

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Berna ERGÜNEŞ

SERBEST NİLPOTENT LEİBNİZ CEBİRLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2022

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST NİLPOTENT LEİBNİZ CEBİRLERİ

Berna ERGÜNEŞ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
Yıl: 2022, Sayfa: 83
Jüri : Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Prof. Dr. Zerrin GÜL ESMERLİGİL
: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

$F_m(N)$, $m \geq 2$ için serbest sol nilpotent Leibniz cebiri olsun. Bu çalışmada öncelikle yapılan çalışmalar incelenerek Leibniz cebirlerle ilgili tanım ve teoremler verildi. Daha sonra Drensky, Cattaneo (2002) ve Drensky, Papistas (2005) makalelerini kaynak olarak kullanarak $F_m(N)$ nin yapısı, otomorfizmleri ve sabit nokta altcebirleri incelendi. Son olarak Drensky, Papistas (2005)de verilen otomorfizmler kullanılarak bu otomorfizmlerin sabit noktalar kümesi çeşitli hesaplamalar yapılarak elde edildi.

Anahtar Kelimeler : Sol nilpotent Leibniz cebirleri, Tame otomorfizmler , Wild otomorfizmler , Sabit noktalar .

ABSTRACT

MSc THESIS

FREE NILPOTENT LEIBNIZ ALGEBRAS

Berna ERGÜNEŞ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT
Year: 2022, Pages: 83
Jury : Assoc. Prof. Dr. Zeynep ÖZKURT
: Prof. Dr. Zerrin GÜL ESMEİLİGİL
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

Let $F_m(N)$ be the free left nilpotent Leibniz algebra of rank m ($m \geq 2$). In this thesis firstly by examining the studies carried out, we gived definitions and basic theorems on Leibniz algebras. Then we also examined the structure, the automorphisms and the fixed point subalgebra of $F_m(N)$ using the articles by Drensky, Cattaneo (2002) and Drensky, Papistas (2005). Finally, the set of fixed points of these automorphisms was obtained to making various calculations by using the automorphisms gived in Drensky, Papistas (2005).

Key Words : Left nilpotent Leibniz algebras, Tame automorphisms, Wild automorphisms, Fixed points.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

K bir cisim, L , $[\cdot]$ braket çarpımı ile bir K -cebiri olsun. Eğer L nin her x, y elemanı için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliği sağlanıyorsa, L bir sağ Leibniz cebiri ve eğer L nin her x, y elemanı için

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

özdeşliği sağlanıyorsa, L bir sol Leibniz cebiridir. Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir. Eğer bir Leibniz cebiri $[x, x] = 0$ antikomutatiflik özelliğine sahipse o zaman Leibniz özdeşliği

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

şeklindeki Jacobi özdeşliğine indirgenebilir. Böylece Lie cebirleri, Leibniz cebirlerinin özel bir durumudur. Leibniz cebirleri ilk olarak 90 ların başında tanıtıldı ve Loday(1993) tarafından yeniden keşfedildi. Leibniz cebirleri ile ilgili yapılan çalışmalardan sonra daha yoğun şekilde çalışılmaya başlandı ve son 20 yılda bir çok çalışma yapıldı. Leibniz cebirlerinin bu kadar ilgi görmesinin iki nedeni vardır. Bunlardan ilki; Leibniz cebirleri, Lie cebirlerinin anti komütatif genelleştirmeleri olduğundan Lie cebirlerindeki bazı klasik teoremler, sınıflandırma problemleri, kohomoloji teorisi vb. problemler Leibniz cebirlerine genişletildi. İkinci sebep ise Leibniz cebirlerinin uygulamalarıdır. Bu uygulamalar matematik ve matematiksel fiziğin çeşitli alanlarındaki cebirler, örneğin; diferansiyel geometri, homolojik cebir, klasik cebirsel topoloji, cebirsel K - teorisi,

değişmeli olmayan geometri vb. gibi birçok konu ile ilgili uygulamaların bir genellemesidir. Serbest Leibniz cebirleri Loday ve Pirashvili (1993) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Mikhalev ve Umirbayev (1998) de Jacobian sanısının değişmeli olmayan cebirler için analogunu ve serbest Lie cebirleri için Reutenauer (1992), Shpilrain (1993) ve Umirbaev (1993) çalışmalarındaki bazı sonuçları serbest Leibniz cebirleri için ispatladılar.

$F_m(N)$ ile sonlu m ranklı serbest sol nilpotent (2.sınıftan) Leibniz cebirlerini gösterelim. Bu cebirler 2002’ de Drensky, Piacentini Cattaneo tarafından tanımlanmıştır. $F_m(N)$ nin izomorfizmleri Drensky, Papistas(2005) tarafından bulunmuştur.

Bu çalışmada öncelikle yapılan çalışmalar incelenerek Leibniz cebirlerle ilgili tanım ve teoremler verildi. Daha sonra Drensky, Cattaneo (2002) ve Drensky, Papistas (2005) makalelerini kaynak olarak kullanarak $F_m(N)$ nin yapısı, otomorfizmleri ve sabit nokta altcebirleri incelendi. Son olarak Drensky, Papistas (2005)de verilen otomorfizmler kullanılarak bu otomorfizmlerin sabit noktalar kümesi çeşitli hesaplamalar yapılarak elde edildi.

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmamın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aőamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygı değer hocam Doç.Dr.Zeynep Özkurt' a sonsuz őükran ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bugüne kadar beni sürekli destekleyen ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
3. SERBEST CEBİRLER	15
4. IA OTOMORFİZMLER.....	23
5. OTOMORFİZMLER	39
6. SABİT NOKTALAR	55
6.1. $F_m(N)$ de Bir Otomorfizmin Sabit Noktaları.....	59
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	83



1. GİRİŞ

K bir cisim, L , $[,]$ braket çarpımı ile bir K -cebiri olsun. Eğer L nin her x, y elemanı için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliği sağlanıyorsa, L bir sağ Leibniz cebiri ve eğer L nin her x, y elemanı için

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

özdeşliği sağlanıyorsa, L bir sol Leibniz cebiridir.

U homojen bir T -ideal Leibniz cebir varyetesi ve $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen U varyetesine sahip m ranklı göreceli (relatively) serbest Leibniz cebiri $F_m(U)$ olsun. $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ den $F_m(U)$ ya olan herhangi bir dönüşüm $F_m(U)$ nun bir cebir endomorfizmasına genişletilebilir. $GL(m, K)$, K üzerinde genel lineer grup olmak üzere her $g = (g_{ij}) \in GL(m, K)$ için

$$g : x_j \longrightarrow \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i, \quad j: 1, \dots, m$$

olacak şekilde dönüşüm, $F_m(U)$ nun bir cebir otomorfizmine genişletilebilir. O zaman $GL(m, K)$, $Aut(F_m(U))$ nun bir alt grubu olarak düşünülebilir. $x_2, \dots, x_m$ 'ye bağlı her $u \in F_m(U)$ için, $F_m(U)$ nun bir τ_u endomorfizmini şu şekilde yazabiliriz.

$$\tau_u(x_1) = x_1 + u, \quad \tau_u(x_j) = x_j, \quad j = 2, \dots, m$$

$\tau_{-u}(x_1) = x_1 - u$, $\tau_{-u}(x_j) = x_j$ olmak üzere ;

$$\tau_u \circ \tau_{-u}(x_1) = \tau_u(x_1 - u) = x_1 + u - u = x_1 ,$$

$$\tau_u \circ \tau_{-u}(x_j) = x_j \quad \text{ve}$$

$$\tau_{-u} \circ \tau_u(x_1) = \tau_{-u}(x_1 + u) = x_1 - u + u = x_1 ,$$

$\tau_{-u} \circ \tau_u(x_j) = x_j$ olduğundan $(\tau_u)^{-1} = \tau_{-u}$ ve $\tau_{-u} \in \text{Aut}(F_m(U))$ dur. $\text{GL}(m, K)$ ve yukarıda verilen τ_u otomorfizmleri tarafından üretilen T , $F_m(U)$ nun tame otomorfizm grubu olarak adlandırılır. T ye ait olmayan bir otomorfizm wild veya non-tame olarak adlandırılır.

$F_m(U)$ nun IA- otomorfizmleri , $F_m(U)$ nun $F_m(U) / F_m(U)'$ bölüm

cebirinde birim dönüşümdür. O halde, $\text{Aut}(F_m(U))$, $\text{IA}(F_m(U))$ nın $\text{GL}(m, K)$ ile yarı direk çarpımıdır. Rankı 2 olan F_2 serbest Leibniz cebiri Abdykhalikov ve arkadaşları tarafından 2001' de incelenmiş ve bu makalede F_2 'de tame otomorfizmi belirlemek için bir algoritma bulunmuştur. Ayrıca F_2 nin ,

$$x_1 \longrightarrow x_1 + [[x_2, x_2], x_1] , \quad x_2 \longrightarrow x_2$$

şeklinde tanımlanan otomorfizminin wild olduğu gösterilmiştir.

Rank $m > 2$ iken F_m serbest Leibniz cebirlerinin sonlu wild otomorfizmlere sahip olup olmadığı hala bilinmemektedir. $[x, [y, z]] = 0$ sol nilpotentlik özdeşliği ile tanımlı Leibniz cebirlerinin N varyetesindeki cebirlerin otomorfizmleri Drensky ve Papistas (2005) tarafından bulunmuştur. $F(N)$ ile rankı 1 den büyük serbest sol nilpotent (2.sınıftan) Leibniz cebirlerini, $F_m(N)$ ile sonlu m ranklı serbest sol nilpotent (2.sınıftan) Leibniz cebirlerini gösterelim. Bu cebirler 2002' de Drensky, Piacentini Cattaneo tarafından tanımlanmıştır. Burada Leibniz cebirlerinin tüm 2.sınıftan sol nilpotent varyetesinin listesi ve tanımı verilmiştir.

Biz bu çalışmada öncelikle Drensky, Papistas(2005) ve Drensky, Cattaneo (2002) makalelerini inceleyerek $F_m(N)$ nin yapısı, otomorfizmleri ve sabit noktalar altcebirleri ile ilgili bilgileri derledik. Daha sonra Drensky ve Papistas (2005) te verilmiş olan otomorfizmleri kullanarak bu otomorfizmlerin sabit nokta kümelerini çeşitli hesaplamalar yaparak elde ettik.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde çalışmamızda kullanmış olduğumuz bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $F_m(N)$ serbest cebirinin yapısı incelenmiştir. Serbest Leibniz cebirlerinin taşınabilir (tame) ve taşınamaz (wild) otomorfizmleri tanımlanmış ve teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde IA otomorfizmlerin yapısı matrisler yardımıyla incelenmiştir.

Beşinci bölümde $F_m(N)$ otomorfizmleri ile ilgili önerme ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde ise sabit noktalar cebiri ile ilgili gerekli önerme ve teoremler incelenmiş, $F_m(N)$ de bir otomorfizmin sabit noktası tanımlanmış, verilen otomorfizmlerin sabit noktaları uzun hesaplamalar sonucunda elde edilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezimizde gerekli olacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1: K boş olmayan bir küme olmak üzere $K \times K$ den K ye tanımlı bir

$$* : K \times K \rightarrow K, (a, b) \rightarrow a * b$$

fonksiyona K üzerinde bir ikili işlem denir.

Tanım 2.2: G boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer,

(i) $*$ işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani, her $a, b, c \in G$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ ise}$$

(ii) Her $a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (e ye G nin birim elemanı denir)

(iii) Her $a \in G$ için

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak şekilde bir $a' \in G$ varsa (a' ne a nın ters elemanı denir) o zaman $(G, *)$ sıralı ikilisine bir grup denir.

Eğer $(G, *)$ grubunda fazladan her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise bu gruba değişmeli denir.

Tanım 2.3: G ve H iki grup ve $\varphi : G \rightarrow H$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a, b \in G$

için

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$$

ise φ ye G den H ye bir grup homomorfizması denir. Eğer ek olarak φ birebir ise φ ye bir grup monomorfizması; φ örten ise φ ye bir grup epimorfizması ve φ hem birebir hem de örten ise φ ye bir grup izomorfizması denir. Ayrıca φ , G den G ye bir izomorfizma ise φ ye G nin bir otomorfizması denir.

Tanım 2.4: $\varphi : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun.

$$\text{Ker}(\varphi) = \{ g \in G \mid \varphi(g) = e_H \}$$

kümesine φ nin çekirdeği denir.

Tanım 2.5: G bir grup ve H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise o zaman H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.6: G bir grup ve N , G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$g N g^{-1} = N$$

ise N ye G nin bir normal alt grubu denir.

Tanım 2.7: Bir grubun her bir elemanının derecesi bir p asal sayısının kuvveti şeklinde ise bu gruba p grubu denir. Bu grubun sonlu sayıda elemanı varsa sonlu p -grubu denir.

Tanım 2.8: R boş olmayan bir küme olsun. R üzerinde " $+$ " ve " $\cdot$ " ikili işlemleri verilsin. Eğer

(i) $(R, +)$ bir değişmeli grup ise

(ii) R çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahipse; yani her $a, b, c \in R$ için

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ise,

(iii) R üzerinde dağılma özellikleri sağlanırsa; yani her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

ise $(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne bir halka denir.

Eğer her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise halkaya değişmeli halka denir. R nin toplamsal birimi 0_R ile gösterilir ve buna R nin sıfırı denir. Eğer her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa 1_R elemanına halkanın birim elemanı ve halkaya da birimli halka denir.

Tanım 2.9 : R bir halka, x bir bilinmeyen, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ ve $a_i \in R$ olmak üzere;

$$a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

şeklindeki formal toplamaya R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm bu polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{ a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \text{ ve } a_i \in R \}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan $R[x]$ polinomunda $a_0, a_1, \dots, a_n$ elemanlarına polinomun katsayıları, $a_n \neq 0$ olmak üzere en büyük n sayısına polinomun derecesi, $a_n x^n$ ye baş terim, a_n ise baş katsayı denir.

R birimli bir halka, x bilinmeyen ve $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \in R[x],$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m \in R[x]$$

olsun.

$$\text{i) } f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^m b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i,$$

$$\text{ii) } f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^m b_i x^i \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k$$

şeklinde tanımlı işlemlerle $(R[x], +, \cdot)$ birimli bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki polinomlar halkası denir. Eğer R değişmeli ise $R[x]$ de değişmelidir.

Katsayıları R de olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerindeki polinomlar halkası

$$R[x_1, x_2, \dots, x_n] = R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}][x_n]$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10: R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $a, b \neq 0$ iken $ab = 0$ ise a ya sol sıfır bölen ve b ye sağ sıfır bölen denir. R nin değişmeli olması durumunda sıfır bölen ifadesi kullanılır.

Tanım 2.11: R birim elemanlı ve değişmeli bir halka olsun. R sıfır bölensiz ise R ye tamlik bölgesi denir.

Tanım 2.12: R birimli, değişmeli bir halka ve sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi varsa o zaman bu halkaya bir cisim denir.

Tanım 2.13: R bir halka, M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere her r, r_1, r_2

$\in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longrightarrow r \cdot m \end{aligned}$$

- i) $r(m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$
- ii) $(r_1 + r_2)m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$
- iii) $(r_1 \cdot r_2)m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$

koşullarını sağlıyorsa M ye bir sol R - modül denir. Eğer her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m, r) &\longrightarrow m \cdot r \end{aligned}$$

- i) $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$
- ii) $m(r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$
- iii) $m(r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

koşullarını sağlıyorsa M ye bir sağ R - modül denir. Bir modül hem sol R - modül hem de sağ R - modül ise kısaca R - modül olarak adlandırılır.

Tanım 2.14: A , bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya bir cebir denir.

i) Her $x, y, z \in A$ için

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \end{aligned}$$

ii) Her $\alpha \in K$ ve her $x, y \in A$ için

$$\alpha (x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$$

Eğer her $x, y, z \in A$ için

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

ise A ya birleşmeli cebir,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

ise A ya değişmeli (abelyen) cebir denir.

Tanım 2.15: $V_1, V_2, \dots, V_r, W$ bir K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayları ol-

sunlar. $F : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \longrightarrow W$ fonksiyonu için $1 \leq i \leq r$ ve $a, b \in K$ olmak üzere ; $F(v_1, v_2, \dots, a\alpha + b\beta, v_{i+1}, \dots, v_r) = aF(v_1, v_2, \dots, \alpha, v_{i+1}, \dots, v_r) + bF(v_1, v_2, \dots, \beta, v_{i+1}, \dots, v_r)$ ise F ye r -lineer fonksiyon denir.

Tanım 2.16: K bir cisim ve $L, [,]$ braket çarpımı ile bir K - cebir olsun. Eğer L nin her x, y, z elemanı için

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

olacak şekilde Leibniz özdeşliğini sağlıyorsa L bir sağ Leibniz cebiri ve eğer L nin her x, y, z elemanı için

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

özdeşliğini sağlıyorsa L bir sol Leibniz cebiridir denir.

Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir. Eğer bir Leibniz cebiri $[x, x] = 0$ antikomutatıflik özelliğine sahipse o zaman Leibniz özdeşliği

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

şeklindeki Jacobi özdeşliğine indirgenebilir. Böylece Lie cebirleri, Leibniz cebirlerinin özel bir durumudur.

Bu çalışmadaki Leibniz cebirleri sağ Leibniz cebirleri olarak düşünülecektir.

Örnek 2.17: Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir.

Tanım 2.18: V, K cismi üzerinde Lie cebirlerinin bir sınıfı ve L, V sınıfında bir

Leibniz cebiri olacak şekilde nonasosyatif polinomların bir koleksiyonu V olsun.

Eğer bir $\{v \equiv 0 \mid v \in V\}$ özdeşlik bağıntıları kümesi mevcut ve L Leibniz cebiri bu küme üzerindeki tüm özdeşlik bağıntılarını sağlıyorsa V sınıfına bir varyete denir.

Tanım 2.19: L_1 ve L_2 , K cismi üzerinde Leibniz cebirleri olsun. $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in L_1$ için

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

braket çarpımı korunuyorsa φ ye Leibniz cebir homomorfizmi denir. φ örten ise epimorfizm olarak adlandırılır. φ , 1-1 ve örten ise izomorfizm olarak adlandırılır.

Eğer $L_1 = L_2$ ise φ bir otomorfizmdir.

L Leibniz cebirinin tüm otomorfizmler grubunu $\text{Aut } L$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.20: Bir L Leibniz cebiri verildiğinde aşağıdaki seriler tanımlanabilir.

$$L^{<1>} = L, \quad L^{<n+1>} = [L, L^{<n>}];$$

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}];$$

$$L^1 = L, \quad L^{n+1} = [L^1, L^n] + [L^2, L^{n-1}] + \dots + [L^{n-1}, L^2] + [L^n, L^1]$$

- a) Bir L Leibniz cebiri eğer bir $s \in \mathbb{N}$ için $L^{<s>} = 0$ oluyorsa sol nilpotent olarak isimlendirilir.
- b) Bir $m \in \mathbb{N}$ için $L^{[m]} = 0$ oluyorsa L çözülebilirdir. Bu tamsayıların en küçüğüne çözülebilirlik indeksi denir.
- c) $n \in \mathbb{N}$ için eğer $L^n = 0$ ise L ye nilpotent denir. Bu şekildeki en küçük sayıya nilpotentluk indeksi denir.

Tanım 2.21: L, X üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. Eğer bir n doğal sayısı için $L = F / F^n$ olacak şekilde X üzerinde bir F serbest Leibniz cebiri varsa L ye serbest nilpotent Leibniz cebiri denir.

Tanım 2.22: F / F^n serbest nilpotent Leibniz cebiri ve F' / F^n de F / F^n nin türetilmiş alt cebiri olsun. $\text{Aut}(F / F^n)$ nin modülo F' / F^n ne göre birim olan elemanına IA otomorfizmi denir. F / F^n serbest nilpotent Leibniz cebirinin IA otomorfizmler grubunu $IAut(F / F^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.23: $\alpha, F / F^n$ cebirinin $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \longrightarrow y_i$ şeklinde tanımlanan bir otomorfizmi olsun. Eğer $v_i \in F^n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\bar{\alpha}: x_i \longrightarrow y_i + v_i$ olacak şekilde F' nin bir $\bar{\alpha}$ otomorfizmi varsa α ' ya tame otomorfizmi denir. Bu durumda “ α, F' nin bir otomorfizmine taşınabilir (tame)” denir. Eğer α taşınabilir değilse (wild) otomorfizm olarak adlandırılır.



