

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serkan AKOĞUL

SERBEST GRUPLARDA TRANSLATION DENKLİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST GRUPLARDA TRANSLATION DENKLİK

Serkan AKOĞUL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Yıl : 2011, Sayfa: 55

Jüri : Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

: Yrd.Doç. Dr. Ela AYDIN

: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

F_n rankı $n \geq 2$ olan bir serbest grup olsun. $g, h \in F_n$ ve F_n nin her ϕ otomorfizmi için $\phi(g)$ nin devirsel uzunluğu $\phi(h)$ nin devirsel uzunluğuna eşit ise g ve h elemanlarına F_n de translation denktir denir. Bu tezde, $F(a, b)$, $\{a, b\}$ tarafından üretilen serbest grup ve $w(a, b)$ de $F(a, b)$ de keyfi seçilmiş bir kelime olmak üzere, her ne zaman $g, h \in F_n$ için g ve h , F_n de translation denk ise $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ nin de F_n de translation denk olduğunu göstereceğiz. Ayrıca F_2 rankı 2 olan bir serbest grup olmak üzere, F_2 deki g, h gibi iki elemanın translation denk olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığını göstereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Serbest grup, Devirsel uzunluk, Translation denklik

ABSTRACT

MSc. THESIS

TRANSLATION EQUIVALENT IN FREE GROUPS

Serkan AKOĞUL

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Year : 2011, Pages: 55

Jury : Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

: Asst. Prof. Dr. Ela AYDIN

: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Let F_n be a free group of rank $n \geq 2$. Two elements g, h in F_n are said to be translation equivalent in F_n if the cyclic length of $\phi(g)$ equals the cyclic length of $\phi(h)$ for every automorphism ϕ of F_n . In this thesis, let $F(a, b)$ be the free group generated by $\{a, b\}$ and let $w(a, b)$ be an arbitrary word in $F(a, b)$, we show that $w(g, h)$ and $w(h, g)$ are translation equivalent in F_n whenever $g, h \in F_n$ are translation equivalent in F_n . Besides let F_2 be a free group of rank 2, we show that there is an algorithm that decides whether or not, for given two element g, h of F_2 , g and h are translation equivalent in F_2 .

Key Words: Free group, Cyclic length, Translation equivalent

TEŞEKKÜR

Ç.Ü. Matematik bölümünde lisans öğrencisi olarak öğrenime başladığım ilk günden bu yana ve özellikle bu tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK’e çok teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline ve bana her konuda yardımcı olan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Mehmet ONAT’a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan anneme, babama ve tüm kardeşlerime sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Gruplar	3
2.2. Grup Homomorfizmleri.....	8
2.3. Grup Otomorfizmleri	10
2.4. Konjuge	11
2.5. Grup Etkisi.....	16
2.6. Serbest Gruplar	17
3. SERBEST GRUPLARDA TRANSLATION DENK ELEMANLAR	29
4. RANKI İKİ OLAN BİR SERBEST GRUPTAKİ TRANSLATION DENKLİK ALGORİTMASI.....	37
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	55

1. GİRİŞ

F_n , rankı $n \geq 2$ olan bir serbest grup ve $g, h \in F_n$ olsun. Her $\phi \in \text{Aut}F_n$ için $\phi(g)$ ve $\phi(h)$ elemanlarının devirsel uzunlukları aynı oluyorsa g ve h ye translation denktir denir.

Leininger (2003) çalışmasında bir yüzey üzerindeki kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının hiperbolik denkleğini incelemiştir. Bu çalışmadan esinlenerek Kapovich-Levitt-Schupp-Shpilrain (2007) serbest gruplar için benzer fenomenin olabileceğini düşünerek serbest gruplardaki translation denklik kavramını tanımlayarak ayrıntılı bir şekilde konuyu incelemiştir. ‘ F , $\{a, b\}$ üzerinde bir serbest grup ve $w(a, b) \in F$ herhangi bir kelime olsun. g ve h de F de translation denk olan iki eleman iken $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ translation denk olur mu?’ sorusunu sormuştur. Donghi Lee (2006) da bu soruya olumlu bir cevap vermiş ve (2007) deki çalışmasında da rankı 2 olan serbest gruplarda herhangi iki elemanın translation denk olup olmadığını söyleyen bir algoritma vermiştir.

Tezin 2. Bölümünde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir. 3. Bölümde Shpilrain tarafından sorulan ‘ $w(g, h)$ ile $w(h, g)$ translation denk olur mu?’ sorusuna Donghi Lee tarafından verilen olumlu cevap ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Tezin 4. Bölümünde rankı 2 olan serbest gruplarda translation denklik algoritması incelenerek algoritmanın çalıştığını gösteren örnekler verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Gruplar

Tanım 2.1.1 A boş olmayan bir küme olmak üzere $A \times A$ dan A ya tanımlı bir

$$*: A \times A \rightarrow A, (a, b) \rightarrow a * b$$

fonksiyona A üzerinde bir *ikili işlem* denir. Eğer $*$, A üzerinde bir ikili işlem ise $(A, *)$ ifadesine A da bir *cebirsel yapı* denir.

Tanım 2.1.2 G boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer;

$*$ işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani, $\forall a, b, c \in G$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ ise;}$$

$\forall a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde bir $e \in G$ varsa (e ye G nin *birim elemanı* denir);

$\forall a \in G$ için

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak biçimde bir $a' \in G$ varsa (a' ne a nın bir *ters elemanı* denir) o zaman $(G, *)$ sıralı ikilisine *grup* denir.

Eğer $(G, *)$ grubunda $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise bu gruba *değişmeli* ya da *abelyan* denir.

Tanım 2.1.3 G bir grup olsun. Eğer $\forall a \in G$ için $ea = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e ye G nin bir *sol birim elemanı*, eğer $\forall a \in G$ için $ae = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e ye G nin bir *sağ birim elemanı* denir. Eğer e hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye kısaca G nin *birimi* denir.

Tanım 2.1.4 G bir grup ve $e \in G$ olsun. Eğer $\forall a \in G$ için $ea = e$ oluyorsa e ye G nin bir *sol sıfır elemanı*, eğer $\forall a \in G$ için $ae = e$ oluyorsa e ye G nin bir *sağ sıfır elemanı* denir.

Tanım 2.1.5 $(G,*)$ bir grup ve A , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall a, b \in A$ için $a * b \in A$ ise o zaman A , G nin $*$ işlemine göre *kapalıdır* denir.

Tanım 2.1.6 G bir grup ve H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise o zaman H ye G nin bir *alt grubu* denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

G ve $\{e\}$, G nin alt grupları olduğu açıktır. $\{e\}$ ye G nin *aşık alt grubu* denir. $H \leq G$ olsun. G nin kendisinden farklı her alt grubuna G nin bir *özalt grubu* denir.

Teorem 2.1.7 G bir grup ve H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2^{-1} \in H$ olmasıdır.

Tanım 2.1.8 G bir grup ve $a \in G$ olsun. G kümesinin kardinalitesine G grubunun *derecesi* denir ve $|G|$ ile gösterilir. Derecesi sonlu olan bir gruba *sonlu grup*, derecesi sonsuz olan bir gruba da *sonsuz grup* denir. Eğer $a^t = e$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı varsa bu t pozitif tamsayılarının en küçüğüne a nın *derecesi* denir ve $|a|$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 G bir grup olmak üzere G nin *merkezi* $Z(G)$ ile gösterilir ve

$$Z(G) = \{a \in G : \text{her } g \in G \text{ için } ga = ag\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.10 G bir grup ve G nin merkezi $Z(G)$ olmak üzere $Z(G) \leq G$ dir.

Tanım 2.1.11 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere

$$a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha : h \in H\}$$

kümesine H nin G de a ya göre *eşleniği* denir.

Teorem 2.1.12 G bir grup, $a \in G$ ve $H \leq G$ olmak üzere $a^{-1}Ha$ kümesi G nin bir alt grubudur.

Teorem 2.1.13 G bir grup ve $\{H_i : i \in I\}$ de G grubunun alt gruplarının bir ailesi olsun. O zaman

$$\bar{H} = \bigcap_{i \in I} H_i$$

de G nin bir alt grubudur.

Tanım 2.1.14 G bir grup ve X , G nin bir alt kümesi olsun. O zaman G nin X i içeren bütün alt gruplarının kesişimine X tarafından üretilen alt grup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X e $\langle X \rangle$ in bir *üreteç kümesi* denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ile gösterilir ve buna $x_1, x_2, \dots, x_n$ tarafından üretilen alt grup denir. Eğer $n = 1$ ise $\langle x_1 \rangle$ grubuna x_1 tarafından üretilen *devirli alt grup* denir. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $x_i \in X$ ve $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\langle X \rangle$, $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ formundaki tüm sonlu çarpımlardan meydana gelir.

Tanım 2.1.15 G bir grup olsun. Eğer $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa G ye a tarafından üretilen *devirli grup* denir.

Tanım 2.1.16 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a, b \in G$ için $ab^{-1} \in H$ oluyorsa a ya modülo H ile b ye sağdan denktir denir ve $a \equiv_r b \pmod{H}$ ile gösterilir. Benzer şekilde $a^{-1}b \in H$ oluyorsa a ya modülo H ile b ye soldan denktir denir ve $a \equiv_l b \pmod{H}$ ile gösterilir.

Eğer G değişmeli grupsa sağ denklik ile sol denklik çakışıktır. (Çünkü $ab^{-1} \in H$ ise $(ab^{-1})^{-1} \in H$ olup $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} = a^{-1}b$ dir.) Ayrıca sağ ve sol denkliğin çakışık olduğu halde değişmeli olmayan gruplarda vardır. (Örneğin Quaternionlar Grubu)

Teorem 2.1.17 G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

- a) Modülo H sağ (sol) denklik G üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
- b) Modülo H sağ (sol) denklik bağıntısına göre denklik sınıfları $\forall a \in G$ için $Ha = \{ha : h \in H\}$ ($aH = \{ah : h \in H\}$) dir.
- c) $|Ha| = |H| = |aH|$

Tanım 2.1.18 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Modülo H sağ (sol) denklik bağıntısına göre olan her bir denklik sınıfına H nin G deki bir *sağ (sol) koseti* denir.

Tanım 2.1.19 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nin G deki farklı sol (sağ) kosetlerinin sayısına H nin G deki *indeksi* denir ve $(G:H)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.20 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman

$$|G| = (G:H) \cdot |H|$$

dir.

Teorem 2.1.21 (Lagrange Teoremi) G bir sonlu grup ve $H \leq G$ ise, H nin derecesi G nin derecesini böler. Yani; $|H| \mid |G|$ dir.

Tanım 2.1.22 G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$gNg^{-1} = N$$

ise N ye G nin bir *normal alt grubu* denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

Her G grubunda G ve $\{e\}$ normal alt gruplardır.

Teorem 2.1.23 G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- a) $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.
- b) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$ dir.
- c) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.
- d) $\forall g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

Tanım 2.1.24 G bir grup ve N , G nin bir normal alt grubu olsun.

$$G/N = \{aN : a \in G\}$$

kümesi üzerinde bir çarpma işlemi şöyle tanımlansın. Her $aN, bN \in G/N$ için

$$(aN)(bN) = abN$$

olsun. Bu işleme göre G/N bir gruptur ve bu gruba G nin N ile *bölüm grubu* (çarpım grubu) denir.

Tanım 2.1.25 G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$$

elemanına x_1 ile x_2 nin *komütatörü* denir.

X_1 ve X_2 , G grubunun boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Burada $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G]$ komütatör grubuna G nin *komütatör alt grubu* denir ve G' ile gösterilir.

Tanım 2.1.26 A boş olmayan bir küme olsun. A üzerinde tanımlı bire bir ve örten bir fonksiyona A üzerinde bir *permütasyon* denir. Bir A kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonların kümesi $Sym(A)$ ile gösterilir ve $Sym(A)$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. $Sym(A)$ grubuna A kümesi üzerindeki *simetrik grup* denir.

Tanım 2.1.27 G bir grup ve A bir küme olsun. Eğer bir $\varphi: G \rightarrow Sym(A)$ homomorfizması varsa φ homomorfizmasına G nin *permütasyon temsili* denir.

Teorem 2.1.28 (Cayley Teoremi) Her grup bir permütasyon grubunun bir alt grubuna izomorftur.

2.2. Grup Homomorfizmleri

Tanım 2.2.1 $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlarsa φ ye bir *grup homomorfizmi* ya da kısaca bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.2.2 $\varphi: G \rightarrow H$ grup homomorfizmi bire bir ise φ ye bir *monomorfizm* denir.

Tanım 2.2.3 $\varphi: G \rightarrow H$ grup homomorfizmi örten ise φ ye bir *epimorfizm* denir.

