

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esen HANAÇ

SERBEST LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SERBEST LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMOFİZMLERİ

Esen HANAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez/...../2010 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği ile Kabul Edilmiştir.

.....
Yrd. Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Naime EKİCİ
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

**Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)-
Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB) tarafından desteklenmiştir**
Proje No:

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LEİBNİZ CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Esen HANAÇ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
Yıl: 2010, Sayfa: 47

Jüri :Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Yrd. Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada öncelikle Leibniz cebirlerinin yapısı incelenerek önemli tanım ve teoremler verildi. $F_m(N)$, $m \geq 2$ için, serbest sol nilpotent Leibniz cebiri olsun.

$F_m(N)$ nin non-tame otomorfizmlere sahip olduğunu ve $m \geq 3$ için, $F_m(N)$ nin otomorfizmler grubunun tame otomorfizmler ve bir non-tame IA-otomorfizm tarafından üretildiği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Serbest Leibniz Cebiri, Tame otomorfizmler, Wild otomorfizmler.

ABSTRACT

MSc THESIS

AUTOMORPHISMS OF FREE LEIBNIZ ALGEBRAS

Esen HANAÇ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor :Asst.Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT

Year: 2010, Pages: 47

Jury :Prof. Dr. Naime EKİCİ

: Asst.Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT

:Asst.Prof.Dr. Ersin KIRAL

In this thesis firstly we give definitions and basic theorems on Leibniz algebras. Let $F_m(N)$ be the free left nilpotent Leibniz algebra of rank m ($m \geq 2$). $F_m(N)$ has non-tame automorphisms and, for $m \geq 3$, the automorphism group of $F_m(N)$ is generated by the tame automorphisms and one non-tame IA-automorphism are showed.

Key Words: Free Leibniz Algebras, Tame Automorphisms, Wild Automorphisms.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübesiyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Zeynep Özkurt'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ	1
1.1. Leibniz Cebirlerinin Nilpotentliği	7
1.2. Leibniz Cebirinin Bir Başka Leibniz Cebiri Üzerindeki Etkisi	9
2. BİR LEIBNİZ CEBİRİNİN EVRENSEL ENVELOPING CEBİRİ	13
3. SERBEST SOL NİLPOTENT LEIBNİZ CEBİRLERİ	19
3.1. IA Otomorfizmler	22
3.2. Otomorfizmler	29
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

1. GİRİŞ

K bir cisim, g , $[-, -]$ braket çarpımı ile bir K - cebir olsun.

$x, y, z \in g$ için,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliği sağlanıyorsa, g bir sağ Leibniz cebiri

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

özdeşliği sağlanıyorsa, g bir sol Leibniz cebiridir.

$[x, x] = 0$ olsun. Bu durumda her $x, y \in g$ için,

$$\begin{aligned} [x + y, x + y] &= 0 \\ [x, x] + [y, y] + [x, y] + [y, x] &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$[x, y] = -[y, x]$$

dır. Bu özelliği

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliğine uygulayalım.

$$[[x, y], z] - [[x, z], y] - [x, [y, z]] = 0$$

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

elde edilir. Bu ise Jacobi özdeşliğidir. Dolayısıyla Lie cebirleri, Leibniz cebirlerinin bir özel durumudur.

Örnek 1: Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir.

Örnek 2: K bir cisim ve A bir birleşmeli K -cebiri olsun. $D : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$D(a(Db)) = DaDb = D((Da)b)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olmak üzere, A nın bir bilineer dönüşümü:

$$[,] : A \times A \rightarrow A$$

$$[x, y] = x(Dy) - (Dy)x$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda A nın bu dönüşümle Leibniz cebiri olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= x(D[y, z]) - (D[y, z])x \\ &= x(DyD^2z - D^2zDy) - (DyD^2z - D^2zDy)x \\ &= x(DyDz - DzDy) - (DyDz - DzDy)x \\ &= x(DyDz) - x(DzDy) - (DyDz)x + (DzDy)x \\ &= x(DyDz) - (DyDz)x - (x(DzDy) - (DzDy)x) \\ &= (xDy)Dz - Dy(Dzx) - ((xDz)Dy - Dz(Dyx)) \\ &= (xDy)Dz - (Dyx)Dz - ((xDz)Dy - (Dzx)Dy) \\ &= ((xDy) - (Dyx))Dz - ((xDz) - (Dzx))Dy \\ &= [[x, y]z] - [x, z]y \end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.1: R bir halka, A bir sağ, B bir sol R -modül olsun. $h : A \times B \rightarrow T$ bilineer ve dengeli fonksiyonu var olsun. C bir R -modül ve $f : A \times B \rightarrow C$ bilineer ve dengeli ve

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & C \\ h \downarrow & \text{Z} & \downarrow \bar{f} \\ & T & \end{array}$$

olacak şekilde $\bar{f}: T \rightarrow C$ varsa T R -modülüne A ile B nin tensör çarpımıdır denir ve $T = A \otimes B$ ile gösterilir.

Tanım 1.2:

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bir k pozitif sayısı için, k -ıncı dereceden V nin tensör çarpımı:

$$T^k(V) = V^{\otimes k} = V \times \dots \times V$$

k kez çarpımıdır. Bu vektör uzayın tensor cebiridir.

$[-, -]_L$ ile $\bar{T}(V)$ üstündeki Leibniz braketini, $[-, -]$ ile $\bar{T}(V)$ üstündeki Lie braketini göstereceğiz.

$[a, b] = ab - ba$ Lie braketini için

$$[\dots, [[v_1, v_2]_L, v_3]_L, \dots, v_n]_L = v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

$g: g(V) \rightarrow g(V)$ dönüşümü de

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = [\dots, [[v_1, v_2]_L, v_3]_L, \dots, v_n]$$

dir.

Eğer B, A Leibniz cebirinin alt uzayı ise, $n \geq 1$ için B^n ve B_n alt uzayları şu şekilde tanımlanır:

$$B^1 = B, \dots, B^n = B.B^{n-1}$$

ve

$$B_1 = B, \dots, B_n = \sum_{p=1}^{n-1} B_p B_{n-p}$$

dir.

Lemma 1.3: A bir Leibniz cebiri ve B, A nın bir alt uzayı ise,

$$(i) B^m B^n \subseteq B^{m+n} \quad m, n \geq 1$$

$$(ii) B_n = B^n, \quad n \geq 1.$$

İspat (Ayupov ve Omirov, 1998) : $B = A$ durumunda, her A^n alt uzayı, A nın hem sağ hem sol idealidir. Lemma 1.3 in (i) den, A^n nin sol ideal olduğu açıktır.

Buradan $A^n A \subseteq A^{n+1} \subseteq A^n, n \geq 1$ sonucuna varılır.

Lemma 1.4 : V, X bazı ile bir vektör uzayı olsun.

$$\bar{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$$

tensör modülü aşağıda tanımlanan özellikler ile V üzerinde serbest Leibniz cebiridir.

$$(i) [x, v] = x \otimes v \quad x \in \bar{T}(V) \quad v \in V$$

$$(ii) [x, y \otimes v] = [x \otimes y, v] - [x \otimes v, y]$$

$$\forall x, y \in \bar{T}(V), v \in V$$

İspat: İspata önce $\bar{T}(V)$ nin Leibniz cebiri olduğunu göstererek başlayalım. R bir halka $\bar{T}(V)$ bir R -cebir olsun.

$$\bar{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$$

$A_0 = V, A_1 = V^{\otimes 2}, \dots, A_n = V^{\otimes(n+1)}$ olmak üzere $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$ olduğundan $\bar{T}(V)$ derecelendirilmiş cebirdir. Dolayısıyla lemmanın ispatında tümevarım kullanılabilir. Sağdan çarpılan elemana z diyelim.

$$z \in V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n-1}$$

için Leibniz bağıntısı sağlansın.

Yani $x, y \in \bar{T}(V), z \in V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n-1}$ için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

dir. Şimdi $z \in V^n$ alalım. $t \in V^{\otimes n-1}, v \in V$ için $z = t \otimes v$ düşünebiliriz. (ii) yi kullanalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} * [x, [y, z]] &= [x, [y, t \otimes v]] = [x, [y, t] \otimes v] - [x, [y \otimes v, t]] \\ &= [x, [y, t]] \otimes v - [x \otimes v, [y, t]] - [[x, y \otimes v], t] + [[x \otimes t], y \otimes v] \\ &= [x, [y, t]] \otimes v - [x \otimes v, [y, t]] - [[x, y \otimes v], t] + [[x \otimes t], y] \otimes v - [x \otimes t] \otimes v, y \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} ** [[x, y], z] &= [[x, y], t \otimes v] = [[x, y], t] \otimes v - [[x, y] \otimes v, t] \\ &= [[x, y], t] \otimes v - [[x, y \otimes v], t] - [x \otimes v, y], t \end{aligned}$$

ve

$$*** [[x, z], y] = [[x, t \otimes v], y] = [[x, t] \otimes v, y] - [x \otimes v, t], y$$

$\Rightarrow [x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y] = 0$ eşitliğini (Leibniz eşitliği) elde etmek için elemanları yerine yazıp gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y] &= [x, [y, t]] \otimes v - [x \otimes v, [y, t]] + [[x \otimes t], y] \otimes v - \\ &\quad [[x, y], t] \otimes v - [x \otimes v, y], t - [x \otimes v, t], y \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $\otimes v$ ortak parantezine alırsak

$$([x, [y, t]] + [[x, t], y] - [[x, y], t]) \otimes v - ([x \otimes v, [y, t]] - [[x \otimes v, y], t] + [[x \otimes v, t], y])$$

elde edilir. $x, y \in \bar{T}(V), t \in V^{\otimes n-1}$ için Leibniz özdeşliği sağlandığından parantez içleri 0 olmalıdır. Böylece

$$[x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y] = 0$$

dır. Leibniz özdeşliği sağlanır.

Şimdi de evrensel özelliği sağladığını gösterelim:

$i: V \rightarrow \bar{T}(V)$ olacak şekilde içine bir dönüşüm ve $q: V \rightarrow g$ (g , Leibniz cebiri)

olsun. Öyle bir $f: \bar{T}(V) \rightarrow g$ dönüşümü vardır ki

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & \bar{T}(V) \\ q \downarrow & \text{I} & f \\ & & g \end{array}$$

$q = fi$ dir. Burada

$$f(v) = q(v)$$

ve

$$f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = [f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n-1}), f(v_n)]$$

dir.

g deki $[,]$ tanımını ile g bir Leibniz cebiridir.

$$f((v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n) = f([v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_{n-1}, v_n])(i) \text{ den}$$

$$\begin{aligned}
&= [f(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_{n-1}), f(v_n)] \\
&= f[\dots [[v_1, v_2], v_3], v_4], \dots, v_{n-1}], v_n]
\end{aligned}$$

olur. g bir Leibniz cebiri olduğundan, f (ii) özelliğini sağlar.

$$f([x, y \otimes v]) = f([x, y] \otimes v) - f([x \otimes v, y])$$

dir. Böylece $\bar{T}(V)$ evrenseldir ve buradan $g(V) = \bar{T}(V)$ diyebiliriz. Yani $\bar{T}(V)$, V üzerinde serbest Leibniz cebiridir.

Eğer V bir boyutlu ise, x tarafından üretilir ve $\bar{T}(V) = kx \oplus kx^2 \oplus \dots \oplus kx^n \oplus \dots$

Bu durumda Leibniz yapısı

$$[x^i, x^j] = \begin{cases} x^{i+j}, & j = 1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$$

dir.

1.1. Leibniz Cebirlerinin Nilpotentliği

Bir g Leibniz cebiri verildiğinde aşağıdaki diziler tanımlanabilir:

$$(a) \quad g^{(1)} = g, \quad g^{(n+1)} = [g, g^{(n)}];$$

$$(b) \quad g^{[1]} = g, \quad g^{[n+1]} = [g^{[n]}, g^{[n]}];$$

$$(c) \quad g^1 = g, \quad g^{n+1} = [g^1, g^n] + [g^2, g^{n-1}] + \dots + [g^{n-1}, g^2] + [g^n, g^1].$$

Tanım 1.1.1

- a) Bir g Leibniz cebiri eğer bir $s \in N$ için $g^{(s)} = 0$ oluyorsa sol nilpotent olarak isimlendirilir.
- b) Bir $m \in N$ için $g^{[m]} = 0$ oluyorsa g çözülebilirdir. Bu tamsayıların en küçüğüne çözülebilirlik indeksi denir.

c) $n \in \mathbb{N}$ için eğer $g^n = 0$ ise g ye nilpotent denir. Bu şekildeki en küçük sayıya nilpotentlik indeksi denir.

d) Eğer g nin sonlu her alt cebiri nilpotent ise g *lokal* nilpotent olarak isimlendirilir.

Her $x \in g$ için, $r_x : g \rightarrow g$, sağ çarpım $r_x(z) = [z, x]$, $z \in g$ şeklinde tanımlansın. $r(g) = \{r_x : x \in g\}$ uzayı $[r_x, r_y] = r_x r_y - r_y r_x$ ile Lie cebiri olur. Bundan başka, $r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x$ özdeşliği, Leibniz özdeşliğinden elde edilir. Dolayısıyla $r(g)$ Lie cebirinin çözülebilirliği ile g Leibniz cebirinin çözülebilirliği denktir.

Teorem 1.1.2 (Ayupov ve Omirov, 1998): Sonlu boyutlu bir g Leibniz cebiri nilpotenttir $\Leftrightarrow$ her $x \in g$ için r_x dönüşümü nilpotenttir.

Teorem 1.1.3 (Ayupov ve Omirov, 1998): g , bir sonlu boyutlu Leibniz cebiri olsun. Bu durumda g çözülebilirdir $\Leftrightarrow g^2$ nilpotenttir.

Tanım 1.1.4: g , bir Leibniz cebiri olsun. g nin sağ sıfırlayanı:

$$Z(g) = \{x \in g : [g, x] = 0\}$$

şeklindedir.

Teorem 1.1.5 (Ayupov ve Omirov, 1998): g bir Leibniz cebiri olsun. $g/Z(g)$

bölüm cebiri, $Z(g)$ sağ sıfırlayan olmak üzere bir Lie cebiridir.

1.2. Leibniz Cebirinin Bir Başka Leibniz Cebiri Üzerindeki Etkisi

Tanım 1.2.1: R bir halka, M, N ve P R -modüller olsun. $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ modüllerin bir dizisi ve $f \circ g$ modül homomorfizmi olsun. Eğer $\text{Ker } g = \text{Im } f$ ise, bu dizi N de tamdır.

Tanım 1.2.2: R bir halka, A, B ve C R - modüller olsun.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \rightarrow 0$$

dizisi A, B ve C de tam ise bu kısa tam dizidir. Yani; a monomorfizm, b epimorfizm ve $\text{Im } a = \text{Ker } b$ dır.

Tanım 1.2.3: $0 \rightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \rightarrow 0$ modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. Eğer bir $f : B \rightarrow A \oplus C$ izomorfizmi için;

$$f \circ a = l, \quad b \circ f^{-1} = m_2$$

ise $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ kısa tam dizisine, parçalanabilir kısa tam dizi denir. Yani;

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & 1_A \downarrow & & f \downarrow & & 1_C \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A \oplus C & \rightarrow & C \rightarrow 0 \end{array}$$

kareler değişmelidir.

M ve g Leibniz cebirler olmak üzere,

$$[-,-]: g \times M \rightarrow M \text{ ve } [-,-]: M \times g \rightarrow M$$

olacak şekilde g nin M üzerindeki iki etkisi aşağıdaki üç özelliği sağlasın:

$\forall m \in M$ ve $x, y \in g$ için

$$\text{i. } [m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$

$$\text{ii. } [x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$

$$\text{iii. } [x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

son iki özellik toplandığında

$$\text{iv. } [x, [m, y]] + [x, [y, m]] = 0$$

g nin M üzerindeki bir temsili $p : g \rightarrow \text{End}M$ şeklinde Leibniz cebirlerinin bir homomorfizmidir ve yukarıdaki üç özelliği sağlar.

$$0 \rightarrow g' \xrightarrow{i} g \xrightarrow{p} g'' \rightarrow 0$$

Leibniz cebirlerin bir tam dizisi olsun. Eğer $p \circ s = id_{g''}$ olacak şekilde bir

$s: g'' \rightarrow g$ Leibniz morfizmi varsa bu dizi parçalanabilir. Burada $id_{g''} : g'' \rightarrow g''$

özdeşlik fonksiyonudur.

g'' nün g' üstündeki iki etkisini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$[-,-]: g'' \times g' \rightarrow g' \quad [x'', x'] = [s(x''), i(x')]_g$$

$$[-,-]: g' \times g'' \rightarrow g' \quad [x', x''] = [i(x'), s(x'')]_g$$

Bu etkiler $\forall x'', y'' \in g''$ ve $\forall x' \in g'$ için, yukarıdaki i, ii, iii özelliklerini sağlar:

$$(i) \left[x', [x'', y''] \right] = \left[[x', x''], y'' \right] - \left[[x', y''], x'' \right]$$

$$\left[i(x'), [s(x''), s(y'')] \right]_g = \left[[i(x'), s(x'')]_g, s(y'') \right] - \left[[i(x'), s(y'')]_g, s(x'') \right]_g$$

$$(ii) \left[x'', [x', y''] \right] = \left[[x'', x'], y'' \right] - \left[[x'', y''], x' \right]$$

$$\left[s(x''), [i(x'), s(y'')] \right]_g = \left[[s(x''), i(x')]_g, s(y'') \right] - \left[[s(x''), s(y'')]_g, i(x') \right]$$

$$(iii) \left[x'', [y'', x'] \right] = \left[[x'', y''], x' \right] - \left[[x'', x'], y'' \right]$$

$$\left[s(x''), [s(y''), i(x')] \right]_g = \left[[s(x''), s(y'')]_g, i(x') \right] - \left[[s(x''), i(x')]_g, s(y'') \right]_g$$

2. BİR LEIBNİZ CEBİRİNİN EVRENSEL ENVELOPING CEBİRİ

K bir cisim, g bir K - cebir olsun. g^l ve g^r , g yi sol ve sağ Leibniz cebiri olarak düşünerek, g nin kopyaları olsun. $x \in g$ için $l_x \in g^l$ ve $r_x \in g^r$ dir.

Asosyatif ve birimli $T(g^l \oplus g^r)$ tensor K -cebirini düşünelim. Her $x, y \in g$ için I ;

$$(i) \quad r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x$$

$$(ii) \quad l_{[x,y]} = l_x r_y - r_y l_x$$

$$(iii) \quad (r_x + l_y)l_x = 0$$

bağıntılarını sağlayan iki taraflı ideal olsun.

Tanım 2.1: g , Leibniz cebirinin evrensel enveloping cebiri asosyatif ve birimli

$$UL(g) \cong T(g^l \oplus g^r) / I$$

cebiridir.

Tanım 2.2: Bir C kategorisi $A, B, C, \dots$ kümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir sınıfıdır.

(i) $obj(C)$: C nin nesneleri (boş değil)

(ii) Her $A, B \in ObjC$ için $hom_C(A, B)$ kümesinin elemanlarına C kategorisinin A dan B ye morfizmleri denir.

(iii) Her $A, B, C \in ObjC$ için

$$hom_C(A, B) \times hom_C(B, C) \rightarrow hom_C(A, C)$$

$$(f, g) \rightarrow gf$$

bileşke işlem vardır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a) Bileşkenin birleşme özelliği vardır. Eğer $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ ve $h : C \rightarrow D$ ise,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

- b) Her $A \in \text{Obj}C$ objesi için, en az bir $1_A \in \text{Hom}_C(A, A)$ vardır. Her $B \in \text{Obj}C$ ve her $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ için $f \cdot 1_A = f$ ve her $g \in \text{Hom}_C(B, A)$ için $1_A \cdot g = g$ dir.

Teorem 2.3: g , Leibniz cebirinin temsillerinin kategorisi $UL(g)$ üzerindeki sağ(sol) modüllerin kategorisine eşittir.

İspat: M, g nin bir temsili olsun. $UL(g)$ nin, M k -modülü üstünde bir sağ etkisi g^l ve g^r ile $m \cdot l_x = [x, m]$ ve $m \cdot r_x = [m, x]$ şeklinde tanımlansın. Bu etkiler, lineerlik ve birleşme ile $T(g^l \oplus g^r)$ nin bir etkisine genişletilebilir. Temsilin i, ii ve iv özellikleri kullanılarak (i),(ii),(iii) özelliklerinin sağlandığı gösterilebilir.

$$\begin{aligned} m \cdot r_{[x,y]} &= [m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x] \\ &= [m \cdot r_x, y] - [m \cdot r_y, x] \\ &= (m \cdot r_x) r_y - (m \cdot r_y) r_x \\ &= m \cdot (r_x r_y - r_y r_x) \end{aligned}$$

Her m için sağlanacağından (i) özelliği sağlanır.

$$\begin{aligned} [x, [m, y]] &= [[x, m], y] - [[x, y], m] \\ &= [m \cdot l_x, y] - m \cdot l_{[x,y]} \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} [x, m \cdot r_y] &= m \cdot l_x \cdot r_y - m \cdot l_{[x,y]} \\ m \cdot r_y \cdot l_x &= m \cdot l_x r_y - m \cdot l_{[x,y]} \\ m \cdot l_{[x,y]} &= m \cdot l_x r_y - m \cdot r_y \cdot l_x \end{aligned}$$

(ii) sağlanır.

$$[x, [y, m]] + [x, [m, y]] = 0$$

$$[x, m.l_y] + [x, m.r_y] = 0$$

$$m.l_y.l_x + m.r_y.l_x = 0$$

$$m.(r_y + l_y).l_x = 0$$

Buradan (iii) sağlanır. Böylece M bir sağ $UL(g)$ modül yapısına sahiptir. Diğer yönü göstermek için önce bir sağ $UL(g)$ modül alınarak üzerindeki etki g^l ve g^r üzerindeki etkiye kısıtlanır bu da M yi temsil yapar.

Önerme 2.4: $\eta : U(g_{Lie}) \oplus U(g_{Lie}) \otimes g \rightarrow UL(g)$

$$\bar{x} \rightarrow r_x$$

$$1 \otimes y \rightarrow l_y$$

dönüşümü bir $U(g_{Lie})$ modül izomorfizmidir. Bu izomorfizmin altında önceki modülün çarpım yapısını, $U(g_{Lie})$ nin çarpım yapısı ve

$$(1 \otimes x)\bar{y} = \bar{y} \otimes x + 1 \otimes [x, y]$$

$$(1 \otimes y)(1 \otimes x) = -\bar{y} \otimes x \quad x, y \in g$$

formülleri belirler. Burada $\bar{x}$ ile, $x \in g$ nin g_{Lie} deki görüntüsünü göstereceğiz.

İspat: $r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x$

olduğundan,

$$r_{[x,x]} = r_x r_x - r_x r_x = 0$$

dır. Bu yüzden $g^r, UL(g)$ içinde $U(g_{Lie})$ ' e izomorf bir cebir üretir. Bu da

$$\eta : U(g_{Lie}) \oplus U(g_{Lie}) \otimes g \rightarrow UL(g)$$

dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$$\Theta : UL(g) \rightarrow U(g_{Lie}) \oplus U(g_{Lie}) \otimes g$$

dönüşümünü

$$\Theta(r_x) = \bar{x} \text{ ve } \Theta(l_y) = 1 \otimes y$$

şeklinde tanımlayalım. Θ ,

$$(1 \otimes x) \bar{y} = \bar{y} \otimes x + 1 \otimes [x, y]$$

$$(1 \otimes y)(1 \otimes x) = -\bar{y} \otimes x$$

kullanılarak $T(g^l \oplus g^r)$ ya genişletilmiştir. Gerçektende;

$$\begin{aligned} \Theta(r_{[x,y]}) &= \overline{[x,y]} = \bar{x}y - y\bar{x} \\ &= \Theta(r_x)\Theta(r_y) - \Theta(r_y)\Theta(r_x) \\ &= \Theta(r_x r_y - r_y r_x) \end{aligned}$$

(i) özelliğinin sağlandığı açıktır.

$$(1 \otimes x) \bar{y} = \bar{y} \otimes x + 1 \otimes [x, y]$$

$$\Theta(l_x)\Theta(r_y) = \bar{y} \otimes x + \Theta(l_{[x,y]})$$

$$\Theta(l_x)\Theta(r_y) = \bar{y}(1 \otimes x) + \Theta(l_{[x,y]})$$

$$\Theta(l_x)\Theta(r_y) = \Theta(r_y)\Theta(l_x) + \Theta(l_{[x,y]})$$

$$\Theta(l_x)\Theta(r_y) - \Theta(r_y)\Theta(l_x) = \Theta(l_{[x,y]})$$

$$\Theta(l_x r_y - r_y l_x) = \Theta(l_{[x,y]})$$

(ii) özelliği sağlanır.

$$(1 \otimes y)(1 \otimes x) = -\bar{y} \otimes x$$

$$\Theta(l_y)\Theta(l_x) = -\bar{y}(1 \otimes x)$$

$$\Theta(l_y)\Theta(l_x) = -\Theta(r_y)\Theta(l_x)$$

Diğer tarafa attığımızda

$$\Theta(r_y l_x + l_y l_x) = \Theta((r_y + l_y)l_x) = \Theta(0) = 0$$

olur.

Önerme 2.5: $d_0.s_0 = d_1.s_0 = id$ ve $(Kerd_1)(Kerd_0) = 0$ eşitliklerini sağlayan

$d_0, d_1 : UL(g) \rightarrow U(g_{Lie})$, $s_0 : U(g_{Lie}) \rightarrow UL(g)$ cebir homomorfizmleri vardır.

İspat: $d_0, d_1 : UL(g) \rightarrow U(g_{Lie})$ dönüşümlerini

$$d_0(l_x) = 0 \quad d_1(l_x) = -\bar{x}$$

$$d_0(r_x) = \bar{x} \quad d_1(r_x) = \bar{x}$$

ve $s_0 : U(g_{Lie}) \rightarrow UL(g)$ dönüşümünü

$$s_0(\bar{x}) = r_x$$

şeklinde tanımlayalım.

İyi tanımlı cebir homomorfizmleri olduğu açıktır. $\text{Ker } d_0$ ideali (benzer şekilde $\text{Ker } d_1$) l_x tarafından $(r_x + l_x)$ tarafından üretilir.

$$(r_x + l_x).l_y = 0$$

ve böylece

$$(\text{Ker } d_0)(\text{Ker } d_1) = 0$$

dır.

3. SERBEST SOL NİLPOTENT LEİBNİZ CEBİRLERİ

K , bir cisim, g bir Leibniz cebiri olsun. $x, y, z \in g$ için,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşliği her komütatörü sol normlu komutatörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazmamıza izin verir. $n \geq 3$ için,

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

notasyonunu kullanacağız. g , Leibniz cebirinin komutatör idealini g' ile, $a \in g$

olmak üzere, $\frac{g}{\langle [a, a] \rangle}$ ile elde edilen Lie cebirini g_{Lie} ile göstereceğiz.

Tanım3.1: Her g Leibniz cebir için $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ den g ye bir dönüşüm F den g ye bir cebir homomorfizmine genişletiliyorsa F, X serbest üreteç kümesi ile serbest Leibniz cebiridir.

F_m ile $\{x_1, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen m ranklı serbest Leibniz cebiri ve F_∞ ile $x_1, x_2, \dots$ tarafından üretilen serbest Leibniz cebiri gösterelim. Loday ve Pirashvili(1993) F_∞ 'un bir vektör uzayı olarak tüm sol normlu $[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ komutatörlerini içeren bir baza sahip olduğunu göstermiştir.

$U, \{u_i(x_1, \dots, x_{n_i}) : i \in I\} \subset F_\infty$ olmak üzere, $u_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = 0$ özdeşliğini sağlayan tüm Leibniz cebirlerinin bir sınıfını olsun ve $\bar{U}$ ile U nun fully invaryant idealini gösterelim.

Tanım 3.2: $F_\infty(U) = \frac{F_\infty}{\bar{U}}$ bölüm cebiri ve onun alt cebiri olan $F_m(U) = \frac{F_m}{(F_m \cap \bar{U})}$

ya U da relatively serbest cebirler denir.

Tanım 3.3: $f \in F_\infty$ eğer aynı dereceli sol normlu komutatörlerin bir lineer kombinasyonu ise homojen denir.

Tanım 3.4: Eğer bazı pozitif k ve negatif olmayan $n_1, \dots, n_k$ için f , $i=1, \dots, k$ içerisindeki x_i 'lerin derecesi n_i ve diğer değişkenlerin derecesi 0 olan sol normlu komutatörlerin bir lineer bileşimi ise, çoklu homojen denir.

Yukarıda tanımladığımız U varietesine, $\bar{U}$ idealinin her elemanı çoklu homojen elemanların bir toplamı ise, çoklu homojen denir. $F_m(U)$, $m \geq 2$ olmak üzere m ranklı $\{x_1, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen relatively serbest cebir olsun. $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ den $F_m(U)$ ya bir dönüşüm $F_m(U)$ nun bir cebir endomorfizmine genişletilebilir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F_m(U) \\ a & \mapsto & b \\ B & & \end{array}$$

diyagram değişmelidir. $bi = a$ (B Leibniz cebiri)

K bir cisim olsun. $GL(m, K)$ ile, değişkenleri K cismine ait $m \times m$ tipindeki matrislerin, K üzerinde genel lineer grubunu gösteririz.

Her $g = g_{ij} \in GL(m, K)$ için,

$$g : x_j \leftrightarrow \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i, j=1, \dots, m$$

$F_m(U)$ nun bir cebir otomorfizmine genişler. Böylece $GL(m, K)$, $F_m(U)$ nun $Aut(F_m(U))$ otomorfizm grubunun bir altgrubu gibi düşünülebilir.

Her $u \in F_m(U)$ için (u sadece $x_2, \dots, x_m$ ye bağlı olmak üzere)

$$j_u(x_1) = x_1 + u$$

$$j_u(x_j) = x_j, j=2, \dots, m$$

olacak şekilde $F_m(U)$ nun bir endomorfizmini tanımlayabiliriz.

$j_u \in \text{Aut}(F_m(U))$ ve $(j_u)^{-1} = j_{-u}$ dir. $j_u^{-1}(x_1) = x_1 - u$, $j_u^{-1}(x_j) = x_j$ alınırsa

$$j_u \circ j_u^{-1}(x_1) = j_u(x_1 - u) = (x_1 + u - u) = x_1$$

$$j_u \circ j_u^{-1}(x_j) = x_j$$

olduğundan, j_u otomorfizmdir ve $(j_u)^{-1} = j_{-u}$ dir.

Tanım 3.2: $\text{Aut}(F_m(U))$ nun $GL(m, K)$ ve yukarıda verilen formda otomorfizmler tarafından üretilen T alt grubuna $F_m(U)$ nun tame otomorfizmleri grubu denir. T ye ait olmayan bir $j_u \in \text{Aut}(F_m(U))$ 'ya wild yada non-tame denir.

$[x, [y, z]] = 0$ özdeşliğini sağlayan Leibniz cebirlerinin sınıfını N ile gösterelim. $F_\infty(N)$ ile rankı birden büyük X kümesi tarafından üretilen serbest sol nilpotent Leibniz cebirini, $F_m(N)$ ile $\{x_1, \dots, x_m\}$ kümesi tarafından üretilen serbest sol nilpotent Leibniz cebirini gösterelim. $[x, [y, z]] = 0$ olduğundan;

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y] = 0$$

$$[[x, y], z] = [[x, z], y]$$

$$[x, y, z] = [x, z, y]$$

dir.

$(F_m(N))_{Lie}$ ile de $\{x_1, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen serbest nilpotent Lie cebirini gösterelim.

Lemma 3.5: (Drensky ve Piacantini Cattone(2002))

X kümesi tarafından üretilen $F_\infty(N)$ relatively serbest cebiri

$$\{x_i, [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] : x_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in X, x_{i_1} \leq \dots \leq x_{i_k}, k = 2, 3, \dots\}$$

bazına sahiptir.

3.1. IA Otomorfizmler

Tanım 3.1.1: $F_m(U) / F_m(U)'$ bölüm cebiri üzerinde modulo

$F_m(U)' = [F_m(U), F_m(U)]$ birim dönüşüm belirleyen $F_m(U)$ nun otomorfizmlerine IA-otomorfizmleri denir. $F_m(U)$ nun IA-otomorfizmlerini $IA(F_m(U))$ ile gösterelim.

$m \geq 2$ olmak üzere, $P_m, K[x_1, \dots, x_m]$ polinom cebiri ve Ω_m, P_m 'nin genişletme ideali (yani, P_m nin sabit terimi hariç tüm polinomları içeren ideali) olsun. n negatif olmayan rakam olmak üzere $P_m^{(n)}, P_m$ 'nin $x_1^{a_1}, \dots, x_m^{a_m}$ monomialleri tarafından gerilen alt uzayını gösterebilirsin. Burada $a_1, \dots, a_m$ negatif olmayan rakamlar ve $a_1 + \dots + a_m = n$ dir. Bu durumda $P_m^{(0)} = K$ dir.

Farklı i ve j ($1 \leq i, j \leq m$) ve $v \in P_m$ için $e_{ij}(v)$, köşegen üzerindeki elemanlar 1, (i, j) deki elemanı v , diğerleri 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisi gösterebilirsin.

$$e_{ij}(v) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \mathbf{0} & \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix}$$

$e_{ij}(-v)$ de $e_{ij}(v)$ nin tersini gösterebilirsin. Bunlar $GL(m, P_m)$ nin elemanter matrisleridir.

$E(m, P_m)$ ile, elemanter matrisler tarafından üretilen $GL(m, P_m)$ nin alt grubunu gösterebilirsin. $E(m, P_m)$ nin $e_{ij}(v)$ üreteçleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

$u, v \in P_m$ için,

$$e_{ij}(u) e_{ij}(v) = e_{ij}(u + v),$$

$$i \neq 1 \text{ ve } j \neq k \text{ ise } (e_{ij}(u), e_{kl}(v)) = 1,$$

i, j ve k ayrık ise $(e_{ij}(u), e_{jk}(v)) = e_{ik}(uv)$

dir. Burada $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ a ve b nin grup komütatörüdür.

$i_1 \leq \dots \leq i_k$ olmak üzere, $u = x_{i_1} \dots x_{i_k} \in K[x_1, \dots, x_m]$ monomiali için $x_j.u$ elemanını $[x_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \in F_m(N)$ şeklinde gösterelim. Bu notasyonu her $u \in K[x_1, \dots, x_m]$ elemanı için kullanacağız.

Lemma 3.1.2: $m, (m \geq 2)$ bir pozitif tamsayı olsun. $i, j = 1, \dots, m$ $i \neq j$ ve $u \in \Omega_m$ için $q_{ij,u}, F_m(N)$ nin $q_{ij,u}(x_i) = x_i + x_j.u$ ve $k \neq i$ için $q_{ij,u}(x_k) = x_k$ şeklinde tanımlanan IA-endomorfizmiyse, $q_{ij,u} \in \text{IA}(F_m(N))$ dir.

İspat: $y_{ij,u}(x_i) = x_i - x_j.u$
 $y_{ij,u}(x_k) = x_k$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $q_{ij,u}$ dönüşümünün tersidir. Böylece $q_{ij,u}, F_m(N)$ nin $F_m(N) / F_m(N)'$ üzerinde etki eden bir otomorfizmdir. $q_{ij,u} \in \text{IA}(F_m(N))$ dir.

$f : R \rightarrow S$ halkaların herhangi bir homomorfizmi olsun. (f dönüşümü R nin birim elemanını S nin birim elemanına götürür.) Bu dönüşüm $m \times m$ matrisi halkalarının

$$f_m : M_{m \times m}(R) \rightarrow M_{m \times m}(S)$$

homomorfizmini belirler ve $M_{m \times m}(R)$ nin birimini $M_{m \times m}(S)$ nin birimine götürdüğünden bir

$$f_m^* : GL(m, R) \rightarrow GL(m, S)$$

grup homomorfizmini elde ederiz.

$SL(m, P_m)$ özel lineer grup, $P_m = K[x_1, \dots, x_m]$ polinom cebiri olmak üzere, bileşenleri P_m den gelen, determinantı 1 olan tüm $m \times m$ matrislerin grubudur.

Önerme 3.1.5: (i) $m \geq 2$ için, $p_m : P_m \rightarrow K$ genişletme homomorfizmi ve $p_m^* : GL(m, P_m) \rightarrow GL(m, K)$ grup homomorfizmi olsun. $H_m = \text{Ker } p_m^*$ olsun. O zaman bir $d_m(j) \rightarrow I + (j_{ij})$ izomorfizmi ile $IA(F_m(N)) \cong H_m$ dir. Burada

$$j(x_i) = x_i + \sum_{j=1}^m x_j j_{ji} \quad (i = 1, \dots, m) \text{ dir.}$$

(ii) $m \geq 3$ için, $E_F(m, \Omega_m)$, $SL(m, P_m)$ nin $ae_{ij}(u)a^{-1}$ formunda matrisler tarafından üretilen alt grubu olsun. Burada $a \in E(m, P_m)$, $u \in \Omega_m$, $i \neq j$ dir. O zaman $H_m = E_F(m, \Omega_m)$ dir.

İspat: $j, y \in IA(F_m(N))$ olsun. Öyleyse,

$$j(x_i) = x_i + \sum_{j=1}^m x_j j_{ji}$$

$$y(x_i) = x_i + \sum_{j=1}^m x_j y_{ji}$$

(Burada $j_{ji}, y_{ji} \in \Omega_m$ dir.) Böylece,

$$\begin{aligned} j \circ y(x_i) &= j(y(x_i)) = j\left(x_i + \sum_{j=1}^m x_j y_{ji}\right) \\ &= j(x_i) + j\left(\sum_{j=1}^m x_j y_{ji}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_i + \sum_{k=1}^m x_k j_{ki} + \sum_{j=1}^m j(x_j) y_{ji} \\
&= x_i + \sum_{k=1}^m x_k j_{ki} + \sum_{j=1}^m \left(x_j + \sum_{l=1}^m x_l j_{lj} \right) y_{ji} \\
&= x_i + \sum_{k=1}^m x_k j_{ki} + \sum_{j=1}^m x_j y_{ji} + \sum_{j=1}^m x_l (j_{lj} y_{ji}) \\
&= x_i + \sum_{k=1}^m x_k (j_{ki} + y_{ki} + \sum_{j=1}^m (j_{kj} y_{ji}))
\end{aligned}$$

j , endomorfizm ve H_m, p_m^* in çekirdeği olduğundan ve aynı zamanda $j_{ij} \in \Omega_m$ olduğundan, $d_m : IA(F_m(N)) \rightarrow H_m$ $d_m(j) = I + (j_{ij})$ d_m grup izomorfizmidir.

(ii) (i) den $d_m : IA(F_m(N)) \rightarrow H_m$ olduğunu gördük.

$$: j \rightarrow I + (j_{ij})$$

$I + (j_{ij})$ matrisi $SL(m, P_m)$ nin elemanıdır. $H_m, SL(m, P_m)$ nin alt grubudur.

(Suslin 1977), $SL(m, P_m) = E(m, P_m)$ dir.

$a \in H_m$ olsun.

$$a = E_1(u_1) \dots E_r(u_r)$$

olur. Burada $E_i(u_i)$ elementer matris $u_i \in P_m$ dir. $a_i \in K, v_i \in \Omega_m$ olmak üzere, her $u_i = a_i + v_i$ olarak yazalım. $e_{ij}(u)e_{ij}(v) = e_{ij}(u+v)$ özelliğinden,

$$E_i(u_i) = E_i(a_i + v_i) = E_i(a_i)E_i(v_i)$$

H_m , p_m^* nin çekirdeği olduğundan, $p_m^*(a) = E_1(a_1)....E_r(a_r)$ ve

$$I = E_1(a_1)....E_r(a_r) \text{ dir.}$$

$$a = E_1(u_1)....E_r(u_r) = E_1(a_1 + v_1)....E_r(a_r + v_r)$$

$$(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab \text{ olduğundan;}$$

$$\begin{aligned} a = & \left(E_1(a_1)E_1(v_1)E_1(a_1)^{-1} \right) \left(E_1(a_1)E_2(a_2)E_2(v_2)E_2(a_2)^{-1}E_1(a_1)^{-1} \right) \\ & \left(E_1(a_1)....E_r(a_r) \right) E_r(v_r) \left(E_1(a_1)....E_r(a_r) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

Suslin, 1977, sonuç 1.4 den, $E_F(m, \Omega_m)$, $GL(m, P_m)$ nin normal alt grubu olduğu gösterilmiştir.

$I = E_1(a_1)....E_r(a_r)$ ve (1) den $H_m \subseteq E_F(m, \Omega_m)$ dir. H_m , $GL(m, P_m)$ nin

ideali olarak da adlandırılır. $E_F(m, \Omega_m) \subseteq H_m$ olduğunu göstermek için, P_m

üzerindeki her a elementer matrisi, $u \in \Omega_m$ ve $i \neq j$ için, $ae_{ij}a^{-1} \in H_m$ olduğunu

göstermek yeterlidir. Bunu dört durumda inceleyelim.

Durum 1: $j \neq k$ $i \neq l$ ve $v \in P_m$ için, $\alpha = e_{kl}(-v)$ olsun. O halde $a^{-1} = e_{kl}(v)$ dir.

$$(e_{ij}(u), e_{kl}(v)) = 1 \text{ özelliğinden ve } (a, b) = a^{-1}b^{-1}ab \text{ den,}$$

$$(e_{ij}(u), a^{-1}) = 1$$

$$e_{ij}(-u)ae_{ij}(u)a^{-1} = 1$$

$$ae_{ij}a^{-1} = e_{ij}(u) \text{ elde edilir.}$$

Durum 2: i, j, k farklı ve $v \in P_m$ için $a = e_{kl}(-v)$ olsun.

$(e_{ij}(u), e_{jk}(v)) = e_{ik}(uv)$ özelliğinden ve $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ den,

$$(e_{ij}(u), a^{-1}) = e_{ij}(-u)ae_{ij}(u)a^{-1} = e_{ik}(uv)$$

$$ae_{ij}a^{-1} = e_{ij}(u)e_{ik}(uv)$$

elde edilir.

Durum 3: i, j, k farklı ve $v \in P_m$ için $\alpha = e_{kl}(-v)$ olsun.

$1 \leq i, j \leq m$ ve farklı i, j için, e_{ij} , (i, j) bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisi gösterebiliriz. Burada $e_{ij}(u) = I + ue_{ij}$ ve $u \in \Omega_m$ dir. Eğer $j=k$ ise, $e_{ij} \cdot e_{kl} = e_{il}$ ve $j \neq k$ ise, $e_{ij} \cdot e_{kl} = 0$ ile gösterilir.

Fakat

$$ae_{ij}(u)a^{-1} = I + ue_{ij} + vu(e_{ii} - e_{jj}) + (-v^2u)e_{ji}$$

dir.

Durum 4: $\alpha = e_{ij}(-v)$ veya $\alpha = e_{kj}(-v)$ olsun. ($k \neq i$)

$$ae_{ij}(u)a^{-1} = e_{ij}(u) \quad (*)$$

$$ae_{ij}(u)a^{-1} = I + ue_{ij} + vu(e_{ii} - e_{jj}) + (-v^2u)e_{ji}$$

Durum1 in sonucundan ve Durum 4 ün (*) dan

$I + ue_{ij} + vu(e_{ii} - e_{jj}) + (-v^2u)e_{ji} \in H_m$ olduğunu göstermek yeterlidir. q ,

$F_m(N)$ nin IA endomorfizmi;

$$q(x_i) = x_i + (1 + vu)x_j + (-v^2u)$$

$$q(x_j) = x_i \cdot u + x_j \cdot (1 - vu)$$

$$q(x_k) = x_k \quad k \neq i, j$$

koşullarını sağlasın. Buradan $q, F_m(N)$ nin IA-otomorfizmidir. $d_m(q) = I + (q_{ij})$ den, $d_m(q) = a e_{ij} a^{-1}$ dir. $a e_{ij} a^{-1} \in H_m$ dir. Önerme 3.1.5 (1) den $a e_{ij}(u) a^{-1} \in H_m$ dir. Bu yüzden

$$E_F(m, \Omega_m) \in H_m$$

dir. $E_F(m, \Omega_m) \subseteq H_m$ ve $E_F(m, \Omega_m) \in H_m$ den;

$$E_F(m, \Omega_m) = H_m$$

dir. Böylece istenen sonuç bulunmuş olur.

$GL(m, K) \cap IA(F_m(N)) = \{1\}$ ve $IA(F_m(N)), Aut(F_m(N))$ nin normal alt grubu olduğundan $Aut(F_m(N)), IA(F_m(N))$ ile $GL(m, K)$ 'nin semi direkt çarpımıdır. $Aut(F_m(U)) \cong IA(F_m(U)) \rtimes GL(m, K)$ dir.

Böylece $\forall a \in F_m(N)$ için, $\alpha = q \circ g$ olarak tek bir şekilde yazılır. ($q \in IA(F_m(N)), g \in GL(m, K)$) $GL(m, K)$ nin P_m üzerine cebir otomorfizmlerinin bir grubu olarak sol etkisi vardır. $g = (g_{ij}) \in GL(m, K)$ ve $f \in P_m$ için, $GL(m, K)$ nin P_m üzerindeki etkisini $g \Delta f$ ile gösterelim. $j = 1, \dots, m$ için,

$$g \Delta x_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

olsun. $b \in GL(m, K)$ ve $q, F_m(N)$ nin bir IA-otomorfizmi olmak üzere

$$d_m(b \circ q \circ b^{-1}) = I + b(b \Delta q_{ij}) b^{-1}$$

dir.

3.2. Otomorfizmler

$F_N(x_2, \dots, x_m)$, $\{x_2, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen $F_m(N)$ nin Leibniz alt cebiri olsun. Her $f \in F_N(x_2, \dots, x_m)$ için $F_m(N)$ nin T_f endomorfizmini, $i=2, \dots, m$ olmak üzere,

$$T_f(x_1) = x_1 + f \quad T_f(x_i) = x_i$$

ile tanımlayalım. Burada T_f nin tame otomorfizm olduğu açıktır.

$F_N(x_2, \dots, x_m)_j$, toplam derecesi j olan $x_2, \dots, x_m$ de tüm Leibniz monomialleri tarafından gerilen $F_N(x_2, \dots, x_m)$ nin vektör alt uzayı olsun.

$f = f_1 + \dots + f_n$ olsun. $(f_j \in F_N(x_2, \dots, x_m)_j, j = 1, \dots, n)$ O zaman $T_{f_1} \in GL(m, K)$ ve $T_f = T_{f_1} \circ \dots \circ T_{f_m}$ dir. Böylece Tf homojen toplam derecesi en az 2 olmak üzere T_f ve $GL(m, K)$ tarafından üretilir.

$\forall g \in GL(m, K)$ için, $g \circ T_f = (g \circ T_f \circ g^{-1}) \circ g$ olduğundan T alt grupların bir çarpımı olarak

$$T = \langle (g \circ T_f \circ g^{-1}) : g \in GL(m, K), f \in \bigcup_{k \geq 2} F_N(x_2, \dots, x_m)_{(k)} \rangle \cdot GL(m, K)$$

şeklinde yazılabilir.

IT , $F_m(N)$ nin tüm tame IA –otomorfizmlerini gösterelim.

$$IT = T \cap IA(F_m(N)) \quad \text{ve} \quad IT \cap GL(m, K) = \{1\} \text{ olduğundan,}$$

$$IT = \langle (g \circ T_f \circ g^{-1}) : g \in GL(m, K), f \in \bigcup_{k \geq 2} F_N(x_2, \dots, x_m)_{(k)} \rangle$$

dır.

Lemma 3.2.1: $p, \{1, \dots, m\}$, üstünde bir permütasyon için a_p , $a_p(x_i) = x_{p(i)}$ $i = 1, \dots, m$ ile tanımlı $F_m(N)$ nin bir otomorfizmi olsun. $m \geq 2$, $a_1, \dots, a_m$ negatif olmayan rakamlar $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ için, $q_{(a_1, \dots, a_m)}$, $F_m(N)$ nin

$$q_{(a_1, \dots, a_m)}(x_1) = x_1 + x_2 x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$$

$$q_{(a_1, \dots, a_m)}(x_i) = x_i \quad i \geq 2$$

koşulunu sağlayan IA- otomorfizmi olsun.

$$(I) \quad d_m(q_{(a_1, \dots, a_m)}) = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})$$

$$(II) d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = e_{p(2)p(1)}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) \text{ ve}$$

$$d_m(g \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ g^{-1}) = g(e_{21}(g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})) g^{-1} \quad \forall g \in GL(m, K)$$

İspat: (I) $d_m(q) = I + q_{ij}$ olduğundan

$$d_m(q_{(a_1, \dots, a_m)}) = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})$$

$$(II) d_m(b \circ q \circ b^{-1}) = I + b(b \Delta q_{ij}) b^{-1} \text{ olduğundan ve (I) de}$$

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = a_p e_{21}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) a_p^{-1}$$

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = I + (x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) e_{p(2)p(1)}$$

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = e_{p(2)p(1)}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m})$$

e_{ij} ; $(i, j) = 1$, diğerleri = 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisleri gösterir.

$$d_m \left(g \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ g^{-1} \right) = g \left(e_{21} \left(g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} \right) \right) g^{-1}$$

$\forall g \in GL(m, K)$ için, m bir pozitif sayı olsun. H_m nin her elemanı $I + f_{ij}$ şeklinde yazılabilir. $f_{ij} \in \Omega_m$, $GL(m, K)$ nin H_m üstündeki sol etkisi şöyle tanımlansın:

$I + f_{ij} \in H_m$, $q_f, F_m(N)$ nin IA-otomorfizmi ve $q_f(x_j) = x_j + \sum_{i=1}^m x_i f_{ij}$ olsun.

$d_m(q_f) = I + f_{ij}$ dir. $g \in GL(m, K)$, $I + f_{ij} \in H_m$ için

$$g * (I + f_{ij}) = g * d_m(q_f) = d_m(g \circ q_f \circ g^{-1})$$

$q, y \in IA(F_m(N))$ için,

$$g * d_m(q \circ y) = (g * d_m(q))(g * d_m(y))$$

H_m nin $GL(m, K)$ ile semidrekt çarpımını l_m ile gösterelim.

$$X_m : Aut(F_m(N)) \rightarrow l_m$$

$$: a = q \circ g \rightarrow (d_m(q), g)$$

Burada $(q \in IA(F_m(N))), g \in GL(m, K)$ dir.

X_m , bir grup monomorfizmidir (Yani birebir demektir.)

X_m 'nin örten olduğunu iddia edebiliriz. Gerçektende, $(I + y_{ij}, g) \in l_m$ olsun.

y , $F_m(N)$ 'nin IA-endomorfizmi $y(x_j) = x_j + \sum_{i=1}^m x_i y_{ij}$ şeklinde düşünelim.

$H_m \subseteq SL(m, P_m)$ ve $I + y_{ij} \in H_m$ olduğundan $\det(I + y_{ij}) = 1$ dir. Önerme 3.1.5 in

(1) den, $y \in IA(F_m(N))$ elde edilir. $a = y \circ g$ olsun. $X_m(a) = (I + y_{ij}, g)$ olduğu

açıkta ve bu yüzden X_m bir izomorfizmdir.

Önerme 3.2.2: $m \geq 2$ için,

$$c_m : \text{Aut}(F_m(N)) \rightarrow I_m$$

$$c_m(q \circ g) = (d_m(q), g)$$

dönüşümüyle, c_m grup izomorfizmidir. (burada $q \in IA(F_m(N)), g \in GL(m, K)$)

$d_2(IT), H_2$ nin bir özalt grubu ve böylece $F_2(N)$ wild otomorfizmlere sahiptir.

İspat:

$\Delta_2 = d_2(IT)$ olarak adlandırılır. Şimdi $\Delta_2 \subseteq E(2, P_2)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $g \in GL(2, K)$ ve $f \in \bigcup_{k \geq 2} F_N(x_2)_{(k)}$ için $d_2(g \circ T_f \circ g^{-1}) \in E(2, P_2)$ gösterilmelidir.

$f = f_2 + \dots + f_n$ olsun. ($f_i \in F_N(x_2)_{(j)}, j = 2, \dots, n$) $T_{f_2} \circ \dots \circ T_{f_n}(x) = x + f_2 + \dots + f_n$ ve $f = f_2 + \dots + f_n$ olduğundan $T_{f_2} \circ \dots \circ T_{f_n}(x) = x + f$ olup $T_f = T_{f_2} \circ \dots \circ T_{f_n}$ dir.

Böylece $d_2(g \circ T_{f_l} \circ g^{-1}) \in E(2, P_2)$, $l = 2, \dots, n$ göstermek yeterlidir. Sabit

$l \in \{2, \dots, n\}$ için ve $f_l = x_2(g_l x_2^{l-1}), g_l \in K$ dir. $GL(2, K) = D(2, K)SL(2, K)$

burada $D(2, K)$ diagonal matris grubudur ve $SL(2, K) = E(2, K)$ dir, (diagonal matris köşegenler hariç tüm elemanları 0 olan matristir.)

$d = \text{diag}(a, a^{-1}), a \in K \setminus \{0\}$ olsun.

$$(1) \dots d_2(d \circ T_{f_l} \circ d^{-1}) = d e_{21}(a^{-l+1} g_l x_2^{l-1}) d^{-1}$$

$$d_2(d \circ T_{f_l} \circ d^{-1}) = e_{21}(a^{-l+1} g_l x_2^{l-1}) \in E(2, P_2)$$

$g = e_{12}(k), k \in K \setminus \{0\}$ olsun.

$$d_2(g \circ T_f \circ g^{-1}) = I + a_{ij}$$

$$a_{11} = kB_l, a_{21} = B_l, a_{12} = -k^2 B_l, a_{22} = -kB_l, B_l = g_l (g\Delta x_2^{l-1})$$

$I + a_{ij} = e_{12}(k) b_l e_{12}(-k)$ olduğundan, $d_2(g \circ T_f \circ g^{-1}) \in E(2, P_2)$ dir.

(2) ...Eğer $g = e_{21}(k)$ ise $d_2(g \circ T_f \circ g^{-1}) = e_{21}(g_l (g\Delta x_2^{l-1})) \in E(2, P_2)$ dir.

(1) ve (2) den, $\Delta_2 \subseteq E(2, P_2)$ dir. $A = (a_{ij}) \in SL(2, P_2)$ olsun.

$a_{11} = 1 + x_1 x_2, a_{12} = x_2^2, a_{21} = -x_1^2, a_{22} = 1 - x_1 x_2$ ise, $A = I + p_{ij}$ olup $A \in H_2$ dir.

$\Delta_2 \subseteq E(2, P_2)$ nin alt grubu olduğundan $d_2(IT)$, H_2 nin tam alt grubudur. Bu matris $Aut(F_2(N))$ nin q wild otomorfizmine karşılık gelir ve şöyle tanımlanır:

$$q(x_1) = x_1 + [x_1, x_1, x_2] - [x_2, x_1, x_1]$$

$$q(x_2) = x_2 + [x_1, x_2, x_2] - [x_2, x_1, x_2]$$

Önerme 3.2.3: $m \geq 3$ için, $d_m(IT)$, $ge_{21}(g\Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})g^{-1}$ tarafından üretilir. Burada $g \in GL(m, K)$ ve $a_2, \dots, a_m$ negatif olmayan, $a_2 + \dots + a_m \geq 1$ sayılar.

İspat : A_m , $ge_{21}(g\Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})g^{-1}$ tarafından üretilen bir grup olsun.

$$d_m(g \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ g^{-1}) = g(e_{21}(g\Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}))g^{-1}$$

olduğundan $A_m \subseteq d_m(IT)$ dir.

$\{1, \dots, m\}$ üstündeki bir p permütasyonu için a_p , $F_m(N)$ nin

$$a_p(x_i) = x_{p(i)}, i = 1, \dots, m$$

şeklinde tanımlanan otomorfizmi olsun.

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = a_p e_{21}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) a_p^{-1}$$

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = I + e_{21}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) e_{p(2)p(1)}$$

$$d_m(a_p \circ q_{(a_1, \dots, a_m)} \circ a_p^{-1}) = e_{p(2)p(1)}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m})$$

Buradan, $a_p e_{21}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m}) a_p^{-1} = e_{p(2)p(1)}(x_{p(1)}^{a_1} \dots x_{p(m)}^{a_m})$ olduğundan,

$e_{k1}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) \in A_m$ olduğu elde edilir. $q, F_m(N)$ nin

$$q(x_1) = x_1 + x_2(x_2^{a_k} \dots x_k^{a_2} \dots x_m^{a_m}), q(x_i) = x_i \quad (i \geq 2)$$

şeklinde tanımlı tame otomorfizmi olsun.

$$a_p(x_2) = x_k, a_p(x_k) = x_2, a_p(x_j) = x_j, j \neq 2 \text{ için,}$$

$$d_m(a_p \circ q \circ a_p^{-1}) = a_p e_{k1}(x_{p(2)}^{a_k} \dots x_{p(k)}^{a_2} \dots x_{p(m)}^{a_m}) a_p^{-1} = e_{k1}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})$$

$g \in GL(m, K)$ için ,

$$g * e_{k1}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) = g * d_m(a_p \circ q \circ a_p^{-1}), (d_m, \text{homomorfizm})$$

$$= d_m((g \circ a_p) \circ q (g \circ a_p)^{-1})$$

$$= (g \circ a_p) e_{21}((g \circ p) \Delta x_2^{a_k} \dots x_k^{a_2} \dots x_m^{a_m}) (g \circ a_p)^{-1}$$

Diğer yandan, $g * e_{k1}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) = g * d_m(q_k) = g e_{k1}(g \Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$ dir. Burada

q_k, F_m nin $q_k(x_1) = x_1 + x_k(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}), q_k(x_i) = x_i, i \geq 2$ tame otomorfizmdir.

Bu yüzden, $g * e_{k1}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in A_m$ dir. $u, y_1, \dots, y_r$ monomiallerin K - lineer kombinasyonu olsun. ($y_1, \dots, y_r \in \{x_2, \dots, x_m\}$). Yani, $u \in K[x_2, \dots, x_m]$ dir. (sabit terim olmaksızın) $\forall k \in \{2, \dots, m\}$ ve $\forall u$ için, $q_{k,u}, F_m(N)$ nin,

$$q_{k,u}(x_1) = x_1 + x_k \cdot u, \quad q_{k,u}(x_i) = x_i \quad (i \geq 2) \quad \text{tame otomorfizmi olsun.}$$

$$d_m(q_{k,u}) = e_{k1}(u) \quad \text{dir. } (e_{ij}(u)e_{ij}(v) = e_{ij}(u+v)), \text{ özelliğini kullanarak;}$$

$$d_m(q_{k,u}) = \prod_y e_{k1}(q_y, y), \quad u \in y_1 \dots y_r \text{ lerin bir lineer kombinasyonudur. Yani,}$$

$$u = q_1 y_1 + \dots + q_r y_r \quad \text{ve } y_1, \dots, y_r \in \{x_2, \dots, x_m\}, \quad q_y \in K \quad \text{dir. } g \in GL(m, K) \text{ için,}$$

$$g * d_m(q_{k,u}) = d_m(g \circ q_{k,u} \circ g^{-1}) = \prod_y g * e_{k1}(q_y, y)$$

dir.

$$q \in K \setminus \{0\} \text{ için, } b_q, F_m(N) \text{ nin } b_q(x_1) = qx_1, b_q(x_i) = x_i \text{ otomorfizmi olsun.}$$

$$\begin{aligned} b_q^{-1} * e_{k1}(y_1, \dots, y_r) &= b_q^{-1} * d_m(q_k) \\ &= e_{k1}(qy_1 \dots y_r) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. $h_q = gb_q^{-1}$ olsun.

$$\begin{aligned} g * e_{k1}(qy_1 \dots y_r) &= g * d_m(b_q^{-1} \circ q_k \circ b_q) \\ &= d_m((g \circ b_q^{-1}) \circ q_k \circ (g \circ b_q^{-1})^{-1}) \\ &= (g \circ b_q^{-1}) e_{k1}(g \circ b_q^{-1}) \Delta(y_1, \dots, y_r) \circ (g \circ b_q^{-1})^{-1} \\ &= h_q e_{k1}(h_q \Delta y_1 \dots y_r) h_q^{-1} = h_q * e_{k1}(y_1, \dots, y_r) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu yüzden $g * e_{k1}(qy_1 \dots y_r) \in A_m$ ve $g * d_m(q_{k,u}) \in A_m$ dir.

$f = f_2 + \dots + f_m$ olsun. $(f_l \in F_N(x_2, \dots, x_m))_{(l)}, l = 2, \dots, m) T_f = T_{f_2} \circ \dots \circ T_{f_m}$ dir.

$l = 2, \dots, m$ için,

$f_l = x_2 f_{2l} + \dots + x_m f_{ml}$ yazabiliriz. Burada $f_{kl}, y_1, \dots, y_{l-1}$ monomiallerinin K -lineer kombinasyonu olsun.

$$d_m(T_{f_l}) = e_{21}(f_{2l}) \dots e_{m1}(f_{ml})$$

$\forall k \in \{2, \dots, m\}$ için, $q_{f_{kl}}, F_m(N)$ 'nin

$$q_{f_{kl}}(x_1) = x_1 + x_k f_{kl} \quad q_{f_{kl}}(x_i) = x_i$$

şeklinde tame otomorfizmi olsun. $d_m(q_{f_{kl}}) = e_{k1}(f_{kl})$ dir. $T_{f_l} = T_{f_{2l}} \circ \dots \circ T_{f_{ml}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d_m(T_{f_l}) &= e_{21}(f_{2l}) \dots e_{m1}(f_{ml}) \\ &= d_m(q_{f_{2l}}) \dots d_m(q_{f_{ml}}) \\ &= d_m(q_{f_{2l}} \circ \dots \circ q_{f_{ml}}) \end{aligned}$$

dir. $g \in GL(m, K)$ için,

$$g * d_m(T_{f_l}) = (g * d_m(q_{f_{2l}})) \dots (g * d_m(q_{f_{ml}})) \text{ dir. } g * d_m(q_{k,u}) \in A_m \text{ den,}$$

$g * d_m(T_{f_l}) \in A_m$ ve $d_m(g \circ T_f \circ g^{-1}) \in A_m$ elde edilir. Böylece $d_m(IT) \subseteq A_m$, $A_m = d_m(IT)$ dir.

Teorem 3.2.4: $s \in IA(F_m(N))$, $m \geq 2$ ve $s(x_1) = x_1 + x_2 \cdot x_1$, $s(x_i) = x_i, (i \geq 2)$

ve E_s , $IA(F_m(N))$ nın tüm $g \circ s \circ g^{-1}$, ($g \in GL(m, K)$) tarafından üretilen alt grubu olsun. $m \geq 3$ için, Γ_m , $IA(F_m(N))$ 'nin IT ve E_d tarafından üretilen alt grup olsun.

$$(I) \quad i \neq j \text{ için, } i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad g e_{ij} (g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) g^{-1} \in d_m(\Gamma_m)$$

$\forall g \in GL(m, K), a_1, \dots, a_m > 0, a_1 + \dots + a_m \geq 1$ dir.

$$(II) \quad d_m(\Gamma_m) = E_F(m, \Omega_m).$$

İspat: (I) $m \geq 3$ için, $d_m(\Gamma_m) = \Delta_m$ diyelim. İddiamızı m üstünde tümevarım kullanarak gösterelim. $m=3$ için a, b, c pozitif tamsayı ve $a+b+c \geq 1$ olmak üzere,

$e_{21}(x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^c) \in \Delta_3$ olduğunu gösterelim:

$c=0$ olsun. $IT \subseteq \Gamma_3$ olduğundan, $e_{23}(x_1^a) e_{31}(x_2^b) \in \Delta_3$ $a, b \geq 1$ için;

$(e_{ij}(x), e_{jk}(y)) = e_{ik}(xy)$ özelliğinden, tüm pozitif a, b tam sayıları için

$(e_{23}(x_1^a) e_{31}(x_2^b)) = e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ dir. $a = 0, b \geq 1$ için, $T_{2,b}(x_1) = x_1 + x_3 \cdot x_2^b$,

$T_{2,b}(x_i) = x_i$ ($i = 2, 3$), $F_3(N)$ tame IA-otomorfizmi olsun. $GL(3, K) \subseteq T$

olduğundan, $e_{23}(-1) \circ T_{2,b}^{-1} \circ e_{23}(1) \in IT$ dir.

$$d_3(e_{23}(-1) \circ T_{2,b} \circ e_{23}(1)) = e_{21}(e_{23}(-1)(e_{31}(x_2^b))e_{23}(1))$$

$$= e_{21}(x_2^b) e_{31}(-x_2^b) \in \Delta_3$$

dir.

$e_{31}(-x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, yukarıdan $e_{21}(x_2^b) \in \Delta_3$ olduğu elde edilir. $a \geq 1, b = 0$

ve $p(1)=1$, $p(2)=3$, $p(3)=2$ olacak şekilde permütasyon olsun. Lemma 3.2.1 (II) den, $d_3(a_p \circ s \circ a_p^{-1}) = e_{31}(x_1) \in \Delta_3$ dir. $(e_{23}(x_1), e_{31}(x_1)) = e_{21}(x_1^2) \in \Delta_3$ olur. s_2 , $s_2(x_1) = x_1 + x_2 x_1^2$, $s_2(x_i) = x_i$ ($i=2,3$) $F_3(N)$ nin IA-otomorfizmi olsun. Lemma 3.2.1 (II) den, $d_3(a_p \circ s \circ a_p^{-1}) = e_{31}(x_1^2) \in \Delta_3$ ve bu yüzden $(e_{23}(x_1), e_{31}(x_1^2)) = e_{21}(x_1^3) \in \Delta_3$ dir. Bu şekilde devam edersek $a \geq 1$ için,

$$e_{21}(x_1^a) \in \Delta_3$$

elde edilir. Negatif olmayan a, b ve $a+b \geq 1$ için, $e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ olduğu elde edilir. $c \geq 1$ olduğunu farz edelim. $e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, Lemma 3.2.1 (II) den,

$$e_{31}(x_1^a x_3^b), e_{23}(x_{21}^b x_{32}^a) \in \Delta_3$$

elde edilir.

Her pozitif a, b için $e_{21}(x_1^a), e_{21}(x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, Lemma 3.2.1 (II) den, her pozitif c tamsayısı için, $e_{31}(x_1^c), e_{23}(x_2^c) \in \Delta_3$ elde edilir.

$$(e_{23}(x_2^c), e_{31}(x_1^a x_3^b)) = e_{21}(x_1^a x_2^c x_3^b) \in \Delta_3$$

$$(e_{23}(x_2^b x_3^a), e_{31}(x_1^c)) = e_{21}(x_1^c x_2^b x_3^a) \in \Delta_3$$

oldüğundan, negatif olmayan a, b, c tamsayıları $a+b+c \geq 1$ için, $e_{21}(x_1^a x_2^b x_3^c) \in \Delta_3$ elde edilir.

Lemma 3.2.1 (II) den, $1 \leq i, j \leq 3$ $i \neq j$ için, $e_{ij}(x_1^a x_2^b x_3^c) \in \Delta_3$ elde edilir.

$T_{a,b,c}, F_3(N)$ nin IA- otomorfizmi $T_{a,b,c}(x_j) = x_j + x_i \cdot (x_1^a x_2^b x_3^c)$,

$T_{a,b,c}(x_k) = x_k$, ($k \neq j$) koşullarını sağlasın ve $g \in GL(3, K)$ olsun.

$d_3(T_{a,b,c}) = e_{ij}(x_1^a x_2^b x_3^c)$ olduğundan, $T_{a,b,c} \in \Gamma_3$ elde edilir. $g \circ T_{a,b,c} \circ g^{-1} \in \Gamma_3$ ve

$d_3(g \circ T_{a,b,c} \circ g^{-1}) = g(e_{ij}(g \Delta x_1^a x_2^b x_3^c))g^{-1}$ olduğundan,

$g(e_{ij}(g \Delta x_1^a x_2^b x_3^c))g^{-1} \in \Delta_3$ elde edilir. (Burada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ve $i \neq j$, a, b, c negatif olmayan tamsayı ve $a + b + c \geq 1$ dir.)

$m \geq 4$ olduğunu farz edelim ve tüm negatif olmayan $a_1, \dots, a_{m-1}$ ve $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ için $e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_{m-1}$ olsun. $e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_m$ olduğundan, tüm pozitif a_i tamsayıları için, $i = 1, \dots, m-1$ olup, $e_{21}(x_i^{a_i}) \in \Delta_m$ olduğu elde edilir. Lemma 3.2.1 (II) den,

$$e_{2m}(x_m^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}), \quad e_{m1}(x_1^{a_1} x_m^{a_2} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_m$$

elde edilir. Her pozitif a tamsayısı için, $e_{21}(x_1^a)$ ve $e_{21}(x_2^a) \in \Delta_m$ olduğundan, Lemma 3.2.1 (II) den, $e_{m1}(x_1^a)$ ve $e_{2m}(x_2^a) \in \Delta_m$ elde edilir.

$$(e_{2m}(x_2^a), e_{m1}(x_1^{a_1} x_m^{a_2} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}})) = e_{21}(x_1^{a_1} x_2^a \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$$

ve

$$(e_{2m}(x_2^{a_2} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m^{a_1}), e_{m1}(x_1^a)) = e_{21}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$$

oldüğundan, $e_{12}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ elde edilir. Lemma 3.2.1 (II) den, her $1 \leq i, j \leq m$

$i \neq j$ ve negatif olmayan $a_1, \dots, a_m$ $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ için, $e_{ij}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ dir.

$T_{(a_1, \dots, a_m)}, F_m(N)$ nin IA otomorfizmi, $T_{(a_1, \dots, a_m)}(x_j) = x_j + x_i \cdot (x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})$, $k \neq j$ için

$T_{(a_1, \dots, a_m)}(x_k) = x_k$ koşullarını sağlasın. $m=3$ 'e benzer durumda, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$ için, $g(e_{ij}(g\Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}))g^{-1} \in \Delta_m$ elde edilir.

(II) Önerme 3.1.5 den, $IA(F_m(N)) \cong H_m = E_F(m, \Omega_m)$ ve $\Gamma_m \subseteq IA(F_m(N))$ den $\Delta_m \subseteq E_F(m, \Omega_m)$ olduğundan, $E_F(m, \Omega_m) \subseteq \Delta_m$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak, $u \in \Omega_m$ ve $u = u_1 + \dots + u_d, u_k \in P_m^{(n_k)}$ bazı n_k için ve $1 \leq n_1 < \dots < n_d$ için, $e_{ij}(u) \in \Delta_m$ olduğu gösterilmelidir. (I) den, $e_{ij}(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ dir. Burada $a_1, \dots, a_m$ negatif olmayan tamsayılar, $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ dir. $a_1, \dots, a_m \geq 1$ için, $x = x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$, $\overline{x_k} = x$ den $x_k^{a_k}$ silerek elde edilen bir monomial olsun. $q \in K/\{0\}$ için, $a_{q,k}, F_m(N)$ nin,

$$a_{q,k}(x_k) = q.x_k, \quad a_{q,k}(x_i) = .x_i, \quad i \neq k$$

şeklindeki otomorfizmi olsun. $a_{q,k}^{-1} * e_{ik}(\overline{x_k}) = e_{ik}(q\overline{x_k})$ olduğundan, $e_{ik}(q\overline{x_k}) \in \Delta_m$ dir.

(I) den, $e_{kj}(x_k^{a_k}) \in \Delta_m, e_{ik}(q\overline{x_k}) e_{kj}(x_k^{a_k}) = e_{ij}(qx) \in \Delta_m$ elde edilir.

$a.e_{ij}(u).a^{-1} \in \Delta_m$ $a \in E(m, P_m)$, $u \in \Omega_m, i \neq j$ olduğunu göstermeliyiz.

$e_{ij}(u) \in \Delta_m, u \in \Omega_m$ olduğundan, her $g \in GL(m, K)$ için,

$$ge(u_{ij})g^{-1} \in \Delta_m$$

elde ederiz. $(g \in GL(m, K), i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j). a \in E(m, P_m)$ ve $a = a_1 \dots a_r$,

$a_i = E_i(q_i)E_i(w_i), (q_i \in K, w_i \in \Omega_m)$ olsun. $k = 1, \dots, r$ için, $g_k = E_1(q_1) \dots E_k(q_k)$

olsun. Daha önceki,

$$a = (E_1(a_1)E_1(v_1)E_1(a_1)^{-1})(E_1(a_1)E_2(a_2)E_2(v_2)E_2(a_2)^{-1}E_1(a_1)^{-1}) \\ \dots (E_1(a_1) \dots E_r(a_r))E_r(v_r)(E_1(a_1) \dots E_r(a_r))^{-1}(E_1(a_1) \dots E_r(a_r))$$

özelliğinden,

$$a e_{ij}(u) a^{-1} = \left(\prod_{k=1}^r g_k E_k(\mathbf{w}_k) g_k^{-1} \right) \left(g_r e_{ij}(u) g_r^{-1} \right) \left(\prod_{l=0}^{r-1} g_{r-l} E_{r-l}(-\mathbf{w}_{r-l}) g_{r-l}^{-1} \right)$$

elde edilir. $e_{ij}(u) \in \Delta_m$ olduğundan, $a e_{ij}(u) a^{-1} \in \Delta_m$ elde edilir. Bu yüzden

$$E_F(m, \Omega_m) \subseteq \Delta_m, d_m(\Gamma_m) = E_F(m, \Omega_m) \text{ dir.}$$

Teorem 3.2.5: $m \geq 3$ için, $\text{Aut}(F_m(N)) = \langle T, s \rangle$ dir. Burada $s, F_m(N)$ nin,

$$s : x_1 \rightarrow x_1 + x_2 \cdot x_1$$

$$: x_i \rightarrow x_i$$

IA-otomorfizmidir. Aynı zamanda s wild otomorfizmdir.

İspat: $m \geq 3$ için, $\Delta_m' \leq \text{SL}(m, P_m)$ nin $ge_{21}(g\Delta x_1)g^{-1}$ ve $ge_{21}(g\Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})g^{-1}$

tarafından üretilen alt grubu olsun. Burada $g \in GL(m, K)$ ve $a_2, \dots, a_m$ negatif

olmayan rakamlar $a_2 + \dots + a_m \geq 1$ dir. Teorem 3.2.4 ün ispatından,

$$\Delta_m' = d_m(\Gamma_m) = E_F(m, P_m) \text{ dir. } H = \langle T, s \rangle \text{ ve } IH = H \cap \text{IA}(F_m(N))$$

olsun. $GL(m, K) \cap IH = \{1\}$ olduğundan, $IH = IT \langle g \circ s \circ g^{-1} : g \in GL(m, K) \rangle$

olduğu elde edilir. Lemma 3.2.1 ve Önerme 3.2.3 den $d_m(IH) = \Delta_m' = d_m(\Gamma_m)$

olduğu görülür. Önerme 3.1.5 den, $IH = \text{IA}(F_m(N))$ olduğu elde edilir ve bu

yüzden $\text{Aut}(F_m(N)) = \langle T, s \rangle$ dır.

$(F_m(N))_{\text{Lie}}, y_1, \dots, y_m$ tarafından üretilen 2. dereceden serbest nilpotent Lie cebiri olsun.

$$F_m \rightarrow F_m(N) \rightarrow (F_m(N))_{\text{Lie}}$$

cebirlерinin dogal homomorfizmi

$$\text{Aut} F_m \rightarrow \text{Aut} F_m(N) \rightarrow \text{Aut} (F_m(N))_{\text{Lie}}$$

otomorfizm gruplarının dogal homomorfizmini belirler.

s nin wild olduğunu gösterelim:

$s, F_m(N)$ nin tame otomorfizmi olsun. F_m nin bir s_0 tame otomorfizmi vardır.

$s \in \text{Aut}(F_m(N))$ ve $s_1 \in \text{Aut}(F_m(N))_{Lie}$ tame otomorfizmlerine dönüşür.

$$s_1 : y_1 \rightarrow y_1 + [y_2, y_1]$$

$$: y_i \rightarrow y_i$$

tanımlansın. Bryant ve Drensky nin sonucu ile bu bir çelişkidir. Bu sonuca göre, her $m > 1$ için, $s_1, (F_m(N))_{Lie}$ nin bir wild otomorfizmidir.

Not: 1) Teorem 3.2.5 den, $\forall m \geq 3$ için tanımlanan $(F_m(N))$ nin s otomorfizmi $m = 2$ için de wild otomorfizmdir..

2) a, b pozitif tamsayılar olmak üzere $e_{21}(x_1^a x_2^b)$ den, $F_m(N)$ nin

$$x_1 \rightarrow x_1 + [x_2, x_2, x_1] = x_1 + x_2 \cdot (x_1 x_2)$$

$$x_i \rightarrow x_i$$

otomorfizmi $\forall m > 2$ için tame dir. $m=2$ için, bu otomorfizm F_2 nin Abdykhalikov et al (2001) tarafından keşfedilen wild otomorfizmi tarafından belirlenir ve $F_2(N)$ nin bir otomorfizmi olarakda wild olup olmadığı ilginçtir.

F_m nin otomorfizmi

$$x_1 \rightarrow x_1 + [[x_2, x_2], x_1]$$

$$x_i \rightarrow x_i$$

$\forall m > 2$ için, tame dir. Bu otomorfizm,

$$j : x_3 \rightarrow x_3 + [x_2, x_1] \quad y : x_1 \rightarrow x_1 + [x_2, x_3] + [x_3, x_2]$$

$$x_i \rightarrow x_i, i \neq 3 \quad : x_i \rightarrow x_i, i \geq 2$$

tame otomorfizmleri olmak üzere yukarıdaki otomorfizm $j \circ y \circ j^{-1} \circ f^{-1}$ e eşittir.

3) Eger $F_\infty(N)$ X üzerinde serbest sol nilpotent Leibniz cebiri ise, Önerme 3.2.2 aşağıdakileri sağlar.

$$\text{Aut}(F_\infty(N)) = GL(KX, K) \times IA(F_\infty(N))$$

Burada $GL(KX, K)$, X bazıyla KX vektör uzayının tersinir lineer dönüşümlerinin grubu ve $IA(F_\infty(N))$, tüm $F_\infty(N)$ otomorfizmleri grubu, öyleki $F_\infty(N)$ nin komutatör idealin modulüne denktir. Eğer $\Omega \ P = K[x]$ polinom cebirinin genişletme ideali ise, o zaman $f \in IA(F_\infty(N))$ aşağıdaki koşulları

$$f(x) = x + \sum_{y \in X} y \cdot f_{yx}, f_{yx} \in \Omega, x, y \in X \quad (*)$$

sağlar.

$M = \sum_{x \in X} x \cdot P$, X üreteç kümesi ile serbest sağ P -modül olsun. Yukarıdaki (*)

koşulundan, M nin bir P -modül endomorfizmi olarak tanımlanır. (*) özelliğinden, $F_\infty(N)$ 'nin f endomorfizmi otomorfizmdir $\Leftrightarrow M$ de buna karşılık gelen endomorfizm otomorfizmdir. $GL(KX, K)$ 'in M nin yukarıda (*) da tanımlanan otomorfizmi üstündeki etkisi Önerme 3.2.2 deki benzer yolla tanımlandı. $F_\infty(N)$ nin otomorfizmleri, X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen F serbest Leibniz cebirinin otomorfizmleri tarafından belirlenen otomorfizmlerdir ya da Serbest non-assosyatif cebirlerin otomorfizmleri tarafından belirlenen otomorfizmler gibidir. Bu iki tanımın farklı olup olmadığını ve $F_\infty(N)$ nin sonsuz X kümesi için wild otomorfizmlere sahip olup olmadığını henüz bilemiyoruz.

KAYNAKLAR

- CUVIER, Par C.,” Algebres de Leibnitz:Definitions Properties” ,Ann. Scient .Ec.Norm.Sup.;4 serie,T.27,1994,p1-45
- DRENSKY, V.,PAPISTAS,A.I.:(2005),” Automorphisms of Free Left Nilpotent Leibniz Algebras” Communications in Algebra,33:2957-2975 ,
- LODAY ,J.L,PIRASHVILI ,T., 1993.”Universal Enveloping Algebras of Leibniz Algebra and (co)homology “Math.Ann.296,139-158
- MIKHALEV ,A.A,UMIRBAEV,U.U,ABDYKHOLYKOV,A.T.:(2001)”Automorphism of two generated Free Leibniz Algebra,Communications in Algebra”29(7),2953-2960R., 2005.
- BAKHTURIN,YU.A.(1985) “Identical Relations in Lie Algebras.Moscow:Nauka.
- LİVERNET ,M (1998) .Rational homotopy of Leibniz Algebras.MANUSCRIPTA Math. 96:295-
- AYUPOV , Sh,A .,OMİROV ,B,A,(1998) . “ On Leibniz Algebras.Algebra and Operators Theory.Proceedings of the Colloquium in Tashkent 1997 .Kluwe,pp,.1-13
- ABDYKASSYMOVA,S.(2001). Leibniz Algebras of rank 1 in the characteristic p.Ph.D.thesis ,Almaty
- BOKUT,L.A.,KUKIN,G.P,(1994)”Algorithmic and Combinatorial Algebra”Kluwer Academic Publishers,Dordrecht
- MIKHALEV ,A.A,SHPILRAIN;V.E,ZOLOTYKH,A.A;(1996)”Subalgebras of Free Algebras”124-7

ÖZGEÇMİŞ

06/06/1986 yılında Siverek’de doğdu. Öğremini sırasıyla Namık Kemal İlköğretim okulu, İbni Sina Anadolu Lisesinde tamamladı.2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne girdi.1 yıl sonunda Çukurova Üniversitesine yatay geçiş yaptı .2008 yılında mezun olarak 2008 yılında yüksek lisans eğitimine Çukurova Üniversitesinde başladı.2010 yılındada tamamladı