3. SERBEST CEBİRLER

K bir cisim, g bir Leibniz cebiri olsun. $x, y, z \in g$ için,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşliği her komütatörü sol normlu komütatörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazmamıza izin verir. $n \geq 3$ için ,

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

notasyonunu kullanacağız. g Leibniz cebirinin komütatör idealini g' ile $a \in g$ olmak üzere $g / \langle [a, a] \rangle$ ile elde edilen Lie cebirini g_{Lie} ile göstereceğiz. X boş olmayan bir küme, F bir Leibniz cebiri ve $i: X \rightarrow F$ bir fonksiyon olsun.

Eğer her g Leibniz cebiri ve $\alpha: X \rightarrow g$ dönüşümü için

$$\begin{array}{ccc} & i & \\ X & \xrightarrow{\quad} & F \\ \alpha \swarrow & & \searrow \eta \\ & g & \end{array}$$

$\alpha = \eta \circ i$ olacak şekilde bir tek $\eta: F \rightarrow g$ Leibniz homomorfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde bir serbest Leibniz cebiri denir. O zaman X e F 'nin serbest üreteçleri denir. Eğer V, X tabanlı vektör uzayıysa, o zaman Loday ve Pirashvili (1993) F serbest Leibniz cebiri tensör modülü olarak tanımlanabilir. V, X bazı ile bir vektör uzayı olsun.

$$T(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$$

$$[x, v] = x \otimes v, [x, y \otimes v] = [x, y] \otimes v - [x \otimes v, y], \text{ tüm } x, y \in T(V), v \in V$$

için tanımlanan özellikler ile V üzerinde serbest Leibniz cebiridir.

F_m ile $\{x_1, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen m ranklı serbest Leibniz cebiri ve F_∞ ile $x_1, x_2, \dots$ tarafından üretilen serbest Leibniz cebiri gösterelim. Loday ve Pirashvili (1993) F_∞ ' un bir vektör uzayı olarak tüm sol normlu $[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ komütatörlerini içeren bir baza sahip olduğunu göstermiştir.

Tanım 3.1: $\{u_i(x_1, \dots, x_{n_i}) : i \in I\} \subset F_\infty$ olmak üzere $u_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ özdeşliğini sağlayan tüm Leibniz cebirlerinin bir sınıfını U ile ve U nun fully invariant idealini $\bar{U}$ ile gösterelim. $F_\infty(U) = F_\infty / \bar{U}$ bölüm cebiri ve onun alt cebiri olan $F_m(U) = F_m / F_m \cap \bar{U}$ ya U da relatively serbest cebirler denir.

Tanım 3.2: F_∞ un bir f eleman eğer aynı dereceli sol normlu komütatörlerin bir lineer kombinasyonu ise f ye homojen denir. Eğer bazı pozitif k ve negatif olmayan $n_1, \dots, n_k$ için $f, i=1, \dots, k$ içerisindeki x_i ' nî lerin derecesi n_i ve diğer değişkenlerin derecesi 0 olan sol normlu komütatörlerin bir lineer bileşimi ise, çoklu homojen denir. Yukarıda tanımladığımız U varyetesine, U idealinin her elemanı çoklu homojen elemanların bir toplamı ise, çoklu homojen denir. Aşağıdaki sonuç Lie cebirlerindeki benzer argümanları kullanılarak (bakınız, örneğin Bahturin, 1985, Bölüm 4) ispatlanabilir.

Önerme 3.3: Leibniz cebirlerinin bir çoklu homojen V varyetesinin bir serbest Leibniz cebiri modülo türetilmiş cebire göre; lineer bağımsız olan bir üreteç kümesi tarafından serbestçe üretilmiştir.

$[x, [y, z]] = 0$ özdeşliğini sağlayan Leibniz cebirlerinin sınıfını N ile gösterelim.

$F_\infty(N)$ ile rankı birden büyük X kümesi tarafından üretilen serbest sol nilpotent

Leibniz cebirini, $F_m(N)$ ile $\{x_1, \dots, x_m\}$ kümesi tarafından üretilen serbest sol nil-

potent Leibniz cebirini gösterelim.

$$[x, [y, z]] = 0 \text{ olduğundan;} \quad (3.1)$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y] = 0$$

$$[[x, y], z] = [[x, z], y]$$

$$[x, y, z] = [x, z, y] \quad (3.2)$$

dir.

$(F_m(N))_{Lie}$ ile de $\{x_1, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen serbest nilpotent (2.sınıfta) Lie cebirini gösterelim. Önerme (3.3) (2) den ve Önerme (3.1.1) den $K[x_1, \dots, x_m]$ polinom cebiri $F_m(N)$ ye sağdan etki eder ve $F_m(N)\{x_1, \dots, x_m\}$ bazı ile birlikte serbest sağ $K[x_1, \dots, x_m]$ modüldür. $u = x_{i_1} \dots x_{i_k} \in K[x_1, \dots, x_m]$ $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ için $[x_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \in F_m(N)$ yi $x_j.u$ şeklinde gösteririz ve bu notasyonu her $u \in K[x_1, \dots, x_m]$ için genişletebiliriz.

Aşağıda Leibniz cebirlerinin bazı spesifik özellikleri verilmiştir. Öncelikle küçük boyutlu Leibniz cebirlerinin tanımını Loday (1993) verilen şekliyle özetleyelim.

Önerme 3.4: L sonlu boyutlu bir Leibniz cebiri olsun.

- (1) boy $L = 1$ ise, L bir değişmeli Lie cebiridir.
- (2) boy $L = 2$ ise, L aşağıdaki cebirlere izomorfiktir.

- (i) iki boyutlu Lie cebirlerinden biri değişmeli Lie cebiri ve diğeri $[b,a] = [a,b] = b$ ile tanımlanan değişmeli olmayan Lie cebiri
- (ii) $\{a, [a, a]\}$ bazları ve $[a, a, a] = 0$ bağıntısı ile tanımlanan cebir, 2. sınıftan nilpotenttir, yani $[x, y, z] = 0$ dır.
- (iii) a, b tarafından üretilen ve $[b,a] = [a, a] = b$ bağıntısı ile tanımlanan cebir Kb, L 'de bir idealdir ve $L, [x,[y,z]] = 0$ sol nilpotentlik koşulunu sağlar.

Tüm iki boyutlu Leibniz cebirleri metabelyendir, yani $[[x,y], [z,t]] = 0$ metabelyen polinom özdeşliğini sağlar.

İspat :

Tek boyutlu durum açıktır. Çünkü bazı $\alpha \in K$ için $[a,a] = \alpha a$ ise, $0 = [a, [a, a]] = \alpha^2 a$ ve $\alpha = 0$ dır. Boy $L = 2$ ve $\{a,b\}$, L için bir baz olsun. Her $c \in L$ için $[c,c] = 0$ ise, o zaman L bir Lie cebiridir ve bu ise (i) durumudur. Şimdi $[a,a] \neq 0$ olsun. $[a,a]$ a'ya eşit olamayacağı için $\{a, b\}$ tabanını $[a, a] = b$ olacak şekilde seçebiliriz. Leibniz özdeşliğinin tekrarlı kullanımından $[a, a] = b$, $[b,a] = \beta$ bazı $\beta \in K$ ve $[L,b] = 0$ için elde edilir. $\beta = 0$ durumu (ii)'yi verir. Aksi takdirde, a'yı $\beta^{-1}a$ ile değiştirerek (iii) ü elde ederiz. Açıkça, yukarıda listelenen tüm cebirler metabelyen özdeşliğini sağlar.

Leibniz cebirlerinin aşağıdaki yapıları Drensky, Cattaneo (2002) de verilmiştir.

Önerme 3.5: $K[T] = K[t_1, t_2, \dots]$ sayılabilir çoklukta değişmeli değişkenlerle polinom cebiri ve

$$M_1 = a K[T], M_2 = a K[T] \oplus \bigoplus_{i \geq 2} u_i a K[T]$$

sırasıyla a ve $\{a, u_i a \mid i = 1, 2, \dots\}$ tarafından üretilen serbest sağ $K[T]$ - modülleri olsunlar. $L_1 = M_1 \oplus K[T]$ ve $L_2 = M_2 \oplus K[T]$ vektör uzaylarını alalım. L_1 de çarpmayı

$$[M_1, M_1] = [T, M_1] = [T, T] = 0, [ah(T), t_i] = ah(T)t_i, \\ h(T) \in K[T], i = 1, 2, \dots$$

ve L_2 de çarpmayı

$$[M_2, M_2] = [T, T] = 0, \\ [ah(T), t_i] = ah(T)t_i, [u_j ah(T), t_i] = u_j ah(T)t_i, \\ [t_i, ah(T)] = u_i ah(T), [t_i, u_j ah(T)] = u_i ah(T)t_j \in K[T], i, j = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman L_1 ve L_2 Leibniz cebirleridir. L_1 , $[x, [y, z]] = 0$ polinom özdeşliğini ve L_2 , $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$ polinom özdeşliğini sağlar.

İspat: $[L_1, L_1] = [M_1, T] + [T, M_1] \subseteq M_1$ olduğundan, Leibniz özdeşliğinin sağlandığını üç durum için inceleyelim.

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşliğinden ;

(1) $x = ah(T)$ veya $x = u_k ah(T)$ ve $y = t_i, z = t_j$, o zaman

$$[ah(T), [t_i, t_j]] = [[ah(T), t_i], t_j] - [[ah(T), t_j], t_i] \\ = [ah(T), t_i, t_j] - [ah(T), t_j, t_i] = 0$$

$$[u_k ah(T), [t_i, t_j]] = [[u_k ah(T), t_i], t_j] - [[u_k ah(T), t_j], t_i] \\ = [u_k ah(T)t_i, t_j] - [u_k ah(T)t_j, t_i] = 0$$

(2) $x = t_i, y = ah(T)$ veya $y = u_k ah(T)$ ve $z = t_j$, o zaman

$$[t_i [ah(T), t_j]] = [[t_i, ah(T)], t_j] - [[t_i, t_j], ah(T)] = [0, t_j] - [0, ah(T)] = 0$$

$$\begin{aligned} [t_i [u_k ah(T), t_j]] &= [[t_i, u_k ah(T)], t_j] - [[t_i, t_j], u_k ah(T)] \\ &= [0, t_j] - [0, u_k ah(T)] = 0 \end{aligned}$$

(3) $x = t_i, y = t_j$ ve $z = ah(T)$ veya $z = u_k ah(T)$, o zaman

$$[t_i, [t_j, ah(T)]] = [[t_i, t_j], ah(T)] - [[t_i, ah(T)], t_j] = [0, ah(T)] - [0, t_j] = 0$$

$$\begin{aligned} [t_i, [t_j, u_k ah(T)]] &= [[t_i, t_j], u_k ah(T)] - [[t_i, u_k ah(T)], t_j] \\ &= [0, u_k ah(T)] - [0, t_j] = 0 \end{aligned}$$

$[L_2, L_2] = [M_2, T] + [T, M_2] \subseteq M_2$ olduğundan, Leibniz özdeşliğinin sağlandığını üç durum için incelemek yeterlidir.

(1) $x = ah(T)$ veya $x = u_k ah(T)$ ve $y = t_i, z = t_j$, o zaman

$$[ah(T), [t_i, t_j]] = [[ah(T), t_i], t_j] - [[ah(T), t_j], t_i] = -u_i ah(T)t_j$$

$$[u_k ah(T), [t_i, t_j]] = [[u_k ah(T), t_i], t_j] - [[u_k ah(T), t_j], t_i] = -u_i ah(T)t_j t_k$$

$$[u_k ah(T), t_i], t_j] = [[u_k ah(T), t_i], t_j] - [[u_k ah(T), t_j], t_i] = -u_i ah(T)t_j t_k$$

(2) $x = t_i, y = ah(T)$ veya $y = u_k ah(T)$ ve $z = t_j$, o zaman

$$[t_i [ah(T), t_j]] = [[t_i, ah(T)], t_j] - [[t_i, t_j], ah(T)] = u_i ah(T)t_j,$$

$$[t_i [u_k ah(T), t_j]] = [[t_i, u_k ah(T)], t_j] - [[t_i, t_j], u_k ah(T)] = u_i ah(T)t_k t_j,$$

$$[[t_i [u_k ah(T)], t_j] - [[t_i, t_j] u_k ah(T)]$$

$$= [-u_i ah(T)t_k, t_j] = -u_i ah(T)t_k t_j = [t_i [u_k ah(T), t_j]].$$

(3) $x = t_i, y = t_j$ ve $z = ah(T)$ veya $z = u_k ah(T)$, o zaman

$$[t_i, [t_j, ah(T)]] = [[t_i, t_j], ah(T)] - [[t_i, ah(T)], t_j] = -u_i ah(T)t_j,$$

$$[t_i, [t_j, u_k ah(T)]] = [[t_i, t_j], u_k ah(T)] - [[t_i, u_k ah(T)], t_j] = u_i ah(T)t_j t_k.$$

$[L_2, L_2] \subset M_2$ ve $[M_2, M_2] = 0$ olduğundan, L_2 'nin $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$ polinom özdeşliğini sağladığını elde ederiz.

$F_m(N)$ serbest nilpotent Leibniz cebirinin baz kümesi aşağıdaki önerme ile Drensky, Cattaneo (2002) de verilmiştir.

Önerme 3.6: $F_m(N)$ serbest nilpotent Leibniz cebiri

$$\{ x_{i_1}, [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \mid 1 \leq i_1 \leq m, 1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m, k = 2, 3, \dots \}$$

bazına sahiptir.

İspat: Leibniz özdeşliği ve $[x, [y, z]] = 0$ özdeşliğinden

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y] = 0$$

$$[[x, y], z] = [x, z], y]$$

$$[x, y, z] = [x, z, y]$$

dir.

Buradan

$$[x, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(k)}] = [x, y_{\sigma(1)}, \dots, y_k], \sigma \in S_k$$

eşitliği elde edilir. Yani, $F_m(N)$ tüm x_i , $i = 1, \dots, m$ ve $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$, $1 \leq i_1 \leq m$, $1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq m$, $k = 2, 3, \dots$ tarafından gerilir. $F_m(N)$ homojen olduğundan, herhangi bir homojen sistemin yukarıdaki şekildeki komütatörlerin lineer bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir.

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$$

$F_m(N)$ 'de, bazıları sıfırdan farklı $\alpha_i = \alpha_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ katsayılarıyla yukarıda verilen monomiallerin bir lineer kombinasyonu olsun. Böyle bir α_i için i_1 ilk indeksi j ye eşit olsun. Önerme 3.5 den L_1 Leibniz cebiri $[x, [y, z]] = 0$ özdeşliğini sağlar ve L_1 'de

$$f(t_1, \dots, t_{j-1}, a + t_j, t_{j+1}, \dots, t_m) = \sum \alpha_i a t_{i_2}, \dots, t_{i_k},$$

burada toplamda, $i_1 = j$ ile tüm $i = (i_1, \dots, i_k)$ şeklindedir. Buradan L_1 de $\sum \alpha_i a_{i_2}, \dots, t_{i_k} \neq 0$ dır.

4. 1A OTOMORFİZMLER

Bu bölümde verilen teorem ve sonuçlar Drensky, Papistas (2005) den alınmıştır. $m \geq 2$ olmak üzere, $P_m = K[x_1, \dots, x_m]$ polinom cebiri ve Ω_m , P_m 'nin genişletme ideali (yani, P_m 'nin sabit terimi hariç tüm polinomları içeren ideali) olsun. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $P_m^{(n)}$, $x_1^{a_1}, \dots, x_m^{a_m}$ monomialleri tarafından gerilen P_m nin alt uzayını gösterebiliriz. Burada $a_1, a_2, \dots, a_m$ negatif olmayan tam sayılar ve $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ dir. Bu durumda $P_m^{(0)} = K$ dir.

Farklı i ve j ($1 \leq i, j \leq m$) ve $v \in P_m$ için $e_{ij}(v)$ köşegen üzerindeki elemanlar 1,

(i, j) deki elemanı v , diğerleri 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisi gösterebiliriz.

$$e_{ij}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & 0 \\ . & v & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 j.sutun

$\leftarrow$
 i.satır

$e_{ij}(-v)$ de $e_{ij}(v)$ nin tersini gösterebiliriz. Bunlar $GL(m, P_m)$ nin elemanter matrisleridir. $E(m, P_m)$ ile elemanter matrisler tarafından üretilen $GL(m, P_m)$ nin altgrubunu gösterelim. $E(m, P_m)$ nin $e_{ij}(v)$ üreteçleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

$u, v \in P_m$ için,

- $e_{ij}(u) \cdot e_{ij}(v) = e_{ij}(u+v)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & . & . \\ 0 & u & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & . & . \\ 0 & v & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & . \\ . & . & . \\ . & u+v & . \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- $i \neq 1$ ve $j \neq k$ ise $(e_{ij}(u), e_{kl}(v)) = 1$

$$e_{ij}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & u & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e_{ij}^{-1}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & -u & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.nci satır $\rightarrow$ $\uparrow$ j.nci sütun

$$e_{kl}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & v & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e_{kl}^{-1}(-v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & -v & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}^{-1}(-u) \cdot e_{kl}^{-1}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & u-v & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}(u) \cdot e_{kl}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & u+v & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}^{-1}(-u) \cdot e_{kl}^{-1}(v) \cdot e_{ij}(u) \cdot e_{kl}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & & \\ 0 & u-v & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- i, j ve k ayrık ise $(e_{ij}(u), e_{jk}(v)) = e_{jk}(uv)$ dir.

$$e_{ij}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u & \dots & 0 \\ \cdot & 1 & & \cdot \\ \cdot & & \dots & \cdot \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}^{-1}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & -u & & 0 \\ \cdot & 1 & & \cdot \\ \cdot & \dots & & \cdot \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{jk}(v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & & v \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e_{jk}^{-1}(-v) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & 1 & . \\ . & \dots & . \\ 0 & .. & -v \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}^{-1}(-u) \cdot e_{jk}^{-1}(v) \cdot e_{ij}(u) \cdot e_{jk}(v) = e_{ik}(uv)$$

Burada; $(a,b) = a^{-1}.b^{-1} \cdot a.b$ a ve b grup komütatörüdür.

Lemma 4.1: $m, (m \geq 2)$ bir pozitif tamsayı olsun. $i, j = 1, \dots, m$ $i \neq j$ ve $u \in \Omega_m$ için $\phi_{ij,u}, F_m(N)$ nin $\phi_{ij,u}(x_i) = x_i + x_j.u$ ve $k \neq i$ için $\phi_{ij,u}(x_k) = x_k$ şeklinde tanımlanan IA-endomorfizmiyse, $\phi_{ij,u} \in IA(F_m(N))$ dir.

İspat:

$$\Psi_{ij,u}(x_i) = x_i - x_j.u$$

$$\Psi_{ij,u}(x_k) = x_k$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım.

$$\Psi_{ij,u} \circ \phi_{ij,u}(x_i) = \Psi_{ij,u}(x_i + x_j.u) = \Psi_{ij,u}(x_i) + \Psi_{ij,u}(x_j \cdot u)$$

$$= x_i - x_j.u + x_j.u$$

$$= x_i$$

$$\phi_{ij,u} \circ \Psi_{ij,u}(x_i) = \phi_{ij,u}(x_i - x_j.u) = \phi_{ij,u}(x_i) - \phi_{ij,u}(x_j \cdot u)$$

$$= x_i + x_j \cdot u - x_j \cdot u$$

$$= x_i$$

olduğundan $\Psi_{ij,u} = \phi_{ij,u}^{-1}$ dir. Böylece $\phi_{ij,u}$, $F_m(N)$ nin $F_m(N) / F_m(N)'$ üzerine etki eden bir otomorfizmdir. $\phi_{ij,u} \in IA(F(N))$ dir.

$f : R \longrightarrow S$ halkaların herhangi bir homomorfizmi olsun. (f dönüşümü R nin birim elemanını S nin birim elemanına götürür.) Bu dönüşüm $m \times m$ matrisi halkalarının

$$f_m : M_{m \times m}(R) \longrightarrow M_{m \times m}(S)$$

homomorfizmini belirler ve $M_{m \times m}(R)$ nin birimini $M_{m \times m}(S)$ nin birimine götürdüğünden bir

$$f_m^* : GL(m, R) \longrightarrow GL(m, S)$$

grup homomorfizmini elde ederiz.

$SL(m, P_m)$ özel lineer grup, $P_m = K[x_1, \dots, x_m]$ polinom cebiri olmak üzere, bileşenleri P_m den gelen, determinantı 1 olan tüm $m \times m$ matrislerin grubudur.

Önerme 4.2 :

i) $m \geq 2$ için $\pi_m : P_m \longrightarrow K$ genişletme homomorfizmi ve $\pi_m^* : GL(m, P_m) \longrightarrow GL(m, K)$ grup homomorfizmi olsun. $H_m = \text{Ker } \pi_m^*$ olsun. O zaman bir $\delta_m(\phi) = I + \phi_{ij}$, $\phi(x_i) = x_i + \sum_{j=1}^m x_j \phi_{ji}$ ($i = 1, \dots, m$) izomorfizmi ile $IA(F_m(N)) \cong H_m$ dir.

ii) $m \geq 3$ için, $E_F(m, \Omega_m)$, $SL(m, P_m)$ nin $\alpha e_{ij}(u) \alpha^{-1}$ formunda matrisler tarafından üretilen alt grubu olsun. Burada $\alpha \in E(m, P_m)$, $u \in \Omega_m$, $i \neq j$ dir.

O zaman $H_m = E_F(m, \Omega_m)$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \phi(x_i) &= x_i + \sum_{j=1}^m x_j \psi_{ji} \\ \psi(x_i) &= x_i + \sum_{j=1}^m x_j \psi_{ji} \end{aligned}$$

Burada $\phi_{ij}, \psi_{ij} \in \Omega_m$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(x_i) &= \phi(\psi(x_i)) = \phi\left(x_i + \sum_{j=1}^m x_j \psi_{ji}\right) \\ &= \phi(x_i) + \phi\left(\sum_{j=1}^m x_j \psi_{ji}\right) \\ &= x_i + \sum_{k=1}^m x_k \cdot \phi_{ki} + \sum_{j=1}^m \phi(x_j) \cdot \psi_{ji} \\ &= x_i + \sum_{k=1}^m x_k \cdot \phi_{ki} + \sum_{j=1}^m (x_j + \sum_{l=1}^m x_l \cdot \phi_{lj}) \cdot \psi_{ji} \\ &= x_i + \sum_{k=1}^m x_k \cdot \phi_{ki} + \sum_{j=1}^m x_j \psi_{ji} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m x_l \cdot \phi_{lj} \psi_{ji} \\ &= x_i + \sum_{k=1}^m x_k (\phi_{ki} + \psi_{kj} + \sum_{j=1}^m (\phi_{lj} \psi_{ji})). \end{aligned}$$

ϕ endomorfizm ve H_m, π_m^* nin çekirdeği olduğundan ve aynı zamanda $\phi_{ij} \in \Omega_m$ olduğundan $\delta_m: IA(F_m(N)) \longrightarrow H_m$, $\delta_m(\phi) = I + (\phi_{ij})$ δ_m , grup izomorfizmi-dir.

$$\begin{aligned} \text{(ii) (i) den} \quad \delta_m: IA(F_m(N)) &\longrightarrow H \\ \phi &\longrightarrow I + (\phi_{ij}), \end{aligned}$$

$I + (\phi_{ij})$ matrisi $SL(m, P_m)$ nin elemanıdır. $H_m, SL(m, P_m)$ nin alt grubudur.

(Suslin 1977) $SL(m, P_m) = E(m, P_m)$ dir. $\alpha \in H_m$ olsun.

$\alpha = E_1(u_1) \dots E_r(u_r)$ olur.

Burada $E_i(u_i)$, $i=1, \dots, r$ elementer matris, $u_1, u_2, \dots, u_r \in P_m$ dir.

$a_i \in K$, $v_i \in \Omega_m$ olmak üzere her $u_i = a_i + v_i$ olarak yazalım.

$e_{ij}(u) \cdot e_{ij}(v) = e_{ij}(u+v)$ özelliğinden,

$$E_i(u_i) = E_i(a_i + v_i) = E_i(a_i) \cdot E_i(v_i)$$

H_m , π_m^* nin çekirdeği olduğundan $\pi_m^*(\alpha) = I \in GL(m, K)$ dir.

$$\pi_m^*(\alpha) = \pi_m^*(E_1(u_1) \dots E_r(u_r)) = E_1(a_1) \cdot E_2(a_2) \dots E_r(a_r) \text{ ve } I = E_1(a_1) \cdot$$

$$E_2(a_2) \dots E_r(a_r) \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \alpha = E_1(u_1) \dots E_r(u_r) &= E_1(a_1 + v_1) \cdot E_2(a_2 + v_2) \dots E_r(a_r + v_r) \\ &= E_1(a_1) E_1(v_1) E_2(a_2) E_2(v_2) \dots E_r(a_r) E_r(v_r) \\ &= E_1(a_1) E_1(v_1) E_1(a_1)^{-1} E_1(a_1) E_2(a_2) E_2(v_2) E_2(a_2)^{-1} E_1(a_1)^{-1} \\ &\quad E_1(a_1) \dots E_r(a_r) E_r(v_r) E_r(a_r)^{-1} E_r(a_r) \\ &= (E_1(a_1) E_1(v_1) E_1(a_1)^{-1}) \cdot (E_1(a_1) E_2(a_2) E_2(v_2) E_2(a_2)^{-1} \\ &\quad E_1(a_1)^{-1} \cdot (E_1(a_1) E_2(a_2) E_3(a_3) E_3(v_3) \dots E_r(a_r) E_r(v_r) \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edersek,

$$\begin{aligned} \alpha &= (E_1(a_1) \cdot E_1(v_1) \cdot E_1(a_1)^{-1}) \cdot (E_1(a_1) \cdot E_2(a_2) \cdot E_2(v_2) \cdot E_2(a_2)^{-1} E_1(a_1)^{-1}) \dots \\ &\quad \dots (E_1(a_1) \dots E_r(a_r)) \cdot E_r(v_r) (E_1(a_1) \dots E_r(a_r))^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

Suslin, 1977, sonuç 1.4 den, $E_F(m, \Omega_m)$, $GL(m, P_m)$ nin bir normal alt grubu olduğundan $\alpha \in E_F(m, \Omega_m)$ ve $H_m \subseteq E_F(m, \Omega_m)$ dir. H_m , $GL(m, P_m)$ nin ideali olarak adlandırılır. $E_F(m, \Omega_m) \subseteq H_m$ olduğunu göstermek için P_m üzerindeki her α elemanter matrisi, $u \in \Omega_m$ ve $i \neq j$ için $\alpha e_{ij} \alpha^{-1} \in H_m$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu dört durumda inceleyelim:

Durum 1:

$j \neq k, i \neq t$ ve $v \in P_m$ için, $\alpha = e_{kl}(-v)$ olsun. O halde, $\alpha^{-1} = e_{kl}(v)$ dir.

$(e_{ij}(u), e_{kl}(v)) = 1$ özelliğinden ve $(a, b) = a^{-1} b^{-1} a b$ den

$$(e_{ij}(u), \alpha^{-1}) = 1$$

$$1 = e_{ij}^{-1}(u) \cdot (\alpha^{-1})^{-1} \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} \\
&= e_{ij}(-u) \cdot e_{kl}(-v) \cdot e_{ij}(u) \cdot e_{kl}(v) \\
&= e_{ij}^{-1}(u) \cdot (\alpha^{-1})^{-1} \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1}
\end{aligned}$$

$e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = 1$ eşitliğin her iki yanını $e_{ij}(u)$ ile çarpılırsa,

$e_{ij}(u) \cdot e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ij}(u) \cdot 1$ ve buradan

$$\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ij}(u) \quad \text{elde edilir.}$$

Durum 2:

i, j, k farklı ve $v \in P_m$ için, $\alpha = e_{jk}(-v)$ olsun. $(e_{ij}(u), e_{jk}(v)) = e_{ik}(uv)$

özelliklerinden ve $(a, b) = a^{-1} b^{-1} a b$ den

$$\begin{aligned}
(e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1}) &= e_{ij}^{-1}(u) \cdot (\alpha^{-1})^{-1} \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} \\
&= e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} \\
&= e_{ij}(-u) \cdot e_{jk}(-v) \cdot e_{ij}(u) \cdot e_{jk}^{-1}(-v) \\
&= e_{ik}(uv)
\end{aligned}$$

$$(e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1}) = e_{ik}(uv)$$

$$e_{ij}^{-1}(u) \cdot (\alpha^{-1})^{-1} \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ik}(uv)$$

$$e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ik}(uv)$$

$$e_{ij}(u) \cdot e_{ij}(-u) \cdot \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ij}(u) \cdot e_{ik}(uv)$$

$$\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ij}(u) \cdot e_{ik}(uv)$$

Durum 3:

$v \in P_m$ için, $\alpha = e_{ji}(-v)$ olsun. $1 \leq i, j \leq m$ olacak şekilde farklı i, j sayıları için $\varepsilon_{ij}, (i, j)$ bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisi gösterebiliriz.

Burada $u \in \Omega_m$ için, $e_{ij}(u) = I + u \cdot \varepsilon_{ij}$ dir. Eğer,

$$j = k \text{ ise } \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il} \text{ ve}$$

$$j \neq k \text{ ise } \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = 0 \text{ ile gösterilir. Fakat}$$

$\alpha. e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = I + u\varepsilon_{ij} + v\varepsilon_{ji} + (-v^2u) \cdot \varepsilon_{ji}$ dir.

$$e_{ij}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & \\ 0 & u & .. & 0 \\ . & \dots & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & 0 \\ . & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u & .. & 0 \\ . & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I + u \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I + u \cdot \varepsilon_{ij}$$

- $J=k$ ise ; $\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & . \\ \dots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & . \\ 0 & \dots & \\ 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & 0 \\ 1 & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{il}$$

(j=k)

- $j \neq k$ ise; $\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = 0$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & . \\ \dots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & . \\ 0 & \dots & \\ 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ . & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = I + u \varepsilon_{ij} + vu (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) + (-v^2 u) \cdot \varepsilon_{ji}$$

$$\alpha = \varepsilon_{ji}(-v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & -v & \dots & 0 \\ 0 & .. & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha^{-1} = \varepsilon_{ji}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ .. & 1 & \dots & 0 \\ . & v & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \\ \dots & & u \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & -v & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & u \\ . & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & v & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & u \\ . & -v & \dots & 1-uv \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & 0 \\ . & v & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ .. & 1+uv & \dots & u \\ . & -uv^2 & \dots & 1-uv \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \\
&= I + u \varepsilon_{ij} + vu (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) + (-v^2u) \cdot \varepsilon_{ji} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & \dots & 1 \\ . & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} + vu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & 0 & .. & 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} + -v^2u \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+uv & \dots & u \\ \vdots & -uv^2 & \dots & 1-uv \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Durum 4:

$k \neq i$ ve $v \in P_m$ için, $\alpha = e_{ij}(-v)$ veya $\alpha = e_{kj}(-v)$ olsun.

$$\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = e_{ij}(u) \quad (1)$$

$\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} = I + u \cdot \varepsilon_{ij} + vu(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) + (-v^2u) \cdot \varepsilon_{ji}$ Durum 1 in sonucundan ve Durum 4 ün (1) den $I + u \cdot \varepsilon_{ij} + vu(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) + (-v^2u) \cdot \varepsilon_{ji} \in H_m$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$F_m(N)$ nin bir ϕ IA-endomorfizmi, her $k \neq i, j$ için

$$\phi(x_i) = x_i \cdot (1+vu) + x_j(-v^2u)$$

$$\phi(x_j) = x_i \cdot u + x_j \cdot (1-vu)$$

$$\phi(x_k) = x_k$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= x_i(1+vu) + x_j(-v^2u) = x_i + x_i(vu + x_j(-v^2u)) \\ &= x_i + x_i u - x_j v u \end{aligned}$$

$$\phi(x_j) = x_i \cdot u + x_j \cdot (1-vu)$$

$$\phi(x_k) = x_k$$

$$\phi^{-1}(x_i) = x_i - x_i v u - x_j(-v^2u)$$

$$\phi^{-1}(x_j) = x_j - x_i u + x_j v u$$

$$\phi^{-1}(x_k) = x_k$$

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi^{-1}(x_i) &= \phi(x_i - x_i v u - x_j(-v^2u)) = x_i + x_i v u + x_j(-v^2u) - x_i v u \\ &\quad - x_j(-v^2u) \\ &= x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi \circ \phi^{-1}(x_j) &= \phi(x_j - x_i u + x_j v u) = x_j + x_i u - x_j v u - x_i u + x_j v u \\ &= x_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi \circ \phi^{-1}(x_k) &= \phi(x_k) \\ &= x_k\end{aligned}$$

Benzer şekilde ,

$$\begin{aligned}\phi^{-1} \circ \phi(x_i) &= x_i \\ \phi^{-1} \circ \phi(x_j) &= x_j \\ \phi^{-1} \circ \phi(x_k) &= x_k\end{aligned}$$

dır.

Buradan $\phi, F_m(N)$ nin IA- otomorfizmidir. $\delta_m(\phi) = I + \phi_{ij}$ den, $\delta_m(\phi) = \alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1}$, $\alpha \cdot e_{ij} \cdot \alpha^{-1} \in H_m$ dir. Önerme 4.2 (i) den $\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} \in H_m$ dir.

Bu yüzden $E_F(m, \Omega_m) \subseteq H_m$ dir. $H_m \subseteq E_F(m, \Omega_m)$ olduğu gösterilmiştir. Buradan $E_F(m, \Omega_m) = H_m$ dir. Böylece istenilen sonuç bulunmuş olur. $GL(m, K) \cap IA(F_m(N)) = \{1\}$ ve $IA(F_m(N)), Aut(F_m(N))$ nin normal alt grubu olduğundan $Aut(F_m(N)), IA(F_m(N))$ ile $GL(m, K)$ 'nin yarı direkt çarpımıdır. $Aut(F_m(U)) \cong IA(F_m(U)) \rtimes GL(m, K)$ dir.

Böylece her $\alpha \in F_m(N)$ için $\alpha = \phi \circ g$ olarak tek bir şekilde yazılır. Burada $\phi \in IA(F_m(N))$, $g \in GL(m, K)$ dir. $GL(m, K), P_m$ üzerine cebir otomorfizlerinin bir grubu olarak soldan etki eder. $g = (g_{ij}) \in GL(m, K)$ ve $f \in P_m$ için, $GL(m, K)$ nin P_m üzerindeki etkisini $g \Delta f$ ile gösterelim.

$j = 1, \dots, m$ için,

$$g \Delta x_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} \cdot x_i \text{ olsun.}$$

$b \in GL(m, K)$ ve $\phi, F_m(N)$ nin bir IA-otomorfizmi olmak üzere

$$\delta_m(b \circ \phi \circ b^{-1}) = I + b(b \Delta \phi_{ij})b^{-1} \text{ dir.}$$

Örnek: $b \in GL(m, K)$ $\phi \in IA(F_m(N))$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$b(x_1) = x_1 + x_2 \quad \phi(x_1) = x_1 + x_2 u, \quad j \neq 1, \quad u \text{ } x_1 \text{ içermesin.}$$

$$b(x_j) = x_j, \quad j \neq 1 \quad \phi(x_k) = x_k, \quad k \neq 1, 2$$

O zaman

$$b^{-1}(x_1) = x_1 - x_2$$

$$b^{-1}(x_j) = x_j$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\begin{aligned} b \circ \phi \circ b^{-1}(x_1) &= b \circ \phi(x_1 - x_2) = b(x_1 + x_2 u - x_2 x_2) = b(x_1) + b(x_2 u) - b(x_2) \\ &= x_1 + x_2 + x_2 b(u) - x_2 \\ &= x_1 + x_2 u \end{aligned}$$

$$b \circ \phi \circ b^{-1}(x_j) = b \circ \phi(x_j) = b(x_j) = x_j$$

$$\delta_m(b \circ \phi \circ b^{-1}) = I + (\phi_{ij}) = I + \begin{pmatrix} 0 & u & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I + b(b\Delta\phi_{ij})b^{-1} &= I + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b\Delta u_{i_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ \cdot & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b\Delta u_{1_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= I + \begin{pmatrix} 0 & b \Delta u & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$





5. OTOMORFİZMLER

Bu bölümde verilen teorem ve sonuçlar Drensky, Papistas (2005) den alınmıştır. $F_N(x_2, \dots, x_m)$, $\{x_2, \dots, x_m\}$ tarafından üretilen $F_m(N)$ nin alt Leibniz cebiri olsun. Her $f \in F_N(x_2, \dots, x_m)$ için $F_m(N)$ nin T_f endomorfizmini, $i = 1,$

$\dots, m$ olmak üzere,

$$T_f(x_1) = x_1 + f$$

$$T_f(x_i) = x_i$$

ile tanımlayalım. Burada T_f bir tame otomorfizmdir.

$F_N(x_2, \dots, x_m)_j$, $x_2, \dots, x_m$ cinsinden toplam derecesi j olan tüm Leibniz monomialleri tarafından gerilen $F_N(x_2, \dots, x_m)$ nin alt vektör uzayı olsun.

$f_j \in F_N(x_2, \dots, x_m)$ $j = 1, \dots, n$ olmak üzere, $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ olsun.

O zaman $T_{f_1} \in GL(m, K)$ ve $T_f = T_{f_1} \circ \dots \circ T_{f_n}$ dir. Çünkü

$$T_f(x_1) = x_1 + f = x_1 + f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad f_j \in F_N(x_2, \dots, x_m)_j$$

$$T_f(x_i) = x_i \quad ; \quad i \neq 1$$

$$T_{f_1} \circ T_{f_2} \circ \dots \circ T_{f_n}(x_1) = T_{f_1} \circ \dots \circ T_{f_{n-1}}(x_1 + f_n) = T_{f_1} \circ \dots \circ T_{f_{n-2}}(x_1 + f_{n-1} + f_n)$$

$$= \dots$$

$$= T_{f_1}(x_1 + f_1 + \dots + f_n)$$

$$= x_1 + f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

Böylece T , T_f ve $GL(m, K)$ tarafından üretilir. Burada f toplam derecesi en az 2 olan homojen elemandır. $\forall g \in GL(m, K)$ için, $g \circ T_f = (g \circ T_f \circ g^{-1}) \circ g$ olduğundan $T = \langle (g \circ T_f \circ g^{-1}) : g \in GL(m, K), f \in F_N(x_2, \dots, x_m)_k \rangle$. $GL(m, K)$ şeklinde altgrupların bir çarpımı olarak yazılabilir. IT ile $F_m(N)$ nin tüm tame IA-

otomorfizmlerini gösterelim. $IT = T \cap IA(F_m(N))$ ve $IT \cap GL(m, K) = \{1\}$ olduğundan,

$$IT = \langle (g \circ T_f \circ g^{-1}) : g \in GL(m, K), f \in \cup F_N((x_2, \dots, x_m)_k) \rangle$$

dir.

Lemma 5.1 : $\{1, \dots, m\}$ kümesi üzerinde bir permütasyon $i = 1, \dots, m$ için, α_π , $\alpha_\pi(x_i) = x_{\pi(i)}$ şeklinde tanımlı $F_m(N)$ nin bir otomorfizmi olsun. $m \geq 2$ ve $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ koşulunu sağlayan $a_1, \dots, a_m$ negatif olmayan tam sayıları için $\phi_{(a_1 \dots a_m)}$, $F_m(N)$ nin $\phi_{(a_1 \dots a_m)}(x_1) = x_1 + x_2 x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$, $\phi_{(a_1 \dots a_m)}(x_i) = x_i$ şeklinde tanımlı IA- otomorfizmi olsun.

$$(I) \zeta_m(\phi_{(a_1 \dots a_m)}) = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}).$$

$$(II) \zeta_m(\alpha_\pi \circ \phi_{(a_1 \dots a_m)}) \circ (\alpha_\pi^{-1}) = e_{\pi(2)\pi(1)}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \text{ ve}$$

$$\zeta_m(g \circ \phi_{(a_1 \dots a_m)} \circ g^{-1}) = g(e_{21}(g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})) \circ g^{-1} \quad \forall g \in GL(m, K)$$

dir.

İspat:

$$(I) \phi_{(a_1 \dots a_m)}(x_1) = x_1 + x_2 x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$$

$$\phi_{(a_1 \dots a_m)}(x_i) = x_i$$

$x_1, \dots, x_n$ serbest üreticine göre $\phi_{(a_1 \dots a_m)}$ ye karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ . & & & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I + \phi_{ij}$$

şeklindedir. $\zeta_m(\phi) = I + \phi_{ij}$ olduğundan,

$$\zeta_m(\phi_{(a_1 \dots a_m)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & . & . & 1 \end{pmatrix} = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})$$

şeklindedir.

(II) $\zeta_m(b \circ \phi \circ b^{-1}) = I + b(b \Delta \phi_{ij})b^{-1}$ olduğundan ve (I) de

$$\begin{aligned} \zeta_m(\alpha_\pi \circ \phi_{(a_1 \dots a_m)} \circ \alpha_\pi^{-1}) &= (\alpha_\pi e_{21}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m})) \alpha_\pi^{-1} \\ &= I + (x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \varepsilon_{\pi(2)\pi(1)} \\ &= e_{\pi(2)\pi(1)}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \end{aligned}$$

Burada $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$ için $\varepsilon_{ij}(i, j)$ nci bileşen 1, diğer birleşenleri 0 olan $m \times m$ tipindeki matrisleri gösterir. Benzer şekilde;

$$\zeta_m(g \circ \phi_{(a_1 \dots a_m)} \circ g^{-1}) = g(e_{21}(g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})) \circ g^{-1}$$

dir. $(\forall g \in GL(m, K))$ m bir pozitif sayı $(m \geq 2)$ olsun. H_m nin her elemanı $I + (f_{ij})$ $f_{ij} \in \Omega_m$ şeklinde yazılabilir.

Burada $GL(m, K)$ nin H_m üstündeki etkisi aşağıdaki şöyle tanımlanır:

$$I + (f_{ij}) \in H_m, \phi_f, F_m(N) \text{ nin } \phi_f(x_j) = x_j + \sum_{i=1}^m x_j f_{ij} \text{ şeklinde}$$

tanımlanan bir IA otomorfizmi olsun.

$$\zeta_m(\phi_f) = I + (f_{ij}) \text{ idi. } g \in GL(m, K) \text{ ve } I + (f_{ij}) \in H_m \text{ için } g^*(I + (f_{ij})) = g^*$$

$$\zeta_m(\phi_f) = \zeta_m(g \circ \phi_f \circ g^{-1})$$

olarak tanımlarız.

$\phi, \psi \in F_m(N)$ için,

$$g^* \zeta_m(\phi \circ \psi) = (g^* \zeta_m(\phi)) \cdot (g^* \zeta_m(\psi))$$

H_m nin $GL(m, K)$ ile yarıçarpımını Λ_m ile gösterelim. $\alpha \in \text{Aut}(F_m(N))$ olsun. O zaman $\alpha, \phi \in \text{IA}(F_m(N))$ ve $g \in GL(m, K)$ olmak üzere $\alpha = \phi \circ g$ formundadır.

Önerme 5.2 : $m \geq 2$ için ,

$$\chi_m : \text{Aut}(F_m(N)) \longrightarrow \Lambda_m$$

$$\chi_m(\phi \circ g) = (\zeta_m(\phi), g)$$

dönüşümüyle, χ_m bir grup izomorfizmidir. (Burada $\phi \in \text{IA}(F_m(N))$, $g \in GL(m, K)$ dır. $\zeta_2(IT)$, H_2 nin bir özalt grubu ve böylece $F_2(N)$ wild otomorfizmlere sahiptir.

İspat: $\chi_m : \text{Aut}(F_m(N)) \longrightarrow \Lambda_m$ dönüşümü

$$\chi_m(\phi \circ g) = (\zeta_m(\phi), g)$$

şeklinde tanımlansın. χ_m nin bir grup monomorfizmi olduğunu gösterelim.

$\chi_m(\phi \circ g) = (\zeta_m(\phi), g) = (I, 0)$ olduğundan $g = 0$ olur. $\phi \circ g = \phi \circ 0 = \phi(0) = 0$ olduğundan Çek $\chi_m = \{0\}$ dir. O halde χ_m birebirdir. χ_m nin örten olduğunu iddia edelim: $(I + (\Psi_{ij}), g) \in \Lambda_m$ alalım. $\Psi, F_m(N)$ nin IA- endomorfizmi olmak üzere $\Psi(x_j) = x_j + \sum_{i=1}^m x_i \Psi_{ij}$ $j=1, \dots, m$ koşulunu sağlasın. $\text{Det}(I + (\Psi_{ij})) = 1$ olduğundan $\Psi \in \text{IA}(F_m(N))$ dir. $\alpha = \Psi \circ g$ alalım. $\chi_m(\alpha) = \chi_m(\Psi \circ g) = (\zeta_m(\Psi), g) = (I + (\Psi_{ij}), g)$ olduğundan χ_m örtendir. Böylece χ_m bir izomorfizmdir. $\Delta_2 = \zeta_2(IT)$ olarak adlandırılır. Şimdi $\Delta_2 \subseteq E(2, P_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $g \in GL(2, K)$ ve $f \in \bigcup_{k \geq 2} F_N(x_2)_{(k)}$ için $\zeta_2(g \circ \tau_f \circ g^{-1}) \in E(2, P_2)$ gösterilmelidir.

$f_i \in \bigcup_{k \geq 2} F_N(x_2)_{(i)}$, $i=2, \dots, n$ olmak üzere $f = f_2 + \dots + f_n$ olsun.

$\tau_{f_2} \circ \dots \circ \tau_{f_n}(x) = x + f_2 + \dots + f_n$ ve $f = f_2 + \dots + f_n$ olduğundan $\tau_{f_2} \circ \dots \circ \tau_{f_n}(x) = x + f$ olup, $\tau_f = \tau_{f_2} \circ \dots \circ \tau_{f_n}$ dir. Böylece $\lambda = 2, \dots, n$ için $\zeta_2(g \circ \tau_{f_\lambda} \circ g^{-1}) \in E(2, P_2)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\lambda \in \{2, \dots, n\}$ elemanını sabitleyelim ve $\gamma_k \in K$ olmak üzere $f_\lambda = x_2 \cdot (\gamma_\lambda x_2^{\lambda-1})$ yazalım. $GL(2, K) = D(2, K) SL(2, K)$, burada $D(2, K)$ köşegen matris grubudur ve $SL(2, K) = E(2, K)$ dir. $a \in K \setminus \{0\}$ için $d = \text{diag}(a, a^{-1})$ olsun.

$$\zeta_2(d \circ \tau_{f_\lambda} \circ d^{-1}) = d e_{21}(a^{-\lambda+1} \cdot \gamma_\lambda x_2^{\lambda-1}) d^{-1} = e_{21}(a^{-\lambda+1} \cdot \gamma_\lambda x_2^{\lambda-1}) \in E(2, P_2) \quad (5.1)$$

$k \in K \setminus \{0\}$ için, $g = e_{12}(k)$ olsun. O zaman $\zeta_2(g \circ \tau_{f_\lambda} \circ g^{-1}) = I + a_{ij}$, burada $a_{11} = k B_\lambda$, $a_{21} = B_\lambda$, $a_{12} = k^2 B_\lambda$, $a_{22} = -k B_\lambda$, $B_\lambda = \gamma_\lambda(g \Delta x_2^{\lambda-1})$ dir.

$I + a_{ij} = e_{12}(k).e_{21}(B_\lambda).e_{12}(-k)$ olduğundan,

$$\zeta_2(g \circ \tau_{f_\lambda} \circ g^{-1}) \in E(2, P_2) \quad (5.2)$$

dir.

Eğer $g = e_{21}(k)$ ise

$$\zeta_2(g \circ \tau_{f_\lambda} \circ g^{-1}) = e_{21}(\gamma_\lambda(g \Delta x_2^{\lambda-1})) \in E(2, P_2) \text{ dir.} \quad (5.3)$$

(1),(2) ve (3) den, $\Delta_2 \subseteq E(2, P_2)$ dir

$A = (a_{ij}) \in SL(2, P_2)$ olsun. $a_{11} = 1 + x_1 x_2$, $a_{12} = x_2^2$, $a_{21} = -x_1^2$, $a_{22} = 1 - x_1 x_2$ ise,

$A = I + \pi_{ij}$ olup $A \in H_2$ dir. Cohn (1964) sonucundan $A \notin E(2, P_2)$ ve $\Delta_2 \subseteq$

$E(2, P_2)$ olduğundan $\zeta_2(IT)$, H_2 nin bir öz alt grubudur.

Bu matris $\text{Aut}(F_2(N))$ nin ϕ wild otomorfizmine karşılık gelir ve şöyle tanımla-

nır:

$$\phi(x_1) = x_1 + [x_1, x_1, x_2] - [x_2, x_1, x_1]$$

$$\phi(x_2) = x_2 + [x_1, x_2, x_2] - [x_2, x_1, x_2]$$

Önerme 5. 3: $m \geq 2$ için , ζ_m (IT), $g e_{21}(g \Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$ tarafından üretilir.

Burada $g \in GL(m, K)$ ve $a_2, \dots, a_m$ negatif olmayan sayılar , $a_2 + \dots + a_m \geq 1$ dir.

İspat: $A_m, g \in GL(m, K)$, $a_2, \dots, a_m$, $a_2 + \dots + a_m \geq 1$ olan negatif olmayan sayılar olmak üzere $g e_{21}(g \Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$ tarafından üretilen bir grup olsun.

$\zeta_m(g \circ \phi_{(0, a_2 \dots a_m)} \circ g^{-1}) = g e_{21}(g \Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$ olduğundan $A_m \subseteq \zeta_m$ (IT) dir.

$\{1, 2, \dots, m\}$ üstündeki π permütasyonu için $\alpha_\pi, F_m(N)$ nin $\alpha_\pi(x_i) = x_{\pi(i)}$, $i = 1, \dots, m$ şeklinde tanımlanan otomorfizmi olsun.

$$\begin{aligned} \zeta_m(\alpha_\pi \circ \phi_{(0, a_2 \dots a_m)} \circ \alpha_\pi^{-1}) &= \alpha_\pi e_{21}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \alpha_\pi^{-1} \\ &= I + e_{21}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \varepsilon_{\pi(2)\pi(1)} \\ &= e_{\pi(2)\pi(1)}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \end{aligned}$$

Buradan

$$\alpha_\pi e_{21}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \alpha_\pi^{-1} = e_{\pi(2)\pi(1)}(x_{\pi(1)}^{a_1} \dots x_{\pi(m)}^{a_m})$$

olduğundan her k , $k = 2, \dots, m$ için $e_{kl}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \in A_m$ olduğu elde edilir.

$\phi, F_m(N)$ nin

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= x_1 + x_2 \cdot (x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} \dots x_m^{a_m}) \\ \phi(x_i) &= x_i, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı tame otomorfizmi olsun. $\alpha_\pi(x_2) = x_k$, $\alpha_\pi(x_k) = x_2$, $\alpha_\pi(x_j) = x_j$,

$j \neq 2$ için, $\zeta_m(\alpha_\pi \circ \phi \circ \alpha_\pi^{-1}) = \alpha_\pi e_{kl}(x_{\pi(2)}^{a_2} \dots x_{\pi(k)}^{a_k} \dots x_{\pi(m)}^{a_m}) \alpha_\pi^{-1} = e_{kl}(x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m})$

dir. $g \in GL(m, K)$ için,

$$\begin{aligned} g^* e_{kl} (x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) &= g^* \zeta_m (\alpha_\pi \circ \phi \circ \alpha_\pi^{-1}) , (\zeta_m, \text{homomorfizm}) \\ &= \zeta_m ((g \circ \alpha_\pi) \circ \phi \circ (g \circ \alpha_\pi)^{-1}) \\ &= (g \circ \alpha_\pi) e_{21} ((g \circ \alpha_\pi) \Delta x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) (g \circ \alpha_\pi)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$g^* e_{kl} (x_2^2 \dots x_m^{a_m}) = g^* \zeta_m (\phi_k) = g e_{kl} (g \Delta x_2^2 \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$$

dir.

Burada, ϕ_k , F_m nin $\phi_k (x_1) = x_1 + x_k (x_2^2 \dots x_m^{a_m})$, $\phi_k (x_i) = x_i$, $i \geq 2$ tame otomorfizmdir. Böylece,

$$g^* e_{kl} (x_2^2 \dots x_m^{a_m}) \in A_m$$

dir.

$u, y_1, \dots, y_r$ monomiallerin K - lineer kombinasyonu olsun. $y_1, \dots, y_r \in \{x_2, \dots, x_m\}$ dir. Yani, $u \in K[x_2, \dots, x_m]$ dir. (sabit terim olmaksızın) $\forall k \in \{2, \dots, m\}$ ve $\forall u$ için, $\phi_{k,u}$, $F_m(N)$ nin, $\phi_{k,u} (x_1) = x_1 + x_k u$, $\phi_{k,u} (x_i) = x_i$, ($i \geq 2$) tame otomorfizmi olsun. $\zeta_m(\phi_{k,u}) = e_{kl}(u)$ dir. ($e_{ij}(u) \cdot e_{ij}(v) = e_{ij}(u+v)$ özelliğini kullanarak) $\zeta_m(\phi_{k,u}) = \prod_y e_{kl}(q_y, y)$, $u \in y_1, \dots, y_r$ lerin bir lineer kombinasyonudur. Yani, $u = q_1 y_1 + \dots + q_r y_r$ ve $y_1, \dots, y_r \in \{x_2, \dots, x_m\}$, $q_y \in K$ dir. $g \in GL(m, K)$ için,

$$g^* \zeta_m(\phi_{k,u}) = \zeta_m(g \circ \phi_{k,u} \circ g^{-1}) = \prod_y g^* e_{kl}(q_y, y)$$

dır.

$q \in K/\{0\}$ için, $\beta_q, F_m(N)$ nin $\beta_q(x_1) = q x_1, \beta_q(x_i) = x_i$ otomorfizmi olsun.

$$\begin{aligned}\beta_q^{-1*} e_{kl}(q y_1, \dots, y_r) &= \beta_q^{-1} * \zeta_m \phi_k \\ &= e_{kl}(q y_1, \dots, y_r)\end{aligned}$$

dir. $h_q = g \beta_q^{-1}$ olsun.

$$\begin{aligned}g^* e_{kl}(q y_1, \dots, y_r) &= g^* \zeta_m(\beta_q^{-1} \circ \phi_k \circ \beta_q) \\ &= \zeta_m((g \circ \beta_q^{-1}) \circ \phi_k \circ (g \circ \beta_q^{-1})^{-1}) \\ &= (g \circ \beta_q^{-1}) e_{kl} g \circ \beta_q^{-1} \Delta(y_1, \dots, y_r) \circ (g \circ \beta_q^{-1})^{-1} \\ &= h_q e_{kl}(h_q \Delta y_1, \dots, y_r) h_q^{-1} = h_q^* e_{kl}(y_1, \dots, y_r)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu yüzden $g^* e_{kl}(q y_1, \dots, y_r) \in A_m$ ve $g^* \zeta_m(\phi_{k,u}) \in A_m$ dir.

$f = f_2 + \dots + f_n$ olsun. ($f_\lambda \in F_N(x_2, \dots, x_m)$) $_\lambda, \lambda=2, \dots, m$)

$\tau_f = \tau_{f_2} \circ \dots \circ \tau_{f_m}$ dir. $\lambda=2, \dots, n$ için $f_\lambda = x_2, f_{2\lambda} + \dots + x_m, f_{m\lambda}$ yazabiliriz.

Burada $f_{k\lambda}, y_1, \dots, y_{\lambda-1}$ monomiallerinin K -lineer kombinasyonudur ve $y_1, \dots,$

$y_{\lambda-1} \in \{x_2, \dots, x_m\}$ dir. $\zeta_m(\tau_{f_\lambda}) = e_{21}(f_{2\lambda}) \dots e_{m1}(f_{m\lambda}) \forall k \in \{2, \dots, m\}$ için, $\phi_{f_{k\lambda}},$

$F_m(N)$ 'nin $\phi_{f_{k\lambda}}(x_1) = x_1 + x_k f_{k\lambda}, \phi_{f_{k\lambda}}(x_i) = x_i$ şeklinde tame otomorfizmi

olsun.

$$\begin{aligned}\zeta_m(\phi_{f_{k\lambda}}) &= e_{kl}(f_{k\lambda}) \text{ dır. } \tau_{f_\lambda} = \tau_{f_{2\lambda}} \circ \dots \circ \tau_{f_{m\lambda}} \text{ olduğundan} \\ \zeta_m(\tau_{f_\lambda}) &= e_{21}(f_{2\lambda}) \dots e_{m1}(f_{m\lambda}) \\ &= \zeta_m(\phi_{f_{2\lambda}}) \dots \zeta_m(\phi_{f_{m\lambda}}) \\ &= \zeta_m(\phi_{f_{2\lambda}} \circ \dots \circ \phi_{f_{m\lambda}}) \text{ dır.}\end{aligned}$$

$g \in GL(m, K)$ için, $g^* \zeta_m(\tau_{f_\lambda}) = (g^* \zeta_m(\phi_{f_{2\lambda}})) \dots (g^* \zeta_m(\phi_{f_{m\lambda}}))$ dır.

$g^* \zeta_m(\phi_{k,u}) \in A_m$ olduğundan $g^* \zeta_m(\tau_{f_\lambda}) \in A_m$ ve $\zeta_m(g \circ \tau_{f_\lambda} \circ g^{-1}) \in A_m$ elde edilir. Böylece $\zeta_m(IT) \subseteq A_m$, $A_m = \zeta_m(IT)$ dir.

Teorem 5.4: $\delta \in IA(F_m(N))$, $m \geq 2$ ve $\delta(x_1) = x_1 + x_2 \cdot x_1$, $\delta(x_i) = x_i$, ($i \geq 2$) ve E_δ , $IA(F_m(N))$ nın tüm $g \circ \delta \circ g^{-1}$, tarafından üretilen alt grubu olsun. Burada $g \in GL(m, K)$ dır. $m \geq 3$ için, Γ_m , $IA(F_m(N))$ ' nın IT ve E_δ tarafından üretilen alt grubu olsun.

- I)** $i \neq j$ için $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $g e_{ij} (g \Delta x_2^{a_1} \dots x_m^{a_m}) g^{-1} \in \zeta_m(\Gamma_m)$, $\forall g \in GL(m, K)$, ve $a_1, a_2, \dots, a_m > 0$, $a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq 1$ dir.
- II)** $\zeta_m(\Gamma_m) = E_F(m, \Omega_m)$.

İspat : **(I)** $m \geq 3$ için, $\zeta_m(\Gamma_m) = \Delta_m$ diyelim. İddiamızı m üstünde tümevarım kullanarak gösterelim. $m=3$ için a, b, c pozitif tamsayı ve $a + b + c \geq 1$ olmak üzere,

$e_{21}(x_1^a \dots x_2^b \dots x_3^c) \in \Delta_3$ olduğunu gösterelim.

$c = 0$ olsun. $IT \subseteq \Gamma_3$ olduğundan, $a, b \geq 1$ için; $e_{23}(x_1^a) e_{31}(x_2^b) \in \Delta_3$,

$(e_{ij}(x), e_{jk}(y)) = e_{ik}(xy)$ özelliğinden, tüm pozitif a, b tam sayıları için ;

$$(e_{23}(x_1^a) e_{31}(x_2^b)) = e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$$

dir.

$a=0, b \geq 1$ için, $\tau_{2,b}(x_1) = x_1 + x_3 \cdot x_2^b$, $\tau_{2,b}(x_i) = x_i$ ($i = 2, 3$), $F_3(N)$ tame IA- oto morfizmi olsun. $GL(3, K) \subseteq T$ olduğundan, $e_{23}(-1) \circ \tau_{2,b}^{-1} \circ e_{23}(1) \in IT$ dir.

$$\begin{aligned}\zeta_3(e_{23}(-1) \circ \tau_{2,b}^{-1} \circ e_{23}(1)) &= e_{21}(e_{23}(-1)(e_{31}(x_2^b) e_{23}(1))) \\ &= e_{21}(x_2^b) \cdot e_{31}(-x_2^b) \in \Delta_3\end{aligned}$$

dir.

$e_{31}(-x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, yukarıdan $e_{21}(x_2^b) \in \Delta_3$ olduğu elde edilir. $a \geq 1$, $b=0$ ve $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 2$ olacak şekilde π permütasyonunu alalım. Lemma 5.1 (II) den, $\zeta_3(a_\pi \circ \delta \circ a_\pi^{-1}) = e_{31}(x_1) \in \Delta_3$ dir. $((e_{23}(x_1)e_{31}(x_1))) = e_{21}(x_1^2) \in \Delta_3$ olur. δ_2 ; $\delta_2(x_1) = x_1 + x_2 x_1^2$, $\delta_2(x_i) = x_i$ ($i=2,3$) şeklinde tanımlanan $F_3(N)$ nin IA-otomorfizmi olsun. Lemma 5.1 (II) den $\zeta_3(\alpha_\pi \circ \delta_2 \circ \alpha_\pi^{-1}) = e_{31}(x_1^2) \in \Gamma_3$ ve bu yüzden $((e_{23}(x_1)e_{31}(x_1^2))) = e_{21}(x_1^3) \in \Delta_3$ dir.

Bu şekilde devam edersek $a \geq 1$ için,

$$e_{21}(x_1^a) \in \Delta_3$$

elde edilir. Negatif olmayan a, b ve $a+b \geq 1$ için, $e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ olduğu elde edilir. $c \geq 1$ olduğu farz edelim. $e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, Lemma 5.1 (II) den,

$$e_{31}(x_1^a x_3^b), e_{23}(x_2^b x_3^a) \in \Delta_3$$

elde edilir. Her pozitif a, b sayısı için $e_{21}(x_1^a), e_{21}(x_2^b) \in \Delta_3$ olduğundan, Lemma 5.1 (II) den her pozitif c tamsayısı için,

$$\begin{aligned}((e_{23}(x_2^c), e_{31}(x_1^a x_3^b))) &= e_{21}(x_1^a x_2^b x_3^c) \in \Delta_3 \text{ ve} \\ ((e_{23}(x_2^b x_3^a), e_{31}(x_1^c))) &= e_{21}(x_1^c x_2^b x_3^a) \in \Delta_3\end{aligned}$$

olduğundan, negatif olmayan a, b, c tamsayıları $a+b+c \geq 1$ için $e_{21}(x_1^a x_2^b x_3^c) \in \Delta_3$ elde edilir. Lemma 5.1(II) den, $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ için, $e_{ij}(x_1^a x_2^b x_3^c) \in \Delta_3$ elde edilir. $F_3(N)$ nin $\tau_{a,b,c}$ IA-otomorfizmi $\tau_{a,b,c}(x_j) = x_j + x_i \cdot (x_1^a x_2^b x_3^c)$, $\tau_{a,b,c}(x_k) = x_k$, ($k \neq j$) şeklinde tanımlansın. Ve $g \in GL(3, K)$ olsun. $\zeta_3(\tau_{a,b,c}) = e_{ij}(x_1^a x_2^b x_3^c)$ olduğundan $\tau_{a,b,c} \in \Gamma_3$ elde edilir. $g \circ \tau_{a,b,c} \circ g^{-1} \in \Gamma_3$ ve $\zeta_3(g \circ \tau_{a,b,c} \circ g^{-1}) = g(e_{ij}(g \Delta x_1^a x_2^b x_3^c))g^{-1}$ olduğundan, $g(e_{ij}(g \Delta x_1^a x_2^b x_3^c))g^{-1} \in \Delta_3$ elde edilir. Burada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ve $i \neq j$, a, b, c negatif olmayan tamsayı ve $a+b+c \geq 1$ dir.

$m \geq 4$ olduğunu varsayalım ve tüm negatif olmayan $a_1, \dots, a_{m-1}$ ve $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ için $e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_{m-1}$ olsun. $e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_m$ olduğundan, tüm pozitif a_i tamsayıları için, $i = 1, \dots, m-1$ olup, $e_{21}(x_i^{a_i}) \in \Delta_m$ olduğu elde edilir.

Lemma 5.1(II)den,

$$e_{2m}(x_m^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}), e_{m1}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_m$$

elde edilir. Her pozitif a tamsayısı için, $e_{21}(x_1^a)$ ve $e_{21}(x_2^a) \in \Delta_m$ olduğundan,

Lemma 5.1 (II) den $e_{m1}(x_1^a)$ ve $e_{2m}(x_2^a) \in \Delta_m$ elde edilir.

$$(e_{2m}(x_2^a), e_{m1}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}})) = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}}) \in \Delta_m \text{ ve}$$

$$(e_{2m}(x_2^{a_2} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m^{a_1}), e_{m1}(x_1^a)) = e_{21}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$$

olduğundan, $e_{12}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ elde edilir. Lemma 5.1 (II) den, her $1 \leq i, j \leq m$,

$i \neq j$ ve negatif olmayan $a_1, \dots, a_m$, $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ için $e_{ij}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ dir.

$\tau_{(a_1 \dots a_m)}$, $F_m(N)$ nin IA otomorfizmi,

$$\tau_{(a_1 \dots a_m)}(x_j) = x_j + x_i \cdot (x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m})$$

$$\tau_{(a_1 \dots a_m)}(x_k) = x_k, \quad j \neq k$$

koşullarını sağlasın.

$m = 3$ durumuna benzer argümanları kullanarak $i, j \in \{1, \dots, m\}$ $i \neq j$ için, $g(e_{ij}(g \Delta x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}))g^{-1} \in \Delta_m$ elde edilir.

(II) Önerme 4.2 den, $IA(F_m(N)) \cong H_m = E_F(m, \Omega_m)$ ve $\Gamma_m \subseteq IA(F_m(N))$ $\Delta_m \subseteq E_F(m, \Omega_m)$ olduğundan, $E_F(m, \Omega_m) \subseteq \Delta_m$ olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak, $u \in \Omega_m$ ve $u = u_1 + u_2 + \dots + u_d$, $u_k \in P_m^{n_k}$ bazı n_k için ve $1 \leq n_1 < \dots < n_d$ için, $e_{ij}(u) \in \Delta_m$ olduğu gösterilmelidir. (I) den, $e_{ij}(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) \in \Delta_m$ dir. Burada $a_1, \dots, a_m$ negatif olmayan tamsayılar, $a_1 + \dots + a_m \geq 1$ dir. $a_1, \dots, a_m \geq 1$ için, $x = x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$, $\bar{x}_k$, x den $x_k^{a_k}$ silerek elde edilen bir monomial olsun. $q \in K/\{0\}$ için, $\alpha_{q,k}, F_m(N)$ nin, $\alpha_{q,k}(x_k) = q \cdot x_k$, $\alpha_{q,k}(x_l) = x_l$, $l \neq k$ şeklindeki otomorfizmi olsun. $\alpha_{q,k}^{-1} * e_{ik}(\bar{x}_k) = e_{ik}(q \bar{x}_k)$ olduğundan, $e_{ik}(q \bar{x}_k) \in \Delta_m$ dir. (I) den, $e_{kj}(x_k^{a_k}) \in \Delta_m$, $e_{ik}(q \bar{x}_k) e_{kj}(x_k^{a_k}) = e_{ij}(qx) \in \Delta_m$ elde edilir. $\alpha \cdot e_{ij}(u) \cdot \alpha^{-1} \in \Delta_m$ $\alpha \in E(m, P_m)$, $u \in \Omega_m$, $i \neq j$ olduğunu göstermeliyiz. $e_{ij}(u) \in \Delta_m$, $u \in \Omega_m$ olduğundan, her $g \in GL(m, K)$ için,

$$g e_{ij}(u) g^{-1} \in \Delta_m$$

elde ederiz. $g \in GL(m, K)$, $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$. $\alpha \in E(m, P_m)$ ve $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_r$, $\alpha_i = E_i(q_i) E_i(w_i)$, $(q_i \in K, w_i \in \Omega_m)$ olsun. $k = 1, \dots, r$ için $g_k = E_1(q_1) \dots E_k(q_k)$ olsun. Daha önceki,

$\alpha_i = (E_1(a_1) E_1(v_1) E_1(a_1)^{-1}) (E_1(a_1) E_2(a_2) E_2(v_2) E_2(a_2)^{-1} E_1(a_1)^{-1}) \dots (E_1(a_1) \dots E_r(a_r) E_r(v_r) \dots (E_1(a_1) \dots E_r(a_r))^{-1} (\dots (E_1(a_1) \dots E_r(a_r))$ özelliğinden ,
 $\alpha.e_{ij}(u).\alpha^{-1} = (\prod_{k=1}^r g_k E_k(w_k) g_k^{-1}) (g_r e_{ij}(u) g_r^{-1}) (\prod_{\lambda=1}^{r-1} g_{r-\lambda} E_{r-\lambda}(-w_{r-\lambda}) g_{r-\lambda}^{-1})$
 elde edilir. $e_{ij}(u) \in \Delta_m$ olduğundan, $\alpha.e_{ij}(u).\alpha^{-1} \in \Delta_m$ elde edilir. Bu yüzden
 $E_F(m, \Omega_m) \subseteq \Delta_m, \zeta_m(\Gamma_m) = E_F(m, \Omega_m)$ dir.

Teorem 5.5 : $m \geq 3$ için, $\text{Aut}(F_m(N)) = \langle T, \delta \rangle$ dir. Burada $\sigma, F_m(N)$ nin,

$$\begin{aligned} \delta : x_1 &\longrightarrow x_1 + x_2.x_1 \\ x_i &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

IA-otomorfizmidir. Aynı zamanda σ wild otomorfizmdir.

İspat: $m \geq 3$ için, $\Delta'_m \leq \text{SL}(m, P_m)$ nin $g e_{21}(g \Delta x_1) g^{-1}$ ve $g e_{21}(g \Delta x_2^2 \dots x_m^{a_m}) g^{-1}$ tarafından üretilen alt grubu olsun. Burada $g \in \text{GL}(m, K)$ ve $a_2, \dots, a_m$ negatif olmayan sayılar $a_2 + \dots + a_m \geq 1$ dir.

Teorem 5.4 ün ispatından , $\Delta'_m = \zeta_m(\Gamma_m) = E_F(m, \Omega_m)$ dir. $H = \langle T, \delta \rangle$ ve $IH = H \cap \text{IA}(F_m(N))$ olsun. $\text{GL}(m, K) \cap IH = \{1\}$ olduğundan, $IH = \langle IT \langle g \circ \sigma \circ g^{-1} : g \in \text{GL}(m, K) \rangle \rangle$ olduğu elde edilir. Lemma 5.1 ve Önerme 5.3 den $\zeta_m(IH) = \Delta_m^{-1} = \zeta_m(\Gamma_m)$ olduğu görülür. Önerme 4.2 den $IH = \text{IA}(F_m(N))$ olduğu elde edilir ve bu yüzden $\text{Aut}(F_m(N)) = \langle T, \delta \rangle . (F_m(N))_{\text{Lie}}$, $y_1, \dots, y_m$ tarafından üretilen 2.dereceden serbest nilpotent Lie cebiri olsun.

$$F_m \longrightarrow F_m(N) \longrightarrow (F_m(N))_{\text{Lie}}$$

cebirlerinin doğal homomorfizmi

$$\text{Aut} F_m \longrightarrow \text{Aut} F_m(N) \longrightarrow \text{Aut}(F_m(N))_{\text{Lie}}$$

otomorfizm gruplarının doğal homomorfizmini belirler. δ nin wild olduğunu gösterelim.

δ , $F_m(N)$ nin tame otomorfizmi olsun. F_m nin bir δ_0 tame otomorfizmi vardır. $\delta \in \text{Aut}(F_m(N))$ ve $\delta_1 \in \text{Aut}(F_m(N))_{\text{Lie}}$ tame otomorfizmlerine dönüşür.

$$\begin{aligned} \delta_1 : y_1 &\longrightarrow y_1 + [y_2, y_1] \\ y_i &\longrightarrow y_i \end{aligned}$$

tanımlansın. Bu ise Bryant ve Drensky nin sonucu ile bir çelişkidir. Bu sonuca göre, her $m > 1$ için, $\delta_1, (F_m(N))_{\text{Lie}}$ nin bir wild otomorfizmidir.

Remarks 5.6:

1. Teorem 5.5 den $\forall m \geq 3$ için tanımlanan $(F_m(N))$ nin δ otomorfizmi $m = 2$

için de wild otomorfizmdir.

2. $(e_{23}(x_1^a)e_{31}(x_2^b)) = e_{21}(x_1^a x_2^b) \in \Delta_3$ den (a, b) pozitif tamsayılar olmak üzere

$e_{21}(x_1^a x_2^b)$ tanımlanan $F_m(N)$ otomorfizmi,

$$\begin{aligned} x_1 &\longrightarrow x_1 + [x_2, x_2, x_1] = x_1 + x_2([x_1, x_2]) \\ x_i &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

otomorfizmi $\forall m > 2$ için tame dir. $m = 2$ için, bu otomorfizm Abdykhalikov et al

(2001) tarafından keşfedilen F_2 nin wild otomorfizmi tarafından belirlenir.

F_m nin otomorfizmi

$$x_1 \longrightarrow x_1 + [x_2, x_2, x_1]$$

$$x_i \longrightarrow x_i$$

$\forall m > 2$ için tamedir. Bu otomorfizm,

$$\begin{aligned} \varphi : x_3 &\longrightarrow x_3 + [x_2, x_1] \\ x_i &\longrightarrow x_i, \quad i \neq 3 \\ \psi : x_1 &\longrightarrow x_1 + [x_2, x_3] + [x_3, x_2] \\ x_i &\longrightarrow x_i, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

tame otomorfizmleri olmak üzere yukarıdaki otomorfizm $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ 'e eşittir.

6. SABİT NOKTALAR

Bu bölümde önce sabit noktalar altcebiri Drensky, Papistas (2005) makalesi kaynak alınarak incelenmiştir. Daha sonra bir otomorfizmin sabit noktalar kümesi tanımlanmış, tezde incelenmiş olan $F_m(N)$ nın çeşitli otomorfizmleri kullanılarak bu otomorfizmlerin sabit nokta kümeleri çeşitli hesaplamalar yapılarak elde edilmiştir.

Tanım 6.1: G bir grup ve K bir birimli halka olsun. KG elemanları $k_g \in K$ olmak üzere $\sum_{g \in G} k_g g$ şeklindeki tüm sonlu lineer toplamlardan oluşur ve hemen hemen her $g \in G$ için $k_g = 0$ dır; diğer bir ifadeyle, bu elemanların her birinde sadece sonlu sayıda katsayı sıfırdan farklıdır.

$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} b_g g \in KG$ olmak üzere , $\alpha = \beta$ ise her $g \in G$ için $a_g = b_g$ 'dir.

KG de toplama işlemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} b_h h \in KG$ olmak üzere KG de çarpma işlemi ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) \\ &= \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (a_g b_{h^{-1}g})g. \end{aligned}$$

KG nin elemanlarının R nin elemanlarıyla çarpma işlemi , $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in KG$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere ,aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \lambda \alpha &= \lambda \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \\ &= \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g. \end{aligned}$$

Yukarıda verilen toplama ve çarpma işlemleriyle KG bir halkadır.

KG halkasına K 'nin G üzerindeki grup halkası denir.

Tanım 6.2: K bir cisim ve G bir grup olsun. Bu bölüm boyunca tüm KG modülleri sağ KG modülleri olarak kabul edilir.

Herhangi bir F KG – modülü için

$$F^G = \{ f \in F : fg = f \text{ tüm } g \in G \text{ için} \}$$

alalım. F^G ye sabit nokta altceberi denir.

Boş olmayan bir X kümesi için $F(N)$ ile X tarafından serbestçe üretilen K üzerinde serbest sol nilpotent Leibniz cebirini gösterelim.

Bir n pozitif tamsayısı için, $F^{(n)}$ tüm sol normlu $[y_1, y_2, \dots, y_n]$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ komütatörleri tarafından gerilen F nin altuzayıdır. Önerme 3.6 den $F = \bigoplus_{n \geq 1} F^{(n)}$.

Ayrıca pozitif bir c tamsayısı için $F_{(c)} = \bigoplus_{n \geq c} F^{(n)}$ olsun. $\bigcap_{c \geq 1} F_{(c)} = \{0\}$ oldu-

ğu kolayca doğrulanır. Bryant ve Papistas'taki (2000, Proofs of Lemmas 2.1 ve 2.2) benzer argümanları kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 6.3: F, K cismi üzerinde rankı 1'den büyük bir serbest sol nilpotent Leibniz cebiri olsun.

(I) $G, IA(F)$ nin trivial olmayan sonlu bir altgrubu olsun. O halde K, p asal karakteristiğine sahiptir ve G bir p -grubudur.

(II) G, F nin en az bir değişkeni sıfırdan farklı olan bir otomorfizmi grubu olsun. O zaman $F^G + F' \neq F$ dir.

$K[X]$ polinom cebirini P ile n dereceli homojen polinom altuzaylarını $P^{(n)}$ ile ve X tarafından gerilen P alt uzayını $V = KX = P^{(1)}$ ile gösterelim. $H, GL(V)$ nin genel lineer grubunun herhangi bir elemanıysa, h tek bir şekilde P ye

genişletilebilir, böylece h , P nin cebir otomorfizmi olarak etki eder. $P^{(n)}$ alt uzayı $n \geq 0$ için, h nin etkisi altında değişmezdir. P nin bu tip izomorfizmleri, P nin derecelendirilmiş otomorfizmleri olarak adlandırılacaktır. Eğer G , bir derecelendirilmiş otomorfizmler alt grubuysa, o zaman P yi bir KG- modülü olarak kabul edebiliriz. Q , P nin kesirler cismi olsun. $V \otimes P$ bir serbest sağ P -modülü olduğundan, $\{x \otimes 1: x \in X\}$ bazı ile Q üzerinde bir vektör uzayı olan $V \otimes Q$ içine gömülebilir. G 'nin $\text{Aut}(F)$ nin bir alt grubu ve $H = G \cap \text{IA}(F)$ olsun. $G \cap \text{IA}(F)$, G nin F/F' üzerindeki etkisinin çekirdeğidir. Bryant ve Papistas'ın (2000) makalesinde olduğu gibi, $\bar{G} = G/H$ ve her $g \in G$ için G/H 'nin gH elemanı için $\bar{g}$ yazalım. H , F/F' üzerinde trivial etki ettiğinden, F/F' yi KG - modülü olarak kabul edebiliriz ve $\bar{G}$, modül üzerinde sadık etki eder. $x + F'$ nü x' e dönüştüren ($x \in X$) olacak şekilde F/F' den V' ye bir K- uzay izomorfizmi vardır. F/F' den V ye bir K- uzay izomorfizmi vardır, öyle ki $x + F'$, tüm $x \in X$ için x' e eşlenir. Dolayısıyla $\bar{G}$, $\text{GL}(V')$ nin bir alt grubu olarak kabul edebiliriz ve $\bar{G}$, P nin derecelendirilmiş otomorfizmlerinin bir grubu olarak kabul edilebilir. Özel olarak, P bir KG - modüldür. $V \otimes_k P$ yi (veya basitçe $V \otimes P$ 'yi) bir sağ P -modülü olarak görüyoruz. $\{x \otimes 1: x \in X\}$ serbest üreteç kümesi ile bir serbest P -modüldür.

Tanım 6.4: F nin bir F' türetilmiş alt cebirini alalım. $\forall u \in F', x_1, \dots, x_n \in P$ için

$$\begin{aligned} F' \times P &\longrightarrow F' \\ x_\varphi(u, x_i) &\longrightarrow [u, x_i] = u.r_i \end{aligned}$$

çarpmasıyla F' bir sağ P -modüldür. Burada $r_i = \text{adx}_i$, adx_i komutatör elemanına sağdan etki eden adjoint dönüşümüdür. O zaman $[u, x_1, \dots, x_n] = u.r_1.r_2 \dots r_n$ dir. $u \in F'$ ve $v \in P$ için v nin modül etkisi altında u nun görüntüsü için $u \cdot v$ yaza-

rız. $V \otimes P$ bir P -modül olarak ve Lemma 3.6 dan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 6.5 : (I) $\varepsilon : F' \longrightarrow V \otimes P$ ye gömülen bir P -modülü vardır, öyle ki

$$\varepsilon([v_1, \dots, v_r]) = v_1 \otimes v_2 \dots v_r \text{ her } r \geq 2 \text{ ve her } v_1, \dots, v_r \in V \text{ için.}$$

(II) Eğer $u \in F' \setminus \{0\}$ ve $v \in P \setminus \{0\}$ ise $u \cdot v \neq 0$.

(III) Yukarıda verilen G ve $\bar{G}$ ile $u \in F'$ ve $v \in P$ olsun. O zaman her $g \in G$ için, $(u \cdot v)g = (ug) \cdot (\bar{v} \bar{g})$ dir.

Aşağıdaki sonucun ispatı için Önerme 6.5 ve Bryant ve Papistas'ta (2000) Önerme 4.3 ispatındaki olduğu gibi benzer argümanları kullanılır. (F' , X tarafından serbestçe üretilen serbest metabelian Lie cebirinin türetilmiş cebiriyle benzer davranışa sahiptir.)

Önerme 6.6: F , K cismi üzerinde rankı 1'den büyük bir serbest sol nilpotent Leibniz cebiri ve G , $\text{Aut}(F)$ nin sonlu bir alt grubu olsun. O zaman $F^G \cap F' \neq \{0\}$ dir.

Teorem 6.7 : F , K cismi üzerinde rankı 1'den büyük bir serbest sol nilpotent Leibniz cebiri ve G , $\text{Aut } F$ 'nin trivial olmayan bir sonlu alt grubu olsun. O halde F^G sabit nokta alt cebiri sonlu doğurulmuş değildir.

İspat : Herhangi bir B kümesi için, B yi geren vektör uzayı için $\langle B \rangle$ yazarız. Farz edelim ki; F^G sonlu üretilmiş olsun. F^G nin üreteç kümesini $\{v_1, \dots, v_r\}$ alalım. Önerme 6.2 (II) den $F^G + F' \neq F$ dir. X_0 , F için bir serbest üreteç kümesi olsun. Böylece, $F = \langle X_0 \rangle \oplus F'$ dir. $\langle X_0 \rangle$ için bir X bazı alındığında bazı $x \in X$ için $F^G \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle \oplus F'$ dir. Önerme 3.2 ye göre X , F için serbest bir üreteç kümesidir. $\{\deg(v_1), \dots, \deg(v_r)\}$ nin maksimumu e olsun ve $\deg(v) = e$ ile $v \in \{v_1, \dots, v_r\}$ olsun. F sol nilpotent olduğundan $F^G \cap (\bigoplus_{d \geq e+1} F^{(d)}) \subseteq$

$F(x)$ dir. $F(x) = \cup_{0 \leq q < 1} F(x, q)$ olduğundan öyle bir $0 \leq q < 1$, q reel sayısı vardır öyle ki $F^G \cap (\oplus_{d \geq e+1} F^{(d)}) \subseteq F(x, q)$ dir. $\bar{G} = \{\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_{n-1}\}$ yazalım, burada $\bar{g}_0 = 1$ ve $n = |\bar{G}|$ dir. Önerme 6.6 ya göre $(F^1)^G$ nin sıfırdan farklı bir u elemanı vardır. u nun derecesi t olsun. $q < q' < 1$ olacak şekilde q' ve $(q' - q)p > qt$ olacak şekilde pozitif bir p tamsayı seçelim. $P = K[X]$ ve P bir KG modülüdür. Bryant ve Papistas'ta (2000) Önerme 3.1'e göre, $\sum_i a_i \bar{g}_i, P(x, q')$ ait olmayacak şekilde $s \geq p$ ve $a \in P^{(s)}$ vardır. $c = u.a$ alalım. Böylece $c \in (F^1)^H$ dir. (c nin derecesinin e den büyük seçilebileceği açıktır.) Bryant ve Papistas' taki (2000) Önerme 4.4 ün ispatında verilen argümanlar F için de uygulanabilir. Dolayısıyla $\sum_{h \in \bar{G}} ch, F(x, q)$ 'ya ait değildir. Fakat $\sum_{h \in \bar{G}} ch \in F^G \cap (\oplus_{d \geq e+1} F^{(d)}) \subseteq F(x, q)$. Bu da bir çelişkidir.

6.1. $F_m(N)$ de Bir Otomorfizmin Sabit Noktaları

Bu kısımda tez içerisinde verilen bazı otomorfizmlerin sabit noktaları elde edilecektir.

Tanım 6.1.1: $\phi, F(N)$ nin herhangi bir endomorfizmi olsun. Bir $u \in F(N)$ için $\phi(u) = u$ ise u elemanına ϕ nin sabit noktası denir. ϕ endomorfizmi için $\phi(0) = 0$ olduğundan sıfır elemanına aşıkır sabit nokta denir.

$\{u \in F : \phi(u) = u\}$ kümesine ϕ nin bir sabit noktalar kümesi denir. Bu küme $\text{Fix } \phi$ ile gösterilir. Yani

$$\text{Fix } \phi = \{u \in F : \phi(u) = u\}$$

dir.

Teorem 6.1.2: $\phi : \begin{matrix} x_1 \longrightarrow x_1 + [x_2, x_2] x_1 \\ x_2 \longrightarrow x_2 \end{matrix}$

otomorfizmini alalım. $\text{Fix } \phi = \{u = \alpha_2 x_2 + \beta_{2i_1 i_2 \dots i_k} [x_2, x_1] x_{i_2} \dots x_{i_k}\} +$

$\beta_{2i_1 i_2 \dots i_k} [[x_2, x_2] x_{i_2} \dots x_{i_k}], 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq 2, \alpha_2, \beta_{2i_1 i_2 \dots i_k} \in K \}$ şeklindedir.

İspat: $F_2(N)$ nin baz kümesinin elemanları Drensk, Catteneo (2002) dan $\{ x_{i_1}, [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]: 1 \leq i_1 \leq 2, 1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq 2 \}$ şeklindedir. O zaman $u = \sum \alpha_{i_1} x_{i_1} + \sum \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \in F_m(N)$ elemanını alalım. Burada $\alpha_{i_1}, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K$ dir.

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_{12} [x_1, x_2] + \beta_{21} [x_2, x_1] + \beta_{11} [x_1, x_1] + \beta_{22} [x_2, x_2] + \beta_{121} [[x_1, x_2], x_1] + \beta_{122} [[x_1, x_2], x_2] + \beta_{211} [[x_2, x_1], x_1] + \beta_{212} [[x_2, x_1], x_2] + \beta_{111} [[x_1, x_1], x_1] + \beta_{112} [[x_1, x_1], x_2] + \beta_{221} [[x_2, x_2], x_1] + \beta_{222} [[x_2, x_2], x_2] + \dots$$

u elemanının, modül etkisi kullanarak,

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + [x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_1 r_2 + \beta_{1212} r_1 r_2 + \dots) + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \dots) + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \dots) + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221} r_1 + \beta_{222} r_2 + \dots)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\varphi(u)$ yu hesaplayalım ve u ya eşitleyelim.

Bu durumda ;

$$\begin{aligned} \varphi(u) = & \alpha_1 x_1 + \alpha_1 [[x_2, x_2], x_1] + \alpha_2 x_2 + [x_1 + [x_2, x_2], x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 \dots) \\ & + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \dots) \\ & + ([x_1, x_1] + [[x_2, x_2], x_1, x_1]) (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \dots) \\ & + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \dots) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(u) = u$ eşitliği yazılır ve gereken sadeleştirmeler yapılırsa; geriye

$$\alpha_1 [[x_2, x_2], x_1] + [[x_2, x_2], x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \dots) + [[x_2, x_2], x_1, x_1]$$

$$(\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \dots) = 0$$

eşitliği kalır. Buradan

$$(1) \quad \alpha_1 [[x_1, x_2], x_1] = 0$$

ve

$$(2) \quad [[x_2, x_2], x_1, x_2](\beta_{12} + \beta_{121}r_1 + \dots) + [[x_2, x_2], x_1, x_1](\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \dots) = 0$$

elde edilir. 1. eşitlikten $\alpha_1 = 0$ dir. 2. eşitlikte derecelendirmeden dolayı

$$i) \quad [[x_2, x_2], x_1, x_2] \beta_{12} + [[x_2, x_2], x_1, x_1] \cdot \beta_{11} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$[x_2, x_2] (\beta_{12}r_1 \cdot r_2 + \beta_{11}r_1^2) = 0$$

Buradan $\beta_{12} = \beta_{11} = 0$ bulunur.

$$ii) \quad [[x_2, x_2], x_1, x_2] \beta_{121}r_1 + [[x_2, x_2], x_1, x_1] \beta_{122}r_2 + [[x_2, x_2], x_1, x_1] (\beta_{111}r_1 + \beta_{112}r_2) = 0$$

Terimlerin sadeleşebilmesi için aynı sayıda x_1 ve x_2 olmalıdır.

Bu durumda

$$[x_2, x_2] (\beta_{121}r_1r_1r_2 + \beta_{122}r_1r_2r_2 + \beta_{111}r_1r_1r_1 + \beta_{112}r_1r_1r_2) = 0$$

$$\beta_{121}r_1r_1r_2 + \beta_{122}r_1r_2r_2 + \beta_{111}r_1r_1r_1 + \beta_{112}r_1r_1r_2 = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\beta_{121}r_1^2r_2 + \beta_{122}r_2^2r_1 + \beta_{111}r_1^3 + \beta_{112}r_1^2r_2 = 0$$

Buradan $\beta_{122} = \beta_{111} = 0$ bulunur.

$$\beta_{121} + \beta_{112} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\beta_{121} = -\beta_{112} \text{ olmalıdır.}$$

$$iii) \quad [[x_2, x_2], x_1, x_2] (\beta_{1211}r_1^2 + \beta_{1212}r_1r_2 + \beta_{1222}r_2^2 + \beta_{1221}r_2r_1) +$$

$$[[x_2, x_2], x_1, x_1] (\beta_{1111}r_1^2 + \beta_{1112}r_1r_2 + \beta_{1211}r_2^2 + \beta_{1221}r_2r_1) = 0$$

(ii) deki benzer hesaplamalar yapılarak aynı sayıda x_1 ve x_2 bulunduran monomialleri eşleştirelim.

(iii)

$$[[x_2, x_2], x_1, x_2] (\beta_{1211}r_1^2) + [x_2, x_2], x_1, x_1 (\beta_{1112}r_1r_2 + \beta_{1121}r_2r_1) = 0$$

$$[[x_2, x_2], x_1, x_2] (\beta_{1212}r_1r_2 + \beta_{1221}r_2r_1) + [x_2, x_2], x_1, x_1 (\beta_{1122}r_2^2) = 0$$

$$[[x_2, x_2], x_1, x_2] \beta_{1222}r_2^2 = 0 \Rightarrow \beta_{1222} = 0$$

$$[[x_2, x_2], x_1, x_1] \beta_{1111}r_1^2 = 0 \Rightarrow \beta_{1111} = 0$$

Yukarıdaki ilk eşitlikten

$$[x_2, x_2] (\beta_{1211}r_1^3r_2 + \beta_{1112}r_1^3r_2 + \beta_{1121}r_2r_1^3) = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\beta_{1211} + \beta_{1112} + \beta_{1121} = 0$$

İkinci eşitlikten

$$[x_2, x_2] (\beta_{1212}r_1^2r_2^2 + \beta_{1221}r_1^2r_2^2 + \beta_{1122}r_1^2r_2^2) = 0$$

$$\beta_{1212} + \beta_{1221} + \beta_{1122} = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu şekilde devam edilirse n x_1 in, m x_2 nin sayısını göstermek üzere $\beta_{i_1i_2, \dots, i_k}^{n,m}$ ($n+m=k$) ile içerisinde n tane x_1 , m tane x_2 bulunduran elemanların katsayılarını gösterelim.

O zaman $\sum_{k=n+m} \beta_{i_1i_2, \dots, i_{k-1}}^{n,m} = 0$ olmalıdır.

$$\sum_{\substack{k=n+m \\ k-1 \geq 2 \\ k \geq 3}} \beta_{i_1i_2, \dots, i_{k-1}}^{n,m} = 0, \beta_{i_1i_2 \dots i_2} = 0$$

Tüm $[x_1, x_1], x_{i_3}, \dots, x_{i_n}]$ ve $[x_1, x_2], x_{i_3}, \dots, x_{i_n}]$ monomialleri sadeleşir.

O halde

$$u = \alpha_2 x_2 + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \sum \beta_{2i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_2} r_{i_3} \dots r_{i_k}) + \\ [x_2, x_2] (\beta_{22} + \sum \beta_{22i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_2} r_{i_3} \dots r_{i_k})$$

elde edilir.

Fix $\phi = \{ u = \alpha_2 x_2 + \beta_{2i_1 i_2 \dots i_k} [x_2, x_1], x_{i_2} \dots, x_{i_k}] + \beta_{2i_1 i_2 \dots i_k} [x_2, x_2], x_{i_2} \dots, x_{i_k}], 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq 2 \}$ şeklindedir.

Teorem 6.1.3 : $F_2(N)$ nin bir

$$\phi : x_1 \longrightarrow x_1 + [[x_1, x_1], x_2] - [[x_2, x_1], x_1]$$

$$x_2 \longrightarrow x_2 + [[x_1, x_2], x_2] - [[x_2, x_1], x_2]$$

otomorfizmini alalım. Fix $\phi = \{ u = ([x_1, x_2] - [x_2, x_1]) \sum \gamma_{12i_1 i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}, i_j = 1, 2, \sum \gamma_{12i_1 i_2 \dots i_k} \in K \}$ şeklindedir.

İspat : $u \in F_2(N)$ olsun. O zaman u ' yu $F_2(N)$ nin bazıları cinsinden yazabiliriz.

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \sum \alpha_{i_1} x_{i_1} + \sum \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} [[x_{i_1}, x_{i_2}] \dots x_{i_k}] \in F_2(N)$$

$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots i_k \leq 2, \alpha_{i_1}, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K$ dir.

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \beta_{1111} r_1^2 + \beta_{1112} r_1 r_2 +$$

$$\beta_{1121} r_2 r_1 + \beta_{1122} r_2 r_2 + \beta_{11111} r_1^3 + \beta_{11112} r_1^2 r_2 + \beta_{11121} r_1^2 r_2 + \beta_{11122} r_1 r_2^2 +$$

$$\beta_{11211} r_2 r_1^2 + \beta_{11212} r_2^2 r_1 + \beta_{11222} r_2^3 + \beta_{11221} r_2^2 r_1 + \dots)$$

$$+ [x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_2 + \beta_{1211} r_1^2 + \beta_{1212} r_1 r_2 + \beta_{1221} r_2 r_1 + \beta_{1222} r_2^2 +$$

$$\beta_{12111} r_1^3 + \beta_{12112} r_1^2 r_2 + \beta_{12121} r_1^2 r_2 + \beta_{12122} r_1 r_2^2 + \beta_{12211} r_2 r_1^2 +$$

$$\beta_{12212} r_2^2 r_1 + \beta_{12221} r_2^2 r_1 + \beta_{12222} r_2^3 + \dots + \dots)$$

$$+ [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \beta_{2111} r_1^2 + \beta_{2112} r_1 r_2 + \beta_{2121} r_2 r_1 + \beta_{2122} r_2^2$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_{21111}r_1^3 + \beta_{21112}r_1^2r_2 + \beta_{21121}r_1^2r_2 + \beta_{21122}r_1r_2^2 + \beta_{21211}r_2r_1^2 + \\
& \beta_{21212}r_2^2r_1 + \beta_{21221}r_2^2r_1 + \beta_{21222}r_2^3 + \dots + \dots) \\
& + [x_2, x_2] (\beta_{222} + \beta_{221}r_1 + \beta_{222}r_2 + \beta_{2211}r_1^2 + \beta_{2212}r_1r_2 + \beta_{2221}r_2r_1 + \beta_{2222}r_2^2 + \\
& \beta_{22111}r_1^3 + \beta_{22112}r_1^2r_2 + \beta_{22121}r_1^2r_2 + \beta_{22122}r_1r_2^2 + \beta_{22211}r_2r_1^2 + \\
& \beta_{22212}r_2^2r_1 + \beta_{22221}r_2r_1^2 + \beta_{22222}r_2^3 + \dots + \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 [[x_1, x_1], x_2] - \alpha_1 [[x_2, x_1], x_1] + \alpha_2 [[x_1, x_2], x_2] - \\
& \alpha_2 [[x_2, x_1], x_2] \\
& ([x_1, x_1] + [[x_1, x_1], x_2] - [[x_2, x_1], x_1, x_1]) (\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \beta_{112}r_2 + \dots) \\
& ([x_1, x_2] + [[x_1, x_1], x_2] - [[x_2, x_1], x_1, x_2]) (\beta_{12} + \beta_{121}r_1 + \beta_{122}r_2 + \dots) \\
& ([x_2, x_1] + [[x_1, x_2], x_2] - [[x_2, x_1], x_2, x_1]) (\beta_{21} + \beta_{211}r_1 + \beta_{212}r_2 + \dots) \\
& ([x_2, x_2] + [[x_1, x_2], x_2] - [[x_2, x_1], x_2, x_2]) (\beta_{22} + \beta_{221}r_1 + \beta_{222}r_2 + \dots)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(u) = u$ eşitliği yazılır ve gereken sadeleştirmeler yapılırsa ; geriye

$$[[x_1, x_1], x_2] - [x_2, x_1], x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \dots)$$

$$[[x_1, x_1], x_2] - [x_2, x_1], x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121}r_1 + \dots)$$

$$[[x_1, x_2], x_2] - [x_2, x_1], x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211}r_1 + \dots)$$

$$[[x_1, x_2], x_2] - [x_2, x_1], x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221}r_1 + \dots) = 0$$

eşitliği kalır. Buradan

$$[x_1, x_1] (\beta_{11}r_2r_1 + \beta_{111}r_1^2r_2 + \beta_{112}r_1r_2^2 + \beta_{1111}r_1^3r_2 + \beta_{1112}r_1^2r_2^2 + \beta_{1121}r_2^2r_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& \beta_{1122}r_2^3r_1 + \beta_{111111}r_1^4r_2 + \beta_{111112}r_1^3r_2^2 + \beta_{111121}r_1^3r_2^2 + \beta_{111122}r_1^2r_2^3 + \\
& \beta_{11211}r_2^2r_1^3 + \beta_{11212}r_2^3r_1^2 + \beta_{11222}r_2^4r_1 + \beta_{11221}r_2^3r_1^2 + \dots) \\
& + \beta_{12}r_2^2 + \beta_{121}r_1r_2^2 + \beta_{122}r_2^3 + \beta_{1211}r_1^2r_2^2 + \beta_{1212}r_1r_2^3 + \beta_{1221}r_2^3r_1 + \\
& \beta_{1222}r_2^4 - \beta_{12111}r_1^3r_2^2 + \beta_{12112}r_1^2r_2^3 + \beta_{12121}r_1^2r_2^3 + \beta_{12122}r_1r_2^4 + \\
& \beta_{12211}r_1^3r_2^2 + \beta_{12212}r_2^4r_1 + \beta_{12221}r_2^4r_1 + \beta_{12222}r_2^5 - \dots + \dots) \\
& + \beta_{21}r_2^2 + \beta_{211}r_1r_2^2 + \beta_{212}r_2^3 + \beta_{2111}r_1^2r_2^2 + \beta_{2112}r_1r_2^3 + \beta_{2121}r_2^3r_1 + \\
& \beta_{2122}r_2^4 + \beta_{21111}r_1^3r_2^2 + \beta_{21112}r_1^2r_2^3 + \beta_{21121}r_1^2r_2^3 + \beta_{21122}r_1r_2^4 + \\
& \beta_{21211}r_2^3r_1^2 + \beta_{21212}r_2^4r_1 + \beta_{21221}r_2^4r_1 + \beta_{21222}r_2^5 + \dots + \dots) \\
& + [x_1, x_2] (\beta_{22}r_2^2 + \beta_{221}r_1r_2^2 + \beta_{222}r_2^3 + \beta_{2211}r_1^2r_2^2 + \beta_{2212}r_1r_2^3 + \beta_{2221}r_2^3r_1 + \\
& \beta_{2222}r_2^4 + \beta_{22111}r_1^3r_2^2 + \beta_{22112}r_1^2r_2^3 + \beta_{22121}r_1^2r_2^3 + \beta_{22122}r_1r_2^4 + \\
& \beta_{22211}r_2^3r_1^2 + \beta_{22212}r_2^4r_1 + \beta_{22221}r_1r_2^4 + \beta_{22222}r_2^5 + \dots + \dots) \\
& - [x_2, x_1] (\beta_{11}r_1^2 + \beta_{111}r_1^3 + \beta_{112}r_2r_1^2 + \beta_{1111}r_1^4 + \beta_{1112}r_1^3r_2 + \beta_{1121}r_2r_1^3 + \\
& \beta_{1122}r_2^2r_1^2 + \beta_{111111}r_1^5 + \beta_{111112}r_1^4r_2 + \beta_{111121}r_1^4r_2 + \beta_{111122}r_1^3r_2^2 + \\
& \beta_{11211}r_2r_1^4 + \beta_{11212}r_2^2r_1^3 + \beta_{11222}r_2^3r_1^2 + \beta_{11221}r_2^2r_1^3 + \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta_{12}r_1r_2 + \beta_{121}r_1^2r_2 + \beta_{122}r_2^2r_1 + \beta_{1211}r_1^3r_2 + \beta_{1212}r_1^2r_2^2 + \beta_{1221}r_1^2r_2^2 + \\ & \beta_{1222}r_2^3r_1 + \beta_{12111}r_1^4r_2 + \beta_{12112}r_1^3r_2^2 + \beta_{12121}r_1^3r_2^2 + \beta_{12122}r_1^2r_2^3 + \\ & \beta_{12211}r_2^2r_1^3 + \beta_{12212}r_2^3r_1^2 + \beta_{12221}r_2^3r_1^2 + \beta_{12222}r_2^4r_1^2 + \dots + \dots) \end{aligned}$$

$$\beta_{21}r_1r_2 + \beta_{211}r_1^2r_2 + \beta_{212}r_2^2r_1 + \beta_{2111}r_1^3r_2 + \beta_{2112}r_1^2r_2^2 + \beta_{2121}r_1^2r_2^2$$

$$+ \beta_{2122}r_2^3r_1 + \beta_{21111}r_1^4r_2 + \beta_{21112}r_1^3r_2^2 + \beta_{21121}r_1^3r_2^2 + \beta_{21122}r_1^2r_2^3 +$$

$$\beta_{21211}r_2^2r_1^3 + \beta_{21212}r_2^3r_1^2 + \beta_{21221}r_2^3r_1^2 + \beta_{21222}r_2^4r_1 + \dots + \dots)$$

$$\beta_{22}r_2^2 + \beta_{221}r_1r_2^2 + \beta_{222}r_2^3 + \beta_{2211}r_1^2r_2^2 + \beta_{2212}r_1r_2^3 + \beta_{2221}r_2^3r_1 +$$

$$\beta_{2222}r_2^4 + \beta_{22111}r_1^3r_2^2 + \beta_{22112}r_1^2r_2^3 + \beta_{22121}r_1^2r_2^3 + \beta_{22122}r_1r_2^4 +$$

$$\beta_{22211}r_2^3r_1^2 + \beta_{22212}r_2^4r_1 + \beta_{22221}r_1r_2^4 + \beta_{22222}r_2^5 + \dots + \dots) = 0$$

elde edilir. Derecelendirmeden dolayı ;

$$[x_1, x_1] \beta_{11}r_1r_2 + \beta_{12}r_2^2 + \beta_{21}r_2^2 = 0$$

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} + \beta_{21} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$[x_1, x_2] \beta_{22}r_2^2 = 0 \text{ buradan; } \beta_{22} = 0$$

$$[x_2, x_1] \beta_{11}r_1^2 + \beta_{12}r_1r_2 + \beta_{21}r_1r_2 + \beta_{22}r_2^2 = 0$$

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 0 \quad \beta_{12} + \beta_{21} = 0$$

$$[x_1, x_1] \quad \beta_{111}r_1^2r_2 + \beta_{112}r_1r_2^2 + \beta_{121}r_1r_2^2 + \beta_{122}r_1^3 + \beta_{211}r_1r_2^2 + \beta_{212}r_2^3$$

$$+ \beta_{221}r_1^3 = 0$$

$$\beta_{111} + \beta_{112} + \beta_{121} + \beta_{211} = 0 \quad \beta_{122} + \beta_{212} + \beta_{221} = 0$$

$$[x_1, x_2] \quad \beta_{221}r_1r_2^2 + \beta_{222}r_2^3 = 0 \text{ Buradan ; } \beta_{222} = 0$$

$$[x_2, x_1] \quad \beta_{111}r_1^3 + \beta_{112}r_2r_1^2 + \beta_{121}r_1^2r_2 + \beta_{122}r_2^2r_1 + \beta_{211}r_1^2r_2 + \beta_{212}r_2^2r_1 +$$

$$\beta_{221}r_1r_2^2 + \beta_{222}r_2^3 = 0$$

$$\beta_{111} = 0 \quad \beta_{222} = 0 \quad \beta_{112} + \beta_{121} + \beta_{211} = 0$$

$$\beta_{122} + \beta_{212} + \beta_{221} = 0$$

$$[x_1, x_1] \quad \beta_{1111}r_1^3r_2 + \beta_{1112}r_1^2r_2^2 + \beta_{1121}r_2^2r_1^2 + \beta_{1122}r_2^3r_1 + \beta_{1212}r_1^2r_2^2 +$$

$$\beta_{1212}r_1r_2^3 + \beta_{1221}r_2^3r_1 + \beta_{1222}r_2^4 + \beta_{2111}r_1^2r_2^2 + \beta_{2112}r_1r_2^3 +$$

$$\beta_{2121}r_2^3r_1 + \beta_{2122}r_2^4 + \beta_{2211}r_1r_2^3 + \beta_{2212}r_2^4 + \beta_{2221}r_2^4 = 0$$

Buradan ;

$$i) \quad (\beta_{1112} + \beta_{1121} + \beta_{1212} + \beta_{2111}) r_1^2r_2^2 = 0$$

$$\beta_{1112} + \beta_{1121} + \beta_{1212} + \beta_{2111} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{ii)} \quad \beta_{1111} r_1^3 r_2 = 0 ; \quad \beta_{1111} = 0$$

$$\text{iii)} \quad (\beta_{1122} + \beta_{1212} + \beta_{1221} + \beta_{2112} + \beta_{2121} + \beta_{2211}) r_2^3 r_1 = 0$$

$$\beta_{1122} + \beta_{1212} + \beta_{1221} + \beta_{2112} + \beta_{2121} + \beta_{2211} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{iv)} \quad (\beta_{2122} + \beta_{2212} + \beta_{2221} + \beta_{1222}) r_2^4 = 0$$

$$\beta_{2122} + \beta_{2212} + \beta_{2221} + \beta_{1222} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$[x_1, x_2] (\beta_{2211} r_1^2 r_2^2 + \beta_{2212} r_1 r_2^3 + \beta_{2221} r_2^3 r_1 + \beta_{2222} r_2^4) = 0$$

$$\beta_{2222} = 0$$

$$\text{O halde ; } \beta_{1112} + \beta_{1121} + \beta_{1211} + \beta_{2111} = 0$$

$$\beta_{2122} + \beta_{1222} + \beta_{2212} + \beta_{2221} = 0$$

$$\beta_{1122} + \beta_{1212} + \beta_{1221} + \beta_{2112} + \beta_{2121} + \beta_{2211} = 0$$

$$\beta_{1111} = \beta_{2222} = 0$$

elde edilir.

$$[x_1, x_1] (\beta_{11111} r_1^4 r_2 + \beta_{11112} r_1^3 r_2^2 + \beta_{11121} r_1^3 r_2^2 + \beta_{11122} r_1^2 r_2^3 + \beta_{11211} r_2^2 r_1^3 +$$

$$\beta_{11212}r_2^3r_1^2 + \beta_{12111}r_1^3r_2^2 + \beta_{12112}r_1^2r_2^3 + \beta_{12121}r_1^2r_2^3 + \beta_{12122}r_1r_2^4 +$$

$$\beta_{12211}r_2^3r_1^2 + \beta_{12212}r_2^4r_1 + \beta_{12221}r_2^4r_1 + \beta_{12222}r_2^5 + \beta_{21111}r_1^3r_2^2 +$$

$$\beta_{21112}r_1^2r_2^3 + \beta_{21121}r_1^2r_2^3 + \beta_{21122}r_1r_2^4 + \beta_{21211}r_2^3r_1^2 + \beta_{21212}r_2^4r_1 +$$

$$\beta_{21221}r_2^4r_1 + \beta_{21222}r_2^5 + \beta_{12222}r_2^5 + \beta_{11221}r_2^3r_1^2 + \beta_{11222}r_2^4r_1) = 0$$

Buradan;

$$\beta_{11111}r_1^4r_2 = 0 \text{ Buradan ; } \beta_{11111} = 0 \text{ dir.}$$

$$(\beta_{11112} + \beta_{11121} + \beta_{11211} + \beta_{12111} + \beta_{21111})r_1^3r_2^2 = 0$$

$$(\beta_{11122} + \beta_{11212} + \beta_{12112} + \beta_{12211} + \beta_{21112} + \beta_{21121} + \beta_{21211} + \beta_{11221} +$$

$$\beta_{12121})r_1^2r_2^3 = 0$$

$$(\beta_{12122} + \beta_{12212} + \beta_{12221} + \beta_{12212} + \beta_{21122} + \beta_{21212} + \beta_{21221} + \beta_{11222})$$

$$r_1r_2^4 = 0$$

$$(\beta_{12222} + \beta_{21222} + \beta_{12222})r_2^5 = 0$$

$$[x_1, x_2] (\beta_{22111}r_1^3r_2^2 + \beta_{22112}r_1^2r_2^3 + \beta_{22121}r_1^2r_2^3 + \beta_{22122}r_1r_2^4 + \beta_{22211}r_2^3r_1^2$$

$$+ \beta_{22212}r_2^4r_1 + \beta_{22221}r_1r_2^4 + \beta_{22222}r_2^5) = 0$$

Buradan; $\beta_{22222} = 0$

$$[x_1, x_1] \text{ de } \beta_{22111}r_1^2r_2^3 + \beta_{22112}r_1r_2^4 + \beta_{22121}r_1r_2^4 + \beta_{22122}r_2^5 + \beta_{22211}r_2^4r_1 +$$

$$\beta_{22212}r_2^5 + \beta_{22221}r_2^5 = 0$$

$$r_1^2r_2^3 (\beta_{11122} + \beta_{11212} + \beta_{12112} + \beta_{12121} + \beta_{12211} + \beta_{21112} + \beta_{21121} + \beta_{21211} +$$

$$+ \beta_{11221} + \beta_{22111}) = 0$$

$$r_2^2r_1^3 (\beta_{11112} + \beta_{11121} + \beta_{11211} + \beta_{12111} + \beta_{21111}) = 0$$

$$r_1r_2^4 (\beta_{12122} + \beta_{12212} + \beta_{12221} + \beta_{21122} + \beta_{21212} + \beta_{21221} + \beta_{22112} + \beta_{22121} +$$

$$\beta_{11222} + \beta_{22211}) = 0$$

$$r_2^5 (\beta_{21222} + \beta_{22212} + \beta_{22221} + \beta_{22122} + \beta_{12222}) = 0$$

O zaman

$$u = [x_1, x_2] (\beta_{12} + (\beta_{121} + \beta_{112})r_1 + \beta_{122}r_2 + (\beta_{1211} + \beta_{1112} + \beta_{1121})r_1^2 +$$

$$(\beta_{1212} + \beta_{1221} + \beta_{1122})r_1r_2 + \beta_{1222}r_2^2 + (\beta_{12111} + \beta_{11112} +$$

$$\beta_{11121} + \beta_{11211}) + (\beta_{12112} + \beta_{12121} + \beta_{12211} + \beta_{11122} + \beta_{11212})r_1^2r_2 +$$

$$(\beta_{12122} + \beta_{12212} + \beta_{12221} + \beta_{11222})r_1r_2^2 + \dots$$

$$+ [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + (\beta_{212} + \beta_{221}) r_2 + \beta_{2111} r_1^2 + (\beta_{2112} + \beta_{2211} + \beta_{2121}) r_2 r_1 + (\beta_{2122} + \beta_{2212} + \beta_{2221}) r_2^2 + (\beta_{21111} r_1^3 + \dots))$$

Bu şekilde devam edilerek ve elde ettiğimiz

$$\sum \beta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{n m} \quad i_j = 1, 2, \quad \beta_{i_1 i_1 \dots i_1} = 0, \quad i_1 = 1, 2 \quad n \text{ tane } x_1, \quad m \text{ tane } x_2$$

eşitliklerini kullanarak ;

$$u = ([x_1, x_2] - [x_2, x_1]) \gamma_{12} + \gamma_{121} r_1 + \gamma_{122} r_2 + \gamma_{1211} r_1^2 + \gamma_{1212} r_1 r_2 + \gamma_{1222} r_2^2 + \dots$$

elde edilir.

Kapalı formda $u = ([x_1, x_2] - [x_2, x_1]) \sum \gamma_{12 i_1 i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}, i_j = 1, 2$ elde edilir.

Teorem 6.1.4: $F_3(N)$ nin

$$\begin{aligned} \psi : x_1 &\longrightarrow x_1 + [x_2, x_3] \\ x_2 &\longrightarrow x_2 \\ x_3 &\longrightarrow x_3 \end{aligned}$$

otomorfizmi alalım.

$$\text{Fix } \psi = \{ u = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \sum \beta_{21 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_2, x_1] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{22 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_2, x_2] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{23 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_2, x_3] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{31 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_3, x_1] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{32 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_3, x_2] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{33 i_1 i_2 \dots i_k} [[x_3, x_3] x_{i_2} \dots x_{i_k}], 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \}$$

$\dots \leq i_k \leq 2, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K$ şeklindedir.

İspat: $u = \sum \alpha_{i_1} x_{i_1} + \sum \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \in F_m(N)$ elemanını alalım.

Burada $\alpha_{i_j}, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K$ dir.

$$\begin{aligned} u = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221} r_1 + \beta_{222} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_3] (\beta_{13} + \beta_{131} r_1 + \beta_{132} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_3] (\beta_{23} + \beta_{231} r_1 + \beta_{232} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_1] (\beta_{31} + \beta_{311} r_1 + \beta_{312} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_2] (\beta_{32} + \beta_{321} r_1 + \beta_{322} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_3] (\beta_{33} + \beta_{331} r_1 + \beta_{332} r_2 + \dots) \end{aligned}$$

$\psi(u)$ yu hesaplayalım ve u ya eşitleyelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \psi(u) = & \alpha_1 x_1 + \alpha_1 ([x_2, x_3]) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \\ & + ([x_1, x_1] + [x_2, x_3], x_1) (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \dots) \\ & + ([x_1, x_2] + [x_2, x_3], x_2) (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221} r_1 + \beta_{222} r_2 + \dots) \\ & + ([x_1, x_3] + [x_2, x_3], x_3) (\beta_{13} + \beta_{131} r_1 + \beta_{132} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_3] (\beta_{23} + \beta_{231} r_1 + \beta_{232} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_1] (\beta_{31} + \beta_{311} r_1 + \beta_{312} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_2] (\beta_{32} + \beta_{321} r_1 + \beta_{322} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_3] (\beta_{33} + \beta_{331} r_1 + \beta_{332} r_2 + \dots) \end{aligned}$$

elde edilir. $\psi(u) = u$ eşitliği yazılır ve gereken sadeleştirmeler yapılırsa; geriye

$$\alpha_1 ([x_2, x_3]) + [x_2, x_3], x_1 (\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \beta_{112}r_2 + \dots) + [x_2, x_3], x_2 (\beta_{12} + \beta_{121}r_1 + \beta_{122}r_2 + \dots) + [x_2, x_3], x_3 (\beta_{13} + \beta_{131}r_1 + \beta_{132}r_2 + \dots) = 0$$

eşitliği kalır. Buradan ;

- i) $\alpha_1 ([x_2, x_3]) = 0$ eşitliğinden ; $\alpha_1 = 0$ dır.
- ii) $[x_2, x_3], x_1 (\beta_{11} + \beta_{111}r_1 + \beta_{112}r_2 + \beta_{113}r_3 + \beta_{1111}r_1^2 + \beta_{1112}r_1r_2 + \beta_{1113}r_1r_3 + \beta_{1121}r_2r_1 + \beta_{1122}r_2^2 + \beta_{1123}r_2r_3 + \beta_{1131}r_3r_1 + \beta_{1132}r_3r_2 + \beta_{1133}r_3^2 + \dots) +$
 $[x_2, x_3], x_2 (\beta_{12} + \beta_{121}r_1 + \beta_{122}r_2 + \beta_{123}r_3 + \beta_{1211}r_1^2 + \beta_{1212}r_1r_2 + \beta_{1213}r_1r_3 + \beta_{1221}r_2r_1 + \beta_{1222}r_2^2 + \beta_{1223}r_2r_3 + \beta_{1231}r_3r_1 + \beta_{1232}r_3r_2 + \beta_{1233}r_3^2 + \dots) +$
 $[x_2, x_3], x_3 (\beta_{13} + \beta_{131}r_1 + \beta_{132}r_2 + \beta_{133}r_3 + \beta_{1311}r_1^2 + \beta_{1312}r_1r_2 + \beta_{1313}r_1r_3 + \beta_{1321}r_2r_1 + \beta_{1322}r_2^2 + \beta_{1323}r_2r_3 + \beta_{1331}r_3r_1 + \beta_{1332}r_3r_2 + \beta_{1333}r_3^2 + \dots) = 0$

elde edilir.

$$[x_2, x_3] (\beta_{11}r_1 + \beta_{111}r_1^2 + \beta_{112}r_2r_1 + \beta_{113}r_3r_1 + \beta_{1111}r_1^3 + \beta_{1112}r_1^2r_2 + \beta_{1113}r_1^2r_3 + \beta_{1121}r_2r_1^2 + \beta_{1122}r_2^2r_1 + \beta_{1123}r_2r_3r_1 + \beta_{1131}r_3r_1^2 + \beta_{1132}r_3r_2r_1 + \beta_{1133}r_3^2r_1 + \dots + \beta_{12}r_2 + \beta_{121}r_1r_2 + \beta_{122}r_2^2 + \beta_{123}r_3r_2 + \beta_{1211}r_1^2r_2 + \beta_{1212}r_1r_2^2 + \beta_{1213}r_1r_3r_2 + \beta_{1221}r_2^2r_1 + \beta_{1222}r_2^3 + \beta_{1223}r_2^2r_3 + \beta_{1231}r_3r_1r_2 + \beta_{1232}r_2^2r_3 + \beta_{1233}r_3^2r_2 + \dots + \beta_{13}r_3 + \beta_{131}r_1r_3 + \beta_{132}r_2r_3 + \beta_{133}r_3^2 + \beta_{1311}r_1^2r_3 + \beta_{1312}r_1r_2r_3 + \beta_{1313}r_1r_3^2 + \beta_{1321}r_2r_1r_3 + \beta_{1322}r_2^2r_3 + \beta_{1323}r_2r_3^2 + \beta_{1331}r_3^2r_1 + \beta_{1332}r_3^2r_2 + \beta_{1333}r_3^3 + \dots) = 0$$

Terimlerin sadeleşebilmesi için aynı sayıda x_1 , x_2 ve x_3 olmalıdır.

Bu durumda derecelendirmeden ;

$$I) \beta_{11}r_1 + \beta_{12}r_2 + \beta_{13}r_3 = 0 \quad \text{Buradan; } \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$II) \beta_{111}r_1^2 + \beta_{112}r_2r_1 + \beta_{113}r_3r_1 + \beta_{121}r_1r_2 + \beta_{122}r_2^2 + \beta_{123}r_3r_2 + \beta_{131}r_1r_3 + \beta_{132}r_2r_3 + \beta_{133}r_3^2 = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Buradan ;

$$\bullet \quad \beta_{111}r_1^2 + \beta_{122}r_2^2 + \beta_{133}r_3^2 = 0 \quad \text{olmalıdır. Buradan;}$$

$$\beta_{111} = \beta_{122} = \beta_{133} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\bullet \quad (\beta_{112} + \beta_{121})r_1r_2 = 0$$

$$(\beta_{113} + \beta_{131})r_1r_3 = 0$$

$$(\beta_{123} + \beta_{132})r_2r_3 = 0 \text{ olmalıdır. Buradan ;}$$

$$\beta_{112} = -\beta_{121}, \beta_{113} = -\beta_{131}, \beta_{123} = -\beta_{132} \text{ bulunur.}$$

$$III) \beta_{1111}r_1^3 + \beta_{1112}r_1^2r_2 + \beta_{1113}r_1^2r_3 + \beta_{1121}r_2r_1^2 + \beta_{1122}r_2^2r_1 + \beta_{1123}r_2r_3r_1 + \beta_{1131}r_3r_1^2 + \beta_{1132}r_3r_2r_1 + \beta_{1133}r_3^2r_1 + \beta_{1211}r_1^2r_2 + \beta_{1212}r_1r_2^2 + \beta_{1213}r_1r_3r_2 + \beta_{1221}r_2^2r_1 + \beta_{1222}r_2^3 + \beta_{1223}r_2^2r_3 + \beta_{1231}r_3r_1r_2 + \beta_{1232}r_2^2r_3 + \beta_{1233}r_3^2r_2 + \beta_{1311}r_1^2r_3 + \beta_{1312}r_1r_2r_3 + \beta_{1313}r_1r_3^2 + \beta_{1321}r_2r_1r_3 + \beta_{1322}r_2^2r_3 + \beta_{1323}r_3^2r_2 + \beta_{1331}r_3^2r_1 + \beta_{1332}r_3^2r_2 + \beta_{1333}r_3^3 = 0$$

$$\bullet \quad \beta_{1111}r_1^3 + \beta_{1222}r_2^3 + \beta_{1333}r_3^3 = 0 \text{ olmalıdır. Buradan ;}$$

$$\beta_{1111} = \beta_{1222} = \beta_{1333} = 0 \text{ dir.}$$

$$\bullet \quad (\beta_{1112} + \beta_{1121} + \beta_{1211})r_1^2r_2 = 0$$

$$(\beta_{1113} + \beta_{1311} + \beta_{1131})r_1^2r_3 = 0$$

$$(\beta_{1122} + \beta_{1221} + \beta_{1212})r_1r_2^2 = 0$$

$$(\beta_{1133} + \beta_{1313} + \beta_{1331})r_3^2r_1 = 0$$

$$(\beta_{1223} + \beta_{1232} + \beta_{1322})r_2^2r_3 = 0$$

$$(\beta_{1233} + \beta_{1323} + \beta_{1332})r_3^2r_2 = 0$$

$$(\beta_{1123} + \beta_{1132} + \beta_{1213} + \beta_{1231} + \beta_{1312} + \beta_{1321}r_2r_1r_3) = 0$$

olmalıdır. Buradan;

$$\beta_{1112} + \beta_{1121} + \beta_{1211} = 0$$

$$\beta_{1113} + \beta_{1311} + \beta_{1131} = 0$$

$$\beta_{1122} + \beta_{1221} + \beta_{1212} = 0$$

$$\beta_{1133} + \beta_{1313} + \beta_{1331} = 0$$

$$\beta_{1223} + \beta_{1232} + \beta_{1322} = 0$$

$$\beta_{1233} + \beta_{1323} + \beta_{1332} = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu şekilde devam edilirse n tane x_1 , m tane x_2 , p tane x_3 ün sayısını göstermek üzere $\beta_{i_1, i_2, \dots, i_k} (n + m + p = k)$ ile içerisinde n tane x_1 , m tane x_2 , p tane x_3 bulunduran elemanların katsayılarını gösterelim.

$$\text{O zaman } \sum_{k=n+m+p} \beta_{i_1 i_2, \dots, i_{k-1}}^{n,m,p} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Tüm $[x_2 x_3] x_i$ monomialleri sadeleşir.

O halde;

$$\begin{aligned} u = & \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \sum \beta_{21i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \\ & \sum \beta_{22i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_2, x_3] (\beta_{23} + \sum \beta_{23i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_3, x_3] \\ & (\beta_{33} + \sum \beta_{33i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_3, x_1] (\beta_{31} + \sum \beta_{31i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + \\ & [x_3, x_2] (\beta_{32} + \sum \beta_{32i_1, i_2, \dots, i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.1.5: $F_3(N)$ nin bir

$$\begin{aligned} \varphi: x_3 & \longrightarrow x_3 + [x_2, x_1] \\ x_i & \longrightarrow x_i, \quad i \neq 3 \end{aligned}$$

otomorfizmi alalım.

Fix $\varphi = \{ u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \sum \beta_{11i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_1]x_{i_2} \dots x_k] + \sum \beta_{12i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_2]x_{i_2} \dots x_k] + \sum \beta_{13i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_3]x_{i_2} \dots x_k] + \sum \beta_{21i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, x_1]x_{i_2} \dots x_k] + \sum \beta_{22i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, x_2]x_{i_2} \dots x_k] + \sum \beta_{23i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, x_3]x_{i_2} \dots x_k], 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq 2, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K \}$ dir.

İspat: $u = \sum \alpha_{i_1} x_{i_1} + \sum \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \in F_m(N)$ elemanını alalım.

Burada $\alpha_{i_j}, \beta_{i_1 i_2 \dots i_k} \in K$ dir.

$$\begin{aligned} u = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221} r_1 + \beta_{222} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_3] (\beta_{13} + \beta_{131} r_1 + \beta_{132} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_3] (\beta_{23} + \beta_{231} r_1 + \beta_{232} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_1] (\beta_{31} + \beta_{311} r_1 + \beta_{312} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_2] (\beta_{32} + \beta_{321} r_1 + \beta_{322} r_2 + \dots) \\ & + [x_3, x_3] (\beta_{33} + \beta_{331} r_1 + \beta_{332} r_2 + \dots) \end{aligned}$$

$\varphi(u)$ yu hesaplayalım ve u ya eşitleyelim.

Bu durumda ;

$$\begin{aligned} \varphi(u) = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_3 ([x_2, x_1]) \\ & + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \beta_{111} r_1 + \beta_{112} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_2] (\beta_{12} + \beta_{121} r_1 + \beta_{122} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \beta_{211} r_1 + \beta_{212} r_2 + \dots) \\ & + [x_2, x_2] (\beta_{22} + \beta_{221} r_1 + \beta_{222} r_2 + \dots) \\ & + [x_1, x_3] (\beta_{13} + \beta_{131} r_1 + \beta_{132} r_2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ([x_3, x_1] + [x_2, x_1]x_1)(\beta_{31} + \beta_{311}r_1 + \beta_{312}r_2 + \dots) \\
& + ([x_3, x_2] + [x_2, x_1]x_2)(\beta_{32} + \beta_{321}r_1 + \beta_{322}r_2 + \dots) \\
& + ([x_3, x_3] + [x_2, x_1]x_3)(\beta_{33} + \beta_{331}r_1 + \beta_{332}r_2 + \dots) \\
& + [x_2, x_3](\beta_{23} + \beta_{231}r_1 + \beta_{232}r_2 + \dots)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(u) = u$ eşitliği yazılır ve gereken sadeleştirmeler yapılırsa ; geriye $\alpha_3([x_2, x_1]) + [x_2, x_1]x_1(\beta_{31} + \beta_{311}r_1 + \beta_{312}r_2 + \dots) + [x_2, x_1]x_2(\beta_{32} + \beta_{321}r_1 + \beta_{322}r_2 + \dots) + [x_2, x_1]x_3(\beta_{33} + \beta_{331}r_1 + \beta_{332}r_2 + \dots) = 0$

eşitliği kalır. Buradan ;

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & \alpha_3([x_2, x_1]) = 0 \text{ olduğundan } \alpha_3 = 0 \text{ dır.} \\
\text{ii)} \quad & [[x_2, x_1], x_1](\beta_{31} + \beta_{311}r_1 + \beta_{312}r_2 + \beta_{313}r_3 + \beta_{3111}r_1^2 + \beta_{3112}r_1r_2 + \\
& \beta_{3113}r_1r_3 + \beta_{3121}r_2r_1 + \beta_{3122}r_2^2 + \beta_{3123}r_2r_3 \\
& + \beta_{3131}r_3r_1 + \beta_{3132}r_3r_2 + \beta_{3133}r_3^2 + \dots) + \\
& [[x_2, x_1], x_2](\beta_{32} + \beta_{321}r_1 + \beta_{322}r_2 + \beta_{323}r_3 + \beta_{3211}r_1^2 + \\
& \beta_{3212}r_1r_2 + \beta_{3213}r_1r_3 + \beta_{3221}r_2r_1 + \beta_{3222}r_2^2 + \\
& \beta_{3223}r_2r_3 + \beta_{3231}r_3r_1 + \beta_{3232}r_3r_2 + \beta_{3233}r_3^2 + \dots) + \\
& [[x_2, x_1], x_3](\beta_{33} + \beta_{331}r_1 + \beta_{332}r_2 + \beta_{333}r_3 + \beta_{3311}r_1^2 + \beta_{3312}r_1r_2 \\
& + \beta_{3313}r_1r_3 + \beta_{3321}r_2r_1 + \beta_{3322}r_2^2 + \beta_{3323}r_2r_3 + \\
& \beta_{3331}r_3r_1 + \beta_{3332}r_3r_2 + \beta_{3333}r_3^2 + \dots) = 0
\end{aligned}$$

$[x_2, x_1]$ parentezine alınır ;

$$\begin{aligned}
& [x_2, x_1](\beta_{31}r_1 + \beta_{311}r_1^2 + \beta_{312}r_2r_1 + \beta_{313}r_3r_1 + \beta_{3111}r_1^3 + \beta_{3112}r_1^2r_2 + \\
& \beta_{3113}r_1^2r_3 + \beta_{3121}r_2r_1^2 + \beta_{3122}r_2^2r_1 + \beta_{3123}r_2r_3r_1 + \\
& \beta_{3131}r_3r_1^2 + \beta_{3132}r_3r_2r_1 + \beta_{3133}r_3^2r_1 + \dots) + \\
& \beta_{32}r_2 + \beta_{321}r_1r_2 + \beta_{322}r_2^2 + \beta_{323}r_3r_2 + \beta_{3211}r_1^2r_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_{3212}r_1r_2^2 + \beta_{3213}r_1r_3r_2 + \beta_{3221}r_2^2r_1 + \beta_{3222}r_2^3 + \\
& \beta_{3223}r_2^2r_3 + \beta_{3231}r_3r_1r_2 + \beta_{3232}r_3r_2^2 + \beta_{3233}r_3^2r_2 + \dots) \\
& \beta_{33}r_3 + \beta_{331}r_1r_3 + \beta_{332}r_2r_3 + \beta_{333}r_3^2 + \beta_{3311}r_1^2r_3 + \\
& \beta_{3312}r_1r_2r_3 + \beta_{3313}r_1r_3^2 + \beta_{3321}r_2r_1r_3 + \beta_{3322}r_2^2r_3 + \\
& \beta_{3323}r_2r_3^2 + \beta_{3331}r_3^2r_1 + \beta_{3332}r_3^2r_2 + \beta_{3333}r_3^3 + \dots) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Terimlerin sadeleşebilmesi için aynı sayıda x_1 , x_2 ve x_3 olmalıdır. Bu durumda derecelendirmeden ;

$$I) \beta_{31}r_1 + \beta_{32}r_2 + \beta_{33}r_3 = 0 \text{ Buradan; } \beta_{31} = \beta_{32} = \beta_{33} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$II) \beta_{311}r_1^2 + \beta_{312}r_2r_1 + \beta_{313}r_3r_1 + \beta_{321}r_1r_2 + \beta_{322}r_2^2 + \beta_{323}r_3r_2 + \beta_{331}r_1r_3 + \beta_{332}r_2r_3 + \beta_{333}r_3^2 = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Buradan

$$\bullet \beta_{311}r_1^2 + \beta_{322}r_2^2 + \beta_{333}r_3^2 = 0$$

$$\beta_{311} = \beta_{322} = \beta_{333} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\bullet (\beta_{321} + \beta_{312})r_2r_1 = 0$$

$$(\beta_{313} + \beta_{331})r_3r_1 = 0$$

$$(\beta_{332} + \beta_{323})r_2r_3 = 0 \text{ olmalıdır. Buradan}$$

$$\beta_{321} = -\beta_{312}$$

$$\beta_{313} = -\beta_{331}$$

$$\beta_{332} = -\beta_{323} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned}
III) & \beta_{3111}r_1^3 + \beta_{3112}r_1^2r_2 + \beta_{3113}r_1^2r_3 + \beta_{3121}r_2r_1^2 + \beta_{3122}r_2^2r_1 + \beta_{3123}r_2r_3r_1 + \\
& \beta_{3131}r_3r_1^2 + \beta_{3132}r_3r_2r_1 + \beta_{3133}r_3^2r_1 + \beta_{3211}r_1^2r_2 + \beta_{3212}r_1r_2^2 + \beta_{3213}r_1r_3r_2 + \\
& \beta_{3221}r_2^2r_1 + \beta_{3222}r_2^3 + \beta_{3223}r_2^2r_3 + \beta_{3231}r_3r_1r_2 + \beta_{3232}r_3r_2^2 + \beta_{3233}r_3^2r_2 + \\
& \beta_{3311}r_1^2r_3 + \beta_{3312}r_1r_2r_3 + \beta_{3313}r_1r_3^2 + \beta_{3321}r_2r_1r_3 + \beta_{3322}r_2^2r_3 + \beta_{3323}r_2r_3^2 + \\
& \beta_{3331}r_3^2r_1 + \beta_{3332}r_3^2r_2 + \beta_{3333}r_3^3 = 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. Buradan ;

- $\beta_{3111}r_1^3 + \beta_{3222}r_2^3 + \beta_{3333}r_3^3 = 0$
 $\beta_{3111} = \beta_{3222} = \beta_{3333} = 0$ bulunur.
- $(\beta_{3112} + \beta_{3121} + \beta_{3211}) r_1^2 r_2 = 0$
 $(\beta_{3113} + \beta_{3131} + \beta_{3311}) r_1^2 r_3 = 0$
 $(\beta_{3122} + \beta_{3212} + \beta_{3221}) r_2^2 r_1 = 0$
 $(\beta_{3133} + \beta_{3331} + \beta_{3313}) r_1 r_3^2 = 0$
 $(\beta_{3223} + \beta_{3232} + \beta_{3322}) r_2^2 r_3 = 0$
 $(\beta_{3332} + \beta_{3323} + \beta_{3233}) r_3^2 r_2 = 0$
 $(\beta_{3123} + \beta_{3132} + \beta_{3213} + \beta_{3231} + \beta_{3312} + \beta_{3321}) r_1 r_3 r_2 = 0$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}\beta_{3112} + \beta_{3121} + \beta_{3211} &= 0 \\ \beta_{3113} + \beta_{3131} + \beta_{3311} &= 0 \\ \beta_{3122} + \beta_{3212} + \beta_{3221} &= 0 \\ \beta_{3133} + \beta_{3331} + \beta_{3313} &= 0 \\ \beta_{3223} + \beta_{3232} + \beta_{3322} &= 0 \\ \beta_{3332} + \beta_{3323} + \beta_{3233} &= 0 \\ \beta_{3123} + \beta_{3132} + \beta_{3213} + \beta_{3231} + \beta_{3312} + \beta_{3321} &= 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse n x_1 in , m x_2 nin, p x_3 ün sayısını göstermek üzere $\beta_{i_1, i_2, \dots, i_k} (n + m + p = k)$ ile içerisinde n tane x_1 , m tane x_2 , p tane x_3 bulunduran elemanların katsayılarını gösterelim.

$$\text{O zaman } \sum_{k=n+m+p} \beta_{3i_1 i_2, \dots, i_{k-1}}^{n,m,p} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Tüm $\sum \beta_{3i_1, i_2, \dots, i_k} = 0$ ve $[x_2, x_1] x_i, \dots$ monomialleri sadeleşir.

O halde;

$$\begin{aligned}
u = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + [x_1, x_1] (\beta_{11} + \sum \beta_{11i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_1, x_2] (\beta_{12} \\
& + \sum \beta_{12i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_2, x_1] (\beta_{21} + \sum \beta_{21i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_2, \\
& x_2] (\beta_{22} + \sum \beta_{22i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + ([x_1, x_3] (\beta_{13} + \sum \beta_{13i_1, i_2 \dots i_k} \\
& r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}) + [x_2, x_3] (\beta_{23} + \sum \beta_{23i_1, i_2 \dots i_k} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}))
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{Fix } \varphi = \{ u = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \sum \beta_{11i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_1] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{21i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, \\
& x_1] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{12i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_2] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{22i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, x_2] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \\
& \sum \beta_{13i_1, i_2 \dots i_k} [[x_1, x_3] x_{i_2} \dots x_{i_k}] + \sum \beta_{23i_1, i_2 \dots i_k} [[x_2, x_3] x_{i_2} \dots x_{i_k}], 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \\
& \dots \leq i_k \leq 2 \} \text{ şeklindedir.}
\end{aligned}$$

KAYNAKLAR

- Abdykhalikov, A.T., Mikhalev, Umirbaev, U.U. (2001). Automorphisms Of Two-Generated Free Leibniz Algebras. Comm. Algebra 29:2953-2960.
- Bahturin, Yu. A. (1985). Identical Relations In Lie Algebras (Russian) Moscow: Nauka. Translation : Utrecht : Vnu Science Press.
- Bryant, R.M., Papistas, A. I. (2000). On The Fixed Points Of A Finite Group Acting On A Relatively Free Lie Algebra. Glasgow Math. J. 42:167-181.
- Bryant, R.M., Drensky, V. (1993). Obstructions To Lifting Automorphisms Of Free Algebras. Comm. Algebra 21:4361-4389.
- Cohn, P. M (1964). Subalgebras Of Free Associative Algebras . Proc . London Math . Soc. 14(3):618-632
- Drensky, V., Papistas, A.I.; (2005), “ Automorphisms Of Free Left Nilpotent Leibniz Algebras ” Communications In Algebra, 33: 2957-2975.
- Drensky, V., Piacentini Cattaneo, G . M. (2002). Varieties Of Metabelian Leibniz Algebras. J. Algebra Appl. 1:31-50.
- Loday, J.L., Pirashvili, T.; 1993. “ Universal Enveloping Algebras Of Leibnizalgebra And (Co)Homology ” Math. Ann. 296, 139-158.
- Loday, J.L. “ Une Version Non Commutative Des Algebras De Lie : Les Algebras De Leibniz, ” Enseign. Math. 39 (1993) 269 -293.
- Mikhalev A.A., And U.U. Umirbaev, “ Subalgebras Of Free Leibniz Algebras, ” Comm. Algebra 26 (1998) 435 – 446
- Mikhalev A.A., Umirbaev, U.U, Abdykholykov, A.T.; (2001) “ Automorphism Of Two Generated Free Leibniz Algebra , Communications In Algebra ” 29(7), 2953-2960r., 2005.
- Reutenauer, C. “ Applications Of A Noncommutative Jacobian Matrix , ” J. Pure Appl. Algebra 77 (1992) 169 – 181.
- Shpilrain, V. “ On Generators Of L / R^2 Lie Algebras , ” Proc . Amer . Math Soc. 119 (1993) 1039 -1043.

Suslin, A. A. (1977). On The Structure Of The Special Linear Group . Izv. An Sssr 11:221-238.

Umirbaev ,U.U. “ Partial Derivatives And Endomorphisms Of Some Relatively Free Lie Algebras (Russian),” Sibirsk .Mat. Zh . 34(6) (1993) 179- 188 ; Translation:Sib. Math. J.34 (1993) 1161-1170.



ÖZGEÇMİŞ

Berna ERGÜNEŞ, Öğrenimini sırasıyla Adana Emine Nabi Menemencioğlu İlkokul ve Ortaokulunda ,lise öğrenimini Rotary Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi. 2012 yılında lisans öğrenimini tamamlayıp 2018 yılında bölümde yüksek lisansa başladı. 2018 yılında Adıyaman Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini kazandı. Şu anda 4.Sınıf öğrencisi olarak öğrenimine devam etmektedir. Eylül 2021 yılı itibariyle Şanlıurfa Akçakale Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.