Tanım 2.2.4 $\varphi: G \rightarrow H$ grup homomorfizmi hem bire bir hem de örten ise φ ye bir *izomorfizm* denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.5 $\varphi: G \rightarrow H$ grup homomorfizmi olsun. Buna göre

a) e_G , G nin birim elemanı ve e_H , H nin birim elemanı olmak üzere

$$\varphi(e_G) = e_H$$

dir.

b) $\forall a \in G$ için

$$\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$$

dir.

Tanım 2.2.6 G bir grup, $N \triangleleft G$ olmak üzere $\varphi: G \rightarrow G/N$ ve $\forall a \in G$ için

$$\varphi(a) = Na$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmdir. Bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

Tanım 2.2.7 $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun.

$$\text{Ker}(\varphi) = \{x \in G : \varphi(x) = e_H\}$$

kümesine φ nin *çekirdeği* denir.

Tanım 2.2.8 $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun.

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) : g \in G\}$$

kümesine φ nin *görüntüsü* denir.

Teorem 2.2.9 $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. O zaman $\text{Ker}(\varphi) \triangleleft G$ dir.

Teorem 2.2.10 $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olmak üzere φ nin bire bir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ olmasıdır.

2.3. Grup Otomorfizmleri

Tanım 2.3.1 $\varphi: G \rightarrow G$ grup homomorfizmine bir *endomorfizm* denir.

Tanım 2.3.2 $\varphi: G \rightarrow G$, bire bir ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye *grup otomorfizmi* denir.

Teorem 2.3.3 G bir grup olmak üzere $\forall x \in G$ için $I(x) = x$ ile tanımlı $I: G \rightarrow G$ dönüşümüne *birim dönüşüm* ya da *özdeş dönüşüm* denir.

Tanım 2.3.4 G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $I_a: G \rightarrow G$ dönüşümü $\forall x \in G$ için

$$I_a(x) = axa^{-1}$$

şeklinde tanımlanırsa, I_a dönüşümü bir grup otomorfizmidir.

Tanım 2.3.5 G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için

$$I_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlanan

$$I_a: G \rightarrow G$$

otomorfizmine G grubunun *iç otomorfizmi* denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesini $I(G)$ ile göstereceğiz. G değişmeli ise $I(G) = \{I\}$

birimdir. G nin bütün otomorfizmlerinin kümesini de $Aut(G)$ ile göstereceğiz. $Aut(G)$ fonksiyonlardaki bileşke işlemi ile bir grup meydana getirir. Bu gruba G nin *otomorfizmleri grubu* denir.

Teorem 2.3.6 G bir grup olsun. O zaman

$$I(G) \triangleleft Aut(G)$$

dır.

Tanım 2.3.7 H , G grubunun bir alt grubu olsun. Her $f: G \rightarrow G$ otomorfizması için $f(H) \leq H$ ise H alt grubuna G nin *karakteristik alt grubu* denir.

Teorem 2.3.8 Bir G grubunun normal alt grupları G nin bütün iç otomorfizmleri altında değişmezdir (invarianttır). Yani $\forall N \triangleleft G$ için $a \in G$ olmak üzere $I_a(N) = N$ dir.

2.4. Konjuge

G bir grup ve M de G nin bir alt kümesi olsun. O zaman $g \in G$ için

$$g^{-1}Mg = \{g^{-1}mg : m \in M\}$$

de G nin bir alt kümesidir. Eğer M , G nin bir normal alt grubu ise $g^{-1}Mg = M$ dir.

Teorem 2.4.1 M , G nin bir alt kümesi olsun. O zaman $g^{-1}Mg$, G nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter koşul M nin G nin bir alt grubu olmasıdır. M bir alt grup ise

$$g^{-1}Mg \cong M \text{ ve } |g^{-1}Mg| = |M|$$

dır.

İspat. M , G nin bir alt grubu olsun. $x, y \in g^{-1}Mg$ için $x = g^{-1}m_1g$ ve $y = g^{-1}m_2g$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= (g^{-1}m_1g)(g^{-1}m_2g)^{-1} \\ &= g^{-1}m_1gg^{-1}m_2^{-1}g \\ &= g^{-1}m_1m_2^{-1}g \in g^{-1}Mg \end{aligned}$$

dır. Çünkü M bir alt grup olup $m_1m_2^{-1} \in M$ dir. Böylece $xy^{-1} \in g^{-1}Mg$ dir. Teorem 2.1.7 den $g^{-1}Mg$, G nin bir alt grubudur.

Diğer taraftan $g^{-1}Mg$, G nin bir alt grubu ve $N = g^{-1}Mg$ olsun. O zaman N de G nin bir alt grubudur. Böylece

$$M = g^{-1}Ng = (g^{-1})^{-1}N(g^{-1})$$

de G nin bir alt grubudur.

$f: M \rightarrow g^{-1}Mg$ dönüşümünü $\forall m \in M$ için $f(m) = g^{-1}mg$ olarak tanımlayalım. O halde f bir izomorfizmdir.

Varsayalım ki $g^{-1}m_1g = g^{-1}m_2g$ olsun. O zaman

$$g(g^{-1}m_1g)g^{-1} = g(g^{-1}m_2g)g^{-1}$$

dir. Böylece

$$m_1 = m_2; m_1, m_2 \in M$$

dir. O halde $|g^{-1}Mg| = |M|$ dir. ■

Tanım 2.4.2 $g^{-1}Mg$ kümesine M nin G deki bir *konjuge kümesi* denir. g , G yi taradığında G nin M ye konjuge olan kümelerinin bir koleksiyonunu verir.

Teorem 2.1.23 (c) den H nin G nin bir normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul H nin *self konjuge* olmasıdır. Yani; H sadece G deki H ye konjugedir. Böylece H , G nin bir normal alt grubu olması halinde, G de yalnız bir konjuge kümesi vardır. O da kendisidir.

Genel olarak, eğer M , G de herhangi bir küme ise M nin G de kaç farklı konjuge kümesi vardır?

İlk olarak eğer $y^{-1}My = M$ ise o zaman G nin yx biçimindeki bütün elemanları aynı konjuge kümesini verir, yani;

$$(yx)^{-1}M(yx) = x^{-1}y^{-1}Myx = x^{-1}Mx$$

dir.

Tersine eğer g ve x aynı konjuge kümesi oluşturuyorsa, yani;

$$g^{-1}Mg = x^{-1}Mx$$

ise o zaman

$$xg^{-1}Mgx^{-1} = M$$

dir. Böylece $y = gx^{-1}$ koyarsak, o zaman

$$y^{-1}My = M \text{ ve } g = yx$$

olur. Bunun anlamı, eğer

$$N = \{y \in G : yM = My\} = \{y \in G : y^{-1}My = M\}$$

koyarsak, o zaman $x \in G$ için Nx formundaki elemanların kümesinin hepsi aynı $x^{-1}Mx$ konjuge kümesini oluşturur. Aksine eğer g ile x aynı konjugeyi verirse, o zaman $g \in Nx$ dir.

Böylece M ye farklı konjuge kümelerinin sayısı, Nx formundaki farklı kümelerin sayısına eşittir. Teorem 2.1.19 dan eğer N , G nin bir alt grubu ise bu sayı G deki N nin indeksidir. Şimdi burada yukarıda tanımlı N kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösterelim. Yani, $y_1, y_2 \in N$ için $y_1 y_2^{-1} \in N$ olduğunu gösterelim. $y_1, y_2 \in N$ olsun. O zaman $y_2 M = M y_2$ olup $M = y_2^{-1} M y_2$ buradan $M y_2^{-1} = y_2^{-1} M$ olur. Böylece $y_1 y_2^{-1} M = y_1 M y_2^{-1} = M y_1 y_2^{-1}$ dır. Bundan dolayı $y_1 y_2^{-1} \in N$. Genelde $N = N_G(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.3 G bir grup ve $M \leq G$ olsun. O zaman

$$N_G(M) = \{y \in G : yM = My\}$$

kümesine M nin G deki *normalleyeni* denir.

Tanım 2.4.4 G bir grup ve $M \leq G$ olsun. Eğer M , bir tek m elemanından oluşuyor ise $N_G(m)$ ye m elemanının G deki *merkezleyeni* denir, $C_G(m)$ ile gösterilir ve

$$C_G(m) = \{y \in G : ym = my\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.4.5 G bir grup ve $M \leq G$ olsun. O zaman M nin G deki farklı konjuge kümelerinin sayısı $(G : N_G(M))$ dır.

Teorem 2.4.6 G bir grup olsun.

- a) Konjuge alt gruplar birbirlerine izomorftur.
- b) $H \leq G$ ise $H \triangleleft N_G(H)$ dır.
- c) N , G nin herhangi bir alt grubu ve $H \triangleleft N$ ise $H \subset N \subset N_G(H)$ dır.

Özel olarak M kümesi tek elemanlı olsun. Yani; $m \in G$ için $M = \{m\}$ olsun. O zaman $N_G(M) = C_G(m) = N_G(\{m\})$ olup Teorem 2.4.5 e göre, G deki x elemanına konjuge olan G nin y elemanlarının sayısı $(G:N_G(x))$ dır. Yani, x 'in normalleyeninin G deki sayısı kadardır.

Yukarıdaki duruma göre G üzerinde bir R bağıntısını; “ $x, y \in G$ olmak üzere $(x, y) \in R$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi $g \in G$ için $y = g^{-1}xg$ olmasıdır.” olarak tanımlayalım. Kolayca görülür ki; R , G üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıfları G nin *konjuge sınıfları* olarak adlandırılır. Bu x 'i içeren konjuge sınıfı, x 'e konjuge olan G nin tüm y elemanlarından meydana gelir. Yani; bazı $g \in G$ için $y = g^{-1}xg$ dır. x 'i içeren konjuge sınıfındaki G nin elemanlarının sayısı $(G:N_G(x))$ dır.

Teorem 2.4.7 G bir grup olsun.

- a) x 'i içeren konjuge sınıfındaki tüm elemanlar aynı mertebeye sahiptir.
- b) $H \triangleleft G$ olması için gerek ve yeter koşul H nin tüm konjuge sınıflarının birleşiminden meydana gelmesidir.

Teorem 2.4.8 G bir grup ve $Z(G)$ de G nin merkezi olsun. O zaman

- a) $Z(G)$, G nin bir normal abelyen alt grubudur.
- b) G bir sonlu grup olsun.

$$|G| = |Z(G)| + h_1 + h_2 + \dots + h_r; \quad h_i > 1$$

denkleminde G nin *sınıf denklemi* denir. Burada i 'inci konjuge sınıfındaki herhangi x_i elemanı için $h_i = (G:N_G(x_i))$ dır (Yani; h_i , i 'inci konjuge sınıfındaki elemanların sayısıdır).

2.5. Grup Etkisi

Tanım 2.5.1 G bir grup ve Ω boş olmayan bir küme olsun. Bir

$$\begin{aligned}\Omega \times G &\longrightarrow \Omega \\ (x, g) &\longmapsto x^g\end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer;

- i. $\forall x \in \Omega$ için $x^e = x$ (e , G nin birimi)
- ii. $\forall x \in \Omega$ ve $g, h \in G$ için $x^{gh} = (x^g)^h$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona G nin Ω üzerinde bir *etkisi* denir.

G , Ω kümesi üzerine etki etsin ve $g \in G$ olsun. $\forall x \in \Omega$ için $x\sigma_g = x^g$ biçiminde tanımlı $\sigma_g: \Omega \rightarrow \Omega$ fonksiyonu Ω üzerinde bir permütasyondur ve $\sigma: G \rightarrow \text{Sym}(\Omega), g \mapsto \sigma_g$ biçiminde tanımlı σ fonksiyonu bir homomorfizmdir. (Burada $\text{Sym}(\Omega)$, Ω nın permütasyonlarının grubudur.)

Yukarıda görüldüğü gibi eğer bir G grubu bir Ω kümesi üzerine etki ederse G nin her elemanı Ω üzerinde bir permütasyon tanımlar ve G den $\text{Sym}(\Omega)$ içine bir homomorfizm tanımlıdır. O halde bir G grubunun her etkisi G nin bir permütasyon temsilini tanımlar.

Örnek 2.5.2 G bir sonlu grup ve $\Omega = G$ olsun. $x \in \Omega = G$, $g, h \in G$ ve $x^g = g^{-1}xg$ alalım.

$x^e = e^{-1}xe = x$, $x^{gh} = (gh)^{-1}x(gh) = h^{-1}(g^{-1}xg)h = h^{-1}x^gh = (x^g)^h$ olup $x \mapsto x^g$, G nin $\Omega = G$ bir etkisidir. Buna G grubunun kendi üzerinde *eşleniklik etkisi* denir.

Tanım 2.5.3 $x, y \in \Omega$ için Ω üzerinde $\sim$ bağıntısını $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ öyle ki $x = y^g$ olarak tanımlayalım. O halde $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.5.4 $x \in \Omega$ ise $\sim$ denklik bağıntısına göre x 'i içeren denklik sınıfına x 'in *yörüngesi* denir ve $orb(x)$ ile gösterilir.

Yörünge tanımından bir $x \in \Omega$ için x 'in yörüngesi $orb(x) = \{x^g : g \in G\}$ şeklindedir.

