

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şehmus FINDIK

SERBEST AKIVİS CEBİRLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	2
2.1. Temel Bilgiler	2
2.2. Akivis Cebirleri	4
3. HER AKIVIS CEBİRİ LİNEERDİR	7
3.1. Akivis Cebirlerinin Evrensel Enveloping Cebirleri	7
3.2. Akivis Cebirlerinin Lineerliği	12
4.SERBEST AKİVİS CEBİRLERİ	18
4.1. Serbest Akivis Cebirlerinin Kurulması	18
4.2. Serbest Akivis Cebirlerinin Altcebirleri	20
5. BİRLEŞMELİ OLMAYAN SERBEST CEBİRLER İÇİN BOYUT FORMÜLLERİ	24
5.1. Akivis Elemanları	24
5.2. Hesaplanabilir Sonuçlar	27
5.3. Akivis Elemanları İçin Boyut Formülü	32
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	39

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST AKIVİS CEBİRLERİ

Şehmus FINDIK

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman : Yard.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Yıl : 2005, Sayfa: 39
Jüri : Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yard.Doç.Dr. Ersin KIRAL
Yard.Doç.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
Yard.Doç.Dr. Ela AYDIN

Bu çalışmada serbest Akivis cebirleri ve bunların evrensel enveloping cebirleri inşa edilmiş, Akivis cebirlerinin lineer olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Akivis cebirlerinin Schreier özelliğini sağladığı gösterilmiş, Akivis elemanlarının oluşturduğu alt uzayların bir bazını bulmak için bir yöntem geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Akivis cebiri, Alt cebir, Schreier özelliği.

ABSTRACT

MSc THESIS

FREE AKIVIS ALGEBRAS

Şehmus FINDIK

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor : Asist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Year : 2005, Pages: 39

Jury : Prof.Dr. Naime EKİCİ

Asist.Prof.Dr. Ersin KIRAL

Asist.Prof.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Asist.Prof.Dr. Ela AYDIN

In this study, free Akivis algebras and their universal enveloping algebras have been investigated and it has proved that an Akivis algebra is linear. In addition has proved that Akivis algebras have Schreier property. Also an algorithm to determine bases of the subspaces of Akivis elements is described.

Key Words: Free Akivis algebra, Subalgebra, Schreier property.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan danışman hocam Sayın Yard.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL ve saygıdeğer hocam Sayın Prof.Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline, manevi desteğinden ötürü arkadaşlarım Alberk YILDIR, Akif GÖRGÜLÜ, Mustafa YALÇIN'a ve bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar maddi destekte bulunan TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

GİRİŞ

Akivis cebirleri ilk önce M.A. Akivis (Akivis, 1976) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonraları Hoffmann ve Strambach (Hoffmann ve Strambach, 1990) tarafından geliştirilerek *Akivis cebirleri* olarak adlandırılmıştır. Sabinin ve Mikhaev (Sabinin ve Mikhaev, 1987) de *hiperalgebra* olarak adlandırdıkları multilineer işlemlerin bir hesaplanabilir kümesine sahip ve şu an *Sabinin cebirleri* olarak bilinen cebirleri bulmuşlardır. Sabinin cebirleri ve Akivis cebirleri arasındaki ilişki Shestakov ve Umirbaev (Shestakov ve Umirbaev, 2002) tarafından açıklanmıştır. Akivis cebirlerinin evrensel enveloping cebiri birleşmeli olmayan bir serbest cebirdir.

Biz bu çalışmamızda Akivis cebirlerinin evrensel enveloping cebirinin yapısını, Akivis cebirlerinin lineerliğini, bir serbest Akivis cebirinin nasıl kurulduğunu inceleyip Akivis cebirlerinin altcebirleri için bir boyut formülünü geliştirdik. Ayrıca n -dereceli Akivis elemanlarının baz elemanlarının bulunması için bir yöntem tanımladık.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızın kaynağını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Akivis cebirlerinin evrensel enveloping cebirleri inşa edilmiş, Akivis cebirlerinin lineer olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde bir serbest Akivis cebirinin kuruluşu verilmiş, Akivis cebirlerinin Schreier özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde Akivis elemanlarının oluşturduğu alt uzayların boyutunu veren bir formül incelenmiş, bu uzayların bir bazını bulmak için bir yöntem geliştirilmiş ve bununla ilgili örneklere yer verilmiştir.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1.Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1: M değişmeli bir grup ve ϕ bir halka olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda M ye bir sol ϕ -modül denir. Her $a, b \in \phi$ ve $x, y \in M$ için

- 1) $ax \in M$
- 2) $(a + b)x = ax + bx$
- 3) $(ab)x = a(bx)$
- 4) $a(x + y) = ax + ay$
- 5) $1x = x$

dir.

Tanım 2.1.2: A bir halka ve M, N iki A -modül olsun. M ile N nin Tensör çarpımı, T bir A -modül ve $g : M \times N \rightarrow T$ bilinear bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip bir (T, g) ikilisidir.

- a) Her P A -modülü ve her $f : M \times N \rightarrow P$ bilinear dönüşümü için $f = f' \circ g$ olacak şekilde bir tek $f' : T \rightarrow P$ lineer dönüşümü vardır.
- b) (T, g) ve (T', g') a) özelliğine sahip iki çift iseler $j \circ g = g'$ olacak şekilde bir tek $j : T \rightarrow T'$ izomorfizmi vardır.

$T = M \otimes N$ ile gösterilir ve T , $x \otimes y$ şeklindeki elemanlar tarafından doğurulur.

T , “ $\otimes$ ” işlemine göre aşağıdaki özelliklere sahiptir: Her $x, y \in T$ ve $a \in A$ için

- 1) $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$,
- 2) $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$,
- 3) $(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$.

“ $\otimes$ ” işlemine tensör çarpımı denir. $T = M \otimes N$, tensör çarpımıyla birlikte bir cebirdir. Bu cebire tensör cebiri denir.

K bir cisim olsun.

Tanım 2.1.3: C , K cismi üzerinde bir halka ve bir sol K -modül olsun. Eğer her $a \in C$ ve her $x, y \in C$ için

$$a(xy) = (ax)y = x(ay)$$

ise C ye K cismi üzerinde bir cebir denir.

Tanım 2.1.4: R bir halka olsun. Her $x, y, z \in R$ için

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$$

ise R ye Jacobi özdeşliğini sağlıyor denir.

Tanım 2.1.5: L Jacobi özdeşliğini sağlayan bir halka ve her $x, y \in L$ için $xy = -yx$ olsun. Eğer L , K cismi üzerinde bir cebir ise L ye K üzerinde bir Lie cebiri denir. L nin cebir çarpımı genellikle $x, y \in L$ için $[x, y]$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.6: $X \neq \emptyset$ bir küme, F bir cebir ve $i : X \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Her B cebiri ve her $\alpha : X \rightarrow B$ dönüşümü için $\alpha : \psi \circ i$ olacak şekilde bir tek $\psi : F \rightarrow B$ cebir morfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde serbest cebir denir.

Tanım 2.1.7: Bir serbest cebirin her alt cebiri serbest ise bu cebire Schreier sınıfındadır denir.

A bir cebir ve I, A nın bir ideali ise $I \triangleleft A$ yazacağız.

Tanım 2.1.8: A bir cebir olsun. I sonlu üreteçli ve A/I sonlu üreteçli olacak şekilde bir $I \triangleleft A$ varsa A ya residual sonlu denir.

Tanım 2.1.9: M bir cebir olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda $U(M)$ cebirine M nin evrensel enveloping cebiri denir:

- 1) M den $U(M)$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\varepsilon : M \rightarrow U(M)$ homomorfizmi vardır.
- 2) K cismi üzerindeki birim elemanlı her B cebiri ve her $\varphi : M \rightarrow B$ homomorfizmi için $\psi\varepsilon = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi : U(M) \rightarrow B$ homomorfizmi vardır.

2.2. Akivis Cebirleri

Tanım 2.2.1(Akivis cebiri): Bir Akivis cebiri bir V vektör uzayıdır öyle ki V , aşağıdaki özellik sağlanacak şekilde ters-simetrik bilinear bir $[x, y]$ çarpımı ve üç-lineer bir $A(x, y, z)$ çarpımı tarafından donatılmıştır:

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = & A(x, y, z) + A(y, z, x) + A(z, x, y) + \\ & - A(y, x, z) - A(x, z, y) - A(z, y, x). \end{aligned}$$

Bu özdeşliğe Akivis özdeşliği denir.

Bu cebirler 1976 yılında M.A. Akivis tarafından three-webs 'in lokal cebirleri olarak tanımlandı.

Tanım 2.2.2: B , herhangi bir F cismi üzerinde herhangi bir birleşmeli olmayan cebir olsun. Şimdi, $[x, y] = xy - yx$ ve $A(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ olarak tanımlayalım. O zaman bu işlemlerle yukarıdaki özdeşlik sağlanır, dolayısıyla B vektör uzayı bu işlemlerle birlikte bir Akivis cebiri olur ve bu Akivis cebiri $AK(B)$ ile gösterilir.

