biophysical Journal, 89, 120.

B.C. Goodwin, (1965), "Oscillatory behaviour in Enzymatic Control Processes", Adv. in Enzyme Regulation, 3, 425--438.

J.K. Hale, (1998), "Synchronization by Diffusive Coupling", no. 36, 17--31.

J.K. Hale, (1997), "Diffusive Coupling, Dissipation and Synchronization", J. Dynam. Differential equations, 9, no. 1, 1--52.

K. Josic, (2000), "Synchronization of Chaotic systems and Invariant Manifolds, Nonlinearity", 13 no. 4, 1321--1336.

K. Josic, (1998), "Invariant Manifolds and Synchronization of Coupled Dynamical Systems", Physical Review Letters, 80, no. 14, 3053--3056.

I.S. Labouriau, H.M. Rodrigues, (2003), "Synchronization of Coupled Equations of Hodgkin-Huxley Type", Dyn. Contin. Discrete Impuls. syst. Ser. A math. Anal., 10, no. 1-3, 463--476.

C. Li, L. Chen and K. Aihara, (2006), "Synchronization of Coupled Nonidentical Genetic Oscillators", Physical Biology, 3, 33--44.

J.D. Murray, (1977), Lectures on Nonlinear Differential Equation Models in Biology, Clarendon Press, Oxford,

J.D. Murray, (2003), Mathematical Biology. Spatial Models and Biomedical Applications, Springer-Verlag, New York.

L. Perko, (2001), Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York.

H.M. Rodrigues, (1996), "Abstract Methods for Synchronization and Applications", Appl. Anal., 62, no. 3-4, 263--296.

H.M. Rodrigues, L.F.C. Alberto, N.G. Bretas, (2001), "Uniform Invariance Principle and Synchronization. Robustness with Respect to Parameter Variation", J. Differential Equations 169, no. 1, 228--254.

K.R. Schneider and S. Yanchuck, (2003)," Complete Synchronization of Symmetrically Coupled Autonomous Systems", Applicable Analysis ,82, no. 12, 1127--1143.

R. Teman, (1988), Infinite Dymensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	09.08.1983	
Doğum yeri	Çorlu	
Lise	1997-2001	Çorlu Ticaret Borsası Süper Lisesi
Lisans	2001-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi,Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü
Yüksek lisans	2006-2008	Yıldız Teknik Üniversitesi,Fen Bilimleri Enstitüsü,Matematik Anabilim Dalı
	2007-2008	Universita Delgi Studi Di Trieste/İtalya Tez çalışması