

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN PRİMİTİF ELEMANLARI

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ADANA, 2005

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN PRİMİTİF ELEMANLARI

Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Bu tez/...../2005 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza:.....	İmza:.....	İmza:.....
Prof.Dr. Naime EKİCİ	Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN	Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
İmza:.....	İmza:.....	
Yrd.Doç.Dr. Perihan ARTUT(DİNÇ)	Yrd.Doç.Dr.Ahmet TEMİZYÜREK	
ÜYE	ÜYE	

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Not : Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN PRİMITİF ELEMANLARI

Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Danışman: Prof. Dr. Naime EKİCİ

Yıl: 2005, Sayfa: 56

Jüri: Prof. Dr. Naime EKİCİ

Yrd. Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Perihan ARTUT(DİNÇ)

Yrd. Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

A sonlu bir X kümesi tarafından üretilen serbest cebir olsun. İlk olarak A nın herhangi bir a elemanının kısmi türevleri kullanılarak bazı temel bilgiler elde edilmiştir. Daha sonra admissible kümelerin tanımı verilerek bu kümelerle ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. A nın bir a elemanının rankı, a elemanının A nın otomorfizmleri altındaki görüntüsünde görünen ve X kümesine ait olan elemanların minimum sayısı olarak tanımlanır. A nın bir a elemanının rankının, a nın kısmi türevleri tarafından üretilen serbest modülün rankına eşit olduğu ispatlanmıştır. A nın elemanlarının herhangi bir sistemi A nın bir serbest üreteç kümesinin alt kümesi ise bu sisteme primitiftir denir. Daha sonra A nın primitif elemanlarını primitif elemanlara dönüştüren bir endomorfizminin otomorfizm olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Serbest cebir, kısmi türevler, admissible kümeler.

ABSTRACT

MSc THESIS

PRIMITIVE ELEMENTS OF FREE LİE ALGEBRAS

Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Naime EKİCİ

Year: 2005, Pages: 56

Jury: Prof. Dr. Naime EKİCİ

Assist. Prof. Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Assist. Prof. Dr. Ela AYDIN

Assist. Prof. Dr. Perihan ARTUT (DİNÇ)

Assist. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK

Let A be a free algebra generated by a finite set X . Firstly, by using partial derivations of an element a of A some basic results have been obtained. Afterwards, by giving definition of admissible sets some theorems with respect to these sets have been proved. The rank of an element a of A is defined as the minimum number of elements of X appearing in images of a under automorphisms of A . It has been proved that the rank of an element a of A is equal to the rank of free module generated by partial derivations of a . If a system of elements of A is subset of a free generators of A , it is called a primitive system. Later it has been proved that an endomorphism of A mapping primitive elements of A onto primitive elements is an automorphism.

Key Words: Free algebras, partial derivations, admissible sets.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline, tez yazımında bana yardımcı olan değerli arkadaşım Mehmet Ali İĞDE'ye, maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3.TÜREVLER VE ADMİSSİBLE SİSTEMLER.....	7
3.1.Fox Türevleri.....	7
3.2.Kısmi Türevler.....	7
3.3.Kısmi Türevlerin Temel Özellikleri.....	8
3.4.Homojen Elemanlar.....	14
3.5.Değişkenlerin Yok Edilmesi.....	21
4.RANK TEOREMLERİ VE PRİMİTİF ELEMANLAR.....	31
4.1. M_a nın Rankı.....	31
4.2.Primitif Sistemler.....	39
4.3.Primitif Elemanlar ve Endomorfizmler.....	47
4.4.Primitif Elemanların Ters Görüntüleri.....	50
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

1.GİRİŞ

M_0 tüm cebirlerinin sınıfı, M_1 karakteristiği 2 den farklı olan tüm değişmeli cebirlerin sınıfı ve M_2 tüm değişmeli olmayan cebirlerin sınıfı olmak üzere A , M_0 , M_1 veya M_2 ye ait olan sonlu üreteçli bir serbest cebir olsun.

Bölüm 3.3 ve Bölüm 3.4 te A nın elemanlarının kısmi türevlerinin temel özelliklerini ele alacağız. Bu özelliklerin bazıları, A nın alt cebirlerinin diferansiyel ayrılabilirliğine ve evrensel enveloping $U(A)$ cebirinin bir serbest birleşmeli cebir ve aynı zamanda bir serbest ideal halkası olmasına dayanır.

Bölüm 3.5 de değişkenlerin yok edilmesini ele alacağız.

Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.8 gösterecek ki bir sistemin rankı , bileşenleri bu sistemdeki elemanların kısmi türevleri olan elemanlar tarafından üretilen serbest modülün rankına eşittir.

Teorem 4.2.1 ile primitif elemanlar için matris kriteri elde edeceğiz: A nın elemanlarından oluşan bir sistem primitiftir ancak ve yalnız bu sistemdeki elemanların kısmi türevlerinden oluşan matris $U(A)$ üzerinde sol tersinirdir.

Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.2.1 e dayanarak Teorem 4.2.2 de bir sistemin rankını bulmak için ve bu sistemin primitif olup olmadığına karar vermek için algoritmalar elde edeceğiz.

Bölüm 4.3 da endomorfizmlerin primitif elemanlar üzerindeki etkilerini inceleyeceğiz. Teorem 4.3.2 gösterecek ki elemanların primitif özelliğini koruyan endomorfizmler otomorfizmlerdir.

Bölüm 4.4 te Schreier cebirlerindeki primitif elemanların otomorfizm altındaki ters görüntülerinden bahsedeceğiz. Teorem 4.4.1 ve Teorem 4.4.2 gösterecek ki primitif elemanların birebir olan endomorfizm altındaki ters görüntüsü primitiftir. Genel olarak primitif elemanların ters görüntüleri bir retraktı üretir.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

K bir cisim olsun.

Tanım 2.1: A ve B , K cismi üzerinde iki cebir ve $\varphi: A \rightarrow B$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

ise φ ye bir cebir homomorfizmi denir.

Tanım 2.2: A ve B , K cismi üzerinde iki cebir ve $\varphi: A \rightarrow B$ bir cebir homomorfizmi olsun. Eğer φ birebir ve örten ise φ ye bir izomorfizm, A ile B cebirlerine de izomorfik cebirler denir ve $A \cong B$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: A , K cismi üzerinde bir cebir olsun. $\varphi: A \rightarrow A$ bir cebir homomorfizmi ise φ ye A nın bir endomorfizmi denir.

Tanım 2.4: A , K cismi üzerinde bir cebir olsun. $\varphi: A \rightarrow A$ bir izomorfizm ise φ ye A nın bir otomorfizmi denir.

Tanım 2.5: X boş olmayan bir küme, F bir cebir (F bir Lie cebiri) olsun. Eğer F , X tarafından üretiliyorsa ve her A cebiri (A Lie cebiri) için X ten A ya olan her dönüşüm, $F \rightarrow A$ cebir homomorfizmine genişletilebiliyorsa (bu genişleme tektir.) F cebiri (F Lie cebiri) X üzerinde serbesttir ya da kısaca F serbest cebirdir (F sebest Lie cebiridir) denir ve $F(X)$ ile gösterilir. X kümesine de F nin serbest üreteç kümesi denir. X kümesinin kardinalitesi $F(X)$ in rankı olarak tanımlanır. Bundan sonra $F = F(X)$ ile boş olmayan bir X kümesi üzerindeki serbest cebiri göstereceğiz.

Tanım 2.6: A , K cismi üzerinde bir cebir olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birleşmeli ve birim elemanlı $U(A)$ cebirine, A nın evrensel enveloping cebiri denir.

1) A dan $U(A)$ ya kanonik homomorfizm denilen bir $\varepsilon : A \rightarrow U(A)$ homomorfizmi vardır.

2) K cismi üzerindeki birim elemanlı her B birleşmeli cebiri ve her $\varphi : A \rightarrow B$ cebir homomorfizmi için $\psi \circ \varepsilon = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\psi : U(A) \rightarrow B$ cebir homomorfizmi vardır.

Tanım 2.7: A bir serbest cebir ve $U(A)$ A nın evrensel enveloping cebiri olsun. W A nın bir lineer bazı ve S , $U(A)$ nın bir serbest üreteç kümesi olmak üzere W ve S nin elemanlarının herbirine monomial denir.

Tanım 2.8: $u \in F(X)$ için $\ell(u) = \ell_X(u)$ ile u nun derecesini gösterelim. N pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere $\mu : F(X) \rightarrow N$ genelleştirilmiş derece fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$\Gamma(X)$ X alfabetine göre birleşmeli olmayan monomiallerin serbest grupoidi, $S(X)$ X alfabetine göre birleşmeli kelimelerin serbest yarı grubu ve $\sim : \Gamma(X) \rightarrow S(X)$ parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen homomorfizm olsun. O

zaman; her $x \in X$ için $\mu(x) = 1$, $x_i \in X$ için $\mu(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n \mu(x_i)$ ve $a = \sum \alpha_i \cdot a_i$

öyle ki $0 \neq \alpha_i \in K$, a_i ler monomialler ve $j \neq s$ için $a_j \neq a_s$ şeklindeki bir $a \in F$ elemanı için $\mu(a) = \max_i \{\mu(\tilde{a}_i)\}$ olarak tanımlanan μ fonksiyonuna genelleştirilmiş derece fonksiyonu denir ve bir $u \in F(X)$ elemanının derecesi $\ell(u) = \mu(u)$ olarak tanımlanır.

a^0 ile a nın en yüksek dereceli kısmını gösterelim. $a^0 = \sum_{j, \mu(a_j)=\mu(a)} \alpha_j \cdot a_j$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.9: $\mu: F(X) \rightarrow \mathbb{N}$ genelleştirilmiş derece fonksiyonu ve $\sim: \Gamma(X) \rightarrow S(X)$ parantezlerin kaldırılmasıyla elde edilen homomorfizm olsun. Bir $a \in F(X)$ için $a = \sum \alpha_i \cdot a_i$ olsun öyle ki $0 \neq \alpha_i \in K$, a_i ler monomialler ve $j \neq s$ için $a_j \neq a_s$ olsun. Eğer her $i \neq j$ için $\mu(\tilde{a}_i) = \mu(\tilde{a}_j)$ ise a ya $F(X)$ in bir homojen elemanı denir.

Tanım 2.10: M cebirlerin herhangi bir sınıfı, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $F = F(X)$, $A \in M$ ve $u, v \in F(X)$ olsun. Her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için $u(a_1, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$ ise (u, v) çiftine A cebirinde bir özdeşlik denir.

Tanım 2.11: Bir cebir sınıfı homojen özdeşliklerin bir kümesi tarafından belirlenebiliyorsa bu cebir sınıfı homojendir denir.

Tanım 2.12: M cebirlerin herhangi bir sınıfı olsun. Eğer M deki her serbest cebirin her alt cebiri M ye ait bir serbest cebir ise M ye Schreier cebirleri sınıfı denir.

Tanım 2.13: A sonlu üreteçli bir serbest cebir ve $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset A$ olsun. Eğer $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir bağıntı yoksa S ye bağımsız küme denir.

Bu çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde aşağıdaki teoremlerden yararlanacağız.

Teorem 2.1 (Cohn, 1964; Kurosh, 1947; Lewin, 1968; Mikhalev, 1985; Mikhalev, 1986; Mikhalev, 1988; Shirshov, 1953; Shirshov, 1954; Shtern, 1986; Witt, 1956): $X = \{x_1, \dots, x_n\}$; K , karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim ve $F = F(X)$, K cismi üzerindeki aşağıdaki cebir sınıflarından birine ait serbest üreteç kümesi X olan birim elemansız bir serbest cebir olsun.

- i) Tüm cebirlerin sınıfı, Lie cebirlerinin sınıfı
- ii) Değişmeli cebirlerin sınıfı, değişmeli olmayan cebirlerin sınıfı

olmak üzere;

- 1) F nin her sonlu alt kümesi, elemanter dönüşümlerin sonlu bir dizisi ile F nin indirgenmiş bir alt kümesine dönüştürülebilir.
- 2) F nin her indirgenmiş alt kümesi bir bağımsız kümedir.
- 3) İndirgenmiş bir kümeye bağlı olarak yazılan bir polinomun en yüksek dereceli kısmı, bu kümedeki elemanların en yüksek dereceli kısımlarının bir polinomudur.
- 4) F nin her alt cebiri serbesttir.
- 5) F nin bir M alt kümesinin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $B = \langle M \rangle$ olmak üzere modülo B^2 lineer bağımsız olmasıdır.
- 6) $|X| < \infty$ ise F nin otomorfizm grubu elemanter otomorfizmler tarafından üretilir.

Teorem 2.2 (Cohn, 1961; Cohn, 1963): $X = \{x_1, \dots, x_n\}$; K bir cisim; $K \langle X \rangle$, X kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir, $a_1, \dots, a_n \in K \langle X \rangle$ ve $\ell(a_1) \leq \ell(a_2) \leq \dots \leq \ell(a_n)$ olsun. $\{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi sol bağımlı ise, $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde bir i sayısı vardır öyle ki a_i elemanı $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ kümesi üzerinde sol bağımlıdır.

Teorem 2.3 (Umirbaev, 1994; Yagzhev, 1980): A bir serbest cebir olsun. A nın bir φ endomorfizminin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul φ nin Jacobian matrisinin $U(A)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

K cismi üzerinde L ve M gibi iki cebirin direkt toplamlarını $L \oplus M$ ile ve serbest çarpımlarını $L * M$ ile göstereceğiz.

3.TÜREVLER VE ADMİSSİBLE SİSTEMLER

3.1 Fox Türevleri

$F = F(X)$; $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde bir serbest grup; ZF , F nin tamsayı grup halkası ve $\sigma : ZF \rightarrow Z$,

$$\sigma\left(\sum_i (n_i f_i)\right) = \sum_i n_i \quad (n_i \in Z, f_i \in F)$$

doğal homomorfizminin çekirdeği Δ_F olsun. x_i ye göre Fox kısmi türevi aşağıdaki koşulları sağlayan $d_i : ZF \rightarrow ZF$ dönüşümüdür.

- 1) $d_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 2) $u, v \in ZF$ için $d_i(u.v) = u.d_i(v) + \sigma(v).d_i(u)$
- 3) $u, v \in ZF$ ve $k, l \in Z$ için $d_i(ku + lv) = k.d_i(u) + l.d_i(v)$

3.2 Kısmi Türevler

Tanım 3.2.1: M , K cismi üzerindeki lineer cebirlerin homojen bir sınıfı olsun. C M sınıfında bir cebir ve $\langle y \rangle$, M sınıfında rankı 1 olan serbest cebir olsun. $B = \langle y \rangle * C \in M$ serbest çarpımını düşünelim. B_1 ile B nin y ye göre derecesi 1 olan elemanlarının alt uzayını gösterelim. $a \in C$ için r_a ve ℓ_a operatörleri $b \in B_1$ olmak üzere; $b.\ell_a = a.b$, $b.r_a = b.a$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.2: A , $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tarafından üretilen serbest cebir, $A \in M$ olmak üzere $I_A = y_1.U(A) \oplus \dots \oplus y_n.U(A)$, bazı $\{y_1, \dots, y_n\}$ olan serbest sağ $U(A)$ -modül olsun. $D: A \rightarrow I_A$, $1 \leq i \leq n$ için $D(x_i) = y_i$ ve $a, b \in A$ için $D(a.b) = D(a).r_b + D(b).\ell_a$ olarak tanımlanan lineer dönüşüme, A cebirinin evrensel

türevi denir. A nın bir f elemanının kısmi türevleri olan $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ler $D(f) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$

ile tek türlü belirlidir.

$$\partial(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$$

diyelim. Tanımdan

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

elde ederiz. Çünkü,

$$D(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = y_1 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_1} + y_2 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_2} + \dots + y_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_j} + \dots + y_n \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_n}$$

ise

$$y_j = y_1 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_1} + y_2 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_2} + \dots + y_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_j} + \dots + y_n \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_n}$$

olur. $\{y_1, \dots, y_n\}$ baz olduğundan $i \neq j$ için $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$ ve $\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 1$ elde ederiz.