Bunu daha açık görelim:

i) $[x, y]$ ters-simetrikdir?:

$$[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$$

ii) $[x, y]$ bilineerdir?: $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y, z \in B$ için,

$$\begin{aligned} [(ax + \beta y), z] &= (ax + \beta y)z - z(ax + \beta y) \\ &= (ax)z + (\beta y)z - z(ax) - z(\beta y) \\ &= \alpha(xz) + \beta(yz) - \alpha(zx) - \beta(zy) \\ &= \alpha(xz - zx) + \beta(yz - zy) = \alpha[x, z] + \beta[y, z] \end{aligned}$$

iii) $A(x, y, z)$ üç-lineerdir?: Bunu bir skaler için kontrol etmek yeterlidir: $a, b \in K$ ve $x, y, z, w \in B$ olsun.

$$\begin{aligned} A(ax + by, z, w) &= ((ax + by)z)w - (ax + by)(zw) \\ &= a(x(zw)) - ax(zw) + b(y(zw)) - by(zw) \\ &= aA(x, z, w) + bA(y, z, w) \end{aligned}$$

iv) (1) özdeşliği sağlanır:

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] &= [x, y]z - z[x, y] + [y, z]x - x[y, z] + [z, x]y - y[z, x] \\ &= (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x - x(yz - zy) + \\ &\quad + (zx - xz)y - y(zx - xz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (xy)z - x(yz) + (yz)x - y(zx) + (zx)y - z(xy) - (zy)x + \\
&\quad + z(yx) - (xz)y + x(zy) - (yx)z + y(xz) \\
&= A(x, y, z) + A(y, z, x) + A(z, x, y) - A(z, y, x) - A(x, z, y) - A(y, x, z)
\end{aligned}$$

$i), ii), iii), iv)$ 'den dolayı B , bir Akivis cebiri olur.

Tanım 2.2.3: A bir Akivis cebiri olsun. A nın üzerinde tanımlı olduğu işlemler $\forall a, b, c \in A$ için $[a, b] = A(a, b, c) = 0$ özelliklerini taşıyorlarsa A ya aşıkak Akivis cebiri denir.

Bu çalışmadaki tüm cebirleri (aksi belirtilmediği sürece), birimli, birleşmeli ve değişmeli bir ϕ halkası üzerinde düşüneceğiz.

3.HER AKIVİS CEBİRİ LİNEERDİR

Bu bölümde Akivis problemi olarak bilinen ve herhangi bir Akivis cebirinin uygun bir B cebiri için, $Ak(B)$ Akivis cebirine izomorfik olarak gömülebilir olduğunu sorgulayan problem incelenecektir.

3.1.Akivis Cebirlerinin Evrensel Enveloping Cebiri

Bu kısımda Akivis cebirlerinin evrensel enveloping cebirlerinin varlığını inceliyeceğiz.

Önerme 3.1.1: A , bir Akivis cebiri olsun. O zaman ϕ üzerinde bir $U(A)$ cebiri ve aşağıdaki evrensel özelliklerle birlikte bir $i: A \rightarrow Ak(U(A))$ homomorfizmi vardır:

Verilen her $\rho: A \rightarrow Ak(B)$ lineer temsili için bir tek $\bar{\rho}: U(A) \rightarrow B$ cebir homomorfizmi vardır öyle ki $\rho = i \circ \bar{\rho}$ dir. Ayrıca A nın lineer olması için gerek ve yeter koşul i nin bir homomorfizm olmasıdır.

İspat: Herhangi bir V , ϕ -modülünü kullanarak V üzerinde birleşmeli olmayan $T\{V\}$ tensör cebirini kuralım:

$$T\{V\} = V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots, n > 1.$$

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes (n-i)} \quad \text{ve} \quad u \in V^{\otimes i} \text{ ile } v \in V^{\otimes j} \text{ çarpımını } u \cdot v = u \otimes v$$

olarak tanımlayalım. Örneğin;

$$V^{\otimes 2} = V \otimes V, \quad V^{\otimes 3} = [V \otimes (V \otimes V)] \oplus [(V \otimes V) \otimes V] \text{ dir. Dikkat edelim}$$

ki alışıldık birleşmeli $T(V)$ tensör cebirindeki çarpımının tersine $V \otimes (V \otimes V)$ ile

$(V \otimes V) \otimes V$ uzaylarını farklı uzaylar olarak alıyoruz. Kolaylıkla görülebilir ki $T\{V\}$ cebiri aşağıdaki evrensel özelliği sağlar:

V den herhangi bir B cebirine tanımlanan her ϕ -lineer dönüşümü, $T\{V\}$ den B ye bir ve yalnız bir tane cebir genişleme homomorfizmine sahiptir. Özel olarak V, X bazıyla ϕ üzerinde bir serbest modül ise, o zaman $T\{V\}$, X üzerindeki birleşmeli olmayan serbest cebire izomorfik olur (Zhevlakov, Slinko, Shestakov, ve Shirshov, 1982).

Şimdi A bir Akivis cebiri olsun. $T\{A\}$ cebirini ve onun bir I idealini düşünelim öyle ki $I, x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ ve $(x \otimes y) \otimes z - x \otimes (y \otimes z) - A(x, y, z)$ elemanlarından oluşan küme tarafından üretilsin. Burada $x, y, z \in A$ 'dır. $U(A) = T\{A\} / I$ diyelim ve $i : A \rightarrow U(A)$ yı

$i(x) = x + I$ diye tanımlayalım. O zaman kolaylıkla kontrol edilebilir ki, $U(A)$ ve i önermenin iddia ettiği sonucu sağlar. $\square$

Burada $U = U(A)$ nın, A 'nın evrensel enveloping cebiri olduğu görülmektedir. $T\{A\}$ cebiri bir pozitif Z -derecelendirme ye sahiptir:

$$A^{\otimes i} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_i \text{ olmak üzere}$$

$$T\{A\} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^{\otimes i}, \quad i < 0 \text{ için } A^{\otimes i} = 0$$

dır.

Bu derecelendirme $T\{A\}$ içinde aşağıdaki şekilde artan bir süzgeç belirler:

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_n \subseteq \cdots, \quad T_k = \bigoplus_{i=1}^k A^{\otimes i}.$$

Yani, $T\{A\} = \bigcup_k T_k$ ve $T_i T_j \subseteq T_{i+j}$ dir.

Sonuç olarak bu derecelendirme $U_k = T_k + I$ olacak şekilde $U(A)$ içinde de bir süzgece neden olur.

Dikkat edelim ki U , $U_1 = T_1 + I = \bigoplus_{i=1}^1 A^{\otimes i} + I = A^{\otimes 1} + I = A + I = i(A)$ tarafından doğrulanmıştır. Ayrıca $U = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ olup süzgeç yoğun'dur.(Çünkü $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T_i + I = T\{A\}/I$ dir.).

Şimdi de U süzgeçlenmiş cebir olmak üzere $grU = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (grU)_i$ cebirine bir göz atalım. Bu cebirin bileşenleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$n \leq 0$ için $gr(U)_n = 0$, $gr(U)_1 = U_1$ ve $i > 1$ için $gr(U)_i = U_i / U_{i-1}$ dir.

Eğer $\bar{a} = a + U_{i-1} \in (grU)_i$ ve $\bar{b} = b + U_{j-1} \in (grU)_j$ ise o zaman $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab + U_{i+j-1} \in (grU)_{i+j}$ dir.

Dikkat edelim ki $i(A) = U_1 = (grU)_1$ dir. Yani i homomorfizminin injektifliği problemi derecelendirilmiş cebir olan $grU(A)$ nın yapısına indirgenmiş olur. Genellikle bir süzgeçlenmiş cebir tarafından ilişkilendirilen bir derecelendirilmiş cebirden bahsetmek onun üzerinde çalışmaktan daha kolaydır. Dolayısıyla bizim burada dikkatimizi $grU(A)$ ya çevirmemizde fayda vardır.

Öncelikle A Akivis cebirindeki işlemlerin aşikar olduğu durumu inceleyelim: $\forall a, b, c \in A$ için $[a, b] = A(a, b, c) = 0$ olsun. Bu durumda $T\{A\}$ cebirinin I ideali aşağıdaki homojen elemanlar tarafından doğrulur:

$$a \otimes b - b \otimes a, (a \otimes b) \otimes c - a \otimes (b \otimes c), \forall a, b, c \in A. \quad (2)$$

$T\{A\}$ Z-derecelendirilmiş olduğundan $U(A) = T(A)/I$ da Z-derecelendirilmiş olur. Bu durumda grU , U ya izomorf olur. Şimdi bu cebirin tam olarak nasıl oluşturulacağını açıklayalım.

X bir ϕ -modül ve $S(X) = \sum_{i=0}^{\infty} S^i(X)$ onun simetrik cebiri olsun.

$1 \leq i \leq 3$ için $V^i(X) = S^i(X)$ ve $i > 3$ için tümevarımla

$V^i(X) = \bigoplus_{j=1}^{i-1} V^j(X) \otimes V^{i-j}(X)$ olarak tanımlayalım. $V(X) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V^i(X)$ direkt

toplamını düşünelim ve $V(X)$ üzerindeki çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $v_i \in V^i(X)$ ve $v_j \in V^j(X)$ için;

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} v_i v_j \in S^{i+j}(X), & i+j \leq 3 \\ v_i \otimes v_j \in V^{i+j}(X), & i+j > 3 \end{cases}$$

öyle ki burada ab yazılışı ile, a ve b 'nin simetrik cebir olan $S(X)$ içindeki çarpımı anlaşılacaktır.