Tanım 2.5.5 $x \in \Omega$ ise $G_x = \{g \in G : x^g = x\}$ kümesine x 'in *sabitleyeni* denir.

Sonuç 2.5.6 G_x , G nin bir alt grubudur.

Teorem 2.5.7 (Yörünge Sabitleyen Teoremi) G , Ω kümesi üzerine etki etki eden sonlu bir grup ve $x \in \Omega$ olsun. O zaman $|orb(x)| = (G : G_x)$ dır.

Örnek 2.5.8 G bir grup, $\Omega = G$ ve $x \in \Omega$, $g \in G$ ise $x^g = g^{-1}xg$ eşleniklik etkisini düşünelim.

$x \in G$ ise $G_x = \{g : x^g = x\} = \{g : g^{-1}xg = x\} = \{g : xg = gx\} = C_G(x)$ olup $|orb(x)| = (G : C_G(x))$ dır. $((G : C_G(x)), x$ 'in G deki eşleniklerinin sayısıdır.)

2.6. Serbest Gruplar

Tanım 2.6.1 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X 'in elemanlarının her birine bir *harf* denir. X^{-1} , X ile aralarında bire bir eşleme olan küme, $X \cap X^{-1} = \emptyset$, $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ ve $1 \notin X \cup X^{-1}$ olsun. $\forall x \in X$ için $f : X \rightarrow X^{-1}$, $x \rightarrow f(x) = x^{-1}$ şeklinde tanımlansın. $X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarından oluşan ve sonlu terimi dışındaki bütün terimleri 1 olan $w = (a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, \dots)$ dizisine X 'in elemanları üzerinde bir *kelime* denir.

Özel olarak her terimi 1 olan $1 = (1, 1, 1, \dots)$ dizisi de bir kelimedir; bu kelimeye *boş kelime* denir.

Tanım 2.6.2 $w = (a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, \dots)$ bir kelime olsun. Eğer bu kelimede $i = 1, 2, \dots, n$ ve $\forall x \in X$ için x ile x^{-1} komşu değilse yani $a_i = x$ ise $a_{i+1} \neq x^{-1}$ ve bir $i \geq 1$ için $a_i = 1$ iken $\forall j \geq i$ için $a_j = 1$ özellikleri sağlanır ise w ya *indirgenmiş kelime* denir.

Eğer $w = (a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, \dots)$ bir indirgenmiş kelime ise $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_i \in X$ ve $a_i = x_i$ olmak üzere $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ şeklinde gösterilir.

X üzerinde bütün indirgenmiş kelimelerin kümesi $F(X)$ olsun. $F(X)$ üzerinde bir ikili işlem aşağıdaki gibi tanımlansın.

$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_r^{\delta_r} \in F(X)$ olsun. Genelliği bozmaksızın $n \geq r$ kabul edebiliriz. $0 \leq k \leq r$ olmak üzere $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ için $x_{n-j}^{\varepsilon_{n-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ koşulunu sağlayan en büyük tamsayı k olsun.

$$wv = \begin{cases} x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_{n-k}^{\varepsilon_{n-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots y_m^{\delta_m} & , \quad k < r < n \\ x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_{n-r}^{\varepsilon_{n-r}} & , \quad k = r < n \\ 1 & , \quad k = n = r. \end{cases}$$

$F(X)$ yukarıda tanımlanan ikili işleme göre bir gruptur ve $F(X) = \langle X \rangle$ ile gösterilir. $F(X)$ 'e X üzerinde bir *serbest grup* denir.

Tanım 2.6.3 G herhangi bir grup ve X de G nin bir üreteçler kümesi olsun. Eğer $G \cong F(X)$ ise, G grubu X üzerinde serbest olup X e G nin *serbest üreteçler kümesi* denir.

Teorem 2.6.4 G bir grup, $X, Y \subseteq G$ olsun. Eğer G grubu hem X hem de Y üzerinde serbest ise, $|X| = |Y|$ dir. Başka bir deyişle, bir serbest grubun herhangi iki serbest üreteçler kümesinin kardinalitesi aynıdır. Bu kardinaliteye o grubun *rankı* denir.

Serbest gruplar için farklı bir bakış açısı:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ serbest doğuraylar olmak üzere n doğuraylı bir F_n serbest grubu, doğurayları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan ve boş bağıntı ile tanımlı bir gruptur. Yani;

$$F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

şeklinde takdime sahiptir.

Bundan böyle aksi belirtilmedikçe F_n ile $x_1, x_2, \dots, x_n$ üzerindeki serbest grup anlaşılacaktır.

Tanım 2.6.5 F_n bir serbest grup ve $\varepsilon_i = \pm 1$, $v = 1, 2, \dots, n$ için x_v^ε , $x_v^{-\varepsilon}$ birer harf olsun. Eğer x_v^ε ve $x_v^{-\varepsilon}$ harfleri bir kelimeye ardışık konumda bulunmuyor ise bu kelimeye *serbest indirgenmiş kelime* denir.

Örnek 2.6.6 F_n de $x_1 x_2^2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1}$ kelimesi serbest indirgenmiş kelimedir fakat $x_1 x_1^{-2} x_2^3 x_2^{-1} x_1^{-1}$ kelimesi serbest indirgenmiş kelime değildir.

Tanım 2.6.7 F_n de bir w serbest indirgenmiş kelimesi x_v^ε ile başlayıp $x_v^{-\varepsilon}$ ile bitmiyorsa w ya *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

Örnek 2.6.8 F_n de $x_1^2 x_2^5 x_3^{-1}$ kelimesi devirsel indirgenmiş fakat $x_1 x_2^{-2} x_3 x_2^2 x_1^{-1}$ kelimesi devirsel indirgenmiş değildir.

Sonuç 2.6.9 $w \in F_n$ nin bir devirsel indirgenmiş kelime olabilmesi için gerek ve yeter koşul w nün tüm permütasyonlarının serbest indirgenmiş olmasıdır.

Tanım 2.6.10 w_1 ve w_2 iki kelime olsun. Eğer bu iki kelime F_n nin aynı indirgenmiş elemanını temsil ediyorsa, bu iki kelimeye *serbest eşit kelimeler* denir ve $w_1 \approx w_2$ ile gösterilir. Örneğin $w_1 = x_1 x_2^2 x_2^{-1} x_3^2 x_1^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}$ ve $w_2 = x_1 x_2 x_3^{-1} x_3^2 x_1^{-1}$ olsun. $w_1 \approx w_2$ dir. Çünkü w_1 ve w_2 F_n nin $x_1 x_2 x_3 x_1^{-1}$ indirgenmiş elemanına denktir.

Sonuç 2.6.11 F_n deki her bir kelime serbest indirgenmiş bir kelimeye serbest eşittir.

Bir kelimeyi indirgemenin değişik yolları vardır. Yani indirgemeler farklı sırada yapılabilir. Fakat en sonunda elde edilecek indirgenmiş kelime bir tek tanedir.

Şimdi bir kelimenin serbestçe eşit olduğu indirgenmiş kelimeyi veren bir tekniği aşağıda vereceğiz.

Teorem 2.6.12 F_n bir serbest grup olsun. F_n nin her bir elemanı bir tek serbest indirgenmiş kelime olarak tanımlar. Yani; $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin her bir kelimesi bir tek serbest indirgenmiş kelimeye serbest eşittir.

İspat. Teoremi ispatlamak için bir kelimeyi serbest indirgeyen bir ρ tekniği tanımlayacağız. ρ tekniği, verilen bir kelimeyi ilk kısmından başlayarak ardışık olarak indirgeme prensibine dayanır.

En genel haliyle ρ tekniğini tümevarım ile

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(x_v^\varepsilon) = x_v^\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1; v = 1, 2, \dots, n)$$

ve eğer

$$\rho(U) = x_{\mu_1}^{\eta_1} x_{\mu_2}^{\eta_2} \dots x_{\mu_q}^{\eta_q} \quad (\eta_i = \pm 1; \mu_i = 1, 2, \dots, n),$$

şeklinde ise,

$$\rho(Ux_v^\varepsilon) = x_{\mu_1}^{\eta_1} x_{\mu_2}^{\eta_2} \dots x_{\mu_q}^{\eta_q} x_v^\varepsilon \quad ; \quad \text{eğer} \quad \mu_q \neq v \text{ ya da } \eta_q \neq -\varepsilon$$

$$\rho(Ux_v^\varepsilon) = x_{\mu_1}^{\eta_1} x_{\mu_2}^{\eta_2} \dots x_{\mu_{q-1}}^{\eta_{q-1}} \quad ; \quad \text{eğer} \quad \mu_q = v \text{ ya da } \eta_q = -\varepsilon$$

olarak ifade edebiliriz. Örnek olarak $W = x_1 x_2^{-1} x_3 x_3^{-1} x_2$ kelimesine ρ tekniğini uygulayalım.

$\rho(x_1 x_2^{-1} x_3 x_3^{-1} x_2)$ hesaplayalım.

$$\rho(x_1) = x_1$$

$$\rho(x_1 x_2^{-1}) = x_1 x_2^{-1}$$

$$\rho(x_1 x_2^{-1} x_3) = x_1 x_2^{-1} x_3$$

$$\rho(x_1x_2^{-1}x_3x_3^{-1}) = x_1x_2^{-1}$$

$$\rho(x_1x_2^{-1}x_3x_3^{-1}x_2) = x_1$$

şeklinde hesaplanır.

Bu şekilde tanımlı ρ nun bazı özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

- a) $\rho(W)$ serbest indirgenmiştir.
- b) $\rho(W) \approx W$ (serbest eşittir).
- c) Eğer V serbest indirgenmiş ise $\rho(V) = V$.
- d) $\rho(W_1W_2) = \rho(\rho(W_1)W_2)$.
- e) $\rho(Wx_v^\varepsilon x_v^{-\varepsilon}) = \rho(W)$, ($\varepsilon = \pm 1$; $v = 1, 2, \dots, n$).
- f) $\rho(W_1x_v^\varepsilon x_v^{-\varepsilon}W_2) = \rho(W_1W_2)$, ($\varepsilon = \pm 1$; $v = 1, 2, \dots, n$).

a), b) ve e) özellikleri W nun uzunluğu üzerinden tümevarımla ρ nun tanımını kullanarak gösterilebilir.

c) özelliği, V nin uzunluğu üzerinden tümevarımla gösterilebilir.

d) özelliği, W_2 nin uzunluğu üzerinden tümevarımla gösterilebilir.

f) özelliği de d) ve e) nin kullanılması ile hemen görülebilir.

Bize iki serbest eşit kelime verildiğinde, bu iki kelimeye ρ tekniğini uygulanarak aynı indirgenmiş kelimeyi vereceğini göstereceğiz.

$U \approx T$ olsun. $U = U_1, U_2, \dots, U_k = T$ olacak şekildeki dizisini elde edebiliriz.

Bu dizi ardışık terimlerin birinden diğerine her bir adımda $x_v^\varepsilon x_v^{-\varepsilon}$ ile bir tek kısaltma ya da bir tek araya kelime sıkıştırma ile elde edilmişlerdir ($\varepsilon = \pm 1$; $v = 1, 2, \dots, n$).

Böylece f) den $\rho(U_i) = \rho(U_{i+1})$ olup $\rho(U) = \rho(T)$ dir.

Sonuç olarak, bir U kelimesini serbest indirgeyen her metot sonunda $\rho(U)$ olmak zorunda olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $U \approx V$ ve V serbest indirgenmiş olsun. O zaman yukarıdaki durumdan ve c) den $\rho(U) = \rho(V) = V$ dir. Böylece her bir U kelimesi bir tek serbest indirgenmiş kelimeye serbest eşittir.

■

Sonuç 2.6.13 $F_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ doğuraylı serbest grup olsun. 1 den farklı her elemanı sonsuz derecelidir.

İspat. $W = x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$; $v_i = 1, 2, \dots, n$) F_n nin serbest indirgenmiş ve birim olmayan bir elemanı olsun.

(i) Eğer $v_1 \neq v_p$ ya da $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_p$ ise W devirsel indirgenmiştir. Böylece, k bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$W^k = x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p} x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p} \dots x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p}$$

olup W^k da serbest indirgenmiştir ve boş kelime değildir. Böylece W^k hiçbir zaman 1 i belirlemez. Sonuç olarak W sonsuz derecelidir.

(ii) Eğer W devirsel indirgenmiş değilse, o zaman W , devirsel indirgenmiş bir V kelimesine konjugedir. Eğer

$$W = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{\mu_1}^{\eta_1} \dots x_{\mu_q}^{\eta_q} x_{v_r}^{-\varepsilon_r} \dots x_{v_1}^{-\varepsilon_1}, \quad (\varepsilon_i, \eta_i = \pm 1; v_i, \mu_i = 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde ise, o zaman $U = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r}$ ve $V = x_{\mu_1}^{\eta_1} \dots x_{\mu_q}^{\eta_q}$ olup $W = UVU^{-1}$ dan V devirsel indirgenmiş ve 1 den farklıdır. (i) den V devirsel indirgenmiş olup sonsuz derecelidir. Dolayısıyla bu sonsuz dereceli elemana konjuge olan W da sonsuz derecelidir ($a = bxb^{-1}$ ise $|a| = |b|$).