Ayrıca $u, v \in A$ için $\frac{\partial(u.v)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot r_v + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \ell_u$ elde ederiz. Çünkü,

$$\begin{aligned} D(u.v) &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial(u.v)}{\partial x_i} = D(u) \cdot r_v + D(v) \cdot \ell_u = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot r_v + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \ell_u \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot r_v + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \ell_u \right) \text{ ise } \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial(u.v)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot r_v + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \ell_u \right) \end{aligned}$$

olur. $\{y_1, \dots, y_n\}$ baz olduğundan yazılış tek türüdür. O halde

$$\frac{\partial(u.v)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot r_v + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \ell_u \quad (*)$$

eşitliğini elde ederiz.

3.3 Kısmi Türevlerin Temel Özellikleri

M_0 , tüm cebirlerinin sınıfı; M_1 , karakteristiği 2 den farklı olan tüm değişmeli cebirlerin sınıfı ve M_2 , tüm değişmeli olmayan cebirlerin sınıfı olmak üzere A M_0 , M_1 veya M_2 ye ait olan sonlu üreteçli bir serbest cebir olsun.

H , A nın bir alt cebiri olsun. J_H ile I_A nın $\{D(h) / h \in H\}$ elemanları tarafından doğrulan alt modülünü gösterelim.

Tanım 3.3.1: $a \in A$ olsun. Eğer $a \in H$ olması için gerek ve yeter koşul $D(a) \in J_H$ olması ise M , alt cebirler için diferansiyel ayırabilirlik özelliğine sahiptir denir.

M_0 ve M_2 de alt cebirler için diferansiyel ayırabilirlik özelliğine sahiptir. Eğer $\text{Char } K \neq 2$ ise M_1 de bu özelliğe sahiptir. Bundan sonra M ile M_0 , M_1 veya M_2 sınıfından birini göstereceğiz.

A cebirinin lineer bazı için W_i notasyonunu ve $U(A)$ cebirinin serbest üreteç kümesi için S_i notasyonunu kullanacağız.

A üzerindeki $U(A)$ modülünün yapısı $a, w \in A$ için $a.r_w = a.w$, $a.\ell_w = w.a$ ile verilir.

H , A nın $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ tarafından üretilen alt cebiri, $U(H)$ da $U(A)$ nın $\{r_u, \ell_u / u \in H\}$ kümesi tarafından üretilen birim elemanlı alt cebiri ve $S_H = S \cap U(H)$ olsun. Eğer H , A nın alt cebiri ise $U(H)$, $U(A)$ nın alt cebiri olmak zorunda değildir. Fakat Schreier cebirleri için $U(H)$, $U(A)$ nın alt cebiridir. V_H ile $U(A)$ nın r_u ve ℓ_u elemanları tarafından üretilen sol idealini gösterelim öyle ki; $u, x_1, \dots, x_{n-1}$ üzerinde derecesi 1 den küçük olmayan monomiallerden biri olsun.

Önerme 3.3.1: Her $a \in A$ ve $u \in U(H)$ için, $\frac{\partial(a.u)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a)}{\partial x_n}.u$ dir.

İspat: $S_H = S \cap U(H)$ olduğundan u nun S_H içinde bir monomial olduğunu varsayabiliriz. $h \in H$ için $s = r_h$ veya $s = \ell_h$ olmak üzere $u = u_1.s$ olsun. $h \in H$ olduğundan (*) gereği $\frac{\partial h}{\partial x_n} = 0$ olur. Çünkü H , A nın $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ tarafından üretilen alt cebiri olup $h \in H$ elemanı x_n e bağlı değildir. Buradan

$$\frac{\partial((a.u_1).r_h)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a.u_1)}{\partial x_n}.r_h + \frac{\partial h}{\partial x_n}.\ell_{a.u_1} = \frac{\partial(a.u_1)}{\partial x_n}.r_h \quad (1)$$

$$\frac{\partial((a.u_1).\ell_h)}{\partial x_n} = \frac{\partial h}{\partial x_n}.r_{a.u_1} + \frac{\partial(a.u_1)}{\partial x_n}.\ell_h = \frac{\partial(a.u_1)}{\partial x_n}.\ell_h \quad (2)$$

olur. $\frac{\partial(a.u)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a.(u_1.s))}{\partial x_n}$ olup $\frac{\partial(a.u)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a.(u_1.r_h))}{\partial x_n}$ veya $\frac{\partial(a.u)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a.(u_1.\ell_h))}{\partial x_n}$ olur.

Böylece (1) ve (2) den, $\frac{\partial(a.u)}{\partial x_n} = \frac{\partial(a.u_1)}{\partial x_n}.s$ elde edilir. S nin derecesi üzerinde tümevarımla ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.2: $a \in A$ ve $\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0$ ise, $a \in H$ dir.

İspat: $a \in A$ için $\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0$ olsun.

$$D(a) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} \text{ olup } \frac{\partial a}{\partial x_n} = 0 \text{ ise } D(a) = y_1 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + y_2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + y_{n-1} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_{n-1}} \in J_H$$

olur. M cebirler sınıfı alt cebirler için diferansiyel ayrılabilirlik özelliğine sahip olduğundan, $a \in H$ olması için gerek ve yeter koşul $D(a) \in J_H$ olmasıdır. O halde $a \in H$ olur.

Önerme 3.3.3: $a \in A$ ve $\frac{\partial a}{\partial x_n} \in V_H$ ise $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i . u_i . v_i + a'$

olacak şekilde $\alpha_i \in K$, $u_i, v_i \in W$, $a' \in H$ vardır ve her i için $u_i \in H$ veya $v_i \in H$ dir.

İspat: A ve $U(A)$ cebirleri ve V_H ideali her $x_i \in X$ elemanına göre homojen olduğundan ispatı sadece a elemanı için yapmak yeterlidir. Eğer a , x_n e bağlı değilse $\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0$ dir. Eğer $0 \neq \alpha$ için $a = \alpha . x_n$ ise $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \alpha \notin V_H$ dir. Bu yüzden a nın derecesi 2 den az olmayan bir eleman olduğunu ve x_n e bağlı olduğunu varsayabiliriz. O zaman $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i . u_i . v_i$, $\alpha_i \in K$, $u_i, v_i \in W$ olarak tek türlü yazılabilir.

$$M = M_0 \text{ ise}$$

$$a = f_1 . w_1 + f_2 . w_2 + \dots + f_k . w_k \quad (3.3.1)$$

şeklindedir öyleki f_i ler W_0 nın kelimelerinin lineer toplamı, $w_i \in W_0$ ve $w_1 > w_2 > \dots > w_k$ dir.

O zaman $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_n} . r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} . \ell_{f_i}$ olur. $S_H = S \cap U(H)$ nın elamanları

$U(A)$ üzerinde sol bağımsız olduğundan $\frac{\partial a}{\partial x_n} \in V_H$ ise $\frac{\partial f_i}{\partial x_n} . r_{w_i} \in V_H$ olur. Buradan

$w_i \in H$ veya $\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$ dir. Önerme 3.3.2 den $f_i \in H$ veya $w_i \in H$ elde ederiz.

$M = M_1$ ise a elemanı (3.3.1) deki yazılışa sahip olup burada f_i ler W_1 in w_i ye eşit yada w_i den küçük monomiallerin bir lineer toplamıdır. $1 \leq i \leq k$ için $f_i = \alpha_i . w_i + g_i$ olsun öyle ki g_i ler w_i den küçük olan monomiallerin lineer

kombinasyonu olsun. O zaman; $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k (2\alpha_i \frac{\partial w_i}{\partial x_n} + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}) \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{g_i}$ olur.

Çünkü; M_1 abelyen olduğundan $\frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{g_i} = \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot g_i = \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot \ell_{g_i}$ olur.

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot \ell_{f_i}$$

idi. O zaman;

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_n} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\alpha_i \cdot w_i + g_i)}{\partial x_n} \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}) \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot (\alpha_i \cdot w_i + g_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}) \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot w_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot g_i \\ &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}) \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{g_i} \\ &= \sum_{i=1}^k (2\alpha_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x_n} + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}) \cdot r_{w_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot r_{g_i} \end{aligned}$$

olup yukarıdaki eşitlik sağlanır. $w_1 > w_2 > \dots > w_k$ olduğundan $r_{g_i} = \alpha \cdot r_{w_1}$ ($\alpha \in K$)

formundaki terimlere sahip değildir. Buradan, $\frac{\partial a}{\partial x_n} \in V_H$ ise

$(2\alpha_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_n} + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}) \cdot r_{w_1} \in V_H$ olur. O halde $w_1 \in H$ veya $\frac{\partial(2\alpha_1 \cdot w_1 + g_1)}{\partial x_n} = 0$ olur.

Önerme 3.3.2 den $w_1 \in H$ veya $2\alpha_1 \cdot w_1 + g_1 \in H$ olur. $b = a - (2\alpha_1 \cdot w_1 + g_1) \cdot w_1$ olsun.

$a = \sum_{i=1}^k f_i \cdot w_i$ idi. O zaman;

$$b = \left(f_1 \cdot w_1 + \sum_{i=2}^k f_i \cdot w_i \right) - (2\alpha_1 \cdot w_1 + g_1) \cdot w_1$$

$$= \sum_{i=2}^k f_i \cdot w_i + (\alpha_1 \cdot w_1 + g_1) \cdot w_1 - (2\alpha_1 \cdot w_1 + g_1) \cdot w_1$$

olur. Buradan;

$$b = -\alpha_1 \cdot w_1 \cdot w_1 + \sum_{i=2}^k f_i \cdot w_i \text{ ve } \frac{\partial b}{\partial x_n} \in V_H$$

olur.

$$b = -\alpha_1 \cdot w_1 \cdot w_1 + \sum_{i=2}^k f_i \cdot w_i$$

olup

$$\frac{\partial b}{\partial x_n} = -2\alpha_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \cdot r_{w_1} + \sum_{i=2}^k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot r_{w_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \cdot f_i \right) \in V_H$$

dır. Buradan $-2\alpha_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \cdot r_{w_1} \in V_H$ olur. M_1 sınıfının, karakteristiği ikiden farklı olan

bir cisim üzerinde olduğunu dikkate alalım. Bu yüzden $\alpha_1 = 0$, $\frac{\partial w_1}{\partial x_n} = 0$ veya

$w_1 \in H$ olur. $\frac{\partial w_1}{\partial x_n} = 0$ ise $w_1 \in H$ olur. Bu yüzden $\alpha_1 = 0$ veya $w_1 \in H$ olur.

$$b = -\alpha_1 \cdot w_1 \cdot w_1 + \sum_{i=2}^k f_i \cdot w_i$$

elemanı için ispatı yapmak yeterlidir. (3.3.1) de k üzerinde tümevarım uygulanırsa ispat tamamlanır.

$M = M_2$ ise a elemanı (3.3.1) deki gibi yazılabilir öyle ki f_i ler w_i den küçük olan monomiallerin lineer toplamıdır. M_1 için yapılan ispata benzer olarak

$\frac{\partial a}{\partial x_n} \in V_H$ ise $\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot r_{w_1} \in V_H$ olur. O zaman; $w_1 \in H$ veya $f_1 \in H$ olur. $b = a - f_1 \cdot w_1$

elemanı için (3.3.1) de k üzerinde tümevarım uygulanırsa ispatı tamamlanmış oluruz.

3.4 Homojen Elemanlar

A sonlu üreteçli bir serbest cebir, W A nın bir lineer bazı ve $Z_+ = \{k \in Z / k \geq 0\}$ ve $Q_+ = \{\alpha \in Q / \alpha \geq 0\}$ olsun.

Tanım 3.4.1: Eğer her $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i üreteci w içinde tam k_i kere bulunuyorsa $w \in W$ monomiali $m(w) = (k_1, \dots, k_n) \in Z_+^n$ multi derecesine sahiptir denir.

Tanım 3.4.2: Eğer her $0 \neq s \in Z_+^n$ için $\mu(s) \neq 0$ ise $\mu : Z_+^n \rightarrow Q_+$ lineer dönüşümüne bir fonksiyonel denir. $\mu(w) = \mu(m(w))$ ile $w \in W$ için μ -dereceyi tanımlayalım.

$a = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot w_i$ ($w_i \in W$) için $\mu(w_1) = \dots = \mu(w_k)$ ($m(w_1) = \dots = m(w_k)$) ise

a elemanına μ -homojen (m-homojen) denir. $w \in W$ için $m(r_w) = m(\ell_w) = m(w)$ ve $\mu(r_w) = \mu(\ell_w) = \mu(w)$ olarak tanımlayalım. Bu bize $U(A)$ nın m -homojen ve μ -homojen elemanlarını inceleme olanağını verir. $U(A)$ cebiri serbest üreteç kümesi S olan serbest birleşmeli cebir olduğundan $U(A)$ nın elemanları S -dereceye sahiptir.

Tanım 3.4.3: $U(H)$ nın μ -homojen elemanlarının $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible dır denir eğer, $a \in A$ ve $m_1, \dots, m_k \in U(A)$ için

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i \quad (3.4.1)$$

denkleminde $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i$ eşitliği sağlanacak şekilde $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır.

Önerme 3.4.1:

i) Sıfır elemanlarını içeren bir küme admissible dır. Eğer $\{u_1, \dots, u_k\}$ admissible bir küme küme ise :

ii) $\{u_1, \dots, u_k, 0\}$ kümesi admissible dir.

iii) S_k simetrik grubunun her σ elemanı için $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}\}$ kümesi admissible dir.

iv) $0 \neq \alpha \in K$ ise $\{u_1, \dots, u_{k-1}, \alpha.u_k\}$ kümesi admissible dir.

v) $u \in U(H)$ ve $u_k + u.u_{k-1}$ elemanı μ -homojen ise $\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + u.u_{k-1}\}$ kümesi admissible dir.