Önerme 3.1.2: A bir aşikar Akivis cebiri olsun. O zaman $U(A)$ evrensel enveloping cebiri ve onunla ilişkilendirilmiş olan $grU(A)$ derecelendirilmiş cebiri yukarıda tanımlanmış olan $V(A)$ cebirine izomorfiktir.

İspat: A cebirini $S^1(A)$ ile özdeşleştirelim. Bu durumda A yı $V(A)$ nın bir ϕ -altmodülü olarak kabul edebiliriz. $\forall a, b, c \in A$ için $V(A)$ içinde aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$a \cdot b - b \cdot a = ab - ba = 0, \text{ ve } (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) = abc - abc = 0.$$

Dolayısıyla A , $Ak(V(A))$ 'nın bir aşikar altcebiri olur ve A , $V(A)$ yı doğurduğundan, her $a \in A$ için $\pi(i(a)) = a$ olacak şekilde bir $\pi: U(A) \rightarrow V(A)$ cebir epimorfizmi vardır.

Tersine olarak , her $a, b, c \in A$ için $U(A)$ içinde aşağıdaki eşitlik vardır:

$$i(a)i(b) - i(b)i(a) = i([a, b]) = i(0) = 0, \quad \text{ve}$$

$$(i(a)i(b))i(c) - i(a)(i(b)i(c)) = i(A(a, b, c)) = i(0) = 0.$$

$a \rightarrow i(a)$ dönüşümü, $ab \rightarrow i(a)i(b)$ ve $abc \rightarrow i(a)i(b)i(c)$ dönüşümlerine $k=2,3$ için $S^k(A)$ dan $U^k(A) = A^{\otimes k} + I$ ye doğru olacak şekilde genişletilebilir. Kolaylıkla görülebilir ki tensör çarpımlarının evrensel özellikleriyle birlikte bu dönüşümler tümevarımla bir $\bar{i}: V(A) \rightarrow U(A)$ cebir homomorfizmine genişletilebilir. Açıktır ki $\bar{i}$ ve π karşılıklı olarak tersinirdir. Dolayısıyla $\bar{i}$ bir otomorfizmdir. O halde $V(A) \cong U(A)$ olur. $\square$

Sonuç 3.1.1: Her A Akivis cebiri için derecelendirilmiş cebirlerin öyle bir $\tau: V(A) \rightarrow grU(A)$ epimorfizmi vardır ki her $a \in A$ için $\tau(a) = i(a)$ 'dır.

İspat: I , (2) formundaki elemanlar tarafından doğurulan ideal olmak üzere $V(A)$ 'nın $T(A)/I$ cebirine izomorfik olduğunu gösterdik. Öte yandan her $\bar{a} = i(a), \bar{b} = i(b) \in (grU)_1$ için grU içinde aşağıdakilere sahibiz:

$$\bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{a} = i(a)i(b) - i(b)i(a) + U_1 = i([a, b]) + U_1 = U_1 = \bar{0} \quad (\text{Buradaki } \bar{0} \equiv 0_{(grU)_2}).$$

Ve benzer olarak;

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{c} - \bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = i(A(a, b, c)) = \bar{0} \quad (\text{Buradaki } \bar{0} \equiv 0_{(grU)_3}).$$

Şimdi $\tau : T(A) \rightarrow grU$ doğal epimorfizmini düşünelim öyle ki $\forall a \in A$ için $\tau(a) = i(a)$ olsun. (2) elemanlarının grU içerisinde sıfıra denk olmasıyla I ideali τ 'nın çekirdeği olur. Dolayısıyla grU , $V(A)$ 'nın homomorfik görüntüsü olur. $\square$

Örnek 3.1.1: $A = \phi \cdot a$ bir boyutlu trivial Akivis cebiri olsun öyle ki $[a, a] = A(a, a, a) = 0$ olsun. O zaman $U(A)$, ϕ üzerinde aşağıdaki bazla birlikte bir serbest modüldür:

$$\begin{aligned} & a, a^2, a^3, \\ & a^2a^2, a^3a, aa^3, \\ & a^2a^3, a^3a^2, (a^2a^2)a, (a^3a)a, a(a^2a^2), a(a^3a), a(aa^3), \\ & \dots, \end{aligned}$$

Öyle ki burada baz elemanları birleşmeli olmayan kelimeler gibi çarpılmıştır(uzunluğu 3 olan bütün altkelimeler birleşmeli olacak şekilde).

3.2.Akivis Cebirlerinin Lineerliği

A bir Akivis cebiri olsun. A bir serbest ϕ -modül iken $U(A)$ 'nın da aynı ϕ -modül yapısına sahip olduğu ve A 'nın lineer olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.2.1: Eğer bir Akivis cebiri uygun bir B cebiri için $Ak(B)$ Akivis cebirinin içine izomorfik olarak gömülebiliyorsa bu Akivis cebirine lineerdir denir.

A bir Akivis cebiri, ve $\{e_i\}$ A 'nın ϕ -modül olarak bir bazı olsun. $V(A)$ 'yi tekrar gözönüne alalım ve üzerine $*$ çarpımını tanımlayalım. $a \in V^i(A)$ ve $b \in V^j(A)$ olsun. Tanımı iki parçada vereceğiz:

1. Eğer $i + j > 3$ ise o zaman $a * b = a \otimes b \in V^{i+j}(A)$.

2. $i + j \leq 3$ için A 'nın $\{e_i\}$ bazını kullanacağız. Açıkça görülür ki $\{e_i\}$, $V^1(A)$ 'nın da bazıdır. Ayrıca $V^2(A)$ ve $V^3(A)$, sırasıyla $e_i e_j$ ($i \leq j$) ve $e_i e_j e_k$ ($i \leq j \leq k$) bazlarıyla serbest ϕ -modül olurlar. Şimdi $a * b$ çarpımı $i + j \leq 3$ durumu için aşağıdaki kurallarla tam olarak tanımlanır:

$$e_r * e_s = \begin{cases} e_r e_s, & r \leq s, \\ e_s e_r + [e_r, e_s], & r > s, \end{cases}$$

$$(e_r e_s) * e_k = \begin{cases} e_r e_s e_k, & r \leq s \leq k, \\ e_r e_k e_s + A(e_r, e_s, e_k) - A(e_r, e_k, e_s) + e_r * [e_s, e_k], & r \leq k < s, \\ e_k e_r e_s + e_r * [e_s, e_k] + [e_r, e_k] * e_s + A(e_r, e_s, e_k) - A(e_r, e_k, e_s), & k \leq r \leq s, \end{cases}$$

$$e_r * (e_s e_k) = \begin{cases} e_r e_s e_k - A(e_r, e_s, e_k), & r \leq s \leq k, \\ e_s e_r e_k - A(e_r, e_s, e_k) + [e_r, e_s] * e_k, & s < r \leq k, \\ e_s e_k e_r - e_s * [e_k, e_r] - [e_s, e_r] * e_k + \\ - A(e_s, e_k, e_r) + A(e_s, e_r, e_k) - A(e_r, e_s, e_k), & k \leq r \leq s. \end{cases}$$

$\langle V(A), +, * \rangle$ cebirini $\tilde{V}(A)$ ile gösterelim.

Teorem 3.2.1: A bir Akivis cebiri, ve $\{e_i\}$ A 'nın ϕ -modül olarak bir bazı olsun. O zaman $U(A)$ evrensel enveloping cebiri, $\tilde{V}(A)$ cebirine evrensel gömme dönüşümü olan $\varepsilon : A \rightarrow V^1(A)$, $\varepsilon(a) = a$ ile birlikte izomorfiktir.

İspat: Öncelikle $\varepsilon : A \rightarrow Ak(\tilde{V}(A))$ dönüşümünün bir cebir homomorfizmi olduğunu gösterelim. $Ak(\tilde{V}(A))$ içinde işlemleri $\langle a, b \rangle = a * b - b * a$ ve $\langle a, b, c \rangle = (a * b) * c - a * (b * c)$ olacak şekilde yazalım. Aynı zamanda $a \in A$ 'yı da $\varepsilon(a) \in V^1(A)$ ile belirleyeceğiz. $i \leq j$ olmak üzere e_i, e_j A 'nın bazından gelen elemanlar olsun. O zaman

$$\langle e_i, e_j \rangle = e_i * e_j - e_j * e_i = e_i e_j - (e_i e_j - [e_j, e_i]) = [e_i, e_j],$$

Dolayısıyla $\forall a, b \in A$ için $\langle a, b \rangle = [a, b]$ elde edilir.

Benzer şekilde herhangi e_i, e_j, e_k temel elemanlarının $\langle e_r, e_s, e_k \rangle$ işlemi 6 farklı durum da aşağıdaki şekilde incelendiğinde $\langle e_r, e_s, e_k \rangle = A(e_r, e_s, e_k)$ bulunur.