■

F_n bir serbest grup olsun. Şimdi de F_n de verilen bir kelimeyi devirsel indirgenmiş kelimeye dönüştüren bir teknikten söz edeceğiz. Bu tekniğe σ diyecek olursak kabaca σ tekniği, bir kelimeyi ilk önce indirgenmiş kelimeye daha sonrada devirsel indirgenmiş kelimeye dönüştürür.

En genel haliyle σ tekniğini tümevarım ile

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= 1, & \sigma(x_v^\varepsilon) &= x_v^\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1; v = 1, 2, \dots, n), \\
\sigma(x_v^\varepsilon U x_\mu^\eta) &= x_v^\varepsilon U x_\mu^\eta; & \text{eğer} \quad v &\neq \mu \text{ ya da } \varepsilon \neq -\eta, \\
\sigma(x_v^\varepsilon U x_\mu^\eta) &= \sigma(U); & \text{eğer} \quad v &= \mu \text{ ve } \varepsilon = -\eta
\end{aligned}$$

olarak ifade edebiliriz. Burada $\varepsilon, \eta = \pm 1$ ve $v, \mu = 1, 2, \dots, n$ dir. Sonuç olarak σ , herhangi bir W kelimesi için $\sigma(W) = \sigma(\rho(W))$ dur.

Örnek olarak $w = x_1 x_2 x_3 x_3^{-1} x_1^{-1}$ kelimesine σ tekniğini uygulayalım.

$$\sigma(x_1 x_2 x_3 x_3^{-1} x_1^{-1}) = \sigma(x_1 x_2 x_1^{-1}) = \sigma(x_2) = x_2.$$

Kolayca görülebilir ki σ nın tanımından, W kelimesi ile $\sigma(W)$ devirsel indirgenmiş kelimesi F_n nin konjuge elemanlarını tanımlar.

Teorem 2.6.14 F_n bir serbest grup olsun. W_1 ile W_2 kelimeleri, F_n nin konjuge elemanlarını tanımlaması için gerek ve yeter koşul W_1 in $\sigma(W_1)$ devirsel indirgenişi, W_2 nin $\sigma(W_2)$ devirsel indirgenişinin bir devirsel permütasyonu olmasıdır.

İspat. İlk önce kabul edelim ki $\sigma(W_2), \sigma(W_1)$ in devirsel permütasyonlarından birisi olsun. Yani;

$$\sigma(W_1) = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_s}^{\varepsilon_s} x_{v_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p}$$

ve

$$\sigma(W_2) = x_{v_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}} \dots x_{v_p}^{\varepsilon_p} x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_s}^{\varepsilon_s}$$

olsun. Burada $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $v_i = 1, 2, \dots, n$ dir. O zaman $K = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_s}^{\varepsilon_s}$ olmak üzere $\sigma(W_1) \approx K \sigma(W_2) K^{-1}$ dir. Çünkü $\sigma(W_1)$ ve W_1 ve de $\sigma(W_2)$ ve W_2 , F_n nin konjuge elemanlarını tanımlar. Böylece W_1 ve W_2 , F_n nin konjuge elemanlarını tanımlar.

Şimdi de kabul edelim ki W_1 ve W_2 , F_n nin konjuge elemanlarını tanımlasın. Yani; $W_1 \approx TW_2T^{-1}$ olsun. O zaman $\sigma(W_1)$ ve $\sigma(W_2)$ nin birbirlerinin devirsel permütasyonları olduklarını göstermeliyiz. Bunun için

$$\rho(W_1) = \rho(TW_2T^{-1})$$

olduğundan

$$\sigma(W_1) = \sigma(\rho(W_1)) = \sigma(\rho(TW_2T^{-1})) = \sigma(TW_2T^{-1})$$

dir. Böylece $\sigma(TW_2T^{-1})$ in $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisi olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunu T nin uzunluğu üzerinden tümevarım kullanarak gösterelim. Eğer

$$T = x_v^\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1; v = 1, 2, \dots, n),$$

ise $\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon})$ ile $\sigma(W_2)$ karşılaştıralım.

$$\sigma(W_2) = \sigma(\rho(W_2))$$

olup

$$x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon} \approx x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}$$

olduğundan

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(\rho(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon})) = \sigma(\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}))$$

elde edilir. Varsayalım ki

$$\rho(W_2) = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} \quad (\varepsilon = \pm 1; v = 1, 2, \dots, n);$$

olsun. O zaman

$$\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}) = x_v^\varepsilon x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_v^{-\varepsilon}$$

olduğunu göstermeyi dört durumda inceleyeceğiz.

Durum 1. Hiç bir kısalma olmasın, yani; $v \neq v_1$ ya da $\varepsilon \neq \varepsilon_1$, ve $v \neq v_r$ ya da $\varepsilon \neq \varepsilon_r$ ise, o zaman

$$\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}) = x_v^\varepsilon x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_v^{-\varepsilon}$$

dur. Bundan dolayı

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(x_v^\varepsilon x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r}) = \sigma(W_2)$$

olur.

Durum 2. Başta ve sonda kısalma olsun, yani; $v = v_1 = v_r$ ve $\varepsilon = -\varepsilon_1 = \varepsilon_r$ ise, o zaman

$$\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}) = x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}$$

dir. Böylece

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}})$$

iken

$$\sigma(W_2) = \sigma(x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} x_{v_r}^{\varepsilon_r}) = \sigma(x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}})$$

olup, yine

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(W_2)$$

olur.

Durum 3. Sadece başta kısalma olsun, yani; $v = v_1$ ve $\varepsilon = -\varepsilon_1$, fakat $v_1 \neq v_r$ ya da $\varepsilon_r \neq \varepsilon_1$ ise, o zaman

$$\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}) = x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_v^{-\varepsilon} = x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1}$$

dir. $x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r}$ ve $x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1}$ serbest indirgenmiş olup ikisi de devirsel indirgenmiştir. Bundan dolayı

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1}) = x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1}$$

iken

$$\sigma(W_2) = \sigma(x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r}) = x_{v_1}^{\varepsilon_1} x_{v_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{v_r}^{\varepsilon_r}$$

olup, $\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisidir.

Durum 4. Sadece sonda kısalma olsun, yani; $v \neq v_1$ ya da $\varepsilon \neq -\varepsilon_1$, fakat $v = v_r$ ve $\varepsilon = \varepsilon_r$ ise, o zaman

$$\rho(x_v^\varepsilon \rho(W_2) x_v^{-\varepsilon}) = x_v^\varepsilon x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} = x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}$$

dir. Böylece

$$\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon}) = \sigma(x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}) = x_{v_r}^{\varepsilon_r} x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}$$

iken

$$\sigma(W_2) = \sigma(x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} x_{v_r}^{\varepsilon_r}) = x_{v_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{v_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} x_{v_r}^{\varepsilon_r}$$

olup, $\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisidir.

Böylece dört durumda da $\sigma(x_v^\varepsilon W_2 x_v^{-\varepsilon})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisi oluyor. Bu da bize gösterir ki, T nin uzunluğu 1 iken $\sigma(TW_2T^{-1})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisidir.

Kabul edelim ki $\sigma(KW_2K^{-1})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisi olsun. O zaman yukarıdaki durumlardan $\sigma(x_v^\varepsilon KW_2K^{-1}x_v^{-\varepsilon})$, $\sigma(KW_2K^{-1})$ in devirsel permütasyonlarından birisidir ve böylece tümevarım hipotezinden $\sigma(x_v^\varepsilon KW_2K^{-1}x_v^{-\varepsilon})$, $\sigma(W_2)$ nin devirsel permütasyonlarından birisidir.

■

Tanım 2.6.15 (Whitehead Otomorfizmleri) F , Σ kümesi üzerinde bir serbest grup olsun. σ Whitehead otomorfizmi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(W1): σ , $\Sigma^{\pm 1}$ de permütasyon elemanıdır.

(W2): $S \subset \Sigma^{\pm 1}$ bir küme ve $a \in \Sigma^{\pm 1}$ bir harf olmakla birlikte $a, a^{-1} \notin S$ ve $c \in \Sigma^{\pm 1}$ için

- a) $c \in S$ ve $c^{-1} \notin S$ ise $\sigma(c) = ca$;
- b) $c, c^{-1} \in S$ ise $\sigma(c) = a^{-1}ca$;
- c) $c, c^{-1} \notin S$ ise $\sigma(c) = c$.

Eğer σ , (W2) tipinde ise $\sigma = (S, a)$ yazacağız. $(\bar{S}, a^{-1}) = (\Sigma^{\pm 1} - S - a^{\pm 1}, a^{-1})$ şeklinde ifade edeceğiz.

3. SERBEST GRUPLARDA TRANSLATION DENK ELEMANLAR

Çalışmamızın bu bölümünde, rankı $n \geq 2$ olan F_n serbest grubunda translation denklik kavramını tanıtmaya çalışacağız. $w_1, w_2 \in F_n$ iki eleman olsun. Eğer $\phi(w_1) = w_2$ olacak biçimde bir $\phi \in \text{Aut}F_n$ bulunabiliyorsa w_1 ve w_2 elemanlarına *otomorfik denktir* denir. Bu kısımda inceleyeceğimiz translation denklik kavramı biraz daha farklı olup, her $\phi \in \text{Aut}F_n$ için $\phi(w_1)$ ile $\phi(w_2)$ nin devirsel uzunlukları aynı oluyorsa w_1 ve w_2 elemanlarına *translation denk* denir. Biz burada F_n de g ve h translation denk olan iki eleman iken $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ elemanlarının da translation denk olduğu göstereceğiz. Daha sonra da F_2 de herhangi iki elemanın translation denk olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığını göstereceğiz. Bu kısımda yararlanacağımız bir kaç tanım ve teoremi aşağıda vereceğiz.

$F(a, b)$, $\{a, b\}$ tarafından üretilen serbest grup ve $F(a, b)$ de keyfi seçilmiş bir kelime $w(a, b)$ ile gösterilsin. Biz her ne zaman $g, h \in F_n$ için g ve h , F_n de translation denk ise $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ nin de F_n de translation denk olduğunu göstereceğiz.

F_n , X kümesi üzerinde rankı $n \geq 2$ olan bir serbest grup olsun. Bu kısımda ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve notasyonları verelim. $v \in F_n$ olmak üzere;

$|v|$: X üzerinde indirgenmiş v kelimesinin uzunluğudur.

$[v]$ *devirsel kelime*: Devirsel indirgenmiş v kelimesinin tüm devirsel permütasyonlarının kümesidir.

$\|v\|$ *devirsel uzunluk*: v ye konjuge olan bir devirsel indirgenmiş kelimenin tüm devirsel permütasyonlarının sayısıdır.

Tanım 3.1 $g, h \in F_n$ ve F_n nin her ϕ otomorfizmi için $\phi(g)$ nin devirsel uzunluğu $\phi(h)$ nin devirsel uzunluğuna eşit ise g ve h elemanlarına F_n de *translation denktir* denir.

Teorem 3.2 $w(g, h) \in F(a, b)$ serbestçe indirgenmiş bir kelime olsun. O zaman herhangi $g, h \in F_n$ için $w(g, h)$ ve $w^R(g, h)$ translation denktir ($w^R(a, b) = w(a, b)^{-1}$).

Teorem 3.3 $g, h \in F_n$ de translation denk ve $g \neq h^{-1}$ olsun. O zaman herhangi p, q, i, j pozitif tamsayıları için $p + q = i + j$ ise $g^p h^q$ ve $g^i h^j$ de F_n de translation denktir.

Kapovich-Levitt-Schupp-Shpilrain (2007) makalesinde, her ne zaman $g, h \in F_n$ de translation denk ve $w(g, h) \in F(a, b)$ de keyfi seçilmiş olduğunda $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ nin F_n de translation denk olup olmayacağını sormuştur. Burada bu soruya cevap vermeye çalışılacaktır.

Teorem 3.4 $g, h \in F_n$ de translation denk ve $w(a, b) \in F(a, b)$ de keyfi seçilmiş bir kelime olsun. O zaman $w(g, h)$ ve $w(h, g)$ de F_n de translation denktir.

İspat. Eğer $[w(a, b)]$ devirsel kelimesi trivial ise yani $w(a, b) = 1$ ise sonuç açıktır. O halde $[w(a, b)]$ devirsel kelimesi trivial olmasın. Eğer $g = h^{\pm 1}$ ise de durum açıktır. Çünkü $g = h$ ise $w(h, h) = w(h, h)$ olur, eğer $g = h^{-1}$ ise $w(h, h^{-1})$ ile $w(h^{-1}, h)$ translation denktir. O halde $g \neq h^{\pm 1}$ olsun. Eğer $[w(a, b)]$ devirsel kelimesi sadece bir harften oluşuyorsa, yani; sıfırdan farklı bazı i ler için $[w(a, b)] = [a^i]$ ya da $[w(a, b)] = [b^i]$ ise durum açıktır. Aksine $[w(a, b)]$ devirsel kelimesi

$$[w(a, b)] = [a^{l_1} b^{m_1} \dots a^{l_k} b^{m_k}] \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada l_i, m_i sıfırdan farklı tamsayılardır. ϕ, F_n nin keyfi seçilmiş bir otomorfizmi olsun. Teoremi ispatlamak için $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ olduğunu göstermeliyiz. Kolaylık olması bakımından

$$X = \phi(g) \text{ ve } Y = \phi(h)$$

yazalım. F_n deki X ve Y kelimeleri, $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ de devirsel indirgenmiş (A veya B boş kelime olabilir) olmak üzere

$$X = A\bar{X}A^{-1} \text{ ve } Y = B\bar{Y}B^{-1} \quad (3.2)$$

indirgenmiş kelimeler olarak tek şekilde parçalanabilir. g ve h, F_n de translation denk olup

$$|\bar{X}| = |\bar{Y}| \quad (3.3)$$

dır. (3.1) ile (3.2) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} [\phi(w(g, h))] &= [A\bar{X}^{l_1}A^{-1}B\bar{Y}^{m_1}B^{-1} \dots A\bar{X}^{l_k}A^{-1}B\bar{Y}^{m_k}B^{-1}] \\ [\phi(w(h, g))] &= [B\bar{Y}^{l_1}B^{-1}A\bar{X}^{m_1}A^{-1} \dots B\bar{Y}^{l_k}B^{-1}A\bar{X}^{m_k}A^{-1}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde ederiz.

$A^{-1}B$ çarpımındaki kısaltmaya göre, üç durumda inceleyerek ispata devam edeceğiz.

Durum 1. $A^{-1}B$ çarpımındaki ne A^{-1} ne de B tamamen kısalsın. O zaman

$$l = \sum_{i=1}^k |l_i| \text{ ve } m = \sum_{i=1}^k |m_i| \text{ olsun. Bu durumda (3.4) ün sonucu olarak}$$

$$\|\phi(w(g, h))\| = l|\bar{X}| + m|\bar{Y}| + k|A^{-1}B| + k|B^{-1}A|$$

$$\|\phi(w(h, g))\| = l|\bar{Y}| + m|\bar{X}| + k|B^{-1}A| + k|A^{-1}B|$$

olup böylece (3.3) den $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ dır.

Durum 2. $A^{-1}B$ çarpımındaki hem A^{-1} hem de B tamamen kısalsın, yani $A = B$ olsun.

Bu durumda (3.4) den

$$\begin{aligned} [\phi(w(g, h))] &= [\bar{X}^{l_1} \bar{Y}^{m_1} \dots \bar{X}^{l_k} \bar{Y}^{m_k}] \\ [\phi(w(g, h))] &= [\bar{Y}^{m_1} \bar{X}^{l_1} \dots \bar{Y}^{m_k} \bar{X}^{l_k}] \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde ederiz. Bu durum da herhangi $\varepsilon_i = \pm 1$ için $\bar{X}^{\varepsilon_1} \bar{Y}^{\varepsilon_2} \bar{X}^{\varepsilon_3}$ formundaki çarpımda ortadaki $\bar{Y}^{\varepsilon_2}$ tamamen kısalmaz olduğunu göstermeliyiz.

Aksini kabul edelim. Yani $\bar{X}^{\varepsilon_1} \bar{Y}^{\varepsilon_2} \bar{X}^{\varepsilon_3}$ formundaki çarpımda ortadaki $\bar{Y}^{\varepsilon_2}$ tamamen kısalsın. Eğer $\bar{X}^{\varepsilon_1} = \bar{Y}^{-\varepsilon_2}$ ya da $\bar{X}^{\varepsilon_3} = \bar{Y}^{-\varepsilon_3}$ ise $\bar{X} = \bar{Y}^{\pm 1}$ dır. Ayrıca $A = B$ olup $X = A\bar{X}A^{-1} = B\bar{Y}^{\pm 1}B^{-1} = Y^{\pm 1}$ dır. Bu durum ise $g \neq h^{\pm 1}$ kabulümüz ile çelişir. Aksi takdirde $\bar{X}^{\varepsilon_1}$ in $\bar{Y}_1^{-\varepsilon_2}$ ile bitmesi, $\bar{X}^{\varepsilon_3}$ ün $\bar{Y}_2^{-\varepsilon_2}$ ile başlaması olan bir tek olasılık karşımıza çıkar. Burada $\bar{Y}^{\varepsilon_2} = \bar{Y}_1^{\varepsilon_2} \bar{Y}_2^{\varepsilon_2}$, $|\bar{Y}_i| > 1$ olup $i = 1, 2$ dır. $\bar{Y}$ devirsel indirgenmiş olduğu için bu durum sadece $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ olduğunda meydana gelir. Bununla (3.3) ü birleştirirsek $\bar{X}^{\varepsilon_1} = \bar{Y}_2^{-\varepsilon_2} \bar{Y}_1^{-\varepsilon_2} = \bar{Y}^{-\varepsilon_2}$ olup $\bar{X} = \bar{Y}^{\pm 1}$ olur. Bu ise yine çelişkidir. Benzer şekilde de $\bar{Y}^{\varepsilon_1} \bar{X}^{\varepsilon_2} \bar{Y}^{\varepsilon_3}$ çarpımında her bir $\varepsilon_i = \pm 1$ için ortadaki $\bar{X}^{\varepsilon_2}$ nin de tamamen kısalmaz olduğu gösterilebilir. Böylece istenen durum ispatlanmış olur.

Şimdi bu ispatladığımız durumu teoremin ispatında kullanalım.

$x, y \in \{a, b\}^{\pm 1}$ için $n(xy)$ ile $w(a, b)$ devirsel kelimesi içindeki xy alt kelimesinin tekrarlanma sayısı olsun.

$$\alpha_1 = n(ab) \text{ ve } \alpha_2 = n(ba)$$

$$\beta_1 = n(a^{-1}b^{-1}) \text{ ve } \beta_2 = n(b^{-1}a^{-1})$$

$$\gamma_1 = n(ab^{-1}) \text{ ve } \gamma_2 = n(b^{-1}a)$$

$$\delta_1 = n(a^{-1}b) \text{ ve } \delta_2 = n(ba^{-1})$$

koyalım. O zaman

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 \quad (3.6)$$

$$2\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 2\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2$$

dır. $\kappa = (\gamma_1 + \delta_1) - (\gamma_2 + \delta_2)$ (κ sıfır olabilir) koyalım. (3.6) daki ikinci eşitlikten $\kappa = (\gamma_1 + \delta_1) - (\gamma_2 + \delta_2) = 2\beta_2 - 2\beta_1$ dir. Bu yüzden κ çift tamsayıdır ve $\beta_2 = \beta_1 + \kappa/2$ dir. Bu ve (3.6) daki birinci eşitlikle birlikte $\alpha_2 = \alpha_1 + \kappa/2$ dir ve böylece

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 \quad (3.7)$$

dır. Şimdi $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, s_1, s_2$ tamsayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$p_1 = |\bar{X}| + |\bar{Y}| - |\bar{X}\bar{Y}| \text{ ve } p_2 = |\bar{Y}| + |\bar{X}| - |\bar{Y}\bar{X}|$$

$$q_1 = |\bar{X}^{-1}| + |\bar{Y}^{-1}| - |\bar{X}^{-1}\bar{Y}^{-1}| \text{ ve } q_2 = |\bar{Y}^{-1}| + |\bar{X}^{-1}| - |\bar{Y}^{-1}\bar{X}^{-1}|$$

$$r_1 = |\bar{X}| + |\bar{Y}^{-1}| - |\bar{X}\bar{Y}^{-1}| \text{ ve } r_2 = |\bar{Y}| + |\bar{X}^{-1}| - |\bar{Y}\bar{X}^{-1}|$$

$$s_1 = |\bar{X}^{-1}| + |\bar{Y}| - |\bar{X}^{-1}\bar{Y}| \text{ ve } s_2 = |\bar{Y}^{-1}| + |\bar{X}| - |\bar{Y}^{-1}\bar{X}|$$

olsun. O zaman (3.5) eşitlikleri ve hemen arkasına verilen ispattan

$$\|\phi(w(g, h))\| = l|\bar{X}| + m|\bar{Y}| - \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i - \sum_{i=1}^2 q_i \beta_i - \sum_{i=1}^2 r_i \gamma_i - \sum_{i=1}^2 s_i \delta_i \quad (3.8)$$

$$\|\phi(w(h, g))\| = l|\bar{Y}| + m|\bar{X}| - \sum_{i=1}^2 p_j \alpha_i - \sum_{i=1}^2 q_j \beta_i - \sum_{i=1}^2 r_j \gamma_i - \sum_{i=1}^2 s_j \delta_i$$

elde edilir. Burada $j = 2$ ise $i = 1$; $j = 1$ ise $i = 2$ dir. Ayrıca $p_1 = q_2$, $q_1 = p_2$, $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ dir. Bunları (3.7) ile birlikte düşünersek

$$\begin{aligned} p_1 \alpha_1 + q_2 \beta_2 &= p_1 \alpha_1 + p_1 \beta_2 = p_1 (\alpha_1 + \beta_2) \\ &= q_2 (\alpha_2 + \beta_1) = q_2 \alpha_2 + q_2 \beta_1 = p_1 \alpha_2 + q_2 \beta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 \alpha_2 + q_1 \beta_1 &= p_2 \alpha_2 + p_2 \beta_1 = p_2 (\alpha_2 + \beta_1) \\ &= q_1 (\alpha_1 + \beta_2) = q_1 \alpha_1 + q_1 \beta_2 = p_2 \alpha_1 + q_1 \beta_2 \end{aligned}$$

ve

$$r_1 \gamma_1 = r_2 \gamma_1, \quad r_2 \gamma_2 = r_1 \gamma_2, \quad s_1 \delta_1 = s_2 \delta_1, \quad s_2 \delta_2 = s_1 \delta_2$$

elde edilir. Tüm bu eşitlikler ve (3.3) ile (3.8) i birleştirirsek $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ sonucunu elde etmiş oluruz.

Durum 3. $A^{-1}B$ çarpımındaki hem A^{-1} ve B den sadece biri tamamen kısalsın.

Genelliği bozmaksızın, $A^{-1}B$ çarpımındaki A^{-1} tamamen kısalsın. O zaman B kelimesi $|C| > 0$ olmak üzere

$$B = AC \quad (3.9)$$

indirgenmiş şeklinde parçalanabilir. O zaman (3.4) eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$[\phi(w(g, h))] = [\bar{X}^{l_1} C \bar{Y}^{m_1} C^{-1} \dots \bar{X}^{l_k} C \bar{Y}^{m_k} C^{-1}] \quad (3.10)$$

$$[\phi(w(g, h))] = [\bar{Y}^{l_1} C^{-1} \bar{X}^{m_1} C \dots \bar{Y}^{l_k} C^{-1} \bar{X}^{m_k} C]$$

Eğer (3.10) daki ifade indirgenmiş ise (3.3) den $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ olduğu açıktır. Aksi takdirde, sıfırdan farklı tüm i ler için $C \bar{Y}^i C^{-1}$ indirgenmiş olduğundan ((3.2) den $B \bar{Y} B^{-1}$ indirgenmişti) ve $\bar{X}$ de devirsel indirgenmiş olduğundan ilk kısalma ($j > 0$ olmak üzere) sadece C^{-1} ve $\bar{X}^j$ ya da $\bar{X}^j$ ve C arasında meydana gelebilir, fakat ikisinde de meydana gelemez. Varsayalım ki ilk kısalma $\bar{X}^j$ ve C arasında meydana gelsin. E , $C^{-1} \bar{X} C$ çarpımında kısaltmadan kalan C nin bir parçası olmak üzere (E boş kelimedede olabilir)

$$C = DE \text{ (indirgenmiş)} \quad (3.11)$$

yazalım. $\bar{Z}$ yi de $D^{-1} \bar{X} D$ nin indirgenmiş formu olarak tanımlayalım. O zaman D nin seçimine dikkat edersek $\bar{Z}$, $\bar{X}$ in bir devirsel permütasyonudur ve böylece $\bar{Z}$ devirsel indirgenmiş olup $|\bar{Z}| = |\bar{X}|$ dir. (3.10) ve (3.11) den

$$[\phi(w(g, h))] = [\bar{Z}^{l_1} E \bar{Y}^{m_1} E^{-1} \dots \bar{Z}^{l_k} E \bar{Y}^{m_k} E^{-1}] \quad (3.12)$$

$$[\phi(w(g, h))] = [\bar{Y}^{l_1} E^{-1} \bar{Z}^{m_1} E \dots \bar{Y}^{l_k} E^{-1} \bar{Z}^{m_k} E]$$

dır. İlk önce E yi boş olmayan bir kelime seçelim. E nin seçiminden sıfırdan farklı tüm i ler için $E^{-1} \bar{Z}^i E$ indirgenmiştir. Hem de sıfırdan farklı tüm j ler için de (3.2) den, $B \bar{Y}^j B^{-1}$ indirgenmiş olduğundan $E \bar{Y}^j E^{-1}$ de indirgenmiştir. Böylece (3.12) indirgenmiş olup $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ ve $|\bar{Z}| = |\bar{Y}|$ dir. Şimdi de E yi boş kelime olarak seçelim. O zaman (3.2), (3.9) ve (3.11) den

$$X = B\bar{Z}B^{-1} \tag{3.13}$$

dır. $\bar{Z}^{\varepsilon_1}\bar{Y}^{\varepsilon_2}\bar{Z}^{\varepsilon_3}$ formundaki çarpımda, ortadaki $\bar{Y}^{\varepsilon_2}$ herhangi $\varepsilon_i = \pm 1$ için tamamen kısalmaz, çünkü aksi taktirde Durum 2 deki ispatımızdaki benzer durumdan $\bar{Z} = \bar{Y}^{\pm 1}$, yani, (3.13) den $X = B\bar{Z}B^{-1} = B\bar{Y}^{\pm 1}B^{-1} = Y^{\pm 1}$ olup bu durum $g \neq h^{\pm 1}$ kabulümüz ile çelişir. Benzer şekilde $Y^{\varepsilon_1}\bar{Z}^{\varepsilon_2}\bar{Y}^{\varepsilon_3}$ formundaki çarpımda, ortadaki $\bar{Z}^{\varepsilon_2}$ de herhangi $\varepsilon_i = \pm 1$ için tamamen kısalmaz.

Böylece Durum 2 den $\|\phi(w(g, h))\| = \|\phi(w(h, g))\|$ dır.

■

4. RANKI İKİ OLAN BİR SERBEST GRUPTAKİ TRANSLATION DENKLİK ALGORİTMASI

Bu bölümde rankı 2 olan ve $\Sigma = \{x, y\}$ üzerinde tanımlı F_2 serbest grubunda verilen herhangi iki elemanın translation denk olup olmadığını veren bir algorithmadan söz edeceğiz. Donghi Lee (2007) tarafından verilen bu algoritmanın nasıl çalıştığını göstereceğiz. Bu algoritmayı kullanarak bazı elemanların translation denk olup olmadığına karar vereceğiz.

Teorem 4.1 $u, v \in F_2$ olsun. u ve v nin F_2 de translation denk olup olmadığına karar veren bir algoritma vardır.

Algoritma. $F_2 = \langle x, y \rangle$ ve Ω , F_2 nin Whitehead otomorfizmlerinin tüm zincirlerinin kümesi olsun, öyle ki;

ya

$$(\{y\}, x)^{m_k}(\{x\}, y)^{l_k} \dots (\{y\}, x)^{m_1}(\{x\}, y)^{l_1}$$

ya da

$$(\{y\}, x^{-1})^{m_k}(\{x\}, y^{-1})^{l_k} \dots (\{y\}, x^{-1})^{m_1}(\{x\}, y^{-1})^{l_1}$$

formundadır. Burada $k \in \mathbb{N}$, $l_i, m_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^k (l_i + m_i) \leq 2\|u\| + 3$ dir. Açıkça görülür ki Ω kümesi sonlu bir kümedir. Eğer her $\psi \in \Omega$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ ise u ve v , F_2 de translation denktir, aksi takdirde u ve v , F_2 de translation denk değildir.

Burada algoritmanın ispatından önce, ihtiyaç duyacağımız bazı kavramlar, notasyonlar ve yardımcı lemmalardan bahsedeceğiz.

σ , Tanım 2.6.15 deki (W2) tipinde bir Whitehead otomorfizmi ise, o zaman F_n deki her w devirsel kelimesi için

$$(S, a)(w) = (\bar{S}, a^{-1})(w) \quad (4.1)$$

dur.

w, F_n de bir devirsel kelime ve $a, b \in \Sigma^{\pm 1}$ olsun.

$n(w; a, b)$: w deki ab ve $b^{-1}a^{-1}$ alt kelimelerinin toplam tekrarlanma sayısını gösterelim. Buradan $n(w; a, b) = n(w; b^{-1}, a^{-1})$ dir.

$n(w; a)$: w deki a ve a^{-1} alt kelimelerinin toplam tekrarlanma sayısı olmak üzere $n(w; a) = n(w; a^{-1})$ dir.

Tanım 4.2 ϕ ve ψ , F_n nin iki otomorfizmi olmak üzere, F_n deki her w devirsel kelimesi için $\phi(w) = \psi(w)$ oluyorsa ϕ ve ψ otomorfizmlerine *denktirler* denir ve $\phi \equiv \psi$ ile gösterilir.

$F_2, \{x, y\}$ kümesi üzerinde rankı 2 olan serbest grubu gösterebiliriz.

Lemma 4.3 α , Tanım 2.6.15 deki (W2) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi olsun. O zaman $\alpha; 1, (\{x\}, y), (\{x\}, y^{-1}), (\{y\}, x)$ ve $(\{y\}, x^{-1})$ ifadelerinden sadece birine denktir.

İspat. α , (W2) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi olsun. O zaman (W2) nin tanımından $\alpha; (\{x\}, y), (\{x^{-1}\}, y), (\{x^{\pm 1}\}, y), (\{x\}, y^{-1}), (\{x^{-1}\}, y^{-1}), (\{x^{\pm 1}\}, y^{-1}), (\{y^{-1}\}, x), (\{y\}, x), (\{y^{\pm 1}\}, x), (\{y\}, x^{-1}), (\{y^{-1}\}, x^{-1})$ ve $(\{y^{\pm 1}\}, x^{-1})$ otomorfizmlerinden biridir. Bu otomorfizmler arasında $(\{x^{\pm 1}\}, y), (\{x^{\pm 1}\}, y^{-1}), (\{y^{\pm 1}\}, x)$ ve $(\{y^{\pm 1}\}, x^{-1})$ F_2 deki her devirsel kelime üzerinde birim etki olarak rol oynar. Bundan başka (4.1) den F_2 de $(\{x^{-1}\}, y) \equiv (\{x\}, y^{-1}), (\{x^{-1}\}, y^{-1}) \equiv (\{x\}, y), (\{y^{-1}\}, x) \equiv (\{y\}, x^{-1})$ ve $(\{y^{-1}\}, x^{-1}) \equiv (\{y\}, x)$ dir.

■

Bundan böyle aksi belirtilmedikçe $\sigma = (\{x\}, y)$ ve $\tau = (\{y\}, x)$ F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi olarak kabul edilecektir. O zaman açıkça görülür ki $\sigma^{-1} = (\{x\}, y^{-1})$ ve $\tau^{-1} = (\{y\}, x^{-1})$ dir.

Lemma 4.4 π , Tanım 2.6.15 deki (W1) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi olup $x \rightarrow y$ ve $y \rightarrow x^{-1}$ götürsün. O zaman aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \tau^{-1}\sigma &\equiv \pi\tau, & \tau^{-1}\pi &\equiv \pi\sigma, & \sigma^{-1}\pi &\equiv \pi\tau, \\ \sigma\tau^{-1} &\equiv \pi\sigma^{-1}, & \tau\pi &\equiv \pi\sigma^{-1}, & \sigma\pi &\equiv \pi\tau^{-1}, \\ \tau\sigma^{-1} &\equiv \pi^{-1}\tau^{-1}, & \tau\pi^{-1} &\equiv \pi^{-1}\sigma^{-1}, & \sigma\pi^{-1} &\equiv \pi^{-1}\tau^{-1}, \\ \sigma^{-1}\tau &\equiv \pi^{-1}\sigma, & \tau^{-1}\pi^{-1} &\equiv \pi^{-1}\sigma, & \sigma^{-1}\pi^{-1} &\equiv \pi^{-1}\tau. \end{aligned}$$

İspat. Birinci eşitliği gösterelim. Yani $(\pi\tau)^{-1}(\tau^{-1}\sigma) \equiv 1$ olduğunu gösterelim. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

$\sigma = (\{x\}, y)$ olup $\sigma: x \rightarrow xy, x^{-1} \rightarrow y^{-1}x^{-1}, y \rightarrow y, y^{-1} \rightarrow y^{-1}$ götürür.

$\tau^{-1} = (\{y\}, x^{-1})$ olup $\tau^{-1}: x \rightarrow x, x^{-1} \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow yx^{-1}, y^{-1} \rightarrow xy^{-1}$ götürür.

$\pi^{-1}: x \rightarrow y^{-1}, x^{-1} \rightarrow y, y \rightarrow x, y^{-1} \rightarrow x^{-1}$ götürür.

$$\begin{aligned} (\pi\tau)^{-1}(\tau^{-1}\sigma)(x) &= \tau^{-1}(\pi^{-1}(\tau^{-1}(\sigma(x)))) \\ &= \tau^{-1}(\pi^{-1}(\tau^{-1}(xy))) \\ &= \tau^{-1}(\pi^{-1}(xyx^{-1})) \\ &= \tau^{-1}(y^{-1}xy) \\ &= xy^{-1}xyx^{-1} = x \end{aligned}$$

■

Lemma 4.5 F_n nin her ϕ otomorfizmi; β , Tanım 2.6.15 deki (W1) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi ve ϕ' de

$$(C1): \phi' \equiv \tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1} \quad (4.2)$$

$$(C2): \phi' \equiv \tau^{-m_k} \sigma^{-l_k} \dots \tau^{-m_1} \sigma^{-l_1}$$

formlarından birindeki bir zincir olmak üzere $\phi \equiv \beta \phi'$ şeklinde takdim edilebilir. Burada $k \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $l_i, m_i \geq 0$ dır.

İspat. Whitehead teoremi (Whitehead 1936) ile Lemma 4.3 den F_n nin bir ϕ otomorfizmi

$$\phi \equiv \beta' \tau^{q_t} \sigma^{p_t} \dots \tau^{q_1} \sigma^{p_1} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada β' , Tanım 2.6.15 deki (W1) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi, $k \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ dır. Eğer her p_i ve q_i aynı işarete sahip değilse, (4.3) deki eşitliğin sağ tarafına Lemma 4.4 deki eşitlikler tekrar tekrar uygulayarak

$$\phi \equiv \beta' \pi^r \tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$$

ya da

$$\phi \equiv \beta' \pi^r \tau^{-m_k} \sigma^{-l_k} \dots \tau^{-m_1} \sigma^{-l_1}$$

elde ederiz. Burada π , Lemma 4.4 deki otomorfizm ve $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $l_i, m_i \geq 0$ dır. $\beta = \beta' \pi^r$ koyarak sonuç elde edilir. ■

Lemma 4.5 deki aynı notasyonlara bağlı kalarak F_2 deki bir ϕ otomorfizminin uzunluğunu $\sum_{i=1}^k (m_i + l_i)$ olarak tanımlayalım ve $|\phi| = \sum_{i=1}^k (m_i + l_i)$ ile gösterelim. Açıkça görülür ki $|\phi| = |\phi'|$ dır.

Lemma 4.6 $u, v \in F_2$, $m \in \mathbb{Z}^+$ ve Λ da uzunluğu m ye eşit ya da küçük olan (4.2) formundaki tüm zincirlerin kümesi olsun. Her $\psi \in \Lambda$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $\psi \in \Lambda$ için $n([\psi(u)]; x) = n([\psi(v)]; x)$ ve $n([\psi(u)]; y) = n([\psi(v)]; y)$ dır.

İspat: Lemmanın hipotezi altında (Kapovich-Levitt-Schupp-Shpilrain 2007, Lemma 2.2) nin sonucu olarak $n([u]; x) = n([v]; x)$ ve $n([u]; y) = n([v]; y)$ olup $\psi = 1$ için doğrudur. Her $\psi_1 \in \Lambda$ ile $|\psi_1| = m' < m$ için Lemma doğru olsun. O zaman her $\psi_2 \in \Lambda$ ile $|\psi_2| = m' + 1$ için $n([\psi_2(u)]; x) = n([\psi_2(v)]; x)$ ve $n([\psi_2(u)]; y) = n([\psi_2(v)]; y)$ olduğunu gösterelim. Böylesi ψ_2 , bazı $\psi_1 \in \Lambda$ ile $|\psi_1| = m'$ için $\sigma^{\pm 1}\psi_1$ ya da $\tau^{\pm 1}\psi_1$ olarak ifade edilebilir.

İlk olarak $\psi_2 = \sigma^{\pm 1}\psi_1$ kabul edelim. O zaman $n([\psi_2(u)]; x) = n([\psi_1(u)]; x)$ ve $n([\psi_2(v)]; y) = n([\psi_1(v)]; y)$ olduğu açıktır. Çünkü tümevarım hipotezinden $n([\psi_1(u)]; x) = n([\psi_1(v)]; x)$ ve $n([\psi_2(u)]; x) = n([\psi_2(v)]; x)$ dır. Dahası $n([\psi_2(u)]; y) = \|\psi_2(u)\| - n([\psi_2(u)]; x)$ ve $n([\psi_2(v)]; y) = \|\psi_2(v)\| - n([\psi_2(v)]; x)$ dır. Lemmanın hipotezinden $\|\psi_2(u)\| = \|\psi_2(v)\|$ olduğu için $n([\psi_2(u)]; y) = n([\psi_2(v)]; y)$ dır.

$\psi_2 = \tau^{\pm 1}\psi_1$ olduğu durumda da benzer şekilde gösterilebilir.

■

F_2 de devirli bir w kelimesi ve bir σ Whitehead otomorfizmi için, $\sigma(xy^rx^{-1})$ de kısalma olmasına rağmen, eğer $xy^rx^{-1} (r \neq 0)$ biçiminde F_2 nin bir alt kelimesi varsa, w dan $\sigma(w)$ ya geçerken w invarianttır.

Böylesi kısaltmalara *aşıkır kısalma* denir. Aşıkır olmayan kısaltmalara da *öz kısalma* denir. Örneğin; eğer herhangi $xy^{-r}x$ ($r \geq 1$) bir alt kelimesi için σ , w yu $xy^{-r+1}xy$ ye dönüştürsün, $\sigma(xy^{-r}x)$ deki kısalma öz kısaltmadır.

Lemma 4.7 w , F_2 de devirsel kelime ve ψ de (4.2) formundaki bir zincir olsun. Eğer ψ , en azından $\|w\|$ kadar σ (ya da σ^{-1}) çarpanı içeriyorsa, o zaman $\psi(w)$ dan $\sigma\psi(w)$ ya (ya da $\psi(w)$ dan $\sigma^{-1}\psi(w)$ ya) geçerken öz kısaltmalar meydana gelmez.

Eğer ψ , en azından $\|w\|$ kadar τ (ya da τ^{-1}) çarpanı içeriyorsa, o zaman $\psi(w)$ dan $\tau\psi(w)$ ya (ya da $\psi(w)$ dan $\tau^{-1}\psi(w)$ ya) geçerken öz kısaltmalar meydana gelmez.

İspat: ψ , (4.2) deki (C1) formunda bir zincir ve ψ , en azından $\|w\|$ kadar σ çarpanı içersin, o zaman $\psi(w)$ dan $\sigma\psi(w)$ ya geçerken öz kısaltmalar meydana gelemeyeceğini gösterelim (Diğer durumlarda benzer şekilde gösterilebilir). Varsayalım ki ψ' , (4.2) deki (C1) formunda bir zincir ve $\psi'(w)$ dan $\sigma\psi'(w)$ ya geçerken öz kısaltmalar meydana gelmesin. O zaman $\sigma\psi'(w)$ dan $\sigma^2\psi'(w)$ ya geçerken ya da herhangi $t \geq 1$ için $\tau^t\sigma\psi'(w)$ dan $\sigma\tau^t\sigma\psi'(w)$ ya geçerken de öz kısaltmaların meydana gelemeyeceğini de görürüz. Bundan dolayı, eğer $\psi'(w)$ dan $\sigma\psi'(w)$ ya geçerken öz kısaltmalar varsa, o zaman öz kısaltmalar ψ deki uygulanan σ nın her adımında meydana gelir. Fakat, $\sigma\psi$ zincirindeki uygulanan σ nın her bir adımındaki öz kısaltmalar da $y^{\pm 1}$ kısaltmaları ilk önce zorunlu olarak w da ve σ nın $\|w\|$ dan daha fazla çarpanı içeren $\sigma\psi$ zincirinde meydana gelir. Bu ise bir çelişkidir. ■

Lemma 4.8 Ω , uzunluğu $2\|u\| + 3$ 'e eşit ya da küçük (4.2) formundaki tüm zincirlerin kümesi olsun. Her $\psi \in \Omega$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olduğunu kabul edelim. O zaman u ve v , F_2 de translation denktir.

Bu Lemma ispatlandığında, F_2 deki u ve v elemanlarının translation denk oluşuna algoritmiksel olarak karar verilebilir.

Algoritma. Ω , uzunluğu $2\|u\| + 3$ eşit ya da küçük (4.2) formundaki tüm zincirlerin kümesi olsun (Açıkça görülür ki Ω sonlu bir kümedir). Eğer her $\psi \in \Omega$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ ise u ve v , F_2 de translation denktir, aksi takdirde u ve v , F_2 de translation denk değildir.

ϕ , F_2 nin bir otomorfizmi olsun. Lemma 4.5 den β , Tanım 2.6.15 deki (W1) tipinde F_2 nin bir Whitehead otomorfizmi ve ϕ' de (4.2) formundaki bir zincir olmak üzere $\phi \equiv \beta\phi'$ olarak yazılabilir. Lemma 4.8 in ispatını $|\phi'|$ nin uzunluğu üzerinden tümevarım ile yapacağız. Kabul edelim ki ϕ' , $|\phi'| > 2\|u\| + 3$ ve (4.2) deki (C1)

formunda bir zincir olsun ((C2) durumu da benzer şekilde gösterilebilir). Varsayalım ki $|\psi| < |\phi'|$ ve (4.2) formundaki ψ nin tün zincirleri için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olsun. Biz $\|\phi'(u)\| = \|\phi'(v)\|$ olduğunu göstereceğiz. Buda $\|\phi(u)\| = \|\phi(v)\|$ olduğunu göstermekle aynı şeydir ($|\phi| = |\phi'|$). Varsayalım ki ϕ' , τ ile bitsin (ϕ' , σ ile bitsin durumu da benzer şekilde). Yani,

$$\phi' \equiv \tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1},$$

burada $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$ için $l_i, m_i \geq 0$ ve $m_k > 0$ dır.

$$\phi_1 \equiv \tau^{m_{k-1}} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$$

ve

$$u_1 = \phi_1(u) \text{ ve } v_1 = \phi_1(v)$$

alalım. O zaman $\tau(u_1) = \phi'(u)$ ve $\tau(v_1) = \phi'(v)$ olup

$$\|\phi'(u)\| = \|u_1\| + n([u_1]; y) - 2n([u_1]; y, x^{-1})$$

$$\|\phi'(v)\| = \|v_1\| + n([v_1]; y) - 2n([v_1]; y, x^{-1})$$

dır. Tümevarım hipotezinden $\|u_1\| = \|v_1\|$ dır. Dahası Lemma 4.6 den $n([u_1]; y) = n([v_1]; y)$ dır. Böylece $\|\phi'(u)\| = \|\phi'(v)\|$ olduğunu göstermek için $n([u_1]; y, x^{-1}) = n([v_1]; y, x^{-1})$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Açıkça görülür ki $|\phi_1| = |\phi'| - 1 \geq 2\|u\| + 3$ dür. Bundan dolayı ϕ_1 deki ya σ ya da τ ların sayısı en azından $\|u\| + 2$ tanedir. Bunu iki durumda düşüneceğiz.

Durum 1. σ , ϕ_1 de en azından $\|u\| + 2$ kere bulunsun. Bu durumda $l_k > 0$ açıktır.

$$u_2 = \tau^{m_{k-1}} \sigma^{l_{k-1}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u) \text{ ve } u'_2 = \sigma^{l_{k-1}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)$$

koyalım. O zaman $u_2 = \tau^{m_k-1}(u'_2)$ dır. $[u'_2]$ devirsel kelimesi hakkında bazı gözlemler ile iddialar ortaya koyacağız.

İddia 1. (i) Eğer $l_k - 1 > 0$ ise $[u'_2]$, x^2 ya da x^{-2} alt kelimesine sahip değildir.
(ii) $l_k - 1 = 0$ olsun. O zaman $[\sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ devirsel kelimesi x^2 ya da x^{-2} alt kelimesine sahip değildir. Eğer $[u'_2]$ de x^2 ya da x^{-2} alt kelimesi varsa o zaman yx^2 ya da $x^{-2}y^{-1}$ alt kelimesinin aslında bir kısmı sıralıdır.

İspat. (i) $l_k - 1 > 0$ olsun. $\sigma^{l_{k-2}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ zinciri en azından $\|u\|$ kadar σ çarpanı içerdiğinden Lemma 4.7 den $[\sigma^{l_{k-2}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ dan $[\sigma^{l_{k-1}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)] = [u'_2]$ ya geçerken öz kısaltmalar meydana gelmez. Bunun sonucu olarak x^2 ya da x^{-2} , $[u'_2]$ de alt kelime olarak bulunmaz.

(ii) $l_k - 1 = 0$ olsun. O zaman $l_{(k-1)} > 0$ ve $\sigma^{l_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ zinciri en azından $\|u\|$ kadar σ çarpanı içerir. Yine Lemma 4.7 den $[\sigma^{l_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ dan $[\sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ ya geçerken de öz kısaltmalar meydana gelmez. Bunun sonucu olarak x^2 ya da x^{-2} , $[\sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ de alt kelime olarak bulunmaz.

Bu sonuçla, eğer olarak x^2 ya da x^{-2} , $[u'_2]$ de alt kelime olarak bulunuyorsa, $[\sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ dan $[\tau^{m_{(k-1)}} \sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)] = [u'_2]$ ya geçerken de zorunlu olarak yeniden meydana gelir. Bu da gösterir ki, eğer $[u'_2]$ de x^2 ya da x^{-2} alt kelimesi varsa, o zaman yx^2 ya da $x^{-2}y^{-1}$ alt kelimesinin aslında bir kısmı sıralıdır.

■

İddia 2. $[u'_2]$ devirsel kelimesi $[w_1 z_1 \dots w_t z_t]$ olarak yazılabilir. Burada z_i , ya $xy^t x^{-1}$ ya da $xy^{-t} x^{-1}$ ($t \geq 1$) olup w_i de yx^{-1} ya da xy^{-1} alt kelimelerini içermiyor ve ne $x^{\pm 1}$ ile başlıyor ne de sonlanıyor.

İspat. $\sigma^{l_{(k-1)}} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ zinciri en azından $\|u\| + 1$ tane σ çarpanı içerdiği için, Lemma 4.7 den $[u'_2]$ den $[\sigma(u'_2)]$ ya geçerken öz kısaltmalar meydana gelmez. Bu da gösterir ki, herhangi yx^{-1} ya da xy^{-1} alt kelimesi, $xy^t x^{-1}$ ya da $xy^{-t} x^{-1}$ ($t \geq 1$)

formundaki alt kelimelerin bir kısmı $[u'_2]$ de bulunmak zorundadır ve $[u'_2]$ de de sıralıdır.

Varsayalım ki xy^tx^{-2} ya da $x^2y^{-t}x^{-1}$ ($t \geq 1$), $[u'_2]$ de bir alt kelime olarak bulunsun. İddia 1. (i) den bu durum sadece $l_k - 1 = 0$ olduğunda meydana gelir. Hem de İddia 1. (ii) den de, $[u'_2]$ deki xy^tx^{-2} ya da $x^2y^{-t}x^{-1}$ ($t \geq 1$) formundaki alt kelime $xy^tx^{-s}y^{-1}$ ya da $yx^sy^{-t}x^{-1}$ ($s \geq 2$) formundaki bir alt kelimenin bir kısmıdır ve $[u'_2]$ de sıralıdır. Fakat $yx^{-s}y^{-1}$ ya da yx^sy^{-1} ($s \geq 2$) formundaki bir alt kelime $[\sigma^{l(k-1)} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)]$ da var olmak zorundadır, bu da İddia 1. (ii) nin birinci kısmı ile çelişir.

■

Şimdi $u'_1 = \sigma(u'_2)$ koyalım. İddia 2. den $[u'_1] = [\sigma(w_1z_1 \dots w_tz_t)] = [w'_1z_1 \dots w'_tz_t]$ olup burada $w'_i = (\{x\}, y)(w_i)$ dir. O zaman w'_i , yx^{-1} ya da xy^{-1} alt kelime olarak içermez ve her i için w_i ile aynı ilk ve son harflere sahiptir. u_1 ve u_2 , τ^{m_k-1} ya sıralı bir şekilde u'_1 ve u'_2 uygulayarak elde edildiği için

$$n([u_1]; y, x^{-1}) = n([u_2]; y, x^{-1})$$

dir. Benzer şekilde

$$n([v_1]; y, x^{-1}) = n([v_2]; y, x^{-1})$$

olup $v_2 = \tau^{m_k-1} \sigma^{l_k-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)$ dir. Dahası

$$-2n([u_2]; y, x^{-1}) = \|\tau^{m_k} \sigma^{l_k-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)\| - \|u_2\| - n([u_2]; y)$$

$$-2n([v_2]; y, x^{-1}) = \|\tau^{m_k} \sigma^{l_k-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)\| - \|v_2\| - n([v_2]; y)$$

olduğu için tümevarım hipotezinden

$$\|\tau^{m_k} \sigma^{l_k-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)\| = \|\tau^{m_k} \sigma^{l_k-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)\| \text{ ve } \|u_2\| = \|v_2\|$$

ile Lemma 4.6 dan

$$n([u_2]; y) = n([v_2]; y)$$

olup sonuç olarak

$$n([u_1]; y, x^{-1}) = n([u_2]; y, x^{-1}) = n([v_2]; y, x^{-1}) = n([v_1]; y, x^{-1})$$

dir, Yani, $n([u_1]; y, x^{-1}) = n([v_1]; y, x^{-1})$ dir.

Durum 2. τ, ϕ_1 de en azından $\|u\| + 2$ kere bulunsun.

Bu durumu iki alt durumda inceleyeceğiz.

Durum I. $m_k \geq 2$.

$$u_3 = \tau^{m_k-2} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u) \text{ ve } v_3 = \tau^{m_k-2} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)$$

koyalım. Burada $\tau^{m_k-2} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ zinciri en azından $\|u\| + 1$ tane τ çarpanı içerdiğinden, Lemma 4.7 den $[u_3]$ den $[\tau(u_3)] = [u_1]$ ya geçerken öz kısaltmalar meydana gelmez. Bundan dolayı $n([u_1]; y, x^{-1}) = n([u_3]; y, x^{-1})$ dir. Benzer şekilde $n([v_1]; y, x^{-1}) = n([v_3]; y, x^{-1})$ dir.

$$-2n([u_3]; y, x^{-1}) = \|\tau^{m_k-1} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)\| - \|u_3\| - n([u_3]; y)$$

$$-2n([v_3]; y, x^{-1}) = \|\tau^{m_k-1} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)\| - \|v_3\| - n([v_3]; y)$$

olduğu için tümevarım hipotezinden ve Lemma 4.6 dan

$$n([u_1]; y, x^{-1}) = n([v_1]; y, x^{-1})$$

eşitliği görülür.

Durum II. $m_k = 1$.

Bu durumda $m_{k-1} > 0$ açıktır.

$$u_4 = \sigma^{l_k} \tau^{m_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u) \text{ ve } v_4 = \sigma^{l_k} \tau^{m_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)$$

koyalım. Durum I de olduğu gibi

$$n([u_1]; y, x^{-1}) = n([u_4]; y, x^{-1})$$

$$n([v_1]; y, x^{-1}) = n([v_4]; y, x^{-1})$$

dır. O zaman

$$-2n([u_4]; y, x^{-1}) = \|\tau \sigma^{l_k} \tau^{m_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(u)\| - \|u_4\| - n([u_4]; y)$$

$$-2n([v_4]; y, x^{-1}) = \|\tau \sigma^{l_k} \tau^{m_{(k-1)}-1} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}(v)\| - \|v_4\| - n([v_4]; y)$$

olduğu için tümevarım hipotezinden ve Lemma 4.6 dan

$$n([u_1]; y, x^{-1}) = n([v_1]; y, x^{-1})$$

eşitliği görülür.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi de bu algoritmayı kullanarak birkaç örnek verelim.

$F_2 = \langle x, y \rangle$ ve $u, v \in F_2$ olsun. Algoritmayı kullanarak bu iki elemanın translation denk olup olmadığını inceleyelim. $\sigma = (\{x\}, y)$ ve $\tau = (\{y\}, x)$ alalım.

Algoritmaya göre Ω , F_2 nin Whitehead otomorfizmlerinin tüm zincirlerinin kümesi olmak üzere;

ya

$$\tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$$

ya da

$$(\tau^{-1})^{m_k} (\sigma^{-1})^{l_k} \dots (\tau^{-1})^{m_1} (\sigma^{-1})^{l_1}$$

formundadır. Burada $k \in \mathbb{N}$, $l_i, m_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^k (l_i + m_i) \leq 2\|u\| + 3$ dir. Eğer her $\psi \in \Omega$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ ise u ve v , F_2 de translation denktir, aksi takdirde u ve v , F_2 de translation denk değildir.

Örnek 4.9 $u = xy$ ve $v = xy^{-1}$ olsun. O halde u ve v nin F_2 de translation denk olup olmadığını gösterelim.

İlk önce u nun devirsel uzunluğunu bulalım. u , devirsel indirgenmiş olup tüm devirsel permütasyonları $\{xy, yx\}$ dir. O halde $\|u\| = 2$ dir.

O zaman $\sum_{i=1}^k (l_i + m_i) \leq 2 \cdot 2 + 3 = 7$ olur. $\psi = \tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ olsun.

Özel olarak $m_k = 7$ ve $m_{k-1}, \dots, m_1, l_k, \dots, l_1 = 0$ alalım. O halde $\psi = \tau^7$ dir. $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi(xy) = \tau^7(xy) = \tau^6(xyx) = \tau^5(xyxx) = \tau^4(xyxxx) \\ &= \tau^3(xyxxxx) = \tau^2(xyxxxxx) = \tau(xyxxxxxx) \\ &= xyxxxxxxx \end{aligned}$$

dır. $\psi(u)$ nün tüm devirsel permütasyonları $\{xyxxxxxxx, xxyxxxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx, xxxxyxxxx\}$ olup $\|\psi(u)\| = 9$ dur.

$$\begin{aligned}
 \psi(v) &= \psi(xy^{-1}) = \tau^7(xy^{-1}) = \tau^6(xx^{-1}y^{-1}) = \tau^5(xx^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
 &= \tau^4(xx^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}) = \tau^3(xx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
 &= \tau^2(xx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
 &= \tau(xx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
 &= xx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1} \\
 &= x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}
 \end{aligned}$$

dır. $\psi(v)$ nün tüm devirsel permütasyonları $\{x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1},$
 $y^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}, x^{-1}y^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1},$
 $x^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}, x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1},$
 $x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}x^{-1}, x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}\}$
 olup $\|\psi(v)\| = 7$ dir.

O halde $\|\psi(u)\| \neq \|\psi(v)\|$ olup u ve v , F_2 de translation denk değildir.

Örnek 4.10 $u = xxy$ ve $v = xyx$ olsun. O halde u ve v nin F_2 de translation denk olup olmadığını gösterelim.

İlk önce u nun devirsel uzunluğunu bulalım. u , devirsel indirgenmiş olup tüm devirsel permütasyonları $\{xxy, yxx, xxy\}$ dir. O halde $\|u\| = 3$ tür.

O zaman $\sum_{i=1}^k (l_i + m_i) \leq 2.3 + 3 = 9$ olur. $\psi = \tau^{m_k} \sigma^{l_k} \dots \tau^{m_1} \sigma^{l_1}$ olsun.

Özel olarak $m_k = 1, l_k = 1$ ve $m_{k-1}, \dots, m_1, l_{k-1}, \dots, l_1 = 0$ alalım. O halde $\psi = \tau\sigma$ dir. $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup olmadığına bakalım.

$$\psi(u) = \psi(xxy) = \tau\sigma(xxy) = \tau(xyxyy) = xyxxyxyx$$

dır. $\psi(u)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 8 olup $\|\psi(u)\| = 8$ dir

$$\psi(v) = \psi(xyx) = \tau\sigma(xyx) = \tau(xyxyx) = xyxyxxxyx$$

dir. $\psi(v)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 8 olup $\|\psi(v)\| = 8$ dir. O halde $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olur.

Şimdide $m_k = 9$ ve $m_{k-1}, \dots, m_1, l_k, \dots, l_1 = 0$ alalım. O halde $\psi = \tau^9$ dir. $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(xxy) = \tau^9(xxy) = \tau^8(xxyx) = \tau^7(xxyxx) = \tau^6(xxyxxxx) \\ &= \tau^5(xxyxxxxx) = \tau^4(xxyxxxxxx) = \tau^3(xxyxxxxxxxx) \\ &= \tau^2(xxyxxxxxxxxx) = \tau(xxyxxxxxxxxxx) \\ &= xxyxxxxxxxxxx\end{aligned}$$

dir. $\psi(u)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 12 olup $\|\psi(u)\| = 12$ dir.

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \psi(xy x) = \tau^9(xy x) = \tau^8(xy xx) = \tau^7(xy xxx) = \tau^6(xy xxxx) \\ &= \tau^5(xy xxxxxx) = \tau^4(xy xxxxxxx) = \tau^3(xy xxxxxxxx) \\ &= \tau^2(xy xxxxxxxxxxx) = \tau(xy xxxxxxxxxxxx) \\ &= xy xxxxxxxxxxxxx\end{aligned}$$

dir. $\psi(v)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 12 olup $\|\psi(v)\| = 12$ dir. O halde $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olur.

Şimdide $m_k = 8$, $l_k = 1$ ve $m_{k-1}, \dots, m_1, l_{k-1}, \dots, l_1 = 0$ alalım. O halde $\psi = \tau^8 \sigma$ dir. $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(xxy) = \tau^8 \sigma(xxy) = \tau^8(xyxyy) = \tau^7(xyxyxyx) \\ &= \tau^6(xyxxxxyxyxx) = \tau^5(xyxxxxyxyxxx) \\ &= \tau^4(xyxxxxyxyxxxx) \\ &= \tau^3(xyxxxxyxyxxxxx) \\ &= \tau^2(xyxxxxyxyxxxxxx) \\ &= \tau(xyxxxxyxyxxxxxxxx) \\ &= xyxxxxyxyxxxxxxxxxx\end{aligned}$$

dir. $\psi(u)$ devirsel indirgenmiş olup tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 29 olup $\|\psi(u)\| = 29$ dir.

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \psi(xy x) = \tau^8(xy x) = \tau^8(xy y x y) = \tau^7(xy x y x x y x) \\ &= \tau^6(xy x x y x x x y x x) = \tau^5(xy x x x y x x x x y x x x) \\ &= \tau^4(xy x x x x y x x x x x y x x x x) \\ &= \tau^3(xy x x x x x y x x x x x x y x x x x x) \\ &= \tau^2(xy x x x x x x y x x x x x x x y x x x x x x) \\ &= \tau(xy x x x x x x x y x x x x x x x x y x x x x x x x) \\ &= xy x x x x x x x x y x x x x x x x x x y x x x x x x x x\end{aligned}$$

dır. $\psi(v)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 29 olup $\|\psi(v)\| = 29$ dir. O halde $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olur.

Şimdi $m_k = 2$, $m_{k-1} = 3$, $l_k = 3$, $l_{k-1} = 1$ ve $m_{k-2}, \dots, m_1, l_{k-2}, \dots, l_1 = 0$ alalım. O halde $\psi = \tau^2 \sigma^3 \tau^3 \sigma$ dir. $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup olmadığına bakalım

[illegible]

dir. $\psi(u)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 119 olup $\|\psi(u)\| = 119$ dir.

[illegible]

dir. $\psi(v)$ devirsel indirgenmiştir ve tüm devirsel permütasyonlarının sayısı 119 olup $\|\psi(v)\| = 119$ dir. O halde $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olur.

Benzer şekilde $\sum_{i=1}^k (l_i + m_i) \leq 9$ olan $\sum_{i=1}^9 2^i$ tane otomorfizm altındaki devirsel uzunlukları aynı olacaktır. O halde her $\psi \in \Omega$ için $\|\psi(u)\| = \|\psi(v)\|$ olup u ve v , F_2 de translation denktir.

KAYNAKLAR

- BAUMSLAG, G., MYASNIKOV A. G. and SHPILRAIN, V., 1999. Open problems in combinatorial group theory, *Contemp. Math.*, 250:1–27.
- _____, 2002. Open problems in combinatorial group theory. Second edition, *Contemp. Math.*, 296 :1–38.
- GARDINER, C. F., 1980. A first course in group theory. Springer-Verlag. Berlin, 227s.
- KARAKAŞ, H. İ., 2008. Cebir Dersleri. TÜBA. Ankara, 420s.
- KAPOVICH, I., LEVITT, G., SCHUPP, P. E. and SHPILRAIN, V., 2007. Translation equivalence in free groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359:1527-1546.
- LEE, D., 2006. Translation equivalent elements in free groups, *J. Group Theory*, 9:809-814.
- _____, 2007. An algorithm that decides translation equivalence in a free group of rank two, *J. Group Theory*, 10:561-569.
- LEININGER, C. J., 2003. Equivalent curves in surfaces, *Geom. Dedicata*, 102:151–177.
- MAGNUS, W., KARRASS, A. and SOLITAR, D., 1975. Combinatorial Group Theory. Dover Publications. New York, 444s.
- TAŞÇI, D., 2007. Soyut Cebir. Alp Yayınevi. Ankara, 671s.
- WHITEHEAD, J. H. C., 1936. Equivalent sets of elements in a free group. *Ann. of Math.*, 37:782–800.

ÖZGEÇMİŞ

06.06.1987 yılında Adana'nın Kozan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kozan da tamamladıktan sonra 2004 yılında Ç.Ü. Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ç.Ü. Matematik bölümünde yüksek lisansa kabul edildi. YADEM'de İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra 2009 yılında yüksek lisansa başladı.