İspat :

i) $\{0\}$ kümesini ele alalım. $k=1$ ve $u_1=0$ olur. (3.2.1) den

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^1 m_i . u_i = m_1 . 0 = 0 \text{ olup } a_1 \in A \text{ için (veya özel olarak } a_1 = 0 \in A \text{ için)}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} . u_i$$

olur. O zaman $\{0\}$ kümesi admissible dir. Şimdi $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesinin admissible

olduğunu kabul edelim. O zaman; $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i . u_i$ ($a \in A$, $m_i \in U(A)$) olmak üzere

$a_1, \dots, a_k \in A$ vardır öyle ki $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} . u_i$ dir.

ii) $\{u_1, \dots, u_k, 0\}$ kümesinin admissible olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i . u_i + 0 = \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i . u_i + m_{k+1} . 0 \text{ (} m_{k+1} \in U(A) \text{)}$$

olup $u_{k+1}=0$ için

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k+1} m_i . u_i$$

olur. $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} . u_i$ idi. O zaman;

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} . u_i + 0$$

olur. $a_{k+1} \in A$ için

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial a_{k+1}}{\partial x_n} \cdot 0 \text{ ise } \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i$$

olur. ($u_{k+1} = 0$ ve $a_{k+1} \in A$) O halde $\{u_1, \dots, u_k, 0\}$ kümesi admissible'dir.

iii) $\sigma \in S_k$ ise $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ olan bire-bir ve örten bir fonksiyondur. O halde; $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}\}$ kümesi $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesinin elemanlarının herhangi bir sırada yazılması ile elde edilir. $i \neq j$ için $m_i \cdot u_i + m_j \cdot u_j = m_j \cdot u_j + m_i \cdot u_i$ ve $\frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} \cdot u_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_n} \cdot u_j + \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i$ ve $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible olduğundan $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}\}$ kümesi admissible'dir.

$$\text{iv) } \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot u_i + \alpha \cdot m_k \cdot u_k \quad (0 \neq \alpha \in K) \text{ olsun. } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ kümesi}$$

admissible olduğundan $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır. O zaman;

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial(\alpha^{-1} a_k)}{\partial x_n} \cdot (\alpha \cdot u_k)$$

olur. O halde $\{u_1, \dots, u_{k-1}, \alpha \cdot u_k\}$ kümesi admissible'dir.

$$\text{v) } \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot u_i + m_k \cdot (u_k + u \cdot u_{k-1}) \text{ olsun.}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-2} m_i \cdot u_i + m_{k-1} \cdot u_{k-1} + m_k \cdot u_k + m_k \cdot u \cdot u_{k-1}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-2} m_i \cdot u_i + (m_{k-1} + m_k \cdot u) u_{k-1} + m_k \cdot u_k$$

$\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible olduğundan $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır öyle ki;

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i \text{ olur. Buradan;}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_n} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u \cdot u_{k-1} - \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u \cdot u_{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n} \cdot u_{k-1} + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u_k + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u \cdot u_{k-1} - \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u \cdot u_{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \left(\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u \right) \cdot u_{k-1} + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot (u_k + u \cdot u_{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \left(\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial (a_k \cdot u)}{\partial x_n} \right) \cdot u_{k-1} + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot (u_k + u \cdot u_{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial (a_{k-1} - a_k \cdot u)}{\partial x_n} \cdot u_{k-1} + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot (u_k + u \cdot u_{k-1})
\end{aligned}$$

olur. O halde;

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i + \frac{\partial (a_{k-1} - a_k \cdot u)}{\partial x_n} \cdot u_{k-1} + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot (u_k + u \cdot u_{k-1})$$

olur. Buradan $\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + u \cdot u_{k-1}\}$ kümesi admissible dir.

Önerme 3.4.2: $a \in A$, $m_1, \dots, m_k \in U(A)$ ve $U(H)$ nin μ -homojen $u_1, \dots, u_k$ elemanları (3.4.1) denklemini sağlasın ve $i \geq 2$ için $\mu(u_1) \leq \mu(u_i)$ olsun. Eğer u_1 in gösteriminde katsayısı sıfırdan farklı olan bir u S -monomial varsa öyleki $u_2, \dots, u_k$ elemanları u ile biten monomiallere sahip değilse o zaman $m_1 \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ dir.

İspat: u monomialinin S -derecesi üzerinde tümevarım kullanacağız. $u=1$ ise

$u_1 = \alpha \cdot u$ ($0 \neq \alpha \in K$) ve $u_2 = \dots = u_k = 0$ ve $m_1 = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial a}{\partial x_n} \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ olur.

Çünkü (3.4.1) den $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i$ olup $u_1 = \alpha \cdot u = \alpha$, $u_2 = \dots = u_k = 0$ ise

$\frac{\partial a}{\partial x_n} = m_1 \cdot u_1 = m_1 \cdot \alpha$ ise $m_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_n} \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ olur. $u \in U(H)$ olduğu açıktır. $s \in S$

için $u = u_0 \cdot s$ olsun. $w \in H$ için $s = r_w$ veya $s = \ell_w$ olsun. $i \geq 2$ için $0 < \mu(u_1) \leq \mu(u_i)$

olup (3.4.1) gereği $\frac{\partial a}{\partial x_n} \in V_H$ olur. Önerme 3.3.3 ten $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot w_i \cdot v_i$ şeklindedir öyle ki her i için $w_i \in H_i$ veya $v_i \in H$ dir. f ve g w dan farklı monomiallerin lineer kombinasyonu ve her j için $w_j, v_j \neq w$ ve $w_j \in H$ veya $v_j \in H$ olmak üzere a elemanını $a = \alpha \cdot w \cdot w + w \cdot f + g \cdot w + \sum \beta_j \cdot w_j \cdot v_j$ yazalım. $w \in H$ olduğundan $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \ell_w + \frac{\partial g}{\partial x_n} \cdot r_w + \sum_j \beta_j \cdot \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_n} \cdot r_{v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \cdot \ell_{w_j} \right)$ olur. (Çünkü; $H = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ tarafından üretilen alt cebiri olduğundan $w \in H$ için $\frac{\partial w}{\partial x_n} = 0$ dir.) $1 \leq i \leq k$ için u_i elemanları, u_i'' elemanları s ile biten monomiallere sahip olmamak üzere $u_i = u_i' \cdot s + u_i''$ şeklinde tek türlü yazılabilir. $s = r_w$ olsun. $U(A)$, S üzerinde serbest cebir olduğundan, (3.4.1) de S ile biten monomialleri karşılaştırsak $\frac{\partial g}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i'$ elde ederiz. Ayrıca u_0, u_i' de sıfırdan farklı bir katsayıya sahiptir ve $u_2', \dots, u_k'$ elemanları u_0 ile biten S -monomialleri sahip değildir. Buradan ifadeyi u_0 için ispatlamış olduk. u_0 ın S -derecesi u nun S -derecesinden küçük olduğundan tümevarımla $m_1 \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ elde ederiz.

Önerme 3.4.3: $U(H)$ nin μ -homojen elemanlarının herhangi bir $\{u_1, \dots, u_k\}$ alt kümesi admissible dir.

İspat: İspatı k üzerinde tümevarımla yapalım. $k=1$ olsun. $u_1 = 0$ ise Önerme 3.4.1 den önerme doğrudur. $u_1 \neq 0$ olsun. $a \in A$ ve $m_1 \in U(A)$ için $\frac{\partial a}{\partial x_n} = m_1 \cdot u_1$ olsun. u_1 de katsayısı sıfırdan farklı olan S -monomial u elemanını ele alalım. Önerme 3.4.2 den $m_1 \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ olur. O zaman $\{u_1\}$ kümesi admissible dir. $k > 1$ olsun. Önerme

3.4.1 gereği $i \geq 2$ için $\mu(u_1) \leq \mu(u_i)$ varsayabiliriz. u_1 ile başlayan sıfırdan farklı α katsayılı S -monomial u yu ele alalım. $\alpha=1$ varsayabiliriz. $i \geq 2$ olmak üzere u_i elemanları için u_i'' ler u ile biten monomiallere sahip olmamak üzere $u_i = u_i' \cdot u + u_i''$ şeklinde yazılabilir. Önerme 3.4.1 den $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesinin admissible olması için gerek ve yeter koşul $\{u_1, u_2 - u_2' \cdot u_1, \dots, u_k - u_k' \cdot u_1\}$ kümesinin admissible olmasıdır.

Şimdi bu ifadenin doğruluğunu görelim:

$\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible ve $\frac{\partial a}{\partial x_n} = m_1 \cdot u_1 + \sum_{i=2}^k m_i \cdot (u_i - u_i' \cdot u_1)$ olsun. O

zaman;

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_n} &= m_1 \cdot u_1 + \sum_{i=2}^k (m_i \cdot u_i - m_i \cdot u_i' \cdot u_1) \\ &= m_1 \cdot u_1 + \sum_{i=2}^k m_i \cdot u_i - \sum_{i=2}^k m_i \cdot u_i' \cdot u_1 \\ &= \left(m_1 - \sum_{i=2}^k m_i \cdot u_i' \right) \cdot u_1 + \sum_{i=2}^k m_i \cdot u_i \end{aligned}$$

olur. $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible olduğundan $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır öyle ki

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i \text{ olur. O zaman;}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_n} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \cdot u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \cdot u_2 + \dots + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u_k - \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \cdot u_2' \cdot u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \cdot u_2' \cdot u_1 + \dots \\ &\quad - \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u_k' \cdot u_1 + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot u_k' \cdot u_1 = \frac{\partial(a_1 + a_2 \cdot u_2' + \dots + a_k \cdot u_k')}{\partial x_n} \cdot u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \cdot (u_2 - u_2' \cdot u_1) + \dots + \\ &\quad \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \cdot (u_k - u_k' \cdot u_1) \end{aligned}$$

olur. O halde $\{u_1, u_2 - u_2' \cdot u_1, \dots, u_k - u_k' \cdot u_1\}$ kümesi admissible dir.

$\{u_1, u_2 - u_2' \cdot u_1, \dots, u_k - u_k' \cdot u_1\}$ kümesi admissible ve $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i$ olsun.

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot (u_2 - u_2' \cdot u_1) + m_2 \cdot u_2' \cdot u_1 + m_3 \cdot (u_3 - u_3' \cdot u_1) + m_3 \cdot u_3' \cdot u_1 + \dots +$$

$$m_k(u_k - u'_k.u_1) + m_k.u'_k.u_1 = (m_1 + m_2.u'_2 + \dots + m_k.u'_k)u_1 + \sum_{i=2}^k m_i(u_i - u'_i.u_1)$$

olur. $\{u_1, u_2 - u'_2.u_1, \dots, u_k - u'_k.u_1\}$ kümesi admissible olduğundan $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır

öyle ki $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \frac{\partial a_1}{\partial x_n}.u_1 + \sum_{i=2}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n}.(u_i - u'_i.u_1)$ olur. O zaman;

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \frac{\partial a_1}{\partial x_n}.u_1 + \sum_{i=2}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n}.u_1 - \sum_{i=2}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n}.u'_i.u_1 = \frac{\partial(a_1 - \sum_{i=2}^k a_i.u'_i)}{\partial x_n}.u_1 + \sum_{i=2}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n}.u_i$$

olur. O halde $\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible dır. u_1 elemanı μ -homojen olduğundan,

$u_1 - u$ elemanı u ile biten monomiallere sahip değildir. Bu yüzden $i \geq 2$ için

$u_i - u'_i.u_1 = u'_i.u + u''_i - u'_i.u_1 = u'_i.(u - u_1) + u''_i$ elemanı u ile biten monomiallere

sahip değildir. Buradan $u_2, \dots, u_k$ elemanlarının u ile biten monomiallere sahip

olmadığını varsayabiliriz. Önerme 3.4.2 den $a_1 \in A$ vardır öyleki $m_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_n}$ olur.

Buradan $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \frac{\partial a_1}{\partial x_n}.u_1 + \sum_{i=2}^k m_i.u_i$ olur ((3.4.1) den). Önerme 3.3.1 den

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} - \frac{\partial a_1}{\partial x_n}.u_1 = \frac{\partial(a - a_1.u_1)}{\partial x_n} = \sum_{i=2}^k m_i.u_i$$

olur. Tümevarım hipotezi gereği $\frac{\partial a}{\partial x_n} - \frac{\partial a_1}{\partial x_n}.u_1 = \sum_{i=2}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n}.u_i$ olur. O halde

$\{u_1, \dots, u_k\}$ kümesi admissible dır.

Önerme 3.4.4: $U(H)$ ın $u_1, \dots, u_k$ elemanlarının $U(A)$ üzerinde sol bağımsız olduğunu varsayalım. Eğer $a \in A$ ve $m_1, \dots, m_k \in U(A)$ için (3.4.1) sağlanıyorsa o

zaman $1 \leq i \leq k$ için $m_i \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ dir.

İspat: $u_1, \dots, u_k \in U(H)$ elemanları $U(A)$ üzerinde sol bağımsız ve $a \in A$, $m_1, \dots, m_k \in U(A)$ için $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i$ olsun. Önerme 3.4.3 ten $a_1, \dots, a_k \in A$ vardır öyle ki $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot u_i$ olur. Ayrıca $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot u_i$ olup bu iki denklem gereği $\sum_{i=1}^k \left(m_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \right) u_i = 0$ elde ederiz. $u_1, \dots, u_k$ elemanları $U(A)$ üzerinde sol bağımsız olduğundan $m_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_n} = 0$ olur. O zaman $1 \leq i \leq k$ için $m_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A)$ olur.

3.5 Değişkenlerin Yok Edilmesi

Tanım 3.5.1: φ , A cebirinin bir endomorfizmi olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n$ için $\varphi(x_i)$ elemanları μ -homojen ve $x_i \in X$ için $\mu(\varphi(x_i)) = \mu(x_i)$ ise φ ye μ -homojen denir.

Tanım 3.5.2: $U(A)$ nın bir φ endomorfizmi için $J(\varphi) = (\partial(\varphi(x_1)), \partial(\varphi(x_2)), \dots, \partial(\varphi(x_n)))$ $n \times n$ matrisine, φ endomorfizminin Jacobian matrisi denir. $k \leq n$ için

$$J_k(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman $J_n(\varphi) = J(\varphi)$ olduğu açıktır.

Önerme 3.5.1: k bir tamsayı $1 \leq k \leq n$ ve φ , A nın $i > k$ için $\varphi(x_i) = x_i$ olacak şekildeki μ -homojen otomorfizmi olsun. O zaman $J_k(\varphi)$ matrisi tersinirdir. Eğer

$B=(b_{ij})=(J_k(\varphi))^{-1}$ ise tüm b_{ij} elmanları μ -homojen dir ve $\mu(b_{ij})=\mu(x_j)-\mu(x_i)$ dir.($\mu(x_j)-\mu(x_i)<0$ ise $b_{ij}=0$)

Önerme 3.5.2: a , A nın μ -homojen elemanı ve $k < n$ olsun. $m_1, \dots, m_k$ $U(A)$ nın μ -homojen elemanları olsun öyleki $i \leq k$ için $\mu(m_i)=\mu(x_i)-\mu(x_n)$ ve

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (3.5.1)$$

olsun. O zaman A nın μ -homojen bir φ otomorfizmi vardır öyle ki $i > k$ için $\varphi(x_i) = x_i$ ve $\varphi(a) \in H$ dir.

Önerme 3.5.2 yi ispatlamadan önce aşağıdaki önermeleri ispatlamamız gerekmektedir.

Önerme 3.5.3: Bir $a \in A$ ve bir k pozitif tamsayısı için Önerme 3.5.2 deki koşulların sağlandığını kabul edelim. φ , A nın $i > k$ için $\varphi(x_i) = x_i$ olacak şekildeki bir μ -homojen otomorfizmi ise o zaman k ve $\varphi(a)$ da Önerme 3.5.2deki koşulları sağlar.