1. $r \leq s \leq k$.Buradan hemen

$$\langle e_r, e_s, e_k \rangle = A(e_r, e_s, e_k).$$

2. $s < r \leq k$. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle e_r, e_s, e_k \rangle &= (e_s e_r + [e_r, e_s]) * e_k - e_r * (e_s e_k) \\ &= e_s e_r e_k + [e_r, e_s] * e_k - e_s e_r e_k + A(e_r, e_s, e_k) - [e_r, e_s] * e_k \\ &= A(e_r, e_s, e_k) \end{aligned}$$

3. $s \leq k < r$. O zaman

$$\begin{aligned} \langle e_r, e_s, e_k \rangle &= (e_s e_r + [e_r, e_s]) * e_k - e_r * (e_s e_k) \\ &= e_s e_k e_r + [e_r, e_s] * e_k + A(e_s, e_r, e_k) - A(e_s, e_k, e_r) + e_s * [e_r, e_k] - e_s e_k e_r + \\ &\quad + A(e_s, e_k, e_r) - A(e_s, e_r, e_k) + A(e_r, e_s, e_k) + e_s * [e_k, e_r] + [e_s, e_r] * e_k \\ &= A(e_r, e_s, e_k) \end{aligned}$$

4. $r \leq k < s$. Burada

$$\begin{aligned}\langle e_r, e_s, e_k \rangle &= (e_r e_s) * e_k - e_r * (e_k e_s + [e_s, e_k]) \\ &= e_r e_k e_s + A(e_r, e_s, e_k) - A(e_r, e_k, e_s) + e_r * [e_s, e_k] - e_r e_k e_s \\ &\quad + A(e_r, e_k, e_s) - e_r * [e_s, e_k] = A(e_r, e_s, e_k)\end{aligned}$$

5. $r \leq k < s$. Bu durumda

$$\begin{aligned}\langle e_r, e_s, e_k \rangle &= (e_r e_s) * e_k - e_r * (e_k e_s + [e_s, e_k]) \\ &= e_k e_r e_s + e_r * [e_s, e_k] + [e_r, e_k] * e_s + A(e_r, e_s, e_k) - A(e_r, e_k, e_s) - e_k e_r e_s + \\ &\quad + A(e_r, e_k, e_s) - [e_r, e_k] * e_s - e_r * [e_s, e_k] \\ &= A(e_r, e_s, e_k).\end{aligned}$$

6. Ve son olarak $k < s < r$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\langle e_r, e_s, e_k \rangle &= (e_s e_r + [e_r, e_s]) * e_k - e_r * (e_k e_s + [e_s, e_k]) \\ &= e_k e_s e_r + e_s * [e_r, e_k] + [e_s, e_k] * e_r + A(e_s, e_r, e_k) - \\ &\quad - A(e_s, e_k, e_r) + [e_r, e_s] * e_k - e_k e_s e_r + \\ &\quad + A(e_k, e_s, e_r) - A(e_k, e_r, e_s) + A(e_r, e_k, e_s) + e_k * [e_s, e_r] + [e_k, e_r] * e_s - e_r * [e_s, e_k] \\ &= \langle [e_s, e_k], e_r \rangle + \langle [e_r, e_s], e_k \rangle + \langle [e_k, e_r], e_s \rangle - \sum_{\sigma \in \text{Sym}\{r,s,k\}} (sg\sigma) \cdot A(e_{\sigma(r)}, e_{\sigma(s)}, e_{\sigma(k)}) \\ &= 3. \text{ ve 1. den } = A(e_r, e_s, e_k) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Buradan $\forall a, b, c \in A$ için $\langle a, b, c \rangle = A(a, b, c)$ bulunur. Dolayısıyla

$\varepsilon : A \rightarrow Ak(\tilde{V}(A))$ bir Akivis cebiri homomorfizmidir.

Sonuç olarak, bir $\pi: U(A) \rightarrow \tilde{V}(A)$, $\pi(i(a)) = a$ olacak şekilde cebir homomorfizmi vardır. $\tilde{V}(A)$ cebiri bir yoğun artan $\{V_i | i = 1, 2, \dots\}$ süzgecine sahiptir, öyle ki $V_i = \sum_{j=1}^i V^j(A)$ dir ve kolaylıkla görülür ki $\pi(U_k) \subseteq V_k$ dir. Buradan π , ilgili derecelendirilmiş cebirlerin bir homomorfizmi olan ve her $a \in A$ için $\bar{\pi}(i(a)) = a$ olarak tanımlanan $\bar{\pi}: grU \rightarrow gr\tilde{V}(A)$ homomorfizmini belirler. Fakat $gr\tilde{V}(A) \cong V(A)$ olduğu kolaylıkla görülür, ve Sonuç 1 den her $a \in A$ için $\tau(a) = i(a)$ olacak şekilde bir $\tau: V(A) \rightarrow grU$ derecelendirilmiş cebir homomorfizmi vardır. Bu durum, $grU(A)$ ve $V(A)$ nin derecelendirilmiş izomorfik cebirler olduğunu gösterir. Özel olarak, $grU(A)$ bir serbest Z -derecelendirilmiş ϕ -modül olup, kolaylıkla görülür ki ϕ -modül olarak $U(A)$ ve $grU(A)$ izomorfiktir. $U(A)$ içinde $\{u_i\}$ bazını, $\{\bar{u}_i\}$ $grU(A)$ nin derecelendirilmiş bazı olacak şekilde seçersek; o zaman hemen $\{\pi(u_i)\}$, ϕ -modül olan $\tilde{V}(A)$ 'nin bir bazı olur, ve dolayısıyla $\ker \pi = 0$ olup, π bir homomorfizm olur. $\square$

İspat boyunca Sonuç 1 'i tamamlayacak olan aşağıdaki sonucu elde edilmiştir:

Sonuç 3.2.2: A , bir serbest ϕ -modül olan bir Akivis cebiri olsun. O zaman $grU(A)$ derecelendirilmiş cebiri, $V(A)$ ya izomorfiktir.

Sonuç 3.2.3: Bir serbest ϕ -modül olan her Akivis cebiri lineerdir.

Örnek 3.2.1: $A = \phi \cdot a$, $[a, a] = 0$ ve $A(a, a, a) = a$ işlemleriyle bir Akivis cebiri olsun. O zaman $U(A)$, Örnek 3.1.1 deki aynı baz ve aşağıda kuralları verilen $*$ işlemi ile birlikte ϕ üzerinde bir serbest modüldür.

$$a * a = a^2, \quad a^2 * a = a^3, \quad a * a^2 = a^3 - a,$$

ve Örnek 3.1.1 ‘deki bütün diğer çarpımlar:

$$\begin{aligned} &a, a^2, a^3, \\ &a^2 a^2, a^3 a, aa^3, \\ &a^2 a^3, a^3 a^2, (a^2 a^2)a, (a^3 a)a, a(a^2 a^2), a(a^3 a), a(aa^3), \\ &\dots, \end{aligned}$$

Örneğin ,

$$a * (a * (a * a^2)) = a * (a * (a^3 - a)) = a * (aa^3 - a^2) = a(aa^3) - a^3 + a \text{ dır.}$$

4.SERBEST AKIVİS CEBİRLERİ

Bu bölümde serbest Akivis cebirlerinin kuruluşunu verip bu cebirlerin Schreier cebirleri sınıfında olduğunu göstereceğiz.

4.1.Serbest Akivis Cebirlerinin Kurulması

$X \neq \emptyset$ kümesi verildiğinde X üzerindeki serbest Akivis cebiri aşağıdaki şekilde oluşturulur:

Her n pozitif tamsayısı için X_n kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$X_1 = X ,$$

$$X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p})$$

$$M(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ olsun.}$$

Her $a, b \in M(X)$ için $a \in X_p, b \in X_q$ ve $(a, b) \in X_p \times X_q$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{N}$ vardır. $n = p + q$ olsun. O zaman $(a, b) \in X_p \times X_{n-p}$ olur.

(a, b) nin $X_p \times X_{n-p}$ den X_n içine olan doğal injeksiyon altındaki görüntüsünü (ab) ile gösterelim.

$a \in X_p$ olacak şekildeki p sayısına a nın uzunluğu denir. Bunu $l(a)$ ile göstereceğiz. Uzunluğu 1 olan elemanlar X in elemanlarıdır.

Uzunluğu 1 den büyük olan elemanlar için $l(a) < l(c)$ ve $l(b) < l(c)$ olmak üzere $c = ab$ yazılır, $l(c) = l(a) + l(b)$ dir.

Şimdi de $Y_1 = X$ olmak üzere , her $n \geq 3$ pozitif tamsayısı için Y_n kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$Y_n = \bigcup_{p,q,r \geq 1} (Y_p \times Y_q \times Y_r), p + q + r = n,$$

$$M(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \text{ olsun.}$$

Her $a, b, c \in M(Y)$ için $a \in Y_p, b \in Y_q, c \in Y_r$ ve $(a, b, c) \in Y_p \times Y_q \times Y_r$ olacak şekilde $p, q, r \in \mathbb{N}$ vardır. $n = p + q + r$ olsun.

(a, b, c) nin $Y_p \times Y_q \times Y_r$ den Y_n içine olan doğal injeksiyon altındaki görüntüsünü (abc) ile gösterelim.

$a \in Y_p$ olacak şekildeki p sayısına a nın uzunluğu denir. Bunu $l(a)$ ile göstereceğiz.

Uzunluğu 1 den büyük olan elemanlar için $l(a) < l(d)$, $l(b) < l(d)$ ve $l(c) < l(d)$ olmak üzere $d = abc$ yazılır, $l(d) = l(a) + l(b) + l(c)$ dir.

Şimdi $M = M(X) \cup M(Y)$ diyelim.

F herhangi bir cisim olsun. F üzerinde bazı M olan vektör uzayını düşünelim. M deki çarpımları bu vektör uzayına genişletelim.

Böylece birleşmeli olmayan bir cebir elde edilmiş olur. Bu cebire N diyelim.