İspat: $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \dots (*)$ dir. Çünkü; A serbest üreteç kümesi

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olan bir serbest cebiridir. En basit anlamda a yı $a = c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n$ ($c_i \in K$) olarak düşünürsek (*) eşitliğinin varlığını kolayca görebiliriz. $s > k$ için $\varphi(x_s) = x_s$ olduğundan $1 \leq j \leq k$ için

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)$$

olur. (Çünkü $i \neq j$ için $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$) (*) eşitliği kullanılırsa $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)$

olur. $s > k$ için $\varphi(x_s) = x_s$ olduğundan

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_j} = \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)$$

olur. Pozitif k tamsayısı ve $a \in A$ için (3.5.1) den $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}$ olduğunu

biliyoruz. $m'_1, \dots, m'_k \in U(A)$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^k m'_j \frac{\partial(\varphi(a))}{\partial x_j} &= \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_n} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) - \\ &\sum_{j=1}^k m'_j \cdot \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \right) = \sum_{i=1}^k \varphi(m_i) \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_n} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) - \\ &\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^k m'_j \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right) \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \quad (\text{Çünkü } \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} \text{ ve } \varphi \text{ bir otomorfizm}) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\varphi(m_i) + \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^k m'_j \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

olur. Bilinmeyenleri $m'_1, \dots, m'_k$ olan

$$\varphi(m_1) + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^k m'_j \cdot \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_j}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\varphi(m_k) + \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^k m'_j \cdot \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j}$$

denklemleri ele alalım. $P = \left(\varphi(m_1) + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_n}, \dots, \varphi(m_k) + \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_n} \right)_{1 \times k}$ ve M

matrisi $M = (m'_1, \dots, m'_k)$ olmak üzere bu sistem $P = M \cdot J_k(\varphi)$ şeklinde yazılabilir.

Önerme 3.5.1 gereği $J_k(\varphi)$ tersinir olup $B = (J_k(\varphi))^{-1} = (b_{ij})$ olmak üzere

$M = P \cdot (J_k(\varphi))^{-1}$ den bu sistem bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$1 \leq j \leq k \text{ için } m'_j = \sum_{i=1}^k \left(\varphi(m_i) + \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_n} \right) \cdot b_{ij}$$

dir.

$$\mu(m'_j) = \mu(\varphi(m_i).b_{ij}) = \mu\left(\frac{\partial\varphi(x_i)}{\partial x_n}.b_{ij}\right) = \mu(x_i) - \mu(x_n) + \mu(x_j) - \mu(x_i) = \mu(x_j) - \mu(x_n)$$

ise

$$\mu(m'_j) = \mu(x_j) - \mu(x_n)$$

olur. $\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^k m'_j \frac{\partial(\varphi(a))}{\partial x_j}$ den k ve $\varphi(A)$ Önerme 3.5.2 deki koşulları sağlar.

Şimdi A ve $U(A)$ cebirlerinin aşağıdaki parçalanışlarını düşünelim.

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$$

$$U(A) = U_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_k \oplus \dots$$

öyle ki $A_0 = H$, $U_0 = U(H)$, A_i ve U_i ler, x_n -derecesi i ye eşit olan x_n e göre tüm homojen elemanların alt uzayları olsun. $f \in A$ ($f \in U(A)$) için $f^{(k)}$ ile A_k (U_k dan) dan gelen bileşeni gösterelim.

Önerme 3.5.4: Bir k pozitif tam sayısı ve $a \in A$ için Önerme 3.5.2 deki koşulların sağlandığını kabul edelim ve $1 \leq s \leq k$ olmak üzere bir s pozitif tam sayısı için

$$\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_s} \text{ elemanları sol bağımsız ve } \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_k} = 0 \text{ olsun. O}$$

zaman her $r > 0$ için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

$$\text{i) } a^{(1)} = a^{(2)} = \dots = a^{(r)} = 0$$

$$\text{ii) Her } i = 1, 2, \dots, s \text{ ve } j = 0, 1, \dots, r-1 \text{ için } m_i^{(j)} = 0 \text{ dır.}$$

İspat: (3.5.1) gereği $\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}$ idi. $a \in A$ ise $a = a_0 + a_1 + \dots + a_j + \dots + a_k$

($i = 0, 1, \dots, k$ için $a_i \in A_i$) şeklinde yazılabilir.

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_n} \right)^{(j)} = \left(\frac{\partial a_0}{\partial x_n} + \frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial a_k}{\partial x_n} \right)^{(j)}$$

olup $a_0 \in A_0 = H$ olduğundan $\frac{\partial a_0}{\partial x_n} = 0$ olur. Ayrıca A_i lerde x_n nin derecesi i

olduğundan $i = 1, 2, \dots, k$ için $\frac{\partial a_i}{\partial x_n} \in A_{i-1}$ olur. Bu durumda;

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_n} \right)^{(j)} = \frac{\partial a_{j+1}}{\partial x_n} = \frac{\partial(a^{(j+1)})}{\partial x_n}$$

olur. Buradan $j = 0, 1, \dots, r-1$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial(a^{(j+1)})}{\partial x_n} &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_n} \right)^{(j)} = \sum_{i=1}^k \left(m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^{(j)} = \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^j m_i^{(l)} \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^{(j-l)} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^j m_i^{(l)} \cdot \frac{\partial(a^{(j-l)})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

elde edilir.

(Not: Eğer $i \neq n$ ise $\left(\frac{\partial a}{\partial x_n} \right)^{(j)} = \frac{\partial(a^{(j)})}{\partial x_i}$ dir. Çünkü $a = a_0 + a_1 + \dots + a_j + \dots + a_k + \dots$

ise $\frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial a_0}{\partial x_i} + \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$ dir. $\frac{\partial a_l}{\partial x_i} \in A_1$ ($l = 0, 1, \dots, k$) Çünkü x_n

değişmiyor.)

$a^{(1)} = a^{(2)} = \dots = a^{(r)} = 0$ olsun. $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_k} = 0$ olduğundan $j = 0, 1, \dots, r-1$

için (3.5.2) gereği $\sum_{i=1}^k m_i^{(j)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^s m_i^{(j)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} = 0$ olur. $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_s}$

elemanları sol bağımsız olduğundan $i = 1, 2, \dots, s$ ve $j = 0, 1, \dots, r-1$ için $m_i^{(j)} = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $i = 1, 2, \dots, s$ ve $j = 0, 1, \dots, r-1$ için $m_i^{(j)} = 0$ olsun.

(3.5.2) gereği

$$\frac{\partial(a^{(j+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=s+1}^k \sum_{l=0}^{j-1} m_i^{(l)} \cdot \frac{\partial(a^{(j-l)})}{\partial x_i}$$

olur. Çünkü;

$$\frac{\partial(a^{(j+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k m_i^{(0)} \cdot \frac{\partial(a^{(j)})}{\partial x_i} + m_i^{(1)} \cdot \frac{\partial(a^{(j-1)})}{\partial x_i} + \dots + m_i^{(j)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i}$$

olup $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_k} = 0$ ve $i = 1, 2, \dots, s$ için $m_i^{(j)} = 0$ olduğundan yukarıdaki

eşitlik vardır. Eğer $j = 0$ ise $\frac{\partial(a^{(1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^0 m_i^{(l)} \cdot \frac{\partial(a^{(0-l)})}{\partial x_i} = 0$ olur. (Çünkü $i = 1, 2, \dots, s$

için $m_i^{(0)} = 0$ ve $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_k} = 0$ ise $\frac{\partial(a^{(1)})}{\partial x_n} = 0$ olur ve Önerme 3.3.2 gereği

$a^{(1)} \in H = A_0$ olur ise $a^{(1)} = 0$ olur. (çünkü $a^{(1)} \in A_1$ idi. Buradan x_n nin derecesi hem 1 hem de 0 çelişkisi elde edilir ise $a^{(1)} = 0$ olur.) $t < r$ için $a^{(1)} = a^{(2)} = \dots = a^{(t)} = 0$ olsun ve $j = t$ için aşağıdaki eşitliği yazalım. O zaman

$$\frac{\partial(a^{(t+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=s+1}^k \sum_{l=0}^{t-1} m_i^{(l)} \cdot \frac{\partial(a^{(t-l)})}{\partial x_i} = 0$$

olur. O zaman $a^{(t+1)} \in H = A_0$ ise $a^{(t+1)} = 0$ olur. t üzerinde tümevarım hipotezi gereğince ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.5.5: Önerme 3.5.4 teki tüm koşulların sağlandığını kabul edelim. $r \geq 0$ için $a^{(1)} = a^{(2)} = \dots = a^{(r)} = 0$ ise o zaman A nın μ -homojen bir φ otomorfizmi vardır öyle ki $i > k$ için

$$\varphi(x_i) = x_i, \quad (\varphi(a))^{(0)} = a^{(0)}, \quad (\varphi(a))^{(1)} = (\varphi(a))^{(2)} = \dots = (\varphi(a))^{(r)} = (\varphi(a))^{(r+1)} = 0$$

dır.

İspat: (3.5.1) ve (3.5.2) gereği $\frac{\partial(a^{(r+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^r m_i^{(l)} \cdot \frac{\partial(a^{(r-l)})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^s m_i^{(r)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i}$ dir.

$U(H)$ ın $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_s}$ elemanları sol bağımsız ve μ -homojen olduğundan

Önerme 3.2.3 ten $m_i^{(r)} = \frac{\partial g_i}{\partial x_n}$, $1 \leq i \leq s$ olacak şekilde $g_i \in A$ vardır. (Çünkü;

$$a^{(r+1)} \in A \quad \text{için} \quad \frac{\partial(a^{(r+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^s m_i^{(r)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad U(H) \quad \text{in} \quad \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_s}$$

elemanları sol bağımsız ve μ -homojen olduğundan Önerme 3.4.3 gereği admissible

$$\text{olup} \quad \frac{\partial(a^{(r+1)})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} \quad \text{olacak} \quad \text{şekilde} \quad g_i \in A \quad \text{vardır.} \quad \text{Buradan}$$

$$\sum_{i=1}^s m_i^{(r)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} \quad \text{olup} \quad \text{sol bağımsızlıktan} \quad m_i^{(r)} = \frac{\partial g_i}{\partial x_n}, 1 \leq i \leq s \quad \text{elde}$$

edilir.) g_i elemanlarının μ -homojen olduğunu ve $1 \leq i \leq s$ için $g_i \in A_{r+1}$ olduğunu

varsayabiliriz. (Çünkü $m_i^{(r)} \in U_r$ idi.) O zaman

$$\mu(g_i) = \mu(m_i^{(r)}) + \mu(x_n) = \mu(m_i) + \mu(x_n) = \mu(x_i) - \mu(x_n) + \mu(x_n) = \mu(x_i)$$

$$\phi(x_i) = \begin{cases} x_i - g_i, & i \leq s \\ x_i, & i > s \end{cases}$$

olmak üzere A nın μ -homojen ϕ endomorfizmini ele alalım. Genelliği

kaybetmeksizin $\mu(x_1) \geq \mu(x_2) \geq \dots \geq \mu(x_s)$ varsayabiliriz. $j \leq i \leq s$ için

$\mu(m_i) = \mu(x_i) - \mu(x_n) \leq \mu(x_i) \leq \mu(x_j)$ olduğundan m_i elemanı x_j ye bağlı değildir.

(Çünkü, m_i nin x_j ye bağlı olduğunu varsayalım. $\mu(m_i) = \mu(m(m_i))$ olup

$$m(m_i) = (k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) \quad k_j \neq 0$$

şeklindedir. Buradan;

$$m(m_i) = (k_1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n) + (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

olup

$$\mu(m_i) = \mu(k_1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n) + \mu(0, \dots, 1, \dots, 0) \geq \mu(x_j)$$

çelişkisi elde edilir.) $m_i^{(r)} = \frac{\partial g_i}{\partial x_n}$ ve $g_i \in A_{r+1}$ olduğundan g_i x_j ye bağlı değildir.

$$g_i \in A_{r+1} \quad \text{ve} \quad r+1 > 0 \quad \text{olduğundan} \quad \phi(a) - a = -g_1 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} - g_2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} - \dots - g_s \cdot \frac{\partial a}{\partial x_s} + b$$

şeklindedir öyleki $b \in A_{2r+2} \oplus A_{2r+3} \oplus \dots$ dir. Buradan $(\phi(a))^{(l)} = a^{(l)}$, $0 \leq l \leq r$ ve

$$(\varphi(a))^{(r+1)} - a^{(r+1)} = - \sum_{i=1}^s g_i \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i}$$

olur. [Çünkü;

$$\begin{aligned} (\varphi(a) - a)^{(l)} &= \left(-g_1 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} - g_2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} - \dots - g_s \cdot \frac{\partial a}{\partial x_s} + b \right)^{(l)} \\ &= - \left(g_1 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(l)} - \left(g_2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} \right)^{(l)} - \dots - \left(g_s \cdot \frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(l)} + b^{(l)} \\ &= - \left(g_1 \left(\left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(l)} + \dots \right) \right)^{(l)} - \dots - \left(g_s \left(\left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(0)} + \dots + \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(l)} + \dots \right) \right)^{(l)} \\ &= - \left(g_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(0)} + \dots + g_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(l)} + \dots \right)^{(l)} - \dots - \left(g_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(0)} + \dots + g_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(l)} + \dots \right)^{(l)} \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \quad (\text{Çünkü } g_i \in A_{r+1}) \quad \text{Buradan } (\varphi(a) - a)^{(l)} = 0 \text{ ise } (\varphi(a))^{(l)} - a^{(l)} = 0 \text{ ise} \\ &(\varphi(a))^{(l)} = a^{(l)} \quad (0 \leq l \leq r) \text{ elde edilir. Ayrıca;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi(a) - a)^{(r+1)} &= - \left(g_1 \frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(r+1)} - \left(g_2 \frac{\partial a}{\partial x_2} \right)^{(r+1)} - \dots - \left(g_s \frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(r+1)} + b^{(r+1)} \\ &= - \left(g_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(0)} + \dots + g_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(l)} + \dots \right)^{(r+1)} - \dots - \\ &\quad \left(g_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(0)} + \dots + g_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(l)} + \dots \right)^{(r+1)} \\ &= - g_1 \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \right)^{(0)} - g_2 \left(\frac{\partial a}{\partial x_2} \right)^{(0)} - \dots - g_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_s} \right)^{(0)} \\ &= - g_1 \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_1} - g_2 \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_2} - \dots - g_s \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_s} = - \sum_{i=1}^s g_i \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} \quad] \end{aligned}$$

Bu yüzden;

$$(\varphi(a))^{(0)} = a^{(0)}, (\varphi(a))^{(1)} = a^{(1)} = 0, (\varphi(a))^{(2)} = a^{(2)} = 0, \dots, (\varphi(a))^{(r)} = a^{(r)} = 0$$

olur. $(\varphi(a))^{(r+1)} - a^{(r+1)} = -\sum_{i=1}^s g_i \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i}$ olup $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} \in U(H)$ olduğundan Önerme

3.5.1 gereği;

$$\frac{\partial((\varphi(a))^{(r+1)})}{\partial x_n} = \frac{\partial(a^{(r+1)})}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} = \frac{\partial(a^{(r+1)})}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^s m_i^{(r)} \cdot \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_i} = 0$$

olur. Buradan $\frac{\partial((\varphi(a))^{(r+1)})}{\partial x_n} = 0$ olur. Önerme 3.5.2 den $(\varphi(a))^{(r+1)} \in H$ olur.

$(\varphi(a))^{(r+1)} \in A_{r+1}$ idi. O zaman $(\varphi(a))^{(r+1)} \in A_0 \cap A_{r+1} = \{0\}$ ise $(\varphi(a))^{(r+1)} = 0$ olur.

Önerme 3.5.6: Önerme 3.5.4 deki tüm koşulların sağlandığını kabul edelim. O zaman A nın μ -homojen bir φ otomorfizmi vardır öyle ki, $\varphi(a) \in H$ ve $i > k$ için $\varphi(x_i) = x_i$ dir.

İspat: r üzerinde tümevarımla ($r=0$ dan) Önerme 3.5.5 ve Önerme 3.5.3 ten her r için φ_r otomorfizmi vardır öyle ki $i > k$ için

$$\varphi_r(x_i) = x_i, (\varphi_r(a))^{(0)} = a^{(0)}, (\varphi_r(a))^{(1)} = (\varphi_r(a))^{(2)} = \dots = (\varphi_r(a))^{(r)} = 0$$

olur. Özel olarak $r+1 > \frac{\mu(a)}{\mu(x_n)}$ alalım. Eğer en az bir $s > r$ için $(\varphi_r(a))^{(s)} \neq 0$ ise o

zaman $\mu(x_n) \cdot s \leq \mu(\varphi_r(a)) = \mu(a)$ dir. Buradan $r+1 \leq s \leq \frac{\mu(a)}{\mu(x_n)}$ çelişkisi elde edilir.

O zaman her $s > r$ için $(\varphi_r(a))^{(s)} = 0$ olur. $\varphi_r(a) = (\varphi_r(a))^{(0)} \in H = A_0$ elde edilir.

Buradan φ_r istenilen otomorfizmdir.

Önerme 3.5.2 nin İspatı :

İspatı k üzerinde tümevarımla yapacağız. $k=0$ ise $\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0$ olur. Önerme 3.5.2 den

$a \in H$ olur. Buradan $\varphi: A \rightarrow A$ ya özdeşlik dönüşümü alınabilir. Çünkü; $\varphi(a) = a \in H$ ve $i > k$ için $\varphi(x_i) = x_i$ dir. $k > 0$ olsun ve her $k' < k$ için hipotezin

doğru olduğunu kabul edelim. $a^{(0)} = b$ diyelim. Eğer $\frac{\partial b}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial b}{\partial x_k}$ elemanları sol bağımlı ise o zaman Teorem 2.2 den genelliği kaybetmeksizin

$$\frac{\partial b}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{k-1} m'_j \cdot \frac{\partial b}{\partial x_j}$$

olacak şekilde $m'_1, \dots, m'_{k-1} \in U(A)$ olduğunu varsayabiliriz. Tümevarım hipotezi gereğince μ -homojen bir ψ otomorfizmi vardır öyle ki $i \geq k$ için $\psi(x_i) = x_i$ ve $\frac{\partial(\psi(b))}{\partial x_k} = 0$ dır. O zaman $\psi(b) = (\psi(a))^{(0)}$ olur. Önerme 3.5.3 ten k tamsayısı ve $\psi(a)$, Önerme 3.5.2 deki koşulları sağlar. a yı $\psi(a)$ ile değiştirip yukarıdaki adımları uygularsak $\frac{\partial b}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial b}{\partial x_s}$ sol bağımsız ve $\frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_{s+1}} = \dots = \frac{\partial(a^{(0)})}{\partial x_k} = 0$ olacak şekilde bir $s \leq k$ tam sayısının bulunduğunu varsayabiliriz. Önerme 3.5.6 yı uygularsak ispatı tamamlamış oluruz.

4. RANK TEOREMLERİ VE PRİMİTİF ELEMANLAR

Bu bölümde Schreier cebirleri sınıfındaki serbest cebirlerin primitif elemanlarının hesaplanabilir özelliklerini inceleyeceğiz.

4.1 M_a nın Rankı

A bir $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde bir serbest cebir olsun.

Tanım 4.1.1: $a \in A$ olsun. a elemanının A nın otomorfizmleri altındaki görüntüsünde görünen ve X kümesine ait olan elemanların minimum sayısına, a nın rankı denir. Bunu $\text{rank}(a)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.2: A nın $a_1, \dots, a_k$ elemanlarından oluşan bir sistemin rankı, $a_1, \dots, a_k$ elemanlarının otomorfik görüntülerinin bağlı olduğu üreteçlerin minimum sayısıdır. Bu sayıyı $\text{rank}(a_1, \dots, a_k)$ ile göstereceğiz.

$a \in A$ için M_a ile $U(A)$ nın $\frac{\partial a}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial a}{\partial x_n}$ tarafından üretilen sol

$U(A)$ -altmodülünü gösterelim. Evrensel enveloping $U(A)$ cebiri serbest birleşmeli cebir olup sol $U(A)$ -modül olarak tek üreteçli serbest modüldür. Ayrıca bir serbest birleşmeli cebirin her sol ideali rankı tek olarak belli olan bir serbest modüldür. $\text{Rank}(M_a)$ ile M_a modülünün rankını gösterelim.

Önerme 4.1.1: φ, A nın bir otomorfizmi olsun. O zaman $\text{rank}(M_{\varphi(a)}) = \text{rank}(M_a)$ dır.

İspat :

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j} \cdot \varphi\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \varphi^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi(x_i))}{\partial x_j}\right) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}\right) \in \varphi(M_a)$$

olur. Buradan $M_{\varphi(a)} \subseteq \varphi(M_a) \dots (i)$ olur. (Çünkü $M_{\varphi(a)} \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_n}$

tarafından üretilen sol $U(A)$ -altmodül idi.) Ayrıca;

$$\varphi(M_a) = \varphi(M_{\varphi^{-1}(\varphi(a))}) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(M_{\varphi(a)})) = M_{\varphi(a)}$$

ise $\varphi(M_a) \subseteq M_{\varphi(a)} \dots (ii)$ olur. O halde (i) ve (ii) den $\varphi(M_a) = M_{\varphi(a)}$ olur. Buradan $\text{rank}(M_{\varphi(a)}) = \text{rank}(M_a)$ elde ederiz.

Önerme 4.1.2: $a \in A$ için $\text{rank}(M_a) \leq \text{rank}(a)$ dır.

İspat: $\text{rank}(a) = k$ olsun. O zaman A nın bir φ otomorfizmi vardır öyle ki $\varphi(a)$

$x_1, \dots, x_k$ tarafından üretilen alt cebire aittir ve sol $U(A)$ -modül $M_{\varphi(a)} \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}, \dots,$

$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_k}$ elemanları tarafından üretilir. Bu yüzden; $\text{rank}(M_{\varphi(a)}) = \text{rank}(M_a) \leq k$ olur.

$\mu: Z_+^n \rightarrow Q_+$ bir fonksiyonel olsun. $\alpha > 0$ için $A^\alpha(U^\alpha)$ ile A nın $(U(A))$ nın

μ derecesi α ya eşit olan μ - homojen elemanlarının alt uzayını gösterelim ve

$A = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} A^\alpha$, $U(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} U^\alpha$ olsun. $f \in A$ ($f \in U(A)$) için $\rho_\mu^\alpha(f)$ ile f nin μ -

homojen bileşenini gösterelim. yani $\rho_\mu^\alpha(f) \in A^\alpha$ ($\rho_\mu^\alpha(f) \in U^\alpha$ olsun.

Tanım 4.1.3: Her $\alpha > 1$ için $\rho_\mu^\alpha(a) = 0$ ise $a \in A$ elemanı μ -sınırlıdır deriz.

$V(\mu) = \{m \in Z_+^n / \mu(m) \leq 1\}$ olsun. Aşağıda verilen fonksiyoneller kümesi üzerindeki kısmi sıralamayı ele alalım.

$$V(\mu_1) \subset V(\mu_2) \text{ ve } V(\mu_1) \neq V(\mu_2) \text{ ise } \mu_1 \prec \mu_2$$

Önerme 4.1.3: a , A nın bir μ -homojen elemanı ve $\text{rank}(M_a) < n$ olsun. O zaman; A nın μ -homojen bir φ otomorfizmi vardır öyle ki $\rho_\mu^{-1}(\varphi(a))$ elemanı $n-1$ den fazla olmayan X değişkenlerine bağlıdır.

İspat: $\rho_\mu^{-1}(a)$ elemanı $n-1$ den fazla olmayan X değişkenlerine bağlı ise φ otomorfizmi olarak birim dönüşüm alınabilir. $\rho_\mu^{-1}(a)$ nın X in tüm değişkenlerine bağlı olduğunu varsayalım. $\text{rank}(M_a) < n$ olduğundan hepsi birden sıfır olmayan $m_1, \dots, m_n \in U(A)$ vardır öyle ki

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.1)$$

dir. (aksi halde $\text{rank}(M_a) = n$ olurdu.) $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_i = \max \{ \alpha \in Q_+ / \rho_\mu^\alpha(m_i) \neq 0 \}$ ve $\beta = \max \{ \alpha_i - \mu(x_i) + 1 / i = 1, 2, \dots, n \}$ olsun ve $m_i = 0$ için $\alpha_i = -1$ olarak tanımlayalım. $\rho_\mu^{-1}(a)$ $x_1, \dots, x_n$ e bağlı olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $1 - \mu(x_i) \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ dir. (4.1.1) eşitliğine ρ_μ^β yı uygularsak;

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in Q_+} \rho_\mu^{\beta-\alpha}(m_i) \cdot \rho_\mu^\alpha \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in Q_+} \rho_\mu^{\beta-\alpha}(m_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_\mu^{\alpha+\mu(x_i)}(a) \right) = 0 \quad (4.1.2)$$

eşitliğini elde ederiz. $\alpha + \mu(x_i) > 1$ için a elemanı μ -sınırlı ise $\rho_\mu^{\alpha+\mu(x_i)}(a) = 0$ olur. $\alpha + \mu(x_i) < 1$ ise $\beta - \alpha \geq \alpha_i - \mu(x_i) + 1 - \alpha > \alpha_i$ olur. α_i , $\rho_\mu^{\alpha_i}(m_i) \neq 0$ olacak şekilde ki maksimum sayı olduğundan $\rho_\mu^{\beta-\alpha}(m_i) = 0$ olur. $\alpha = 1 - \mu(x_i)$ için (4.1.2) denklemi düzenlenirse;

$$\sum_{i=1}^n \rho_\mu^{\beta-1+\mu(x_i)}(m_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_\mu^{-1}(a) \right) = 0$$

elde ederiz. En az bir i için $\beta - 1 + \mu(x_i) = \alpha_i - \mu(x_i) + 1 - 1 + \mu(x_i) = \alpha_i > -1$ ve $\rho_\mu^{\beta-1+\mu(x_i)}(m_i) = \rho_\mu^{\alpha_i}(m_i) \neq 0$ dir. Buradan $1 \leq i \leq n$ için $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_\mu^{-1}(a) \right)$ elemanları sol bağımlıdır. Bu elemanlar μ -homojen olduğundan $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde bir j

vardır öyleki $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_\mu^{-1}(a))$ elemanı $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\mu^{-1}(a))$ $i \neq j$ elemanları tarafından üretilen $U(A)$ nin sol idealine aittir. Önerme 3.5.2 den A nin μ - homojen bir ϕ otomorfizmi vardır öyle ki $\phi(\rho_\mu^{-1}(a))$ elemanı x_j ye bağlı değildir. [Çünkü; $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_\mu^{-1}(a)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\mu^{-1}(a))$ olup H alt cebirini $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ tarafından üretilen alt cebir olarak düşünürsek Önerme 3.5.2 gereği $\phi(\rho_\mu^{-1}(a)) \in H$ olur. Yani $\phi(\rho_\mu^{-1}(a))$ x_j ye bağlı değildir.] Ayrıca ϕ A nin μ - homojen otomorfizmi olduğundan her $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ için $\phi(\rho_\mu^\alpha(a)) = \rho_\mu^\alpha(\phi(a))$ olur. Buradan $\alpha=1$ için $\rho_\mu^{-1}(\phi(a)) = \phi(\rho_\mu^{-1}(a))$ olur. O halde $\phi(\rho_\mu^{-1}(a))$ x_j ye bağlı olmadığından $\rho_\mu^{-1}(\phi(a))$ elemanı x_j ye bağlı değildir. Buradan $\rho_\mu^{-1}(\phi(a))$ $n-1$ den fazla olmayan X değişkenlerine bağlıdır.

Önerme 4.1.4: a , A nin bir μ -homojen elemanı olsun. a nin $x_1, \dots, x_n$ e bağlı olduğunu varsayalım. O zaman μ_0 fonksiyoneli vardır öyle ki $V(\mu_0) \subset V(\mu)$, a μ_0 -sınırlıdır ve $\rho_{\mu_0}^{-1}(a)$ bileşeni $x_1, \dots, x_n$ e bağlıdır.

İspat: $\rho_\mu^{-1}(a)$ nin sadece $x_1, \dots, x_k$ ($k < n$) ya bağlı olduğunu varsayalım. Önermeyi ispatlamak için $V(\mu_0) \subset V(\mu)$, a μ_0 -sınırlı ve $\rho_{\mu_0}^{-1}(a)$ $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ e bağlı olacak şekilde bir μ_0 fonksiyoneli bulmak yeterlidir. Bir $t \in \mathbb{Q}_+$ için μ_t fonksiyoneli $i \neq k+1$ için $\mu_t(x_i) = \mu(x_i)$ ve $\mu_t(x_{k+1}) = \mu(x_{k+1}) + t$ olarak tanımlasın. $V(\mu_t) \subset V(\mu)$ olur. $\rho_\mu^{-1}(a)$ elemanı x_{k+1} e bağlı olmadığından $\mu_t(\rho_\mu^{-1}(a)) = 1$ olur. a da sıfırdan farklı katsayıya sahip ve x_{k+1} -derecesi $r > 0$ olan her w monomiali için $\mu(w) + rt \leq 1$ ise a elemanı μ -sınırlıdır. $\rho_\mu^{-1}(a)$ elemanı x_{k+1} e bağlı olmadığından $\mu(w) < 1$ dir. Buradan a elemanı için μ -sınırlı olma özelliği $t \leq \alpha_i$ ($\alpha_i > 0$)

eşitsizlik sistemine denktir. t_0 bu sistemin maksimum çözümü olsun. O zaman x_{k+1} - derecesi $r > 0$ olan bir w monomiali vardır öyle ki $\mu_{t_0}(w) = \mu(w) + r.t_0 = 1$ dir. Bu yüzden $\rho^1_{\mu_{t_0}}(a)$ bileşeni x_{k+1} e bağlıdır. $\mu_{t_0}(\rho^1_{\mu_{t_0}}(a)) = 1$ olduğundan $\rho^1_{\mu_{t_0}}(a)$ elemanı $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ e bağlıdır. O halde μ_0 olarak μ_{t_0} seçebiliriz.

Önerme 4.1.5: μ bir fonksiyonel ve a , A nın μ -sınırlı bir elemanı olsun. $\text{rank}(M_a) < n$ olduğunu varsayalım. O zaman A nın bir ϕ otomorfizmi ve μ_0 fonksiyoneli vardır öyle ki $\mu_0 < \mu$ ve $\phi(a)$ elemanı μ_0 -sınırlıdır.

İspat: Önerme 4.1.4 den $\rho^1_{\mu}(a)$ nın X in tüm değişkenlerine bağlı olduğunu varsayabiliriz. $\text{rank}(M_a) < n$ olduğundan Önerme 4.1.3 gereği A nın μ -homojen bir ϕ otomorfizmi vardır öyle ki $\rho^1_{\mu}(\phi(a))$ elemanı $n-1$ den fazla olmayan X değişkenlerine bağlıdır. $\rho^1_{\mu}(\phi(a))$ nın x_n e bağlı olmadığını varsayabiliriz. $\rho^1_{\mu}(a)$ elemanı x_n e bağlı olduğundan a da katsayısı sıfırdan farklı x_n -derecesi $r > 0$ a eşit olan bir w monomiali vardır. $t \in \mathbb{Q}_+$ için $\mu_t(x_i) = \mu(x_i)$ ($i \neq n$) ve $\mu_t(x_n) = \mu(x_n) + t$ olarak tanımlanan μ_t fonksiyoneli ele alalım. Önerme 4.1.4 ün ispatındaki gibi $\phi(a)$ μ_0 -sınırlı olacak şekilde bir $t_0 > 0$ bulabiliriz. $\mu_0 = \mu_{t_0}$ diyelim. $V(\mu_0) \subset V(\mu)$ olur. $\mu(w) = 1$ ise $\mu_0(w) = \mu(w) + r.t_0 > 1$ olur. Bu yüzden $m(w) \in V(\mu)$ fakat $m(w) \notin V(\mu_0)$ dir. Buradan $\mu_0 < \mu$ olur.