I, N nin aşağıdaki formda olan elemanları tarafından üretilen ideali olsun:

$$Q(a) = (aa)$$

$$A(a, b, c) = ((ab)c) + ((bc)a) + ((ca)b) - (abc) - (bca) - (cab) + (bac) + (acb) + (cba)$$

$$F(X) = N/I \text{ cebiri } X \text{ kümesi üzerinde serbest Akivis cebiridir.}$$

Tanım 4.1.1: C bir cebir olsun. $M \subseteq C$ (altküme) olsun.

$alg_C \langle M \rangle$ ile M tarafından üretilen altceberi, $idl_C \langle M \rangle$ ile de M tarafından üretilen ideali tanımlayalım.

Lemma 4.1.1: A bir Akivis cebiri, M de onun bir altkümesi olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

- (1) $alg_A \langle M \rangle = (alg_{U(A)} \langle M \rangle) \cap A$;
- (2) $idl_A \langle M \rangle = (idl_{U(A)} \langle M \rangle) \cap A$.

İspat: $alg_A \langle M \rangle$ 'nin bir bazı $h_1, h_2, \dots, h_\beta, \dots$ olsun. Bu bazı $f_1, f_2, \dots, f_\gamma, \dots$ elemanlarıyla birlikte A 'nın bir bazına genişletelim. O zaman $h_1, h_2, \dots, h_\beta, \dots, f_1, f_2, \dots, f_\gamma, \dots$ den gelen v_0 -kelimeleri $U(A)$ 'nın bir bazını oluşturur (Shestakov, 1999). Şu açıktır ki $h_1, h_2, \dots, h_\beta, \dots$ den gelen v_0 -kelimeleri $alg_{U(A)} \langle M \rangle$ için bir baz oluşturur. Bu, lemmanın ilk kısmını ispat eder.

Şimdi $h_1, h_2, \dots, h_\beta, \dots$ $idl_A \langle M \rangle$ için bir baz olsun. O zaman $h_1, h_2, \dots, h_\beta, \dots, f_1, f_2, \dots, f_\gamma, \dots$ alfabelerinden gelen ve $\exists i, h_i$ 'yi içeren v_0 -kelimeleri $idl_{U(A)} \langle M \rangle$ için bir baz oluşturur. Dolayısıyla $\exists h_i \in idl_{U(A)} \langle M \rangle$ olup $A \cap idl_{U(A)} \langle M \rangle \neq \emptyset$ olacaktır. □

4.2.Serbest Akivis Cebirlerinin Altcebirleri

$A = Ak \langle X \rangle$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üzerinde bir serbest Akivis cebiri olsun. Şimdi A kümesi üzerinde derece fonksiyonu olarak adlandıracağımız d fonksiyonunu tanımlayalım, öyle ki her $x \in X$ için $d(x_i) = 1$ olsun.

Tanım 4.2.1: $u \in A$ ve $u = \sum_i k_i$ iken her i, j için $d(k_i) = d(k_j)$ ise u ya A 'nın homojen elemanı denir.

$u, v, w \in A$ elemanları için $[u, v] \neq 0$ ve $(u, v, w) \neq 0$ ise $d[u, v] = d(u) + d(v)$ ve $d(u, v, w) = d(u) + d(v) + d(w)$ diye yazalım. O zaman, $i \geq 1$ için A_i derecesi i olan homojen uzay olmak üzere A, A_i altuzaylarının direkt toplamıdır. Yani;

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k \oplus \cdots$$

dır.

Böylece $U(A)$ evrensel enveloping cebirinin serbest üreteç kümesi X olan ve birleşmeli olmayan bir serbest cebir olduğu söylenebilir (Shestakov, 1999). Bu cebiri $F\{X\}$ ile gösterelim. d derece fonksiyonu, bir tek şekilde $F\{X\}$ cebirine genişletilebilir.

$f \in A$ veya $f \in U(A)$ ise $\overline{f}$ ile f nin en yüksek dereceli homojen kısmını gösterelim.

Şimdi de serbest Akivis cebirindeki indirgenmiş ve serbest kümeleri inceleyelim.

Tanım 4.2.2: $\{f_1, \dots, f_n\}$, A da verilmiş bir küme olsun. Eğer her i için $\overline{f_i} \notin \text{alg}_A \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_{i-1}}, \overline{f_{i+1}}, \dots, \overline{f_n} \rangle$ ise $\{f_1, \dots, f_n\}$ kümesine indirgenmiş küme denir.

Tanım 4.2.3: F sonlu üreteçli bir serbest cebir ve $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq F$ olsun. Eğer

$$h(f_1, \dots, f_n) = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir bağıntı yoksa $\{f_1, \dots, f_n\}$ kümesine cebirsel bağımsızdır denir. Aksi halde $\{f_1, \dots, f_n\}$ kümesine cebirsel bağımlıdır denir.

Tanım 4.2.4: A cebiri içinde bir $\{g_1, \dots, g_n\}$ kümesi ürettiği alt cebir için serbest üreteç kümesi ise bu kümeye serbest küme denir.

Teorem 4.2.1: Akivis cebirlerinin sınıfı Schreier dir.

İspat: A bir serbest Akivis cebiri olsun. A da her indirgenmiş kümenin serbest olduğunu göstermek yeterlidir (Lewin, 1968).

Varsayalım ki A nın bir indirgenmiş $\{f_1, \dots, f_n\}$ kümesi serbest olmasın. Yani $\{f_1, \dots, f_n\}$ indirgenmiş kümesi cebirsel bağımlı olsun

Buradan $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \dots, \overline{f_n}$ de cebirsel bağımlı olurlar. A içinde $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \dots, \overline{f_n}\}$ sisteminin cebirsel bağımlılığı, $U(A)=F\{X\}$ de de cebirsel bağımlılığı gerektirir. $U(A)=F\{X\}$ birleşmeli olmayan serbest cebir olup, bu şekildeki bütün birleşmeli olmayan cebirler Schreier olduğundan $\overline{f_i} \in \text{alg}_{U(A)} \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_{i-1}}, \overline{f_{i+1}}, \dots, \overline{f_n} \rangle$ olacak şekilde bir i vardır. $1 \leq i \leq n$ için $\overline{f_i} \in A$ olduğundan $\overline{f_i} \in \text{alg}_A \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_{i-1}}, \overline{f_{i+1}}, \dots, \overline{f_n} \rangle$ dir. Bu durum $\{f_1, \dots, f_n\}$ kümesinin indirgenmiş oluşu ile çelişir. $\square$

Tanım 4.2.5: P , bir F serbest cebirinin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki dönüşümlere elemanter dönüşümler denir:

- 1) P nin elemanlarına uygulanan tersinir lineer dönüşümler.
- 2) Bir $p \in P$ için

$$p \rightarrow p + h(p_1, \dots, p_n) \quad , \quad p_1, \dots, p_n \in P - \{p\}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler.

Teorem 4.2.6 (Cohn, 1964): F sonlu bir X kümesi üzerinde bir serbest cebir olsun. O zaman F nin her otomorfizmi X e elemanter dönüşümlerinin ard arda uygulanmasıyla elde edilir.

Bu şekilde elde edilen otomorfizmlere tame otomorfizm denir.

Sonuç 4.2.1: Sonlu üretilmiş serbest Akivis cebirlerinin otomorfizmleri tame dir.

Teorem 4.2.2: Sonlu üretilmiş serbest Akivis cebirleri residual sonlu dur.

İspat: $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ ve $f \notin \text{alg}_A \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ olsun. O zaman $f \notin \text{alg}_{U(A)} \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ olur. $F\{X\}$ cebirinin her sonlu doğurulmuş altcebiri residual sonludur (Kryazhovskikh, 1980). Aynı zamanda Schreier özelliğinden dolayı bu alt cebirler serbesttirler de. Sonuç olarak bir sonlu doğurulmuş B cebiri ile φ homomorfizmi vardır öyle ki $\varphi : F\{X\} \rightarrow B$ ve $\varphi(f) \notin \text{alg}_B \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2), \dots, \varphi(f_n) \rangle$ dir. Buradan $\varphi(f) \notin \text{alg}_{Ak(B)} \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2), \dots, \varphi(f_n) \rangle$ olduğu görülür. $\psi = \varphi|_{Ak \langle X \rangle} : Ak \langle X \rangle \rightarrow Ak(B)$ homomorfizmini düşünelim. O zaman $\psi(f) \notin \text{alg}_{Ak(B)} \langle \psi(f_1), \psi(f_2), \dots, \psi(f_n) \rangle$ olur. $\square$

5.BİRLEŞMELİ OLMAYAN SERBEST CEBİRLER İÇİN BOYUT FORMÜLLERİ

Bu bölümde, Shestakov'un teoremini kullanarak Akivis elemanları için bir ardışık boyut formülü vereceğiz.

5.1.Akivis Elemanları

Bu kısımda birleşmeli olmayan serbest cebirlerde multiderecesi $(n) = (n_1, \dots, n_N) \in N^N$ olan Akivis elemanlarının oluşturduğu $A_{(n)}$ altuzaylarının bazlarını ve boyutlarını inceleyeceğiz.

Tanım 5.1.1(Catalan sayıları): C_n katalan sayıları ve $C(X)$ üreteç fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad C(X) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Biz bunun değişik bir versiyonunu kullanacağız:

$$K_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}, \quad K(X) = \frac{3 - \sqrt{1-4x}}{2} = 1 + xC(X)$$

K_n , n -inci dereceden bir çarpımın arasına konabilecek parantezlerin tüm değişik yollarının sayısıdır. $K_0=1$ olduğu kabul edilecektir.