Önerme 4.1.6: $a \in A$ ve $\text{rank}(M_a) < n$ olsun. O zaman H , A nın $x_1, \dots, x_{n-1}$ tarafından üretilen alt cebiri olmak üzere A nın bir ϕ otomorfizmi vardır öyle ki $\phi(a) \in H$ dir.

İspat : d , a nın uzunluğu olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu(x_i) = \frac{1}{d}$ olarak tanımlayalım. O zaman a bir μ -sınırlı elemandır. İspatı $V(\mu)$ kümesinin $|V(\mu)|$ kardinalitesi

üzerinde tümevarımla yapacağız. $|V(\mu)|=1$ ise $V(\mu)=\{(0, 0, \dots, 0)\}$ ve $a = \alpha.1 \in H$ ($\alpha \in K$) olur. O zaman $\varphi(a) = \varphi(\alpha.1) = \alpha.\varphi(1) = \alpha.1 = a$ ise $\varphi(a) = a \in H$ olur. Önermenin her μ_0 -sınırlı a elemanı ve $\mu_0 \prec \mu$ için ispatlandığını varsayalım. a μ -sınırlı ve $\text{rank}(M_a) < n$ olduğundan Önerme 4.1.5 gereği A nın bir φ otomorfizmi ve μ_0 fonksiyoneli vardır öyle ki $\mu_0 \prec \mu$ ve $\varphi(a)$ elemanı μ_0 -sınırlıdır. $\varphi(a)$ elemanı μ_0 -sınırlı, $\mu_0 \prec \mu$ ve $\text{rank}(M_{\varphi(a)}) = \text{rank}(M_a) < n$ olduğundan hipotezimiz gereği $\psi(\varphi(a)) \in H$ olacak şekilde A nın bir ψ otomorfizmi vardır. ψ ve φ birer otomorfizm olduğundan $\psi \circ \varphi$ de A nın bir otomorfizmidir ve $(\psi \circ \varphi)(a) \in H$ olur. Böylece tümevarım hipotezi gereği ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7 (Mikhalev ve ark., 2001): Her $a \in A$ için $\text{rank}(a)$, $U(A)$ nın $\frac{\partial a}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ elemanları tarafından üretilen sol M_a idealinin rankına eşittir.

İspat: Önerme 4.1.2 gereği $\text{rank}(M_a) \leq \text{rank}(a)$ dır. $\text{rank}(a) = k$ olsun. S , A nın $x_1, \dots, x_k$ elemanları tarafından üretilen alt cebiri olmak üzere $a \in S$ olduğunu varsayabiliriz. Önerme 4.1.6 gereği $\frac{\partial a}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq k$ elemanları $U(S)$ üzerinde sol bağımsızdır. $U(A)$ serbest $U(S)$ -modül olduğundan bu elemanlar $U(A)$ üzerinde sol bağımsızdır.

Bu ifadenin doğruluğunu gösterelim:

$b_1, \dots, b_k \in U(A)$ için

$$b_1 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + b_2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + b_k \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0 \quad (*)$$

olsun. $U(A)$ serbest $U(S)$ -modül olduğundan $U(A)$ nın bir $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ serbest üreteç kümesi vardır öyle ki $s_1, s_2, \dots, s_m \in U(S)$ olmak üzere her $u \in U(A)$ elemanı $u = s_1.t_1 + s_2.t_2 + \dots + s_m.t_m$ şeklinde tek türlü yazılabilir. O halde $b_1, \dots, b_k \in U(A)$ elemanları

$$b_1 = s_{11}.t_1 + s_{12}.t_2 + \dots + s_{1m}.t_m$$

$$b_2 = s_{21}.t_1 + s_{22}.t_2 + \dots + s_{2m}.t_m$$

$$\vdots$$

$$b_k = s_{k1}.t_1 + s_{k2}.t_2 + \dots + s_{km}.t_m$$

şeklinde (tek türlü) yazılabilirler. $b_1, \dots, b_k \in U(A)$ elemanları (*) denkleminde yerlerine yazılırsa ;

$$(s_{11}.t_1 + s_{12}.t_2 + \dots + s_{1m}.t_m) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + (s_{21}.t_1 + s_{22}.t_2 + \dots + s_{2m}.t_m) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots +$$

$$(s_{k1}.t_1 + s_{k2}.t_2 + \dots + s_{km}.t_m) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0$$

olur. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse;

$$\left(s_{11} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{21} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{k1} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} \right) \cdot t_1 + \left(s_{12} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{22} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{k2} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} \right) \cdot t_2 + \dots +$$

$$\left(s_{1m} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{2m} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{km} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} \right) \cdot t_m = 0$$

olur. $0 \in U(A)$ olup bu eleman $0 = 0.t_1 + 0.t_2 + \dots + 0.t_m$ şeklinde de yazılabilir. Yazılış tek türlü olduğundan;

$$s_{11} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{21} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{k1} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0$$

$$s_{12} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{22} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{k2} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$s_{1m} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_1} + s_{2m} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_2} + \dots + s_{km} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} = 0$$

eşiliklerini elde ederiz (Burada $i = 1, 2, \dots, k$ ve $j = 1, 2, \dots, m$ için $s_{ij} \in U(S)$ dir)

$\frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial a}{\partial x_k}$ elemanları $U(S)$ üzerinde sol bağımsız olduğundan bu

eşitliklerden $i = 1, 2, \dots, k$ $j = 1, 2, \dots, m$ için $s_{ij}=0$ elde edilir. O halde

$b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$ olur. O zaman $\frac{\partial a}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq k$ elemanları $U(A)$ üzerinde sol

bağımsızdır. Bu yüzden $\text{rank}(M_a) = k$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

$i = 1, 2, \dots, r$ için e_i , i-inci kordinatı 1 diğer kordinatları sıfır olan satır olsun.

Teorem 4.1.8 (Mikhalev ve ark., 2001): A nın $a_1, a_2, \dots, a_r$ elemanlarından oluşan

sistemin rankı, $1 \leq j \leq n$ için $\sum_{i=1}^r \frac{\partial a}{\partial x_j} \cdot e_i$ elemanları tarafından üretilen

$M = M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$ sol $U(A)$ -modülünün rankına eşittir.

İspat: $s = \text{rank}(M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}})$ ve $k = \text{rank}(\{a_1, a_2, \dots, a_r\})$ olsun. Önerme 4.1.1 ve

Önerme 4.1.2 nin ispatına benzer olarak A nın herhangi bir φ otomorfizmi için

$s = \text{rank}(M_{\{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r)\}})$ ve $k \geq s$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu yüzden a_i

$(1 \leq i \leq r)$ elemanlarının $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları tarafından üretilen alt cebire ait

olduğunu varsayabiliriz. $Y = \{y_j / 1 \leq j \leq r\}$ olsun. $B = F_M(X \cup Y)$ serbest cebirini

ele alalım. Buradan $A \subseteq B$ ve $U(B)$ serbest sağ $U(A)$ -modüldür. Bu yüzden

$s = \text{rank}_{U(A)} U(B)M$ olur.

$$b = a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_r \cdot y_r$$

olsun. O zaman;

$$\text{rank}(b) \leq k + r, \quad \frac{\partial b}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \cdot r_{y_i}, \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{ve} \quad \frac{\partial b}{\partial y_s} = \ell_{a_s}, \quad 1 \leq s \leq r \quad \text{olur.}$$

$a_1, a_2, \dots, a_r$ elemanlarının lineer bağımsız olduğunu varsayabiliriz. O zaman

$r_{y_1}, \dots, r_{y_r}, \ell_{a_1}, \dots, \ell_{a_r}$ elemanları $U(B)$ üzerinde sol bağımsızdır. Buradan

$$M_b = U(B) \cdot \left\{ \frac{\partial b}{\partial x_j} : 1 \leq j \leq n \right\} \oplus U(B) \ell_{a_1} \oplus \dots \oplus U(B) \ell_{a_r} \text{ olur. } U(B) \text{ nin } f(e_i) = r_{y_i}$$

olarak tanımlanan f homomorfizmi $U(B) \cdot \left\{ \frac{\partial b}{\partial x_j} : 1 \leq j \leq n \right\} \cong U(B) M$

izomorfizmine neden olur. Bu yüzden $\text{rank}_{U(B)} M_b = s + r$ olur. Teorem 4.1.7 gereği $\text{rank}(b) = s + r \leq k + r$ ise $s \leq k$ olur. Ayrıca $k \geq s$ idi. O halde $s = k$ olur.

4.2 Primitif Sistemler

Tanım 4.2.1: F bir serbest cebir olsun. F nin bir a elemanı, F nin bir serbest üreteç kümesine ait ise a ya F nin bir primitif elemanı denir.

Tanım 4.2.2: Bir serbest F cebirinin elemanlarının herhangi bir sistemi, F nin bir serbest üreteç kümesinin alt kümesi ise bu sisteme primitiftir denir.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. A , M_0 , M_1 veya M_2 sınıfına ait serbest üreteç kümesi X olan serbest cebir olsun.

Teorem 4.2.1 (Mikhalev ve ark., 2001):

A nın $a_1, a_2, \dots, a_r$ elemanlarının sisteminin primitif olması için gerek ve yeter koşul $(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r))$ matrisinin $U(A)$ üzerinde sol tersinir olmasıdır. Özel olarak, $a \in A$

elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$ olacak şekilde

$m_1, m_2, \dots, m_k \in U(A)$ olmasıdır.

İspat: $i = 1, 2, \dots, r$ için e_i i -inci kordinatı 1 diğer kordinatları sıfır olan satır olsun.

$M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$ ile $\sum_{i=1}^r \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \cdot e_i$, $1 \leq j \leq n$ elemanları tarafından üretilen sol $U(A)$ - alt modülü gösterelim.

$$(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

matrisi $U(A)$ üzerinde sol tersinir olsun. O zaman ;

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & t_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} = I_{r \times r} \quad (*)$$

olacak şekilde t_{ij} ($1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq n$) vardır. O zaman;

$$M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} = U(A) e_1 \oplus \dots \oplus U(A) e_r = \bigoplus_{i=1}^r U(A) \cdot e_i \quad (4.2.1) \text{ olur.}$$

Bu ifadenin doğruluğunu gösterelim. $m \in M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$ olsun. $M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$,

$$\left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \cdot e_r, \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_2} \cdot e_r, \dots, \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \cdot e_r \right\} \text{ kümesi}$$

tarafından üretilen sol $U(A)$ -altmodül olduğundan

$$m = u_1 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_1} e_r \right) + u_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_2} e_r \right) + \dots + u_n \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_n} e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_n} e_r \right)$$

olacak şekilde $u_1, \dots, u_n \in U(A)$ vardır. Buradan;

$$m = \left(u_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \right) \cdot e_1 + \dots + \left(u_1 \frac{\partial a_r}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \right) \cdot e_r$$

olur. Buradan $m \in U(A) \cdot e_1 + U(A) \cdot e_2 + \dots + U(A) \cdot e_r$ olur. O zaman ;

$$M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} \subseteq U(A) e_1 + \dots + U(A) e_r \quad (i)$$

elde edilir. $u \in U(A) e_1 + U(A) e_2 + \dots + U(A) e_r$ olsun. O zaman

$u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 + \dots + u_r \cdot e_r$ olacak şekilde $u_1, \dots, u_n \in U(A)$ vardır. u elemanını

$u = u_1.1.e_1 + u_2.1.e_2 + \dots + u_r.1.e_r$ şeklinde yazalım. (*) gereği

$$t_{i1} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + t_{i2} \frac{\partial a_i}{\partial x_2} + \dots + t_{in} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} = 1 \quad (1 \leq i \leq r) \text{ olacak şekilde } t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in} \in U(A)$$

vardır. O zaman;

$$\begin{aligned} u &= u_1 \left(t_{11} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + t_{12} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + t_{1n} \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \right) e_1 + \dots + u_r \left(t_{r1} \frac{\partial a_r}{\partial x_1} + t_{r2} \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \dots + t_{rn} \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \right) e_r \\ &= u_1.t_{11} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \cdot e_1 + \dots + u_r.t_{r1} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \cdot e_r + \dots + u_1.t_{1n} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \cdot e_1 + \dots + u_r.t_{rn} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \cdot e_r \end{aligned}$$

olur. O zaman $u \in M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$ elde edilir. Buradan

$$U(A).e_1 + U(A).e_2 + \dots + U(A).e_r \subseteq M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} \quad (\text{ii})$$

elde edilir. Böylece (i) ve (ii) gereği $M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} = U(A).e_1 + \dots + U(A).e_r$ olur. Ayrıca $i \neq j$ için $U(A).e_i \cap U(A).e_j = \{0\}$ olduğundan;

$$M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} = U(A).e_1 + U(A).e_2 + \dots + U(A).e_r = \bigoplus_{i=1}^r U(A).e_i \quad (4.2.1)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $\text{rank}(M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}) = r$ olur. Teorem 4.1.8 den $\text{rank}(\{a_1, \dots, a_r\}) = r$ olur. Üstelik A nın bir φ otomorfizmi için (4.2.1) den

$$M_{\{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r)\}} = \bigoplus_{i=1}^r U(A).e_i \text{ olur. } \text{rank}(M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}) \leq \text{rank}(\{a_1, a_2, \dots, a_r\}) \text{ olduğundan}$$

$a_1, a_2, \dots, a_r$ elemanlarının, A nın $x_1, \dots, x_r$ elemanları tarafından üretilen S altcebirine ait olduğunu varsayabiliriz. ψ , S nin $\psi(x_i) = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) olarak tanımlanan endomorfizmi olsun. (4.2.1) den ψ nin Jacobian matrisi tersinirdir.

Bu ifadenin doğruluğunu gösterelim:

(4.2.1) gereği $M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} = U(A).e_1 \oplus \dots \oplus U(A).e_r$ idi. $a_1, a_2, \dots, a_r \in S$ olduğundan

$$M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}, \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \cdot e_r, \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_2} \cdot e_r, \dots, \frac{\partial a_1}{\partial x_r} \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial a_r}{\partial x_r} \cdot e_r \right\}$$

kümesi tarafından üretilen sol $U(A)$ - alt modül olur. Buradan;

$$1.e_1 + 0.e_2 + \dots + 0.e_r \in U(A).e_1 \oplus \dots \oplus U(A).e_r = M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$$

olduğundan;

$$1.e_1 + 0.e_2 + \dots + 0.e_r =$$

$$\left(u_{11} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + u_{12} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + u_{1r} \frac{\partial a_1}{\partial x_r} \right) .e_1 + \dots + \left(u_{11} \frac{\partial a_r}{\partial x_1} + u_{12} \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \dots + u_{1r} \frac{\partial a_r}{\partial x_r} \right) .e_r$$

olacak şekilde $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1r} \in U(A)$ vardır. Buradan ;

$$\begin{aligned} u_{11} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + u_{12} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + u_{1r} \frac{\partial a_1}{\partial x_r} &= 1 \\ u_{11} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + u_{12} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dots + u_{1r} \frac{\partial a_2}{\partial x_r} &= 0 \\ \vdots & \\ u_{11} \frac{\partial a_r}{\partial x_1} + u_{12} \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \dots + u_{1r} \frac{\partial a_r}{\partial x_r} &= 0 \end{aligned}$$

deklemlerini elde ederiz. $0.e_1 + 0.e_2 + \dots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \dots + 0.e_r \in M_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$

($2 \leq i \leq r$) olup benzer düşünceyle;

$$\begin{aligned} u_{i1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + u_{i2} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dots + u_{ir} \frac{\partial a_1}{\partial x_r} &= 0 \\ u_{i1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + u_{i2} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dots + u_{ir} \frac{\partial a_2}{\partial x_r} &= 0 \\ \vdots & \\ u_{i1} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + u_{i2} \frac{\partial a_i}{\partial x_2} + \dots + u_{ir} \frac{\partial a_i}{\partial x_r} &= 1 \\ \vdots & \\ u_{i1} \frac{\partial a_r}{\partial x_1} + u_{i2} \frac{\partial a_r}{\partial x_2} + \dots + u_{ir} \frac{\partial a_r}{\partial x_r} &= 0 \end{aligned}$$

deklemlerini elde ederiz. O zaman;

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} = I_{r \times r}$$

olur. Buradan ψ nin Jacobian matrisi $U(A)$ üzerinde tersinirdir. (Çünkü bir kare matris sol ya da sağ tersinir ise tersinidir.) Bu yüzden $\phi: A \rightarrow A$ endomorfizmini $i = 1, 2, \dots, r$ için $\phi(x_i) = \psi(x_i) = a_i \in S$ ve $j = r+1, \dots, n$ için $\phi(x_j) = x_j$ olarak tanımlarsak ϕ , A nın bir otomorfizmi olur. Buradan $\{a_1, a_2, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$, A nın bir serbest üreteç kümesi olur. O zaman A nın $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ sistemi primitiftir.

Teoremin diğer kısmı için ispatı yapalım.

A nın $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ elemanlarının sistemi primitif olsun. O zaman $B = \{a_1, \dots, a_r, y_{r+1}, \dots, y_n\}$ kümesi A nın serbest üreteç kümesi olacak şekilde $y_{r+1}, \dots, y_n \in A$ vardır. Buradan B nin Jacobian matrisi $U(A)$ üzerinde tersinirdir. Bu yüzden;

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \cdots & t_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \vdots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = I_{n \times n}$$

olacak şekilde $t_{ij} \in U(A)$ ($1 \leq i, j \leq n$) vardır. O zaman;

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \cdots & t_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \cdots & t_{rn} \end{pmatrix} \cdot (\partial(a_1), \dots, \partial(a_r)) = I_{r \times r}$$

olur. Buradan $(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r))$ matrisi $U(A)$ üzerinde sol tersinirdir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2 (Mikhalev ve ark., 2001): A nın $a_1, \dots, a_r$ elemanlarının sisteminin primitif olup olmadığını belirleyen bir algoritma vardır.

İspat: $a \in A$ elemanı için A nın sol M_a idealini ele alalım. Elemanter işlemleri kullanarak bu idealin standart Gröbner-Shirshov bazını oluşturalım. Bu bazın kardinalitesi $\text{rank}(a)$ ya eşittir. Ayrıca $a \in A$ elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul $\text{rank}(a)=1$ ve M_a nın standart Gröbner-Shirshov bazı sadece birim elemandan oluşmasıdır.

Genel olarak $a_1, \dots, a_r$ elemanlarından oluşan bir sistemin rankı, $(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r))$ matrisinin sol rankına eşittir. Elemanter satır işlemlerini kullanarak bu rankı bulabiliriz.

$a_1, \dots, a_r$ sisteminin primitif olması için gerek ve yeter koşul $(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r))$ matrisinin sol tersinir olmasıdır. (Teorem 4.2.1))

Önerme 4.2.3: I , A nın sıfırdan farklı bir ideali olsun öyleki A/I bölüm cebiri M sınıfında k tane serbest üreteçli bir serbest cebir olsun. O zaman; A nın bir $g_1, g_2, \dots, g_{n-k}$ primitif sistemi vardır öyle ki bu sistem I idealini üretir.

İspat: $\varphi : A \rightarrow B = F_M \langle y_1, \dots, y_k \rangle$, $\text{Ker}(\varphi) = I$ olan örten bir homomorfizm olsun. $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(x_i) = f_i$ yazalım. B cebirinin $f_1, \dots, f_n$ elemanlarının sistemini ele alalım. Teorem 2.1 gereği bu sistemi elemanter dönüşümlerin sonlu bir dizisi ile $y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0$ sistemine dönüştürebiliriz. Elemanter dönüşümlerin bu dizisini $x_1, \dots, x_n$ e uygularsak A nın yeni bir $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_{n-k}$ serbest üreteç kümesini elde ederiz. Buradan her i, j için $\varphi(p_i) = y_i$, $\varphi(q_j) = 0$ olur. Bu yüzden I ideali $q_1, q_2, \dots, q_{n-k}$ tarafından üretilir.

Şimdi $a \in A$ olmak üzere (a) ile A nın a elemanı tarafından üretilen idealini gösterelim.

Teorem 4.2.4 (Freiheitssatz) (Shirshov, 1962a; Zhukov, 1950):

A nın bir a elemanının bir $x \in X$ serbest üreteline bağlı olduğunu varsayalım. O zaman $X/\{x\}$ kümesi M sınıfında $A/(a)$ bölüm cebiri içinde bir serbest cebir üretir. Başka bir ifadeyle; $F(X/\{x\}) \cap (a) = \{0\}$ dır.

Grup teoride Freiheitssatz W.Magnus (Magnus, 1930) tarafından gösterilmiştir. Birleşmeli olmayan serbest cebirler için Freiheitssatz A.I.Zhukov (Zhukov, 1950) tarafından ve serbest değişmeli cebirler için A.I.Shirshov (Shirshov, 1962a) tarafından ispatlanmıştır. Lie cebirleri için bu sonuç A.I.Shirshov (Shirshov, 1962b) tarafından elde edilmiştir. Karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki birleşmeli cebirler için bu problemler L.G.Makar-Limanov (Makar-Limanov, 1985) tarafından çözülmüştür.

G.P.Kukin tarafından ispatlanan aşağıdaki teorem bir elemanın primitif olup olmadığını belirlemede önemli rol oynar.

Teorem 4.2.5: $a \in A$ ve $a \neq 0$ olsun. O zaman; a elemanının primitif olması için gerek ve yeter koşul $A/(a)$ bölüm cebirinin M sınıfında bir serbest cebir olmasıdır.

İspat: $I = (a)$ diyelim. $A/(a)$ bölüm cebirinin M sınıfında k tane serbest üreteçli bir serbest cebir olduğunu kabul edelim. O zaman Önerme 4.2.3 gereği (a) idealinin $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$ elemanları tarafından üretildiğini varsayabiliriz. O zaman; Teorem 4.2.4 gereği $n - k = 1$ olur. Buradan $a = c.x_i$ ($0 \neq c \in F$) olur. O halde a elemanı primitiftir. Diğer taraftan Teorem 4.2.4 den $a \in A$ elemanı primitif ise $A/(a)$ bölüm cebiri serbest cebir olur.

Teorem 4.2.6 (Mikhalev ve ark.): K bir cisim ve $L = L(x, y, z)$ K cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $\{x, y, z\}$ olan serbest Lie cebiri olsun. $u = x - [[x, y], [y, z]]$, $v = x + [[[y, z], x], y]$ ve (u) ve (v) L nin sırasıyla u ve v elemanları tarafından üretilen idealleri olsun. O zaman $L/(u) \cong L/(v)$ dir ancak $\varphi(u) = v$ olacak şekilde L nin bir φ otomorfizmi yoktur.

Önerme 4.2.7 (Mikhalev ve ark.): K bir cisim ve $L = L(x, y)$ K cismi üzerinde serbest üreteç kümesi $\{x, y\}$ olan serbest Lie cebiri olsun. $u = x - [[[x, y], y], [x, y]]$, $v = x - [[[x, y], x], y]$ ve (u) ve (v) L nin sırasıyla u ve v elemanları tarafından üretilen idealleri olsun. O zaman $L/(u) \cong L/(v)$ dir ancak $\varphi(u) = v$ olacak şekilde L nin bir φ otomorfizmi yoktur.

4.3 Primitif Elemanlar ve Endomorfizmler

Bu bölümde bir $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerindeki bir serbest A cebirinin primitif elemanlarının endomorfizmler altındaki otomorfik görüntülerini ele alacağız. Her $a \in A$ için $\mu: A \rightarrow \mathbb{N}$ genelleştirilmiş derece fonksiyonu olmak üzere a^0 ile a nın μ -homojen en yüksek dereceli kısmını gösterelim. Eğer her $i = 1, 2, \dots, k$ a_i bileşeni $\{a_j^0 / j \neq i\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire ait değilse $a_1, a_2, \dots, a_k$ elemanlarının sisteminin indirgenmiş sistem olarak tanımlandığını hatırlayalım.

Önerme 4.3.1: φ A nın primitif elemanlarını primitif elemanlara dönüştüren bir endomorfizmi, $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(x_i) = a_i$ ve $n = 2$ için $M \neq M_2$ olsun. Ayrıca $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ elemanlarının sisteminin indirgenmiş olduğunu varsayalım. O zaman;

i) H nin $\text{rank}(h) = n - 1$, $\mu(h(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0)) > \mu(a_n^0)$ olacak şekilde μ -homojen bir h elemanı vardır.

ii) $\text{rank}(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0) < n$ dir.

iii) A nın μ -homojen bir ψ otomorfizmi vardır öyle ki $\psi(a_1^0), \psi(a_2^0), \dots, \psi(a_n^0)$ elemanları X in bazı x_j değişkenlerine bağlı değildir.

İspat: i) $s.\mu(x_1) > \mu(a_n^0)$ olmak üzere $h = x_1.r_{x_2} \dots r_{x_{n-1}}.r_{x_1}^s$ olsun. O zaman; $h = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $n = 2$ ve $M = M_2$ olmasıdır. $M \neq M_2$ olduğundan $h \neq 0$ olur. $\mu(h) = \mu(x_1.r_{x_2} \dots r_{x_{n-1}}.r_{x_1}^s) = \mu(x_1) + \mu(x_2) + \dots + \mu(x_{n-1}) + s.\mu(x_1)$ olup $s.\mu(x_1) > \mu(a_n^0)$ olduğundan $\mu(h) > \mu(a_n^0)$ olur.

ii) $f = x_1 + h(x_1, \dots, x_{n-1})$ olsun. f elemanı primitiftir. Hipotezimiz gereği $\varphi(f) = g$ elemanında primitif olur. Teorem 4.2.1 den $m_1, \dots, m_n \in U(A)$ vardır öyleki

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} &= 1 \text{ olur. } g = a_n + h(a_1, \dots, a_{n-1}) \text{ olup} \\ 1 &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial(a_n + h(a_1, \dots, a_{n-1}))}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_n}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial(h(a_1, \dots, a_{n-1}))}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_n}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_n}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial a_j} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_n}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial a_j}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 1 \end{aligned}$$

olur. $r = \max\{\mu(m_i) - \mu(x_i)\}$ olmak üzere derecesi $r + \mu(h(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0))$ olan bileşeni düşünelim. m_i' , m_i nin derecesi $r + \mu(x_i)$ olan bileşeni olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i' \cdot \frac{\partial a_j^0}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial a_j}(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0) = 0 \quad (4.3.1)$$

eşitliğini elde ederiz. $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sistemi indirgenmiş olduğundan Teorem 2.1 gereği bu sistem, A nın bu sistem tarafından üretilen S alt cebirinin bir serbest

üreteç kümesi olur. $\text{rank}(h) = n - 1$ olduğundan $\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0)$, $1 \leq j \leq n - 1$ elemanları $U(S)$ üzerinde sol bağımsızdır ($\text{rank}(h) = \text{rank}(M_h)$). $U(A)$ serbest $U(S)$ -modül olduğundan bu elemanlar $U(A)$ üzerinde de sol bağımsızdır. (4.3.1) den $\sum_{i=1}^r m_i' \cdot \frac{\partial a_j^0}{\partial x_i} = 0$, $1 \leq j \leq n$ olur. O halde Teorem 4.1.8 den $\text{rank}(a_1^0, \dots, a_{n-1}^0) < n$ elde edilir.

iii) $t \in Q_+$ için $t > \max \{ \mu(x_i), \mu(a_j^0) / 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1 \}$ olsun. Ayrıca $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$, $\mu(y_i) = 2t - \mu(a_i^0)$ ($1 \leq i \leq n - 1$) ve $B = F_M(X \cup Y)$ olsun. $b = a_1^0 \cdot y_1 + a_2^0 \cdot y_2 + \dots + a_{n-1}^0 \cdot y_{n-1} \in B$ elemanını ele alalım. Teorem 4.1.8 in ispatındaki gibi $\frac{\partial b}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial b}{\partial x_n}$ elemanları $U(B)$ üzerinde sol bağımlıdır. Bu elemanlar homojen olduğundan $\frac{\partial b}{\partial x_j} \in \sum_{i \neq j} U(B) \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i}$ olacak şekilde bir j vardır. O halde Önerme 3.5.2 gereği B nin μ -homojen bir ψ otomorfizmi vardır öyleki $1 \leq i \leq n - 1$ için $\psi(y_i) = y_i$ ve $\psi(b)$ elemanı x_j ye bağlı değildir. Her i, j için $\mu(x_i) < t < \mu(y_i)$ olduğundan $\psi(x_i)$ elemanı y_j ye bağlı değildir. Bu yüzden $\psi(x_i) \in A$ olur ve ψ nin A ya kısıtlanması istenilen otomorfizmdir. (Çünkü; ψ , B nin μ -homojen otomorfizmi olduğundan $\mu(\psi(x_i)) = \mu(x_i)$ olur. $\psi(x_i)$, y_j ye bağlı olsaydı $\mu(y_j) < \mu(x_i)$ çelişkisi elde edilirdi.)

Teorem 4.3.2 (Mikhalev ve ark., 2001): φ A nın bir endomorfizmi olsun öyleki A nın her primitif a elemanı için $\varphi(a)$ elemanı primitif olsun. O zaman φ , A nın bir otomorfizmidir.