Örnek 5.1.1:

$$n = 2 \text{ için: } K_2 = 1 \quad (ab)$$

$$n = 3 \text{ için: } K_3 = 2 \quad (ab)c, a(bc)$$

$$n = 4 \text{ için: } K_4 = 5 \quad (ab)(cd), (a(bc))d, a((bc)d), ((ab)c)d, a(b(cd))$$

⋮

⋮

X boş olmayan sonlu bir küme olsun öyle ki $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_N \text{ öyle ki her } i \neq j \text{ için } X_i \cap X_j = \emptyset \quad (1)$$

olacak şekilde N kümeye parçalansın. Yani $X_1, X_2, \dots, X_N$, X in bir parçalanışı olsun. Şimdi $1 \leq i \leq N$ için $r_i = |X_i|$ olarak tanımlıyalım. W, F cismi üzerinde X tarafından üretilen serbest cebir olsun.

Burada, W içindeki her w monomialini sıralı N -li olarak düşüneceğiz öyle ki bu sıralı N -li her X_i den gelen w içindeki eleman sayılarını belirleyecek niteliktedir.

Örneğin $N = 2$, $X = \{a, b, c\}$, $X_1 = \{a\}$, $X_2 = \{b, c\}$ için $w = ca \in W$ monomialine karşılık gelecek sıralı ikili $(1,1)$ olarak bulunur. Çünkü w içinde $X_1 = \{a\}$ dan 1, $X_2 = \{b, c\}$ den 1 eleman kullanılmıştır.

Bu sıralı N -li w nun multiderecesi olarak adlandırılır. Multiderece ile $\mathbb{N}^N$ nin bir elemanını kastediyoruz. Ayrıca her $x \in X_i$ ye bir $e_i \in \mathbb{N}^N$ multiderecesi karşılık gelir öyle ki $1 \leq i \leq N$ için $e_{ij} = \delta_{ij}$ dir.

Şimdi $W_{(n)}$, bütün $(n) = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ multidereceye sahip olan birleşmeli olmayan monomiallerin gerdiği küme olsun. W yu, kendisini bir multiderecelendirilmiş cebir haline getiren sonlu boyutlu uzayların bir direkt toplamı olarak yazabiliriz:

$$W = \bigoplus_{(n) \in \mathbb{N}^N} W_{(n)}, \quad W_{(m)} W_{(n)} \subseteq W_{(m)+(n)}$$

Her $n \in \mathbb{N}^N$ için $\Sigma(n) = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ yazacağız. Eğer W içinde bir w monomiali (n) -multidereceye sahipse o zaman $\Sigma(n)$ ye w nun toplam derecesi diyeceğiz.

İspatı (Bremner, Hentzel ve Peresi, 2004) de verilen aşağıdaki önerme W nun $W_{(n)}$ altuzaylarının boyutunu belirlemesi bakımından önemlidir. $W_{(n)}$ altuzayının boyutunu $\text{boy}W_{(n)}$ ile gösterelim.

Önerme 5.1.1: W nun $W_{(n)}$ altuzaylarının boyutu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\text{boy}W_{(n)} = K_{\Sigma(n)} \binom{\Sigma(n)}{n_1, \dots, n_N} r_1 \dots r_N .$$

Aşağıdaki kuvvet serisi de W nun $W_{(n)}$ altuzaylarının boyutu için üretici fonksiyondur:

$$\sum_{(n) \in \mathbb{N}^N} \text{boy}W_{(n)} x_1 x_2 \dots x_N = K(r_1 x_1 + \dots + r_N x_N) .$$

Şimdi W^α ile W nun üzerinde kurulduğu vektör uzayı üzerindeki ikili ve üçlü işlemler altındaki cebiri gösterelim. Fakat buradaki ikili ve üçlü işlemler yerine komutator ve asosyator işlemlerini kullanalım. O zaman W^α bir Akivis cebiri olur.

Tanım 5.1.1(Akivis elemanları): W nun bir A altuzayını W nun Akivis elemanı tanımlayacağız öyle ki A , W^α nın X tarafından ikili ve üçlü işlemleri ile birlikte üretilen altcebiridir.

Dolayısıyla A altuzayı direkt toplam parçalanışına sahip olup;

$$A_{(n)} = A \cap W_{(n)} \text{ ve } A = \bigoplus_{(n) \in \mathbb{N}^N} A_{(n)} \text{ dir ve}$$

$$[A_{(m)}, A_{(n)}] \subseteq A_{(m)+(n)} , [A_{(m)}, A_{(n)}, A_{(p)}] \subseteq A_{(m)+(n)+(p)}$$

özellikleri vardır. Dikkat edilirse A nın W^a nın bir altcebiri olduğu kolaylıkla görülür.

5.2.Hesaplanabilir Sonuçlar

Bu kısımda, bir eleman tarafından üretilen ve birleşmeli olmayan serbest cebiri ele alacağız. Burada düşük dereceler için hesaplama tekniğimizi açıklayacağız. Bu teknik, hesaplamaların elle veya Maple gibi bir bilgisayar cebir sistemi ile yapılabilmesini de sağlamaktadır. 9 dereceden yukarısı için teknik, hesaplama açısından etkisizdir.

Sadece bir üreteç olduğu için $A_{(n)}$ yerine A_n yazacağız öyle ki A_n , direkt toplam ayrışımı içindeki homojen uzayları gösterecektir.

Önerme 5.2.1: $X = \{x\}$ ise o zaman aşağıdaki boyutlar elde edilir:

$$\begin{array}{lll} \text{boy}A_1 = 1 & \text{boy}A_2 = 0 & \text{boy}A_3 = 1 \\ \text{boy}A_4 = 1 & \text{boy}A_5 = 4 & \text{boy}A_6 = 7 \\ \text{boy}A_7 = 23 & \text{boy}A_8 = 53 & \text{boy}A_9 = 157. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{İspat: } A_1 \subseteq A \text{ altuzayının bir bazı:} & x \\ A_2 \subseteq A \text{ altuzayının bir bazı:} & \text{yok} \\ A_3 \subseteq A \text{ altuzayının bir bazı:} & [x, x, x] \\ A_4 \subseteq A \text{ altuzayının bir bazı:} & [[x, x, x], x] \text{ dır.} \end{array}$$

$n \geq 5$ için A_n 'in boyutunu hesaplamak için bir ters simetrik ikili işlem ve bir üçlü işlem içeren ve dereceleri n olan tüm olası monomialleri oluşturacağız.

Bu monomialler Akivis elemanlarının oluşturduğu altuzayı gerer. T_n ile n dereceli Akivis elemanlarının sayısını gösterelim. Komutatör ve asosyatörleri orijinal birleşmeli olmayan çarpıma dayanarak genişletelim. Bu genişlemenin katsayılarını

$T_n \times K_n$ matrisinde toplarsak; bu matrisin rankı $boyA_n$ 'i verir. Yani; $rank(T_n \times K_n) = boyA_n$ dir. Burada $rank(T_n \times K_n)$ $T_n \times K_n$ nin rankını göstermektedir.

Derecesi 5 olan Akivis elemanlarının uzayı 4 eleman tarafından doğurulur:

$$[[[x, x, x], x], x], [[x, x, x], x, x], [x, [x, x, x], x], [x, x, [x, x, x]]$$

Yukarıdaki elemanların 14 birleşmeli olmayan monomialin bazına göre genişleme katsayılarının bulunduğu $T_5 \times K_5 = 4 \times 14$ matrisi, Tablo1 'de gösterilmektedir:

Tablo1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi bu matrisin rankına bakalım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rank(T_5 \times K_5) = 4 \Rightarrow boyA_5 = 4$$

tür.

Tablo1'deki matris oluşturulurken kullanılan monomialler ise aşağıda her bir kolona denk gelecek şekilde sırasıyla verilmiştir:

MONOMİALLER:

1. $((xx)x)x$
2. $(x(xx))x$
3. $((xx)(xx))x$
4. $x((xx)x)x$
5. $x(x(xx))x$
6. $((xx)x)(xx)$
7. $x(xx)(xx)$
8. $(xx)((xx)x)$
9. $(xx)(x(xx))$
10. $x(((xx)x)x)$
11. $x((x(xx))x)$
12. $x((xx)(xx))$
13. $x(x((xx)x))$
14. $x(x(x(xx)))$

GERENLER:

$$\begin{aligned} &[[[x, x, x], x], x] \\ &[[x, x, x], x, x] \\ &[x, [x, x, x], x] \\ &[x, x, [x, x, x]] \end{aligned}$$

Örnek olarak birinci satırın oluşumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} [[x, x, x], x] &= (((xx)x)x)x - ((x(xx))x)x - (x((xx)x))x + (x(x(xx)))x + \\ &\quad - x(((xx)x)x) + x((x(xx))x) + x(x((xx)x)) - x(x(x(xx))). \end{aligned}$$

Dolayısıyla birinci satırın katsayıları; 1,(-1),0,(-1),1,0,0,0,0,(-1),1,0,1,(-1) olarak bulunur. Bu katsayılara genişleme katsayıları denir.

Benzer yolla aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

n	$T_n \times K_n$	$rank(T_n \times K_n) = boyA_n$
6	7×42	7
7	23×132	23
8	54×429	53*
9	162×1430	157

* : Bu sayı, en az sayıda eleman içeren geren kümesinin eleman sayısı olup bu küme lineer bağımsız değildir. □

Şimdi derecesi 6 ve 7 olan Akivis elemanlarının uzaylarının bazlarını görelim:

A_6 'nın bir bazı:

$$\begin{array}{ll} \lll[x, x, x], x], x], x] & \lll[x, x, x], x], x, x] \\ \lll[x, x, x], x, x], x] & [x, \lll[x, x, x], x], x] \\ \lll[x, [x, x, x], x], x] & [x, x, \lll[x, x, x], x]] \\ \lll[x, x, [x, x, x]], x] & \end{array}$$

A_7 'nin bir bazı :

$$\begin{array}{lll} \llll[x, x, x], x], x], x] & \llll[x, x, x], x], x], x, x] & \lll[x, [x, x, x], x], x, x] \\ \llll[x, x, x], x, x], x], x] & [x, \llll[x, x, x], x], x], x] & [x, [x, [x, x, x], x], x] \\ \lll[x, [x, x, x], x], x], x] & [x, x, \lll[x, x, x], x], x]] & [x, x, [x, [x, x, x], x]] \\ \lll[x, x, [x, x, x]], x], x] & \lll[x, x, x], x, x], x, x] & \lll[x, x, [x, x, x]], x, x] \\ \llll[x, x, x], x], x, x], x] & [x, \lll[x, x, x], x, x], x] & [x, [x, x, [x, x, x]], x] \\ \lll[x, \lll[x, x, x], x], x], x] & [x, x, \lll[x, x, x], x, x]] & [x, x, [x, x, [x, x, x]]] \\ \lll[x, x, \lll[x, x, x], x], x] & & \\ \lll[x, x, x], x], [x, x, x]] & & \\ \lll[x, x, x], [x, x, x], x] & & \\ \lll[x, x, x], x, [x, x, x]] & & \\ [x, [x, x, x], [x, x, x]] & & \end{array}$$

A_n 'in baz elemanlarını bulmak için bir yöntem:

Öncelikle örnek olması için A_6 , A_7 için baz elemanlarını nasıl bulduğumuzu açıklayalım: A_6 ile başlayalım. $n=6$ sayısını $5+1$, $4+1+1$ şeklinde ifade edelim. Burada amaç, ikili ve üçlü toplamlar elde ederek daha önce bulunmuş olan daha küçük boyutlardaki baz elemanlarından faydalanarak istediğimiz boyuttaki baz elemanlarını üretmektir. Fakat toplamaları aşağıdaki koşullara uygun biçimde seçmeliyiz:

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$1. n = (n-1)+1$$

$$2. n = (n - 2) + 1 + 1$$

$$3. n = (n - 3) + 3$$

$$4. n = (n - 4) + 3 + 1$$

$$5. n = (n - 4) + 4$$

⋮

biçiminde bütün olası toplamlar iki sayının ve üç sayının toplamı olacak şekilde elde edilir. Fakat toplamalarda bileşenlerden biri 2 olamaz. İkili toplamda özel olarak bileşenler aynı olamaz. Bu kurala göre 6 sayısı yalnızca 5+1 ve 4+1+1 şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi bu sayıların anlamına bir göz atalım: 6=5+1 ile 6-dereceli baz elemanlarının 5-dereceli baz elemanlarının 1-dereceli baz elemanlarıyla komutatör işlemi ile elde edilmesi; buna karşılık 4+1+1 ile de 6-deereceli baz elemanlarının 4-dereceli baz elemanları ve 1-dereceli baz elemanları ile 1-dereceli baz elemanlarının asosyatör işlemi yoluyla elde edilmesi anlaşılabacaktır. Yani,

5+1:

$$\begin{aligned} &[[[[x, x, x], x], x], x] \\ &[[[x, x, x], x, x], x] \\ &[[x, [x, x, x], x], x] \\ &[[x, x, [x, x, x]], x] \end{aligned}$$

4+1+1:

$$\begin{aligned} &[[[x, x, x], x], x, x] \\ &[x, [[x, x, x], x], x] \\ &[x, x, [[x, x, x], x]] \end{aligned}$$

Burada dikkat edilecek birinci nokta, asosyatörlerin her durumunun yazılmasıdır. Dikkat edilecek ikinci nokta ise ilk olarak A_8 'in boyutunu bulurken karşımıza çıkacaktır:

8=4+3+1 eşitliğinde birbirinden farklı dereceden 3 baz elemanı asosyatör işlemine tabi olacaktır. Bunlar x , $[x, x, x]$ ve $[[x, x, x], x]$ elemanlarıdır. $x=a$, $[x, x, x]=b$ ve $[[x, x, x], x]=c$ diye adlandıırırsak Akivis özdeşliğinden,

$$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] - [b, a, c] - [a, c, b] - [c, b, a] = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$$

eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlik bize gerenlerden 9 tanesi arasında lineer bağımlılık olduğunu söyler. Dolayısıyla birisi elenir. $T_8 \times K_8 = 54 \times 429$ matrisinin rankının $54-1=53$ olmasının nedeni de bu durumdur.

Şimdi de $X = \{x, y\}$ olacak şekilde iki üreteçli Akivis cebirinin 1,2,3- dereceden homojen alt uzaylarının bazlarını bulalım.

Altuzay	bir bazı
$A_{(1)}$	x, y
$A_{(2)}$	$[x, y]$
$A_{(3)}$	$[x, x, x], [x, x, y], [x, y, x], [y, x, x], [x, y, y],$ $[y, x, y], [y, y, x], [y, y, y], [[x, y], x], [[x, y], y]$.

5.3.Akivis Elemanları İçin boyut Formülü

Şimdi (1) eşitliğine X in genel durumu için geri dönelim.

X tarafından üretilen serbest birleşmeli olmayan cebir içerisindeki Akivis elemanlarının boyutunu belirleyen bir ardışık formül bulmak için Shestakov'un(Shestakov, 1999) sonucunu kullanacağız.

$S^d(A)$, A vektör uzayının d -inci simetrik derecesini gösterebilir. $d \geq 1$ olmak üzere V_d vektör uzaylarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$1 \leq d \leq 3 \text{ için } V_d = S^d(A), \quad d \geq 4 \text{ için } V_d = \bigoplus_{i=1}^{d-1} V_{d-i} \otimes V_i \quad (3)$$

Şimdi de direkt toplamı aşağıdaki gibi kuralım:

$$V(A) = \bigoplus_{d \geq 1} V_d$$

$V(A)$ derecelendirilmiş vektör uzayı, 3. Bölümde tanımlanan $\tilde{V}(A)$ birleşmeli olmayan cebiri içine gömülebilir.

Bizim için burada sadece derecelendirme önem taşımaktadır.

Shestakov tarafından Teorem3.2.1’de ifade edilmişti ki “ A Akivis cebirinin birleşmeli olmayan evrensel enveloping cebiri , $\tilde{V}(A)$ birleşmeli olmayan cebirine izomorftir. Eğer A cebiri, X tarafından üretilen serbest Akivis cebiri ise o zaman $\tilde{V}(A)$, X tarafından üretilen serbest birleşmeli olmayan cebirdir.”

X tarafından üretilen serbest Akivis cebiri içindeki boyutların belirlenmesi için Teorem3.2.1 ‘ e başvuracağız.

A nın aşağıdaki şekilde bir multiderecelendirmeye sahip olduğunu varsayıyoruz:

$$A = \bigoplus_{(n) \in \mathbb{N}^N} A_{(n)}$$

Yine varsayıyoruz ki $(n) = (0,0,\dots,0)$ için $A_{(n)} = \{0\}$ dır, ve A , bir Akivis cebiri olarak $A_{(e_i)}$ alt uzayları tarafından üretilir. $a_{(n)}$ ile $A_{(n)}$ nin boyutunu göstereceğiz. $A_{(e_i)}$ üreteç kümelerinin boyutunu ise $r_i = a_{(e_i)}$ ile göstereceğiz.

A derecelendirilmiş cebir olduğundan, A nın evrensel enveloping cebiri olan $U(A)$ da derecelendirilmiştir:

$$U(A) = \bigoplus_{(n) \in \mathbb{N}^N} U(A)_{(n)}$$

Amacımız $boyU(A)$ için r_i ye bağlı bir formül bulmaktır. A , bir serbest Akivis cebiri olduğundan Shestakov’un teoreminden dolayı $U(A)$ bir serbest birleşmeli olmayan cebirdir. Bu durumda $boyU(A)_{(n)}$ boyutları Önerme5.1.1’den

hemen çıkacaktır. Buradan $\sum(n) \geq 2$ olmak üzere $a_{(n)}$ boyutları için $r_1, \dots, r_N$ ye bağlı bir ardışık formül tanımlayabileceğiz.

Öncelikle A serbest değişmeli, birleşmeli, derecelendirilmiş vektör uzayı içindeki (n) -multidereceli alt uzayların boyutları için üreteç fonksiyonunu ele alalım.

Eğer $(\mathbb{N}^N)^* = \mathbb{N}^N - \{(0, \dots, 0)\}$ yazarsak; $x^{(n)} = x_1^{n_1} \dots x_N^{n_N}$ için

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(n) \in (\mathbb{N}^N)^*} \left(\frac{1}{1 - x^{(n)}} \right)^{a_{(n)}} \text{ dir.}$$

(3) eşitliği ile birlikte $G(x_1, \dots, x_n)$, $U(A)$ evrensel enveloping cebir için bir üreteç fonksiyonu olur.

y değişkeni ile, $U(A)$ içerisindeki her bir terim yapılandırılırken A dan gelen faktörlerin sayısını göstereyim. Buradan aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$G(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{(n) \in (\mathbb{N}^N)^*} \left(\frac{1}{1 - x^{(n)} y} \right)^{a_{(n)}}.$$

Bu çarpım içindeki her bir faktörü bir formal kuvvet serisi olarak genişletelim. $d(n) = (dn_1, \dots, dn_N)$ olarak yazarsak;

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n, y) &= \prod_{(n) \in (\mathbb{N}^N)^*} \left(1 + \sum_{d \geq 1} \binom{a_{(n)} + d - 1}{d} x^{d(n)} y^d \right) \\ &= 1 + F_1(x_1, \dots) y + F_2(x_1, \dots) y^2 + F_3(x_1, \dots) y^3 + \sum_{d \geq 4} F_d(x_1, \dots) y^d. \end{aligned}$$

Bu kuvvet serisi $x_1, \dots, x_n$ ye bağlı kuvvet serilerinin katsayıları ile birlikte y ye bağlı bir kuvvet serisidir. $x^{(n)}$ monomiallerinin katsayıları, $(n) \in (\mathbb{N}^N)^*$ için $a_{(n)}$

değişkenlerinin polinomlarıdır. Şimdi G den yola çıkarak aşağıdaki gibi yeni seriler oluşturacağız:

$$H(x_1, \dots, x_n, y) = 1 + F_1(x_1, \dots)y + F_2(x_1, \dots)y^2 + F_3(x_1, \dots)y^3 + \\ + \sum_{d \geq 4} \left(\sum_{i=1}^{d-1} F_{d-i}(x_1, \dots)F_i(x_1, \dots) \right) y^d .$$

Bu formül, (3) eşitliğindeki üreteç fonksiyonlarına bağlı olan formülün farklı bir versiyonudur. Bu noktada artık y nin kaç olduğu önem taşımadığı için $y=1$ alabiliriz. Buradan aşağıdaki üreteç fonksiyonunu ele alabiliriz:

$$H(x_1, \dots, x_n) = 1 + \sum_{(n) \in \mathbb{N}^N} A_{(n)} x^{(n)} .$$

Buradan Teorem3.2.1'i tekrar yazabilmek için Önerme5.1.1'i kullanabileceğiz.

Sonuç 5.3.1: Aşağıdaki kuvvet serileri mevcuttur:

$$1 + \sum_{(n) \in \mathbb{N}^N} A_{(n)} x^{(n)} = 1 + \sum_{(n) \in \mathbb{N}^N} K_{\Sigma(n)} \left(\begin{matrix} \Sigma(n) \\ n_1, \dots, n_N \end{matrix} \right) r^{(n)} x^{(n)} ,$$

Burada $r^{(n)} = r_1^{n_1} \dots r_N^{n_N}$ olarak alınacaktır.

Bu sonuç bize $H(x_1, \dots, x_n)$ nin, $1 \leq i \leq N$ için e_i dereceli r_i tane serbest üreteç tarafından üretilen serbest, birleşmeli olmayan cebir için bir üreteç fonksiyonu olduğunu söylemektedir. Bu denklemden ardışık olarak $a_{(n)}$ boyutlarını çıkarabiliriz.

Bu sonuçtan hareketle aşağıdaki önermeyi ispatsız olarak vereceğiz:

Önerme 5.3.1: a_n , derecesi 1 olan $a_1 = r$ serbest üretece sahip serbest, birleşmeli olmayan cebir içerisindeki n -dereceli Akivis elemanlarının boyutunu

göstermek üzere aşağıdakiler doğrudur.

$$a_2 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r ,$$

$$a_3 = \frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{3}r ,$$

$$a_4 = \frac{65}{24}r^4 - \frac{5}{4}r^3 - \frac{17}{24}r^2 + \frac{1}{4}r ,$$

$$a_5 = \frac{22}{3}r^5 - \frac{5}{2}r^4 - \frac{5}{6}r^3 ,$$

$$a_6 = \frac{2849}{144}r^6 - \frac{475}{48}r^5 - \frac{547}{144}r^4 + \frac{9}{16}r^3 + \frac{1}{72}r^2 + \frac{1}{3}r ,$$

$$a_7 = \frac{517}{9}r^7 - \frac{245}{8}r^6 - \frac{145}{18}r^5 + \frac{107}{24}r^4 - \frac{7}{18}r^3 + \frac{1}{6}r^2 ,$$

$$a_8 = \frac{196471}{1152}r^8 - \frac{30625}{288}r^7 - \frac{15457}{576}r^6 + \frac{2173}{144}r^5 - \frac{1289}{1152}r^4 + \frac{395}{288}r^3 + \frac{13}{32}r^2 - \frac{1}{8}r ,$$

$$a_9 = \frac{337865}{648}r^9 - \frac{5745}{16}r^8 - \frac{7357}{108}r^7 + \frac{580}{9}r^6 - \frac{107}{108}r^5 + \frac{25}{144}r^4 - \frac{581}{648}r^3 - \frac{1}{18}r^2 + \frac{1}{9}r$$

Yukarıdaki önermeyi örneklendirelim:

Örnek 5.3.1: Önerme 5.2.1' de $r=1$ olması durumunda

$$boyA_1 = 1$$

$$boyA_2 = 0$$

$$boyA_3 = 1$$

$$boyA_4 = 1$$

$$boyA_5 = 4$$

$$boyA_6 = 7$$

$$boyA_7 = 23$$

$$boyA_8 = 53$$

$$boyA_9 = 157.$$

olarak verilmişti. Örneğin $a_7 = \text{boy}A_7 = 23$ sonucunu kontrol edebiliriz.

Öncelikle $r=1$ ise formülümüz;

$$a_7 = \frac{517}{9} - \frac{245}{8} - \frac{145}{18} + \frac{107}{24} - \frac{7}{18} + \frac{1}{6} \text{ şeklini alır.}$$

$$a_7 = \frac{4136}{72} - \frac{2205}{72} - \frac{580}{72} + \frac{321}{72} - \frac{28}{72} + \frac{12}{72}$$

$$a_7 = \frac{4469 - 2813}{72} = 23 .$$

$a(r, n) = \text{boy}A_n$ gösterimi ile r üreteçli boyutu n olan Akivis elemanlarının oluşturduğu altuzayı anlayacağız. Aşağıdaki veriler Önerme 5.3.1'den yararlanılarak elde edilmiştir:

n	$a(1, n)$	$a(2, n)$	$a(3, n)$	$a(4, n)$
1	1	2	3	4
2	0	1	3	6
3	1	10	35	84
4	1	31	180	603
5	4	188	1557	6816
6	7	894	11727	69970
7	23	5204	101700	808600
8	53	28809	870459	9340138
9	157	170404	7804590	112296324
10	410	1005973	70631487	1367436030
11	1192	6098390	652494738	16968464904
12	3307	37240375	6092322963	213007358919 .

KAYNAKLAR

- AKIVIS, M. A., (1976). Local algebras of a multidimensional three-web [Russian].
Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **17**, 1, 5-11. English translation: Siberian
Mathematical Journal **17**, 1, 3-8.
- BREMNER, M. R., HENTZEL, I.R., PERESI, L.A., (2004). "Dimension Formulas
For the Free Nonassociative Algebra",
<http://math.usask.ca/bremner/research/papers/bhp.pdf>.
- COHN, P.M, (1964). "Subalgebras of Free Associative Algebras". Proc. London
Math Soc., (3) **14**, 618-632.
- HOFMANN, K. H., STRAMBACH, K., (1990). Topological and analytic loops,(O.,
Chein, H. O., Pflugfelder ve J. D. H., Smith editörler). Heldermann Verlag,
Berlin, Quasigroups and Loops: Theory and Applications, 205-262.
- KRYAZHOVSKIKH, G. V., (1980). Approximability of finitely presented algebras.
Sibirsk. Mat. Z. **21**, No. 5, 58-62 [Russian] ; Siberian Math.J. **21**, No. 5,
688-691.[English translation]
- LEWIN, J., (1968). On Schreier varieties of linear algebras. Trans. Amer. Math .Soc.
132, 553-582.
- SABININ, L. V., MIKHEEV, P.O., (1988). On the infinitesimal theory of local
analytic loops [Russian]. Doklady Akademi Nauk USSR **297**, 4, 801-
804.English translation: Soviet Matematichs Doklady **36**, 3, 545-548.
- SHESTAKOV, I. P., (1999). Every Akivis algebra is linear. Geom. Dedicata, **77**,
215-223.
- SHESTAKOV, I. P., UMIRBAEV, U. U., (2002). Free Akivis algebras , primitive
elements , and hyperalgebras. Journal of Algebra **250**, 533-548.
- ZHEVLAKOV, K.A., SLINKO, A. M., SHESTAKOV, I. P. ve SHIRSHOV, A.I.,
(1982). Rings that are Nearly Associative. Academic Pres, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Mardin'in Nusaybin ilçesinde doğdum. Öğrenimimi sırasıyla Kıbrıs İlkokulu, Mimar Sinan İlköğretim Okulu ve Atatürk Lisesi'nde tamamladım. 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 2003 yılında mezun olup aynı bölümde TÜBİTAK burslusu olarak yüksek lisansa başladım.