İspat: b_i elemanları derecesi 2 den küçük olmayan monomiallerin lineer kombinasyonu olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için $a_i = \varphi(x_i) = x_i + b_i$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $n = 2$ ve $M = M_2$ ise o zaman A nın primitif elemanları $\alpha x_1 + \beta x_2$ formundadır öyle ki $\alpha, \beta \in F$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ dır. Bu taktirde $\varphi(x_i) = x_i$ ve φ bir otomorfizmdir. $n = 2$ için $M \neq M_2$ olduğunu varsayalım. Fonksiyonellerin $\{\mu / \text{bir } \psi_\mu \text{ otomorfizmi vardır öyle ki } \psi_\mu(a_1), \dots, \psi_\mu(a_{n-1}) \mu\text{-sınırlıdır.}\}$ kümesini ele alalım. μ bu kümenin $\prec$ sıralamasına göre en küçük elemanı olsun. $\psi \circ \varphi$ bileşkesini düşünelim. $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ elemanlarının μ -sınırlı olduğunu varsayabiliriz. Göstereceğiz ki $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ elemanları x_j ye bağlı olmayacak şekilde bir j vardır. Aksini kabul edelim. Önerme 4.1.4 ün ispatındaki gibi $\mu_0 \prec \mu$ ve $\rho_{\mu_0}^{-1}(a_1^0), \dots, \rho_{\mu_0}^{-1}(a_{n-1}^0)$ bileşenleri her $x \in X$ e bağlı olacak şekilde bir μ_0 fonksiyoneli bulabiliriz. Önerme 4.3.1(iii) ve Önerme 4.1.5 gereği $\mu_1 \prec \mu_0$ ve $\psi(a_1), \dots, \psi(a_{n-1})$ elemanları μ_1 -sınırlı olacak şekilde bir μ_1 fonksiyoneli ve A nın bir ψ otomorfizmi vardır. Bu ise μ nün seçilişi ile çelişir. (Çünkü $\mu_1 \prec \mu_0$, $\mu_0 \prec \mu$ ise $\mu_1 \prec \mu$) O halde $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ elemanları x_j ye bağlı değildir. $j = n$ olduğunu kabul edebiliriz. O zaman $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in H$ ve H üzerindeki φ' kısıtlama dönüşümü H nin, elemanların primitifliğini koruyan bir endomorfizmidir. n üzerinde tümevarım uygularsak, φ' nün H nin bir otomorfizmi olduğunu, $1 \leq i \leq n$ için $\varphi'(x_i) = x_i$ olduğunu ve $\varphi(x_n)$ nin A nın x_n tarafından üretilen (x_n) idealine ait olduğunu varsayabiliriz. $b = \varphi(x_n)$ elemanı primitif olduğundan, (b) ve (x_n) A nın sırasıyla b ve x_n tarafından üretilen idealleri olmak üzere $A/(b) \cong H \cong A/(x_n)$ olur. O zaman $(b) = (x_n)$ olur. Teorem 4.2.4 dan $\varphi(x_n) = \alpha x_n$ ($0 \neq \alpha \in K$) olur. Bu yüzden φ , A nın bir otomorfizmidir.

4.4 Primitif Elemanların Ters Görüntüleri

K bir cisim ve $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ boş olmayan sonlu bir küme olsun. Bu bölümde primitif elemanların ters görüntülerini düşünerek serbest $F(X)$ cebirinin endomorfizmlerinin hesaplanabilir özellikleri üzerinde duracağız.

Bu kısımda, $F = F(X)$ K cismi üzerindeki aşağıdaki cebir sınıflarından birine ait olan ve serbest üreteç kümesi sonlu X kümesi olan bir serbest K -cebir olarak düşünülecektir. (birim elemansız):

1) Tüm cebirlerin sınıfı, Lie cebirlerinin sınıfı.

2) Tüm birleşmeli olmayan değişmeli cebirlerin sınıfı ya da değişmeli olmayan cebirlerin sınıfı.

Teorem 4.4.1 (Mikhalev ve ark., 1999): u F nin bir elemanı, v F nin bir primitif elemanı ve φ , F nin $\varphi(u) = v$ olacak şekildeki birebir olan bir endomorfizmi olsun. O zaman u , F nin primitif elemanıdır.

İspat: v F nin primitif elemanı olduğundan $v = z_1$ olmak üzere F nin bir $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ serbest üreteç kümesi vardır. $1 \leq i \leq n$ için $f_i = \varphi(z_i)$ olsun. O zaman sonlu sayıda elemanter dönüşümler ile $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ kümesini indirgenmiş $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ kümesine dönüştürebiliriz. (φ birebir olduğundan hiçbir adımda sıfır elemanı görülmez.). Bu elemanter işlemleri aynı sırada serbest üreteç kümesi Z ye uygularsak F nin bir $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ serbest üreteç kümesini elde ederiz öyle ki $1 \leq i \leq n$ $\varphi(y_i) = g_i$ olur. Şimdi u elemanını $u = u(y_1, \dots, y_n)$ olarak yazalım. O zaman

$$\varphi(u) = u(\varphi(y_1), \varphi(y_2), \dots, \varphi(y_n)) = u(g_1, g_2, \dots, g_n) = z_1 \quad (4.4.1)$$

olur. Eğer $\ell_Z(u) > 1$ ise $\ell_Z(\varphi(u)) > 1$ olur. Bu ise (4.4.1) ile çelişir. O zaman;

$u = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot z_j$ olacak şekilde $\beta_j \in K$ vardır. Y ile Z kümeleri F nin iki serbest

üreteç kümesi olduğundan Y ile Z kümeleri arasında $\psi(z_i) = y_i$ olacak şekilde bir ψ otomorfizmi vardır. $\ell_Y(u) > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman $\ell_Y(\psi(u)) > 1$ olmalıdır. $u = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot z_j$ ise $\psi(u) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \psi(z_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot y_j$ olur. Buradan $\ell_Y(\psi(u)) = 1$ çelişkisi elde edilir. O halde $\ell_Y(u) = 1$ olmalıdır. O zaman $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot y_j$ olacak şekilde $\alpha \in K$ vardır. Eğer bir j için $\alpha_j \neq 0$ ise o zaman (4.4.1) gereği $\ell_Z(g_j) = 1$ olur. O halde bir k için $g_j = z_k$ olur. O halde (4.4.1) den $u(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1$ olur. Buradan u elemanı primitiftir.

Teorem 4.4.2 (Mikhalev ve ark., 1999): $u_1, \dots, u_k$ rankı n olan $F = F(X)$ serbest cebirinin elemanları, $1 \leq k \leq n$ için $\{z_1, \dots, z_k\}$, F nin bir primitif sistemi ve φ , F nin bire-bir olan bir endomorfizmi olsun öyle ki $1 \leq i \leq k$ için $\varphi(u_i) = z_i$ olsun. O zaman $\{u_1, \dots, u_k\}$, F nin bir primitif sistemidir. Ayrıca $k = n$ ise φ , F nin bir otomorfizmidir.

İspat: $\{z_1, \dots, z_k\}$ sistemini F nin bir $Z = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\}$ serbest üreteç kümesine tamamlayalım. Teorem 4.4.1 in ispatındaki gibi F nin bir $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ serbest üreteç kümesi vardır öyle ki $\{g_1, \dots, g_n / 1 \leq i \leq n \text{ için } \varphi(y_i) = g_i\}$ kümesi F nin bir indirgenmiş alt kümesidir. $u_1, \dots, u_k$ elemanlarını Y nin elemanları cinsinden yazalım. $1 \leq i \leq k$ için $u_i = u_i(y_1, \dots, y_n)$ olsun. O zaman;

$$1 \leq i \leq k \text{ için } \varphi(u_i) = u_i(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_n)) = u_i(g_1, \dots, g_n) = z_i \quad (4.4.2)$$

olur. Eğer $\ell_Z(u_i) > 1$ ise $\ell_Z(\varphi(u_i)) > 1$ olur. Bu ise (4.4.2) çelişir. O halde $1 \leq i \leq k$

için $u_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot z_j$ olacak şekilde $\beta_{ij} \in K$ vardır. Y ile Z kümeleri F nin iki serbest

üreteç kümesi olduğundan Y ile Z kümeleri arasında $\psi(z_i) = y_i$ olacak şekilde bir

ψ otomorfizmi vardır. $1 \leq i \leq k$ için $\ell_Y(u_i) > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman

$1 \leq i \leq k$ için $\ell_Y(\psi(u_i)) > 1$ olmalıdır. $u_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot z_j$ ise

$$\psi(u_i) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot \psi(z_j) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot y_j$$

olur. Buradan $\ell_Y(\psi(u_i)) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu yüzden $1 \leq i \leq k$ için $\ell_Y(u_i) = 1$

olur. O zaman; $1 \leq i \leq k$ için $u_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot y_j$ olacak şekilde $\alpha_{ij} \in K$ vardır. Eğer i, j

için $\alpha_{ij} \neq 0$ ise o zaman (4.4.2) gereği $\ell_Z(g_j) = 1$ olur. O halde bir t için $g_j = z_t$

olur. O halde (4.4.2) den $1 \leq i \leq k$ için $u_i = u_i(z_1, \dots, z_n) = z_i$ olur. Buradan

$\{u_1, \dots, u_k\}$ sistemi F nin bir primitif sistemidir. Eğer $k = n$ ise $U = \{u_1, \dots, u_n\}$

kümesi $y_1, y_2, \dots, y_n$ elemanları tarafından üretilen vektör uzayının bir bazı olur. U ,

F nin serbest üreteç kümesi olduğundan F nin $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(u_i) = z_i$ olarak

verilen endomorfizmi F nin bir otomorfizmi olur.

Şimdi primitif sistemlerin herhangi bir endomorfizm altındaki ters görüntülerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.4.1: H , F nin bir alt cebiri olmak üzere $F = H \oplus I$ olacak şekilde F nin bir I ideali varsa H alt cebiri F nin bir retraktıdır denir.

Teorem 4.4.3 (Mikhalev ve ark., 1999): $U = \{u_1, \dots, u_l\}$ rankı $n \geq l$ olan serbest $F = F(X)$ cebirinin bir alt kümesi; $\{z_1, \dots, z_l\}$ F nin bir primitif sistemi; H , F nin U tarafından üretilen alt cebiri ve φ , F nin $1 \leq i \leq l$ için $\varphi(u_i) = z_i$ olacak şekildeki bir endomorfizmi olsun. O zaman H , F nin bir retraktıdır. Özel olarak, $l = n$ ise φ bir otomorfizmdir ve U , F nin bir serbest üreteç kümesidir.

İspat: Teorem 4.4.2 gereği φ nin bire-bir olmadığını varsayabiliriz. (Çünkü her primitif sistem bir retrakt üretir.) $\{z_1, \dots, z_l\}$ kümesini F nin bir $Z = \{z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_n\}$ serbest üreteç kümesine tamamlayalım ve $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(z_i) = f_i$ olsun. Sonlu sayıda elemanter dönüşümler ile $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ kümesini $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ kümesine dönüştürebiliriz öyle ki $1 \leq k \leq n$ olacak şekilde k sayısı için $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ kümesi indirgenmiştir ve $i > k$ için $g_i = 0$ dir. (φ bire-bir olduğundan $k < n$ dir.) Elemanter dönüşümlerin bu dizisi F nin $1 \leq i \leq n$ için $\psi(z_i) = y_i$, $\varphi(y_i) = g_i$ olacak şekildeki ψ otomorfizmini elde etmemimizi sağlar. Şimdi $u_1, \dots, u_l$ elemanlarını aşağıdaki formda yazalım.

$u_i(y_1, \dots, y_n) = u_i^{(1)}(y_1, \dots, y_k) + u_i^{(2)}$, $1 \leq i \leq l$ öyle ki her $i = 1, 2, \dots, l$ için $u_i^{(1)}$ elemanı sadece $y_1, \dots, y_k$ serbest üreteçlerine bağlı ve $u_i^{(2)}$ elemanı F nin $y_{k+1}, \dots, y_n$ serbest üreteçleri tarafından üretilen ideale aittir. $1 \leq i \leq l$ için $\varphi(u_i) = u_i(g_1, \dots, g_n) = u_i^{(1)}(g_1, \dots, g_k) = z_i$ olur. Buradan $1 \leq i \leq l$ için $u_i^{(1)} = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \cdot y_j$ olacak şekilde $\alpha_{ij} \in K$ vardır ve $\alpha_{ij} \neq 0$ ise $\ell_Z(g_j) = 1$ dir.

Dolayısıyla $l \leq k$ olur. ψ F nin $1 \leq i \leq l$ için $\psi(y_i) = u_i^{(1)}$ ve $l < j \leq n$ için $\psi(y_j) = y_j$ olacak şekildeki lineer otomorfizmi olsun. $1 \leq i \leq n$ için $y_i' = \psi(y_i)$ ve J F nin y_j' , $l < j \leq n$ serbest üreteçleri tarafından üretilen ideali olsun. Buradan $1 \leq i \leq l$ için $u_i = y_i' \pmod{J}$ olur. O zaman $F = H \oplus J$ olur. O halde H , F nin bir retraktıdır.

KAYNAKLAR

- COHN, P.M., (1964).** Subalgebras of Free Associative Algebras. Proc. London Math. Soc. 14, no. 3, 618-632.
- KUROSH, A.G., (1947).** Non-associative Free Algebras and Free Products of Algebras. Mat. Sb. 20, 33-41.
- LEWIN, J., (1968).** On Schreier Varieties of Linear Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 132, 553-562.
- MAGNUS, W., (1930).** Über Diskontinuierliche Gruppen Mit Einer Definierenden Relation (Der Freiheitssatz). J. Reine Angew. Math. 163, 141-165.
- MAKAR-LIMANOV, L., (1985).** Algebraically Closed Skew Fields. J. Algebra 93, 117-135.
- MĪKHALEV, A.A., (1985).** Subalgebras of Free Color Lie Superalgebras. Mat. Zametki 37, no. 5, 653-661. English Translation: Math. Notes 37, 356-360.
- MĪKHALEV, A.A., (1986).** Free Color Lie Superalgebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR 286, no. 3, 551-554. English Translation: Soviet Math. Dokl. 33, 136-139.
- MĪKHALEV, A.A., (1988).** Subalgebras of Free Lie p -superalgebras. Mat. Zametki 43, no. 2, 178-191. English Translation: Math. Notes 43, 99-106.
- MĪKHALEV, A.A., SHPILRAIN, V. and UMIRBAEV, U.U.** On Isomorphism of Lie Algebras with One Defining Relation. Intern. J. Algebra Comput., To Appear.
- MĪKHALEV, A.A., SHPILRAIN, V. and YU, J.-T., (1999).** On Endomorphisms of Free Algebras. Algebra Colloq. 6, 241-248.
- MĪKHALEV, A.A., UMIRBAEV, U.U. ,and YU, J.-T., (2001).** Automorphic Orbits of Elements of Free Non-Associative Algebras. J. Algebra 243, 198-223.
- SHIRSHOV, A. I., (1953).** Subalgebras of Free Lie Algebras. Math. Sb. 33, 441-452.
- SHIRSHOV, A. I., (1954).** Subalgebras of Free Commutative and Free Anti-Commutative Algebras. Mat. Sb. 34, 81-88.
- SHIRSHOV, A. I., (1962a).** Some Algorithmical Problems For ε -Algebras. Sibirsk. Mat. Zh. 3, 132-137.

- SHIRSHOV, A. I., (1962b).** Some Algorithmical Problems For Lie Algebras. Sibirsk. Mat. Zh. 3, 292-296.
- SHTERN, A.S., (1986).** Free Lie Superalgebras. Sibirsk. Mat. Zh. 27, 170-174. English Translation: Siberian Math. J. 27, 136-140.
- UMIRBAEV, U.U., (1994).** On Schreier Varieties of Algebras. Algebra i Logika 33, No. 3, 317-340. English Translation: Algebra and Logic 33, No. 3, 180-193.
- WITT, E. (1956).** Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Math. Z. 64, 195-216.
- YAGZHEV, A.V., (1980).** Endomorphisms of Free Algebras. Sibirsk. Math. Zh. 21, 181-192. English Translation: Siberian Math. J. 21, No. 1, 133-141.
- ZHUKOV, A. I., (1950).** Reduced Systems of Defining Relations in Non-associative Algebras. Mat. Sb. 27, 267-280.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Adana’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi sırasıyla Çukurova ilkokulu, Cumhuriyet Ortaokulu ve Atatürk Lisesinde tamamladıktan sonra 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 2002 yılında mezun oldum. 2002 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladım.