



**SEZGİSEL BULANIK ÇOKLU TOPOLOJİK
UZAYLAR**

Mahmut YERLİKAYA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

AĞRI-2019

Her hakkı saklıdır

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mahmut YERLİKAYA

SEZGİSEL BULANIK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

AĞRI-2019



T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ BEYAN FORMU

....../../20....

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum " Sezgisel Bulanık Çoklu Topolojik Uzaylar " adlı yüksek lisans tezinin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu ve bu tezi Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik gaye ve ünvan almak amacıyla vermediğimi beyan ederim. Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Mahmut YERLİKAYA



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



TEZ ONAY FORMU

SEZGİSEL BULANIK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLAR

Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT danışmanlığında, Mahmut YERLİKAYA tarafından hazırlanan bu çalışma, 04/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana-bilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu** (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah ÇAĞMAN

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEZGİSEL BULANIK ÇOKLU KÜME TOPOLOJİK UZAYLAR

Mahmut YERLİKAYA

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

Bu çalışmada, çoklu kümeler, çoklu kümelerde bağıntılar, çoklu kümelerde fonksiyonlar, bulanık kümeler ve daha sonra çoklu küme topolojik uzay, bulanık topolojik uzay ve sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzaylarla ilgili temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Ayrıca, sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzaylarında kompaktlık tanımı verilmiştir.

2019, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çoklu küme, bulanık küme, bulanık topoloji, çoklu küme topolojisi, sezgisel bulanık çoklu küme, sezgisel bulanık çoklu küme topolojisi, kompakt uzay, homeomorfizm.

ABSTRACT

Post Graduate Thesis

INTUITIONISTIC FUZZY MULTISSET TOPOLOGICAL SPACES

Mahmut YERLİKAYA

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Kadirhan POLAT

In this study, multisets, relations on multisets, functions on multisets, fuzzy sets and then some basic definitions, theorems and examples related to multiset topological spaces, fuzzy topological spaces and intuitionistic fuzzy multiset topological spaces are given place. Also, the definition of compactness in intuitionistic fuzzy multiset topological spaces is given.

2019, 51 pages

Keywords: Multiset, fuzzy set, fuzzy topology, multiset topology, intuitionistic fuzzy multiset, Intuitionistic fuzzy multiset topology, compact space, homeomorphism.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteğini sunan çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT'a teşekkürlerimi sunarım.

İngilizce çevirilerinde bana yardımcı olan, Öğretmen Arkadaşım Sayın Ercan GÜNEY'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum manevi destek ve güvenden dolayı aileme ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Tuba ve çocuklarım Mirza Ali ve Taha'ya teşekkür ederim.

.../.../2019

Mahmut YERLİKAYA

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Çoklu Kümeler	4
2.2. Çoklu Bağıntılar	9
2.3. Çoklu Fonksiyonlar	12
2.4. Bulanık Kümeler	13
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	18
3.1. Çoklu Küme Topolojileri	18
3.1.1. Çoklu Küme Tabanları ve Çoklu Küme Alt Tabanları	18
3.1.2. Kapalı Çoklu Kümeler	23
3.1.3. Çoklu Kümelerin Kapanışı, İçi ve Sınır Noktası	25
3.1.4. Sürekli Çoklu Küme Foksiyonları	28
3.2. Bulanık Topolojik Uzaylar.....	31
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	40
4.1. Sezgisel Bulanık Çoklu Küme Topolojik Uzayları.....	40
4.2. Sezgisel Bulanık Çoklu Kümelerin Kapanışı ve İçi.....	42
4.3. Sezgisel Bulanık Çoklu Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar	43
4.4. Sezgisel Bulanık Çoklu Topolojik Uzayların Alt Topolojik Uzayları.....	44
4.5. Sezgisel Bulanık Çoklu Kümelerde Kompaktlık	44
5. SONUÇLAR	47
KAYNAKÇA.....	48
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\overset{0}{A}$	A Kümesinin İçi
M^C	M Çoklu Kümesinin Tümleyini
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$int(B)$	Sezgisel Bulanık Çoklu Kümenin İçi
$cl(A)$	Sezgisel Bulanık Çoklu Kümenin Kapanışı
$\oplus$	Çoklu Kümelerde Toplama
$PF(M)$	Çoklu Dolgun Kuvvet Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$PW(M)$	Tam Kuvvet Kümesi
$Card(M)$	M 'nin kardinalitesi
I	$[0,1]$
$\mu_A(x)$	Üyelik Fonksiyonu
$[0,1]^x$	x in Bulanık Kuvvet Kümesi
$core(A)$	Çekirdek
$(p_{\chi_n}^\lambda) = p_n$	Bulanık dizisi
$\rightarrow 0$	Sezgisel Bulanık Çoklu Boş Küme
$\rightarrow 1$	Sezgisel Bulanık Çoklu Küme
$[X]^m$	Çoklu Küme Uzayı
M^C	M Çoklu Kümesinin Tümleyeni
1_Y	Y nin karakteristik fonksiyonu

$\vee$	Maksimum işlem
(M, τ)	Topolojik Uzay
$cl(A)$	A Bulanık Kümesinin Kapanışı
$N(p)$	Komşuluklar Ailesi
$p_n \rightarrow p_0$	p_n Dizisinin limiti
M-taban	Çoklu Küme Tabanı
M- topoloji	Çoklu Küme Topolojisi
M^*	M Çoklu Kümesinin Destek Kümesi
$P(M)$	M nin Çoklu Kuvvet Kümesi
$P(M^*)$	$P(M)$ Çoklu Kümesinin Destek Kuvvet Kümesi
$CM_A(x)$	Üyelik Dizisi
FMS	Bulanık Çoklu Küme
IFS	Sezgisel Bulanık Küme
IFMS	Sezgisel Bulanık Çoklu Küme
IFMT	Sezgisel Bulanık Çoklu Küme Topolojik Uzayı
OIFMS	Açık Sezgisel Bulanık Çoklu Küme
CIFMS	Kapalı Sezgisel Bulanık Çoklu Küme

1. GİRİŞ

Bu çalışma, çoklu kümeler, bulanık kümeler, bulanık topolojiler, çoklu kümeler topolojisi ve çoklu bulanık kümeler topolojisi konularını ve özelliklerini içermektedir. George Cantor tarafından verilen küme teorisi matematiksel düşüncenin gelişmesinde büyük rol oynamıştır. Bir küme elemanlarıyla belirlenir ve bir eleman bir kümeye aittir ya da değildir. Tamsayılar kümesinde bütün elemanlar belirlidir. Ancak bir arabanın hızlı olduğunu söyleyebilmek için arabanın hızı kaç km/sa olmalıdır. Kaç km/sa hızla giden arabaya “hızlı” veya “yavaş” diyeceğiz? Bu kişiden kişiye, arabanın mekanik özelliğine, yolun türüne bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Güzel veya çirkin kavramları kişiden kişiye değişiklik göstermektedir. Bu tür öznel kavramları klasik kümeler ile açıklayamayız. Bu tür kesin olmayan durumları bulanık mantık veya bulanık kümelerle açıklarız. Olasılık teorisi, bulanık küme teorisi gibi teoriler belirsiz durumlar için geliştirilmiş teorilerden bazılarıdır. 1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanan bulanık küme teorisi, mühendislik, tıp, bilgisayar bilimleri gibi pek çok alana uygulanmış ve araştırmacıların ilgisini çekmeyi başarmıştır. Bulanık kümeler üyelik fonksiyonları yardımıyla belirlenir. Bir eleman bir bulanık kümeye üyelik derecesiyle aittir ve bu derece $[0,1]$ kapalı aralığında bir değerdir. Bu düşünceyle klasik kümelerdeki nesnellik yerini belirsiz durumlar için geçerli olan öznelliğe bırakmıştır. Zadeh bu çalışmasıyla insan düşüncesinin çoğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle 0 ve 1 ile ifade edilen Boole mantığı bu düşüncenin işleyişini yeterli ifade etmemektedir. Açık-kapalı, sıcak-soğuk, 0 ve 1 gibi değişkenler insan mantığında kesin ifadelerin yanı sıra az açık, ılık gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Bulanık mantık ise klasik mantığının aksine iki seviyeli değil daha çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır. Yani siyah ve beyaz yerine siyah, grinin tonları gibi kademeleri de belirtir.

Bulanık mantığın ilk uygulaması 1974 yılında Mamdani tarafından bir buhar makinasının bulanık denetiminin gerçekleştirmesi ile olmuştur. 1980 yılında bir Hollanda şirketi çimento fırınlarında bulanık mantığını uygulamıştır. İlk zamanlar Ja-

ponya olmak üzere birçok ülke, araştırma ve mühendislik konuları ile ilerleme kaydetmişlerdir. Örneğin, bulanık denetimli çamaşır makineleri çamaşırın cinsine, miktarına ve kirliliğine göre çamaşır yıkama ve su alma programlarını seçebilmektedir.

Klasik mantıkta doğru önerme 1, yanlış önerme 0 ile belirtilir. X evrensel kümesinde bir A kümesi, matematiksel olarak $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada A kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayanlara 0 değerini veren χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Klasik küme teorisinde, kümenin elemanlarının tekrarı anlamlı değildir. Ancak bazı durumlarda elemanların tekrarı kullanışlı olabilmektedir. Eğer bir kümenin elemanlarının tekrarına izin verilirse bu küme çoklu küme olarak bilinir. Çoklu kümeler güncel hayatta bilgisayar bilimleri, tıp, bankacılık, mühendislik, bilgi depolama ve bilgi analizi gibi birçok alanda kullanılabilmektedir.

Çoklu küme teorisi, Cerf, Fernandez, Gostelow ve Volausky tarafından ortaya konulmuştur. Peterson ve Yager çoklu küme teorisinin ilerlemesinde katkı sağlamışlardır. Bu ilerleme Jena, Ghosh ve Tripathy tarafından sürdürülmüştür. Çoklu küme bağıntısıyla ilgili ilk çalışma Manjunath ve John tarafından yapılmıştır. Girish ve John çoklu bağıntı ve çoklu fonksiyonu tanımlamışlardır. Bu yazarlar, çoklu küme bağıntılarını kullanarak çoklu kümeler üzerinde çoklu topolojiyi tanımlamışlardır; ayrıca klasik topolojideki topolojik kavramları çoklu topolojide yeniden tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir.

Elemanlarının tekrarlı olarak bulunabildiği kümeler, çoklu kümeler olarak adlandırılır. Elemanlarının aynı veya farklı üyelik değerleriyle tekrarlı olarak bulunabildiği kümeler ise bulanık çoklu kümeler olarak adlandırılır.

1983 yılında Atanassow sezgisel bulanık kümeler kavramını ortaya çıkarmıştır. Sezgisel bir bulanık küme, evrensel küme elemanlarının sezgisel bulanık kümeye ait olma derecesini ve ait olmama derecesini ifade eden iki fonksiyon ile nitelendirilir. Yüksek mertebe bulanık kümelerin çeşitli kavramları arasında, Atanassow tarafından ileri sürülen sezgisel bulanık kümeler, açıklamak için esnek bir çerçeve sağlar.

Sezgisel bulanık çoklu küme kavramı, çoklu ve bulanık küme kavramların birleşimiyle ortaya çıkmıştır. Sezgisel bulanık çoklu kümenin tıbbi teşhis ve robot bilimi

alanında uygulamaları vardır. Shinoj ve arkadaşları sezgisel bulanık çoklu kümelerdeki cebirsel yapıları tanıtmışlardır. 1968 yılında, Chang bulanık topolojik uzaylarını ve bunun devamı olarak 1997 yılında Coker sezgisel bulanık topolojik uzay kavramını öne sürmüştür. Shinoj ve John, bu kavramı sezgisel bulanık çoklu küme topolojisini ileri sürerek sezgisel bulanık çoklu küme kavramına genellemişlerdir. Ayrıca sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzaylarda kompaktlığı tanımlamışlardır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çoklu kümeler kuramı ve çoklu topoloji kavramları tanıtılmıştır. Çoklu kümeler kavramı ve çoklu topolojilerin en temel matematiksel yapısı, çoklu bağıntı, çoklu fonksiyon, çoklu kümelerde işlemler ve çoklu topolojilerin genel özellikleri verilmiştir.

2.1. Çoklu Kümeler

Tanım 2.1.1. X kümesinden alınan bir M çoklu kümesi, $C_M: X \rightarrow \mathbb{N}$ (sayaç) fonksiyonu ile temsil edilir.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi verilsin. X kümesinden alınan bir M çoklu kümesi

$$M = \{k_1/x_1, k_2/x_2, \dots, k_n/x_n\}$$

olarak gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ için k_i, x_i nin tekrar sayısıdır. Bu durum $x_i \in^{k_i} M$ veya $k_i/x_i \in M$ olarak gösterilir. $C_M(x)$, M çoklu kümesindeki x in tekrar sayısını gösterir. Dolayısıyla, M çoklu kümesinin elemanı olmayan bir x elemanının C_M altındaki görüntüsü 0 dır, yani $C_M(x) = 0$ dır (Girish and John 2012).

Not: M bir çoklu küme ve $m/x, n/y \in M$ olsun. $m/x = n/y$ olması için gerek ve yeter şartın $x = y$ olduğuna dikkat ediniz. Burada $x = y$ den m ve n nin eşitliğini hemen söyleriz.

Tanım 2.1.2. Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ya da $C_M(x) = 1$ ise M çoklu kümesine bir *klasik küme* denir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.3. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi

$$M = \{2/a, 1/b, 4/d\} = \{a, a, b, d, d, d, d\}$$

olarak verilsin. Burada $C_M(a) = 2, C_M(b) = 1, C_M(c) = 0, C_M(d) = 4$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.4. M ve N, X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun.

- i. Her $x \in X$ için $C_M(x) = C_N(x)$ ise M ve N çoklu kümelerine *eşit çoklu kümeler* denir ve $M = N$ ile gösterilir.
- ii. Her $x \in X$ için $C_M(x) \subseteq C_N(x)$ ise M çoklu kümesine N çoklu kümesinin *alt çoklu kümesi* denir ve $M \subseteq N$ ile gösterilir.

- iii. Her $x \in X$ için $C_{M \cup N}(x) := \max\{C_M(x), C_N(x)\}$ olarak tanımlanan $C_{M \cup N}$ sayaç fonksiyonu ile temsil edilen çoklu kümeye M ve N *çoklu kümelerinin birleşimi* denir ve $M \cup N$ ile gösterilir.
- iv. Her $x \in X$ için $C_{M \cap N}(x) := \min\{C_M(x), C_N(x)\}$ olarak tanımlanan $C_{M \cap N}$ sayaç fonksiyonu ile temsil edilen çoklu kümeye M ve N *çoklu kümelerinin kesişimi* denir ve $M \cap N$ ile gösterilir.
- v. Her $x \in X$ için $C_{M \oplus N}(x) := C_M(x) + C_N(x)$ olarak tanımlanan $C_{M \oplus N}$ sayaç fonksiyonu ile temsil edilen çoklu kümeye M ve N *çoklu kümelerinin toplamı* denir ve $M \oplus N$ ile gösterilir.
- vi. Her $x \in X$ için $C_{M \ominus N}(x) := \max\{C_M(x) - C_N(x), 0\}$ olarak tanımlanan $C_{M \ominus N}$ sayaç fonksiyonu ile temsil edilen çoklu kümeye M ve N *çoklu kümelerinin farkı* denir ve $M \ominus N$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.5. $M^* = \{x \in X: C_M(x) > 0\}$ olarak tanımlanan kümeye M *çoklu kümesinin destek kümesi* denir. Burada M^* bir klasik kümedir ve X in bir alt kümesidir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.6. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi

$$M = \{2/a, 1/b, 4/d\} = \{a, a, b, d, d, d, d\}$$

olarak verilsin. Buradan $M^* = \{a, b, d\} \subseteq X$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.7. Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ise M çoklu kümesine *boş çoklu küme* denir ve $\emptyset$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.8. M çoklu kümesinin eleman sayısı $|M|$ ile gösterilir ve

$$|M| = \sum_{x \in X} C_M(x)$$

olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.9. $X = \{s, y, z, t, r\}$ kümesi verilsin. X kümesi üzerinde alınan bir M çoklu kümesi $M = \{3/s, 4/t, 5/r\}$ olsun. Buna göre M çoklu kümesinin eleman sayısı

$$\begin{aligned}
|M| &= \sum_{x \in X} C_M(x) \\
&= C_M(s) + C_M(y) + C_M(z) + C_M(t) + C_M(r) \\
&= 3 + 0 + 0 + 4 + 5 \\
&= 12
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.1.10. X kümesinden alınan ve elemanlarının hiçbirisi m den fazla tekrar etmeyen bütün çoklu kümelerin kümesine X kümesinde tanımlı bir çoklu küme uzayı denir ve $[X]^m$ ile gösterilir. Yani, $X = \{x_i \mid i \in I\}$ ise

$$[X]^m = \{\{m_i/x_i \mid i \in I\} \mid \forall i \in I \text{ için } 0 \leq m_i \leq m\}$$

dir. X kümesinde tanımlı bir çoklu küme uzayındaki çoklu kümelerin elemanlarının tekrar sayısında bir sınır yoksa $[X]^\infty$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.11. $X=\{a, b\}$ olsun. Elemanlarını X kümesinden alan ve elemanlarının hiçbirisi 2 den fazla tekrar etmeyen bütün çoklu kümelerin kümesi

$$\begin{aligned}
[X]^2 &= \{\{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}, \\
&\quad \{2/a, 2/b\}, \{1/a\}, \{2/a\}, \{1/b\}, \{2/b\}, \emptyset\}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.1.12. X bir küme olsun. $[X]^m$, X kümesinde tanımlı bir çoklu küme uzayı ve $M \in [X]^m$ olsun. Her $x \in X$ için

$$C_{M^c} = m - C_M(x)$$

olarak tanımlanan C_{M^c} sayaç fonksiyonu ile temsil edilen M^c çoklu kümesine M çoklu kümesinin tümleyeni denir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.13. $X=\{a, b, c\}$ olsun. $[X]^3$ çoklu küme uzayındaki $A=\{2/a, 1/b\}$ çoklu kümesinin tümleyenini temsil eden C_{A^c} sayaç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
C_{A^c}(a) &= 3 - C_A(a) = 3 - 2 = 1 \\
C_{A^c}(b) &= 3 - C_A(b) = 3 - 1 = 2 \\
C_{A^c}(c) &= 3 - C_A(c) = 3 - 0 = 3
\end{aligned}$$

olup A çoklu kümesinin tümleyeni

$A^c = \{1/a, 2/b, 3/c\}$ olarak yazılır.

Not : $[X]^m$ çoklu küme uzayında çoklu kümelerin toplamını yeniden tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.14. $M, N \in [X]^m$ iki çoklu küme olsun. Her $x \in X$ için

$$C_{M \oplus N}(x) := \min\{m, C_M(x) + C_N(x)\}$$

olarak tanımlanan $C_{M \oplus N}$ sayaç fonksiyonu ile temsil edilen çoklu kümeye M ve N *çoklu kümelerinin toplamı* denir ve $M \oplus N$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.15. N, M nin bir alt çoklu kümesi olsun. Her $x \in N^*$ için $C_N(x) = C_M(x)$ ise N ye M nin bir tam alt çoklu kümesi denir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.16. N, M nin bir alt çoklu kümesi olsun. $C_N(x) = C_M(x)$ olacak şekilde bir $x \in N^*$ varsa N ye M nin bir kısmi tam alt çoklu kümesi denir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.17. N, M nin bir alt çoklu kümesi olsun. $M^* = N^*$ ve her $x \in N^*$ için $C_N(x) \leq C_M(x)$ ise N ye M nin dolgun alt çoklu kümesi denir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.18. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere $[X]^5$ çoklu küme uzayında bir

$$M = \{3/a, 4/b, 5/c\}$$

çoklu kümesi verilsin. Buna göre, M nin $\{3/a, 5/c\}$ alt çoklu kümesi, M nin bir tam alt çoklu kümesi ve bir kısmi tam alt çoklu kümesidir; ancak bir dolgun alt çoklu kümesi değildir.

M nin $\{3/a, 3/b, 3/c\}$ alt çoklu kümesi, M nin bir kısmi tam alt çoklu kümesi ve bir dolgun alt çoklu kümesidir; ancak bir tam alt çoklu kümesi değildir.

M nin $\{1/a, 5/c\}$ alt çoklu kümesi, M nin bir kısmi tam çoklu alt kümesidir; ancak bir tam alt çoklu kümesi ve bir dolgun alt çoklu kümesi değildir.

Tanım 2.1.19. $M \in [X]^m$ olsun. M nin bütün tam alt çoklu kümelerinin kümesine M nin tam çoklu kuvvet kümesi denir ve $PW(M)$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Buna göre M^* destek kümesinin eleman sayısı n olmak üzere $PW(M)$ nin eleman sayısı 2^n olduğu açıktır.

Tanım 2.1.20. $M \in [X]^m$ olsun. M nin bütün dolgun alt çoklu kümelerinin kümesine M nin dolgun çoklu kuvvet kümesi denir ve $PF(M)$ ile gösterilir.

Buna göre, M boş çoklu kümeden farklı bir çoklu küme ise $PF(M)$ nin boş çoklu kümeyi içermeyeceği açıktır (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.21. $M \in [X]^m$ olsun. $[X]^m$ deki bir A çoklu kümesinde bir z elemanının bulunma sayısı $n_{z \in A}$ ile gösterilsin. Ayrıca $[X]^m$ deki keyfi iki A, B çoklu kümesi için

$$k_B^A := \begin{cases} 1 & , B = \emptyset \\ \prod_{z \in B^*} \binom{n_{z \in A}}{n_{z \in B}} & , B \neq \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buna göre

$$P(M) := \{k_N^M / N \mid N \subseteq M\}$$

çoklu kümesine M nin kuvvet çoklu kümesi denir ve $P(M)$ ile gösterilir.

Not: Bir M çoklu kümesinin kuvvet kümesinin M nin kuvvet çoklu kümesinin destek kümesi olduğuna dikkat ediniz. Bu destek kümesi $P^*(M)$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Teorem 2.1.22. $M = \{m_i/x_i \mid i \in I\}$ çoklu kümesi verilsin. Bu durumda

$$|P^*(M)| = \prod_{i \in I} (1 + m_i)$$

dir (Girish and John 2012).

Örnek 2.1.23. $X = \{a, b\}$ ve $M = \{2/a, 2/b\}$, $[X]^2$ de bir çoklu küme olsun.

M nin tam çoklu kuvvet kümesi

$$PW(M) = \{\{2/a\}, \{2/b\}, M, \emptyset\}$$

dir. M nin dolgun çoklu kuvvet kümesi

$$PF(M) = \{\{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}, \{2/a, 2/b\}\}$$

dir. M nin kuvvet çoklu kümesinin destek kümesi

$$P^*(M) = \{\{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}, \{2/a, 2/b\}, \{2/a\}, \{2/b\}, \{1/a\}, \{1/b\}, \emptyset\}$$

dir. M nin kuvvet çoklu kümesi

$$P(M) = \{4/\{1/a, 1/b\}, 2/\{1/a, 2/b\}, 2/\{2/a, 1/b\}, 1/\{2/a, 2/b\}, 1/\{2/a\}, 1/\{2/b\}, 2/\{1/a\}, 2/\{1/b\}, 1/\emptyset\}$$

dir. Ayrıca

$$|P^*(M)| = \prod_{i=1}^2 (1 + m_i) = (1 + m_1) \cdot (1 + m_2) = (1 + 2) \cdot (1 + 2) = 9$$

dir.

Tanım 2.1.24. $C_Z(x) = \max\{C_M(x) \mid x \in^k M, M \in [X]^m \text{ ve } k \leq m\}$ sayaç fonksiyonunun temsil ettiği Z kümesine *maksimum çoklu küme* denir (Girish and John 2012).

Tanım 2.1.25. $[X]^m$ bir çoklu küme uzayı ve $[X]^m$ deki çoklu kümelerin bir $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. Çoklu kümeler üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlanır.

Çoklu kümelerin $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin birleşimi

$$\bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \{M_i\} = \{C_{\bigcup \mathcal{M}}(x)/x \mid C_{\bigcup \mathcal{M}}(x) = \max\{C_{M_i}(x) : x \in X, i \in I\}\}$$

olarak tanımlanır.

Çoklu kümelerin $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin kesişimi

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{i \in I} \{M_i\} = \{C_{\bigcap \mathcal{M}}(x)/x \mid C_{\bigcap \mathcal{M}}(x) = \min\{C_{M_i}(x) : x \in X, i \in I\}\}$$

olarak tanımlanır.

Çoklu kümelerin $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin toplamı

$$\bigoplus \mathcal{M} = \bigoplus_{i \in I} \{M_i\} = \left\{ C_{\bigoplus \mathcal{M}}(x)/x \mid C_{\bigoplus \mathcal{M}}(x) = \sum_{i \in I} C_{M_i}(x), x \in X \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bir $M \in [X]^m$ çoklu kümesinin tümleyeni, Z maksimum çoklu küme olmak üzere

$$M^c = Z \ominus M = \{C_{M^c}(x)/x \mid C_{M^c}(x) = C_Z(x) - C_M(x), x \in X\}$$

olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

2.2. Çoklu Bağlımlar

Bu kısımda, çoklu kümeler üzerinde çalışan Girish ve John tarafından tanımlanan çoklu bağıntı üzerinde durulacaktır.

Not: Literatürde geçen çoklu küme bağıntısının tanımı ile çoklu bağıntı üzerine kurulan çoklu fonksiyonun tanımı birbirleriyle uyumsuzluk içindedir. Bu problem, çoklu bağıntının yanlış tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Burada verilen tanım literatürden farklı olmakla birlikte çoklu fonksiyon ile uyumludur.

Tanım 2.2.1. M ve N , X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. M ve N çoklu kümelerinin kartezyen çarpımı

$$M \times N = \{m \cdot n / (m/x, n/y) \mid m/x \in M, n/y \in N\}$$

olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

Örnek 2.2.2. $M = \{3/a, 4/b\}$ ve $N = \{2/c, 5/d\}$ iki çoklu küme olsun. Bu durumda

$$M \times N = \{6/(3/a, 2/c), 15/(3/a, 5/d), 8/(4/b, 2/c), 20/(4/b, 5/d)\}$$

olur.

Teorem 2.2.3. Boştan farklı M ve N çoklu kümeleri için

$$C_{M \times N}[(x, y)] = C_{M_1}(x) \cdot C_{M_2}(y)$$

ve

$$|M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$$

dir (Girish and John 2012).

Tanım 2.2.4. M ve N , X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. $M \times N$ nin bir R çoklu alt kümesine M ve N üzerinde bir çoklu bağıntı denir. Yani, her $m/x \in M$ ve $n/y \in N$ çifti için $0 \leq k_{m,n} \leq m \cdot n$ olacak şekilde belirli bir $k_{m,n}$ sayısı seçilsin. Bu durumda

$$R = \{k_{m,n} / (m/x, n/y) \mid m/x \in M \text{ ve } n/y \in N, k_{m,n} > 0\}$$

olarak tanımlanan bir R çoklu kümesine M ve N üzerinde bir çoklu bağıntı denir. $k/(m/x, n/y) \in R$ olacak şekilde bir $0 < k \leq m \cdot n$ sayısı varsa bu durum m/x R n/y ile gösterilir. R , M ve N üzerinde bir çoklu bağıntı ise R ye M üzerinde bir çoklu bağıntı denir.

Tanım 2.2.5. M ve N , X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. R , M ve N üzerinde bir çoklu bağıntı olsun. R nin tanım kümesi

$$\text{Dom } R := \{r/x \in M \mid \exists s/y \in N \text{ için } r/x R s/y\}$$

ve R nin değer kümesi

$$\text{Ran } R := \{s/y \in N \mid \exists r/x \in M \text{ için } r/x R s/y\}$$

olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

Örnek 2.2.6. $M = \{8/x, 11/y, 15/z\}$ çoklu kümesi üzerinde tanımlı

$$R = \{5/(8/x, 11/y), 66/(11/y, 8/x), 77/(8/x, 15/z), 23/(11/y, 15/z)\}$$

çoklu küme bağıntısı verilsin. Buradan

$$\text{Dom } R = \{8/x, 11/y\} \text{ ve } \text{Ran } R = \{8/x, 11/y, 15/z\}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$S_1 = \{14/(8/x, 12/y), 6/(8/x, 15/z)\}, \\ S_2 = \{90/(11/y, 8/x), 140/(15/z, 11/y)\}$$

çoklu kümeleri verilsin. S_1 , M üzerinde bir çoklu bağıntı değildir. Çünkü $12/y \notin M$ dir. S_2 de M üzerinde bir çoklu bağıntı değildir. Çünkü $90/(11/y, 8/x) \in S_2$ de $90 \not\leq 88 = 11 \cdot 8$ dir.

Tanım 2.2.7. $M \in [X]^p$ ve R , M üzerinde bir çoklu bağıntı olsun.

- i. Her $x \in X$ için $m/x R m/x$ olacak şekilde m varsa R ye *yansımali* denir.
- ii. Her $x, y \in X$ için $m/x R n/y$ iken $n/y R m/x$ oluyorsa R ye *simetrik* denir.
- iii. Her $x, y \in X$ için $m/x R n/y$ ve $n/y R m/x$ iken $m/x = n/y$ oluyorsa R ye *ters simetrik* denir.
- iv. Her $x, y, z \in X$ için $m/x R n/y$ ve $n/y R k/z$ iken $m/x R k/z$ oluyorsa R ye *geçişmeli* denir.
- v. R , yansımali, simetrik ve geçişmeli ise R ye *bir çoklu denklik* denir (Girish and John 2012).

Tanım 2.2.8. $M \in [X]^m$ ve R de M üzerinde bir çoklu bağıntı olsun. R çoklu bağıntısı yansımali, ters simetrik ve geçişmeli ise R ye *bir (kısmi) sıralı çoklu bağıntı* denir. (M, R) sıralı ikilisine de *bir (kısmi) sıralı çoklu küme* denir (Girish and John 2012).

Örnek 2.2.9. $M = \{3/x, 8/y, 4/z\}$ bir çoklu küme olsun.

$$R = \{1/(3/x, 3/x), 3/(3/x, 8/y), 5/(8/y, 3/x), 5/(8/y, 8/y), 8/(4/z, 4/z)\}$$

olarak verilen R çoklu bağıntı bir çoklu denkliktir.

Tanım 2.2.10. Bir R çoklu küme bağıntısının tersi

$$R^{-1}\{k/(n/y, m/x): k/(m/x, n/y) \in R\}$$

olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

2.3. Çoklu Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1. f bir çoklu bağıntı olsun. $\forall m/x \in \text{Dom } f$ için

$$m/(m/x, n/y) \in f$$

olacak şekilde bir tek $n/y \in \text{Ran } f$ varsa f ye *bir çoklu fonksiyon* denir. $A = \text{Dom } f$ ve $\text{Ran } f \subseteq B$ ise f ye A dan B ye *bir çoklu fonksiyon* denir ve $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir. Bir f çoklu fonksiyonunda $m/xfn/y$ ifadesi yerine $f(m/x) = n/y$ ifadesi kullanılır (Girish and John 2012).

Örnek 2.3.2. $M = \{8/x, 6/y\}$ ve $N = \{3/a, 7/b\}$ iki çoklu küme olsun.

$$f = \{8/(8/x, 3/a), 6/(6/y, 7/b)\}$$

olarak verilen f , M den N ye tanımlı bir f çoklu fonksiyondur.

Tanım 2.3.3. $f : M \rightarrow N$ bir çoklu fonksiyon olsun. Eğer f aşağıdaki şartları sağlıyorsa *bire-bir* olarak adlandırılır:

- i. Her $m_1/x_1, m_2/x_2 \in M$ için $x_1 \neq x_2$ ise $f(m_1/x_1) \neq f(m_2/x_2)$ dir.
- ii. Her $m/x \in M$ için $f(m/x) = n/y$ ise $m \leq n$ dir (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.4. f , M den N ye bir çoklu fonksiyon olsun. Her $m/x \in M$ için $f(m/x) = n/y$ iken $m \geq n$ oluyorsa f *örten* olarak adlandırılır (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.5. f bir çoklu fonksiyon olsun. f hem bire-bir hem de örten ise f ye *bire-bir örten* denir (Girish and John 2012).

Örnek 2.3.6. $M = \{3/x, 5/y\}$ ve $N = \{2/a, 9/b, 4/c\}$ iki çoklu küme olsun.

$$\begin{aligned} f_1 &= \{3/(3/x, 9/b), 5/(5/y, 9/b)\} \\ f_2 &= \{3/(3/x, 2/a), 5/(5/y, 4/c)\} \\ f_3 &= \{3/(3/x, 4/c), 5/(5/y, 9/b)\} \end{aligned}$$

çoklu fonksiyonları verilsin. Verilen çoklu fonksiyonlarının bire-bir olup olmadığına bakalım. f_1 bire-bir değildir. Çünkü $3/x, 5/y \in \text{Dom } f_1$ için $f_1(3/x) = 9/b = f_1(5/y)$ dir. f_2 bire-bir değildir. Çünkü $3/x \in \text{Dom } f_2$ için $f_2(3/x) = 2/a$ olup $3 \not\leq 2$ dir. f_3 her iki şartı sağladığından bire-birdir. Şimdi de verilen çoklu fonksiyonların örten olup olmadığına bakalım. f_1 örten değildir. Çünkü $3/x \in \text{Dom } f_1$ için $f_1(3/x) = 9/b$ olup $3 \not\geq 9$ dur. Benzer düşünceyle, f_3 ün de örten olmadığını söyleriz. Ancak f_2 örten dir.

Teorem 2.3.7. $f: M \rightarrow N$ bir çoklu fonksiyon, M_1 ve M_2 , M nin boş çoklu kümeden farklı iki alt çoklu küme olsun. Buna göre,

- i. $M_1 \subseteq M_2$ ise $f(M_1) \subseteq f(M_2)$,
- ii. $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$,
- iii. $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$,
- iv. $f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1) \oplus f(M_2)$,
- v. $f(M_1 \ominus M_2) \subseteq f(M_1) \ominus f(M_2)$ (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.8. $\text{Dom } f$ çoklu kümesinin her elemanı $\text{Ran } f$ çoklu kümesinin $C_{\text{Ran } f}(x) = 1$ şartını sağlayan tek bir x elemanına eşleniyorsa f çoklu fonksiyonuna *bir çoklu sabit fonksiyon* denir (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.9. M üzerinde $I: M \rightarrow M$ çoklu özdeşlik fonksiyonu $I(m/x) = m/x$ olarak tanımlanır (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.10. $f: M_1 \rightarrow M_2$ ve $g: M_2 \rightarrow M_3$ iki çoklu fonksiyon olsun.

$$h := \{m/(m/x, p/z) \mid \exists n/y \in \text{Ran } f \cap \text{Dom } g \text{ için } f(m/x) = n/y \text{ ve } g(n/y) = p/z\}$$

olarak tanımlanan h çoklu kümesine f ve g çoklu fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $g \circ f$ ile gösterilir (Girish and John 2012).

Tanım 2.3.11. f^{-1} çoklu bağıntısı bir çoklu fonksiyon ise f ye *terslenebilir* denir (Girish and John 2012).

2.4. Bulanık Kümeler

Bulanık küme teorisinde, bir elemanın bir kümeye ait olup olmamasının incelendiği klasik küme teorisinden farklı olarak bir elemanın bir kümeye belirli bir üyelik

derecesine göre aidiyeti incelenmektedir. Klasik kümelerde üyelik fonksiyonunun alacağı değerlerin kümesi $\{0,1\}$ iken, bulanık kümelerde $[0,1]$ kapalı aralıktır. X uzayında bulunan bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir (Smithson and Verkuilen 2006).

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

Tanım 2.4.1. X herhangi bir küme olmak üzere $\mu: X \rightarrow [0,1]$ olarak tanımlanan μ fonksiyonuna X in bir *bulanık alt kümesi* denir. X in tüm bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X in *bulanık kuvvet kümesi* denir ve $[0,1]^X$ ile gösterilir (Zadeh 1965).

Tanım 2.4.2. $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\{\mu(x) \mid x \in X\}$ kümesine μ nün *görüntü kümesi* denir ve $\mu(x)$ veya $Im(x)$ ile gösterilir (Kaufmann 1975).

Tanım 2.4.3. $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\mu^* = \{x \mid x \in X, \mu(x) > 0\}$ kümesine μ nün *destek kümesi* denir. Eğer μ^* sonlu sayıda elemana sahipse μ ye *sonlu bulanık küme*, μ^* sonsuz sayıda elemana sahipse μ ye *sonsuz bulanık küme* denir. Ayrıca $1 \in \mu(x)$ ise μ ye X in *birimli bulanık alt kümesi* denir (Kaufmann 1975).

Tanım 2.4.4. $Y \subseteq X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$a_Y(x) = \begin{cases} a & , x \in Y \\ 0 & , x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak, $Y = \{x\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{x\}}$ olarak gösterilir ve $[0,1]$ -nokta veya $[0,1]$ -singleton olarak isimlendirilir. Ayrıca, $a = 1$ olarak seçilirse 1_Y fonksiyonuna Y nin *karakteristik fonksiyonu* denir (Kaufmann 1975).

Tanım 2.4.5. A bulanık kümesinin A_α ile gösterilen α -kesimi, X uzayının, üyelik dereceleri α ya eşit veya büyük olan elemanlarından oluşan kümedir, yani

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, \alpha \in [0,1]\}$$

(Babuska 1998).

Tanım 2.4.6. Her $x \in A_\alpha$ için $\mu_A(x) \neq \alpha$ ise A_α ya tam α -kesimi denir (Babuska 1998).

Tanım 2.4.7. X uzayında tanımlı bir A bulanık kümesinin çekirdeği, üyelik derecesi 1 e eşit olan elemanların kümesidir, yani

$$\text{core}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \text{ (Babuska 1998).}$$

Tanım 2.4.8. X uzayında tanımlı bir A bulanık kümesinin kardinalitesi, X in elemanlarının A ya üyelik derecelerinin toplamı olarak tanımlanır, yani

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

(Babuska, 1968).

Tanım 2.4.9. X uzayında tanımlı bir A bulanık kümesinin yüksekliği, X in elemanlarının A ya üyelik derecelerinin supremumudur, yani

$$h(a) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

(Babuska 1998).

Tanım 2.4.10. X uzayında tanımlı bir A bulanık kümesi için $\mu_A(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa A ya *normal bulanık küme* denir (Babuska 1998).

Tanım 2.4.11. X uzayında tanımlı A ve B bulanık kümelerinin birleşimi, her $x \in X$ için

$$\mu_{A \cup B}(x) := \mu_A(x) \vee \mu_B(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olarak tanımlanır (Babuska 1998).

Tanım 2.4.12. X uzayında tanımlı A ve B bulanık kümelerinin kesişimi, her $x \in X$ için

$$\mu_{A \cap B}(x) := \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olarak tanımlanır (Babuska 1998)

Tanım 2.4.13. X uzayında, $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \alpha$ olacak şekilde tanımlanan bir A bulanık kümesine *sabit bulanık küme* denir.

Örnek 2.4.14. $X = \{a, b, c\}$ uzayında, $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ ve $\mu_B: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}\mu_A(a) &= 0.3 \\ \mu_A(b) &= 0.8 \\ \mu_A(c) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_B(a) &= 0.4 \\ \mu_B(b) &= 0.34 \\ \mu_B(c) &= 0\end{aligned}$$

olarak tanımlanan A ve B bulanık kümeleri

$$A = \{(a, 0.3), (b, 0.8), (c, 1)\}$$

$$B = \{(a, 0.4), (b, 0.34), (c, 0)\}$$

olarak yazılır. Bu kümelerin birleşimleri ve kesişimleri sırasıyla

$$A \cap B = \{(a, 0.3), (b, 0.34), (c, 0)\}$$

$$A \cup B = \{(a, 0.4), (b, 0.8), (c, 1)\}$$

olarak verilir.

Tanım 2.4.15. X uzayında tanımlı bir A bulanık kümesinin tümleyeni, her $x \in X$ için

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

olarak tanımlanır ve $\bar{A}$ ile gösterilir (Babuska 1998).

Örnek 2.4.16. $X = \{a, b, c\}$ uzayında,

$$A = \{(a, 0.3), (b, 0.8), (c, 1)\}$$

olarak tanımlanan A bulanık kümesi verilsin. Buna göre A nın tümleyeni olan $\bar{A}$ bulanık kümesinin $\mu_{\bar{A}}: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\bar{A}}(a) = 1 - \mu_A(a) = 0.7$$

$$\mu_{\bar{A}}(b) = 1 - \mu_A(b) = 0.2$$

$$\mu_{\bar{A}}(c) = 1 - \mu_A(c) = 0$$

olarak bulunur ve

$$\bar{A} = \{(a, 0.7), (b, 0.2), (c, 0)\}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.4.17. Bir R bulanık bağıntısı, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ Kartezyen çarpımının $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -lilerine $[0,1]$ kapalı aralığında bir üyelik derecesi atayan

$$R: X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow [0,1]$$

dönüşümüdür. Bir bulanık bağıntı, $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ Kartezyen çarpımındaki bir bulanık kümedir. Üyelik dereceleri, farklı X_i tanım uzayındaki elemanlar arasındaki ilişki derecesini ifade eder (Babuska 1998).

Örnek 2.4.18. $X_1 = \{a, b\}$ ve $X_2 = \{1, 2, 3\}$ uzaylarında tanımlı sırasıyla $A = \frac{0.7}{a} + \frac{0.5}{b}$ ve $B = \frac{0.5}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{1.0}{3}$ bulanık kümeleri $X = X_1 \times X_2$ uzayında tanımlı bulunan $C = A \times B$ Kartezyen çarpımı,

$$C = \frac{0.5}{(a,1)} + \frac{0.4}{(a,2)} + \frac{0.7}{(a,3)} + \frac{0.5}{(b,1)} + \frac{0.4}{(b,2)} + \frac{0.5}{(b,3)} \text{ olarak bulunur.}$$

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Çoklu Küme Topolojileri

Tanım 3.1.1 $M \in [X]^W$ ve $\tau \subseteq P^*(M)$ olsun. τ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ya çoklu küme topolojisi denir.

- i. $\emptyset$ ve $M \in \tau$
- ii. τ ailesinin sonlu ve sonsuz sayıda alınan elemanların birleşimi yine τ nın elemanıdır.
- iii. τ ailesinin sonlu sayıda elemanlarının kesişimleri yinede τ elemanıdır.

$\tau \subseteq P^*(M)$ ve $M \in [X]^W$ olsun. τ ailesine M üzerinde bir çoklu topoloji ve (M, τ) ikilisine M üzerinde bir çoklu topolojik uzayı denir. τ bir klasik kümedir.

Genel topolojide, bir dizi noktalar kümesi olarak tanımlanır, ancak çoklu küme topolojisi noktalardan ziyade bir çoklu kümeler kümesi olarak tanımlanır.

Genel olarak τ ailesi topolojide kuvvet kümesinin alt kümesidir ancak çoklu küme topolojilerinde τ destek kuvvet kümesinin alt kümesidir (Girish and John 2012).

Örnek 3.1.2 $M \in [X]^W$ olsun. $\tau = P^*(M)$ ise (M, τ) çoklu topolojik uzayına ayrık çoklu topoloji denir.

Örnek 3.1.3. M herhangi bir çoklu küme olsun. $PW(M)$ çoklu ailesi M üzerinde bir çoklu topolojidir.

Örnek 3.1.4. $PF(M)$ ailesi M üzerinde bir çoklu topoloji değildir. Çünkü $\emptyset \notin PF(M)$ dir. Fakat $PF(M) \cup \{\emptyset\}$ M üzerinde bir çoklu topolojidir.

Örnek 3.1.5. τ ; M nin kısmi bütün alt çoklu kümelerin ailesi M de bir topoloji değildir.

$M = \{2/x, 3/y\}$ olsun. $A = \{2/x, 1/y\}$ ve $B = \{1/x, 3/y\}$ kısmi alt çoklu kümelerdir. Böylece $A \cap B = \{1/x, 1/y\}$ kümesi kısmi çoklu tam bir alt kümesi değildir. Bu nedenle τ kesişim altında kapalı değildir.

3.1.1. Çoklu Küme Tabanları ve Çoklu Küme Alt Tabanları

Tanım 3.1.1.1. M çoklu bir küme olsun. (M, τ) çoklu topolojik uzayı ve $\mathcal{B}$ çoklu açık kümelerin bir sınıfı olsun. τ sınıfının her elemanı $\mathcal{B}$ sınıfına ait olan kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ sınıfına τ topolojisi için çoklu taban denir. Yani;

- i. Her $x \in {}^m M$ ve $m > 0$ için m/x içeren bir $B \in \mathcal{B}$ vardır.
- ii. Eğer m/x , iki M-tabanı elemanları M ve N nin kesişimine ait ise, o halde m/x içeren bir tane P M-tabanı elemanı vardır öyle ki, $\forall y \neq x$ ler için $C_{P(x)} = C_{M \cap N}(x)$ ve $C_{P(y)} \leq C_{M \cap N}(y)$ ile beraber $P \subseteq M \cap N$ olur.

Not: Eğer $\mathcal{B}$ ailesi, M tabanının koşullarını sağlarsa, o halde $\mathcal{B}$ üretilen M- topolojisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

M 'nin alt çoklu kümesi olan U 'nun, M 'de açık bir çoklu küme olduğu söylenebilir. (Örneğin, τ nin bir elemanı olabilir.) her $x \in {}^k U$ için ise bir M-tabanı elemanı olan $B \in \mathcal{B}$ vardır. Öyleki tüm $y \neq x$ ler için $x \in {}^k B$ ve $C_{B(y)} = C_U(y)$ şeklindedir.

Her bir M- taban elemanının τ nin elemanı olduğunu göz önünde bulundurunuz (Girish and John 2012).

Teorem 3.1.1.2. $\mathcal{B}$ çoklu taban tarafından üretilen bir τ ailesi $M \in [X]^w$ üzerinde bir çoklu topolojidir (Girish and John 2012).

İspat : 1. $\emptyset, M \in \tau$.

2. $\{U_a\}_a \in j$, τ nin elemanlarının indisli bir ailesi olsun. O halde $\ast = \prod_{a \in j} U_a$, τ ya ait olur. Verilen $x \in {}^m U$, $m = \max_a \{C_{U_a}(x)\}$ bir indisli a vardır. Öyle ki bu m/x i içeren U_a dir. U_a , açık çoklu küme olduğu için m/x i içeren M-tabanı elemanı vardır. Öyle ki, bu durumda $B \subseteq U_a$ şeklindedir. O halde, $x \in {}^m B$ ve $B \subseteq U$ olur. Çünkü U , tanım olarak bir açık çoklu kümedir.

3. Eğer U_1 ve U_2 , τ iki elemanıysa $U_1 \cap U_2$ ifadesini ispatlamak ve τ 'ya bağlıdır. $x \in {}^k U_1 \cap U_2$ gözönünde bulundurulduğunda, $k = \min\{C_{U_1}(x), C_{U_2}(x)\}$ olur. M-tabanı tanım gereği, k/x içeren bir B_1 elemanı mevcuttur. Öyle ki, $B_1 \subseteq U_1$ ve k/x içeren diğer bir M-tabanı elemanı olan B_2 de vardır. Öyle ki, $B_2 \subseteq U_2$ olur. Bir M-tabanı için ikinci bir durum ise bize k/x 'i içeren bir B_3 M-tabanı elemanı vardır. Bu durumda $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ şeklindedir. O halde $x \in {}^k B_3$ ve $B_3 \subseteq U_1 \cap U_2$, $B_3 \in \tau$ dir.

Son olarak tümevarım ile bu sonuç çıkar; τ nin herbirinin sonlu kesişimi $(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k) \tau$ ailesine aittir. Bu gerçek $k=1$ aşıkardır ve $k=n$ için ispatlanabilir. Şu anda $(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n$ şeklindedir. Bir

varsayımla hareket edersek $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}$, τ ailesine aittir ve yukarıda ispatlanmış bir sonuç olarak; $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}$ ve U_n aynı zamanda τ ailesine aittir. Bundan dolayı B ; M -tabanı tarafında oluşturulan açık kümelerin ailesi aslında bir M -topolojisi.

Teorem 3.1.1.3. $M \in [X]^w$ olsun ve $\mathcal{B}$ de M üzerinde M -topolojisi için bir M -tabanı olsun. O halde τ , $\mathcal{B}$ M -tabanının tüm çoklu küme birleşim elemanlarının ailesine eşittir (Girish and John 2012).

İspat. Verilen B elemanlarının ailesi, aynı zamanda τ nun elemanlarıdır çünkü τ bir M -topolojisi, birleşimleri de τ ailesine aittir. Buna karşılık, U da her bir m/x için verilen $U \in \tau$, $B_{m/x}$ ile ifade edilen m/x içeren $\mathcal{B}$ nin bir B elemanı vardır. Öyle ki, $B_{m/x} \subseteq U$ şeklindedir. O halde $U = \cup B_{m/x}$ şeklindedir, bundan dolayı U , $\mathcal{B}$ nin elemanlarının birleşimine aittir.

Yardımcı Teorem 3.1.1.4. $M \in [X]^w$ ve M -topolojik uzay olsun. N nin de M nin çoklu açık kümelerin bir ailesi olduğunu farz edelim. Öyle ki U da bulunan her bir m/x elemanı ve M nin bir N elemanı mevcuttur. Öyle ki, $C_N(x) \leq C_U(x)$ olur. O halde M , M nin M -topolojisi için bir M -tabanıdır (Girish and John 2012).

İspat. $x \in M$ dikkate alındığında, M nin kendisi bir çoklu açık küme olduğundan bir varsayımla hareket edersek m/x içeren M nin bir N elemanının mevcut olduğunu söyleyebiliriz. İkinci durumu kontrol etmek için; m/x , $N_1 \cap N_2$ de olsun, bu durumda N_1 ve N_2 çoklu açık kümeler olduğu için bunlar kesişimi $N_1 \cap N_2$ olur. Bundan dolayı varsayımla hareket edilirse, m/x 'i içeren C de bulunan bir N_3 elemanı vardır. Öyle ki $N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$ olur. Bundan dolayı, M ailesi bir M -tabanıdır.

τ , M nin çoklu açık kümelerin bir ailesi olsun. O halde, M tarafından oluşturulan M -topolojisi τ' , M -topolojisi τ ye eşittir. Şayet U , τ ye ve $x \in^m U$ aitse, o halde bir varsayımla m/x 'i içeren M nin bir N elemanı mevcuttur diyebiliriz. Öyle ki bu durumda $N \subseteq U$ olur. Tanım gereği, bundan U nun M -topolojisi τ ye ait olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Buna karşılık, eğer W , M -topolojisi τ ye aitse o halde W , teorem 3.1.1.3 ya göre M nin elemanlarının birleşimine eşittir. Her bir M elemanı τ ya ait olduğu için

τ bir M-topolojisi. W ye aynı zamanda τ ye aittir. M üzerindeki M-topolojisi ve M-tabanı tarafından oluşturulan M-topolojisi.

Tanım 3.1.1.5 τ ve τ' nin $[X]^w$ da verilen bir çoklu küme üzerinde iki M-topoloji olduğunu farz edelim. Eğer $\tau \subset \tau'$ ise o halde τ' nin τ dan daha ince olduğunu yada τ nin τ' den daha kaba olduğunu söyleyebiliriz. Eğer $\tau' \subset \tau$ ise, o halde τ' , τ dan daha incedir ya da τ , τ' den daha kabadır. $\tau' \supseteq \tau$ ya da $\tau \supseteq \tau'$ olursa, τ ile τ' karşılaştırılabilir denir. Diğer bir teoremden M üzerindeki bir M-topolojisinin, M-tabanı bakımında diğerinden daha ince olduğu belirleyen bir ölçüt verir (Girish and John 2012).

Teorem 3.1.1.6. $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}'$ sırasıyla $[X]^w$ deki M üzerinde bulunan M-topolojileri τ ve τ' için M-tabanları olsun. O halde aşağıdakiler eş değerdir;

1. τ', τ dan daha incedir.
2. m/x 'i içeren her bir $B \in \mathcal{B}$ M- taban elemanı ve $x \in^m M$ için m/x 'i içeren $B' \in \mathcal{B}'$ M-tabanı elemanı vardır.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) m/x 'i içeren $B \in \mathcal{B}$ ve M de bulunan m/x elemanı verilirse B , tanım olarak τ ya aittir ve (1) de gösterilen ifadeye $\tau \subseteq \tau'$ şeklindedir. Bundan dolayı $B \in \tau'$ olur. $\tau', \mathcal{B}'$ tarafından oluşturulduğundan, m/x 'i içeren $B' \in \mathcal{B}$ M-tabanı elemanı mevcuttur. Öyle ki $C_{B'}(x) \leq C_B(x)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) τ nun bir U bir elemanı göz önünde bulundurulduğunda bunu $U \in \tau'$ gösterebiliriz. $x \in^m U$ olarak olsun, $\mathcal{B}; \tau$ meydana getirdiğinden, m/x 'i içeren bir $B \in \mathcal{B}$ M-tabanı elemanı mevcuttur. Öyle ki bu durumda, $B \subseteq U$ olur. İspat (2) den dolayı m/x 'i içeren bir $B' \in \mathcal{B}'$ M-tabanı elemanı mevcuttur. Öyle ki $B' \subseteq B$ olur. O halde $B' \subseteq U$ ve $U \in \tau'$ şeklindedir (Girish and John 2012).

Örnek 3.1.1.7. $\{m/x : x \in^m M\}$ ailesi, M-topolojisi $PW(M)$ için bir M-tabanıdır.

Genel topolojide, $\{x : x \in X\}$ ayrık topolojisi bir tabandır. M-topoloji durumunda $\{m/x : x \in^m M\}$ ailesi, ayrık topoloji için bir M- taban değildir.

Tanım 3.1.1.8. (M, τ) bir M-topolojik uzayı ve N ve M nin bir alt çoklu kümesi olsun $\tau_N = \{U' = N \cap U; U \in \tau\}$ ailesi, N üzerinde bir M-topolojisi. Çoklu alt uzay topolojisi olarak adlandırılır. Bu M-topolojisiyle, $N; M$ nin alt uzayı olarak adlandırılır

ve aynı zamanda N ile beraber M nin açık çoklu kümelerin tüm çoklu küme kesişimlerinden oluşan açık çoklu kümeleri olarak adlandırılır (Girish and John 2012).

Teorem 3.1.1.9. Eğer $\mathcal{B}$, $[X]^w$ da bulunan M nin M-topolojisi için bir M-tabanı ise o halde $\mathcal{B}_N = \{B \cap N : B \in \mathcal{B}\}$ ailesi, M nin alt çoklu kümesi olan N üzerinde alt uzay M-topolojisi için bir M-tabanıdır (Girish and John 2012).

İspat. U , M de açık olduğu göz önünde bulundurulursa ve $y \in^m U \cap N$ de aynı şekilde göz önünde bulundurulursa, $\mathcal{B}$ nin bir B elemanını seçebiliriz. Öyle ki $y \in^m B \cap N \subseteq U \cap N$ olur yardımcı teoremden de anlaşıldığı gibi $\mathcal{B}_N$, N üzerinde alt uzay M-topolojisi için M-tabanı mevcuttur.

Örnek 3.1.1.10. $M = \{3/a, 4/b, 2/c, 5/d\}$ ve $N = \{2/a, 2/b, 3/d\}$

$$\tau = \left\{ \emptyset, M, \{2/c\}, \{2/a\}, \{3/a, 2/b\}, \{2/a, 3/d\}, \{2/a, 2/c\}, \{3/a, 3/b, 3/c\}, \{3/a, 4/b, 2/c\}, \{2/a, 2/c, 3/d\} \right\}$$

halde $\tau' = \{\emptyset, \{2/a, 2/b, 3/d\}, \{2/a\}, \{2/a, 2/b\}, \{2/a, 3/d\}\}$ N üzerinde bir M-topolojisi olur, ve N üzerinde M-topolojisi alt uzayı olur.

Tanım 3.1.1.11. M üzerinde alınan τ nun bir $\mathcal{P}$ alt ailesi τ için bir alt M-tabanı olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{P}$ nin elemanlarının bütün sonlu çoklu küme kesişimlerinin ailesi, τ için bir M-tabanıdır. Alt M-tabanı $\mathcal{P}$ tarafından oluşturulan M-topolojisi, $\mathcal{P}$ nin tanımlanır (Girish and John 2012).

Not : Alt M-tabanı elemanlarının boş çoklu küme kesişimi evrensel çoklu kümedir.

Teorem 3.1.1.12. (M, τ) bir M-topolojik uzayı ve $\mathcal{P}$ de M nin alt çoklu kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{P}$, τ yu oluşturduğu durumda ancak ve ancak τ için bir alt M-tabanı olur (Girish and John 2012).

İspat. $\mathcal{B}$ nin elemanlarının sonlu kesişimlerinin ailesi olsun. $\mathcal{P}$ da τ için bir alt M-tabanı olsun τ nun $\mathcal{P}$ yi içeren M üzerindeki en küçük M-topolojisi olduğu gösterilebilir. Çünkü $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B} \subseteq \tau, \subseteq \tau$ şeklindedir. τ nun M üzerinde başka bir M-topolojisi olduğunu varsayalım. Öyle ki, $\mathcal{P} \subseteq \tau^*$ şeklindedir. $\tau \subseteq \tau^*$ olduğunu ayrıca hatırlamakta faydalı olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü $\mathcal{P} \subseteq \tau^*$ olduğundan, τ^* , $\mathcal{P}$ nin elemanlarının bütün sonlu kesişimlerini içerir. Örneğin, $\mathcal{B} \subseteq \tau^*$, $\mathcal{B}$ bir M-tabanı

olduğundan, τ nun her bir elemanı $\mathcal{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir ve buradan da $\tau \subseteq \tau^*$ olduğu sonucu çıkarabiliriz.

Buna karşılık, τ nun $\mathcal{P}$ yi içeren en küçük M-topolojisi olduğunu varsayalım. $\mathcal{P}$ nin τ için bir alt M-tabanı olduğunu göstermek durumundayız. Örneğin; $\mathcal{B}$, τ için bir M-tabandır. M üzerinde bir M-topolojisi τ^* olduğunu farzedelim. Öyle ki, $\mathcal{B}$; τ^* için M-tabandır. O halde τ^* 'nin her elemanı $\mathcal{B}$ nin alt ailesinin bir birleşimi olarak ifade edilebilir, ve bundan dolayı $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olarak olduğu için τ sınıfındadır. Bu da $\tau^* \subseteq \tau$ anlamına gelir. sonuç olarak $\tau^* = \tau$ olur. τ , $\mathcal{P}$ yi içeren en küçük M-topolojisi olduğu için, $\mathcal{B}$ nin τ için bir M-tabanı olduğu ve $\mathcal{P}$ nin de τ için bir alt tabanı olduğu gösterilebilir.

Örnek 3.1.1.13. $M = \{3/a, 5/b, 4/c\}$ olarak olsun. $\mathcal{P} = \{\{3/a, 5/b\}, \{5/b, 4/c\}\}$ ailesi bir M-taban ise, o halde $\mathcal{B} = \{\{3/a, 5/b\}, \{5/b, 4/c\}\}$ ailesi denk M-tabandır ve $\tau = \{M, \emptyset, \{5/b\}, \{3/a, 5/b\}, \{5/b, 4/c\}\}$, M-tabanı tarafından üretilen bir M-topolojidir.

Eğer alt M-tabanı elemanlarının boş çoklu küme kesişimlerinin evrensel çoklu küme sayarsak, o halde aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 3.1.1.14. $M = \{3/a, 4/b, 2/c, 5/d\}$ olarak olsun. Eğer $\mathcal{P} = \{\{3/a, 3/b\}, \{4/d\}, \{2/a\}\}$ ailesi bir alt M-tabanı ise, o halde $\mathcal{B} = \{\{3/a, 3/b\}, \{4/d\}, \{2/a\}, \emptyset, M\}$ denk M-tabanı olur ve $\tau = \{\{2/a, 4/d\}, \{3/a, 3/b, 4/d\}, \{3/a, 3/b\}, \{4/d\}, \{2/a\}, \emptyset, M\}$ M- tabanı tarafından üretilen M- topolojisi olur.

3.1.2. Kapalı Çoklu Kümeler

Tanım 3.1.2.1. Eğer $M \ominus N$ çoklu kümesi açıksa, $[X]^w$ daki M-topolojik olan M nin bir N alt çoklu kümeleri kapalı olduğu söylenebilir.

Ayrık M-topolojisinde, her çoklu küme kapalı bir çoklu küme olduğu kadar açık çoklu kümedir. M-topolojisi $PF(M) \cup \{\emptyset\}$ da, her çoklu küme kapalı bir çoklu küme olduğu kadar açık bir çoklu kümedir (Girish and John 2012).

Teorem 3.1.2.2 (M, τ) bir M-topolojik uzayı olsun. O halde aşağıdaki durumlar geçerli olur.

- i. M çoklu kümesi ve $\emptyset$ boş çoklu kümesi kapalı çoklu kümelerdir.
- ii. Kapalı kümelerin rastlantısal çoklu küme kesişimleri bir çoklu kümedir.
- iii. Kapalı çoklu kümelerin sonlu çoklu küme birleşimleri kapalı çoklu kümedir (Girish and John 2012).

İspat. 1. $\emptyset$ ve M kapalı çoklu kümelerdir çünkü sırasıyla M ve $\emptyset$ açık çoklu kümelerin tümleyenidir.

2. $\{N_a\}_a \in j$ kapalı çoklu kümelerin ailesi göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned} C_{M \ominus \cap_a N_a}(x) &= C_M(x) - \min_{a \in j} \{C_{N_a}(x)\} = \max_{a \in j} \{C_M(x) - C_{N_a}(x)\} \\ &= C_{\cap_a (M \ominus N_a)}(x) \end{aligned}$$

Buradan

$$M \ominus \cap_{a \in j} N_a = \cap_a (M \ominus N_a)$$

sonucu çıkar.

Tanım gereği, $(M \ominus)N_a$ çoklu kümeleri açıktır. Açık çoklu kümelerin rastlantısal birleşimleri de açık olduğundan dolayı, $(M \ominus) \cap_{a \in j} N_a$ bir açık çoklu kümedir.

3. Benzer şekilde, eğer N_i kapalı ise $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$C_{M \ominus \cap_i N_i}(x) = \max_i \{C_M(x) - C_{N_i}(x)\} = C_M(x) - \min_i \{C_{N_i}(x)\} = C_{\cap_i (M \ominus N_i)}(x)$$

Bundan dolayı,

$$M \ominus \prod_{i=1}^n N_i = \prod_{i=1}^n (M \ominus N_i)$$

olur.

Açık çoklu kümelerin sonlu çoklu kesişimleri açık olduğundan dolayı,

$$\prod_{i=1}^n N_i$$

kapalı bir çoklu kümedir.

Teorem 3.1.2.3. $N, [X]^w$ da bir M-topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. O halde ancak ve ancak N ile birlikte M nin kapalı çoklu kümesinin kesişimine denk olduğu takdirde çoklu küme olan A, N de kapalı çoklu küme olur (Girish and John 2012).

İspat. C nin M de kapalı bir çoklu küme olduğu durumda $A = C \cap N$ olduğunu farzedelim. Alt uzay M-topolojisinin tanımı gereği $M \ominus C, M$ de açık bir çoklu kümedir. Böylece $(M \ominus C) \cap N$ de N de bir açık küme olur. Fakat $(M \ominus C) \cap N = N \ominus A$ olur. Bu nedenle $N \ominus A, N$ de açık bir çoklu kümedir. Böylece A, N de kapalı çoklu kümedir. Buna karşılık, A nın N de kapalı bir çoklu küme olduğunu varsayalım. O halde $N \ominus A, N$ de açık bir çoklu küme olur. Böylece tanım gereği, N ile beraber M nin açık çoklu kümesi olan U nun kesişimine denk olduğunu söyleyebiliriz. $M \ominus U$ çoklu kümesi M de kapalı bir çoklu kümedir ve $A = N \cap (M \ominus U)$ şeklindedir. Böylece istendiği gibi A, N ile beraber M nin kapalı çoklu küme kesişimine eşittir.

Teorem 3.1.2.4. $N, [X]^w$ da bir M-topolojik uzayı olan M nin bir alt uzayı olsun. Eğer A, N de kapalı bir çoklu küme ise ve N de M de kapalı bir çoklu küme ise, o halde A, M de kapalı bir çoklu kümedir (Girish and John 2012).

3.1.3. Çoklu Kümelerin Kapanışı, İçi ve Sınır Noktası

Tanım 3.1.3.1. $[X]^w$ da bir M-topolojik uzayı olan M nin bir alt çoklu kümesi olan A dikkate alındığında, A nın içi A yı da içinde barındıran tüm açık çoklu kümelerin çoklu küme birleşimi olarak tanımlanabilir ve $int(A)$ ile ifade edilir.

Örneğin; $int(A) = U\{G \subseteq M: G \text{ açık bir çoklu küme ve } G \subseteq A\}$ şeklindedir ve $C_{int(A)}(x) = \max\{C_G(x): G \subseteq A\}$ olur (Girish and John 2012).

Tanım 3.1.3.2. $[X]^w$ da bir M-topolojik uzayı olan M nin bir alt çoklu kümesi dikkate alındığında, A nın dış noktası A yı içeren tüm kapalı çoklu kümelerin kesişimi olarak tanımlanır ve $CI(A)$ ifade edilir.

Örneğin; $CI(A) = \cap \{K \subseteq M: K \text{ kapalı bir çoklu kümedir ve } A \subseteq K\}$ şeklindedir ve $C_{CI(A)}(x) = \min\{C_K(x): A \subseteq K\}$ olur (Girish and John 2012).

Tanım 3.1.3.3. (M, τ) bir topolojik uzayı olsun, $x \in^k M$ ve $N \subseteq M$ olarak olsun. O halde N nin k/x 'in bir komşuluğu olduğu söylenebilir. Şayet τ de açık bir çoklu küme

olan V nin olması durumunda böyle olur. Öyle ki $\forall y \neq x$ ler için, $x \in^k M$ ve $C_V(x) \leq C_N(y)$ olur.

Örneğin; M 'de k/x in bir komşuluğu k/x 'i içeren herhangi bir açık çoklu küme anlamına gelir. Buradaki k/x 'in N nin bir iç noktası olduğu söylenilebilir (Girish and John 2012).

Tanım 3.1.3.4. A , $[X]^w$ daki bir M -topolojik uzayı olan M nin alt çoklu kümesi olsun. Eğer k/x M nin bir elemanıysa o halde k/x , bir çoklu küme olan A nın bir sınır noktasıdır. M nin bir elemanıysa o halde k/x , bir çoklu küme olan A nın dışında aynı noktada A ile kesiştiğinde olur. A' , A nın tüm sınır noktaların çoklu kümesini ifade eder (Girish and John 2012).

Teorem 3.1.3.5. N , $[X]^w$ de bir M -topolojik uzayı olan M nin bir alt uzayı ve A da bir çoklu küme olan N nin alt çoklu kümesi olsun. Ve $CI(A)$, M de bir çoklu küme olan A nın kapanışını ifade etsin. O halde N deki çoklu küme A nın kapanışını $CI(A) \cap N$ ifadesine denktir (Girish and John 2012).

İspat. B , N de bir çoklu küme olan A nın kapanışını ifade etsin. Eğer $CI(A)$, M de bir kapalı çoklu küme ise, o halde teorem 3.1.2.4'e göre $CI(A) \cap N$, N de kapalı çoklu küme olur. $CI(A) \cap N$ ifadesi N yi içerdiğinde ve B de A yı içeren N nin tüm kapalı alt çoklu kümelerinin kesişimine denk olduğu için $B \subseteq CI(A) \cap N$ ifadesini elde ederiz.

Bunun yanısıra B , N de kapalı bir çoklu kümedir. Bunun sonucu teorem 3.1.2.4 e göre bazı çoklu küme C 'ler için $B = C \cap N$ ifadesi M de kapalı bir çoklu kümedir. O halde C , A yı içeren M nin kapalı bir çoklu kümesidir. Çünkü $CI(A)$, bu gibi tüm kapalı çoklu kümelerin kesişimidir. Burdan $CI(A) \subseteq C$ sonucuna varabiliriz. Bundan dolayı $CI(A) \cap N \subseteq C \cap N = B$ olur.

Teorem 3.1.3.6. (M, τ) bir topolojik uzayı ve $x \in^k M$ ve $A \subseteq M$ olarak olsun. O halde;

- i. Ancak ve ancak k/x 'i içeren herbir açık çoklu küme U , A ile kesişirse $x \in^k CI(A)$ olur.

- ii. Eğer M -topolojisi (M, τ) , M -tabanı $\mathcal{B}$ tarafında üretilirse o halde ancak ve ancak k/x 'i içeren M -tabanı elemanı olan $B \in \mathcal{B}$, A ile kesişirse $x \in^k CI(A)$ olur (Girish and John 2012).

İspat 1. Eğer k/x , $CI(A)$ da değilse, o halde çoklu küme $U = M \ominus CI(A)$, A ile kesişmeyen k/x 'i içeren açık bir çoklu kümedir. Buna karşılık eğer A ile kesişmeyen k/x 'i içeren bir açık çoklu küme olan U mevcutsa, o halde çoklu küme $M \ominus U$, A yı içeren kapalı bir çoklu kümedir. $CI(A)$ tanım gereği çoklu küme $M \ominus U, CI(A)$ yı içermelidir. bundan dolayı k/x , $CI(A)$ 'da olmaz.

2. Eğer k/x 'i içeren her bir açık çoklu küme A ile kesişirse, bundan dolayı k/x 'i içeren her bir M -tabanı elemanı U vardır. Çünkü B , çoklu bir kümedir.

Buna karşılık, eğer k/x 'i içeren her bir M -tabanı elemanı A ile kesişirse bundan dolayı k/x 'i içeren her bir açık çoklu küme U da mevcuttur. Çünkü U , k/x 'i içeren bir M -tabanı elemanını içerir.

Teorem 3.1.3.7. Ancak ve ancak bazı çoklu elemanların herbirinin bir komşuluğu varsa, M -topolojik uzayının alt kümesi açık alt çoklu küme olur (Girish and John 2012).

İspat. M , bir M -topolojik uzayı ve $N \subseteq M$ olarak olsun. İlk olarak N nin açık bir çoklu küme olduğunu varsayalım. O halde açık bir şekilde N , bir takım çokluklu noktaların herbirinin komşuluğudur. Buna karşılık, N nin kendi noktalarının herbirinin komşuluğudur. Buna karşılık, N nin kendi noktalarının her birinin bir komşuluğu olduğunu varsayalım. O halde, N deki bir k/x için bir $V_{k/x}$ açık çoklu kümesi vardır. Öyle ki, $x \in^k V_{k/x}$ ve $V_{k/x} \subseteq N$ olur. Açık bir şekilde buradan

$$N = \bigcap_{x \in^k N} V_{k/x}, k = \max \{C_{V_{k/x}}(x)\}$$

sonucu çıkarabiliriz.

Her bir $V_{k/x}$ açık çoklu küme olduğundan N de açık bir çoklu kümedir.

Teorem 3.1.3.8. A , M -topolojik uzayı M nin bir alt çoklu kümesi ve A' da A nin tüm sonlu noktaların çoklu kümesi olsun. O halde $C_{CI(A)}(x) = \max\{C_A(x), C_{A'}(x)\}$ olur (Girish and John 2012).

İspat. Eğer k/x A' da ise, o halde k/x 'in her komşuluğu A ile kesişir. Bundan dolayı teorem 3.1.3.7 yE göre k/x $CI(A)$ ya aittir. Bundan dolayı de $A' \subseteq CI(A)$ olur. Tanım gereği $A \subseteq CI(A)$ olarak olduğunda burden da $A \cup A' = CI(A)$ sonucu çıkarabiliriz.

Buna karşılık k/x 'in $CI(A)$ nın bir noktası olduğunu varsayalım. O halde, $x \in^k A \cup A'$ olur. Eğer k/x , A da ise $x \in^k A \cup A'$ olduğu açıktır. k/x 'in A' ya ait olduğunu varsayalım. Çünkü $x \in^k CI(A)$ şeklindedir. k/x 'in her komşuluğu olan U nun A ile kesiştiğini biliyoruz. Bundan dolayı U çoklu kümesi, k/x den farklı bir noktada A ile kesişmelidir. Bundan dolayı $x \in^k A'$ ve $x \in^k A \cup A'$ olur.

Sonuç Bir M-topolojik uzayının alt çoklu kümesi, ancak ve ancak kendi sınırlarının tümünü kapsarsa açık bir çoklu küme olur.

İspat. A çoklu kümesi kapalı çoklu kümedir.

- i. Ancak ve ancak $A = CI(A)$,
- ii. Ancak ve ancak $A = A \cup A'$,
- iii. Ancak ve ancak $A' \subseteq A$ durumları sağladığında A çoklu kümesinin kapalı bir çoklu küme olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.1.3.9. Eğer A ve B , $[X]^W$ da M-topolojik uzayı olan M nin alt çoklu kümeleri ise, o halde aşağıdaki özellikler geçerli olur:

- i. Eğer $C_A(x) \leq C_B(x)$ ise, o halde $C_{A'}(x) \leq C_{B'}(x)$ olur.
- ii. Eğer $C_A(x) \leq C_B(x)$ ise, o halde $C_{int}(A) \leq C_{int}(B)$ olur.
- iii. Eğer $C_A(x) \leq C_B(x)$ ise, o halde $C_{CI}(A) \leq C_{CI}(B)$ olur.
- iv. $C_{int(A \cap B)}(x) = \min\{C_{int(A)}(x), C_{int(B)}(x)\}$.
- v. $C_{CI(A)}(x) = \max\{C_{CI(A)}(x), C_{CI(B)}(x)\}$ (Girish and John 2012).

3.1.4. Sürekli Çoklu Küme Foksiyonları

Tanım 3.1.4.1. M ve N iki M-topolojik uzayı olsun. $f: M \rightarrow N$ çoklu fonksiyonunun sürekli olduğu söylenebilir. Şayet N nin her bir açık alt çoklu kümesi olan V için, $f^{-1}(x)$ çoklu kümesi, M nin açık alt çoklu kümesidir. Bu durumda $f^{-1}(x)$ ifadesinin M 'deki tüm m/x noktaların çoklu kümesi olduğunda gerçekleşir. Yukarıda ifade edilen M , bazı n ler için $f(m/x) \in^n V$ şeklindedir (Girish and John 2012).

Örnek 3.1.4.2. $M = \{5/a, 4/b, 4/c, 3/d\}$ $N = \{7/x, 5/y, 6/z, 4/w\}$ ifadeleri çoklu iki küme olsun

$$\begin{aligned}\tau &= \{M, \emptyset, \{5/a\}, \{5/a, 4/b\}, \{5/a, 4/b, 4/c\}\} \\ \tau' &= \{N, \emptyset, \{7/x\}, \{5/y\}, \{7/x, 5/y\}, \{5/y, 6/z, 4/w\}\}\end{aligned}$$

ifadeleri sırasıyla M ve N üzerinde sırasıyla iki M-topolojisi olsun.

$f: M \rightarrow N$ ve $g: M \rightarrow N$ çoklu küme fonksiyonlarının

$$\begin{aligned}f &= \{5/(5/a, 5/y), 4/(4/b, 6/z), 4/(4/c, 4/w), 3/(3/d, 6/z)\} \\ g &= \{5/(5/a, 7/x), 4/(4/b, 7/x), 4/(4/c, 6/z), 3/(3/d, 4/w)\}\end{aligned}$$

ifadeleri verildiğini göz önünde bulunduralım.

N üzerindeki M-topolojisi τ' nin her bir elemanının tersi, M üzerindeki M-topolojisi τ nin bir elemanı olduğu için, f çoklu fonksiyonu süreklidir, g çoklu fonksiyonu sürekli değildir. Çünkü $\{5/y, 6/z, 4/w\} \in \tau'$ şeklindedir. Örneğin; N nin açık çoklu bir kümesidir. Fakat onun ters görüntüsü olan $g^{-1}(\{5/y, 6/z, 4/w\}) = \{4/c, 3/d\}$ ifadesi M nin açık bir çoklu kümesi değildir. Çünkü $\{4/c, 3/d\}$ çoklu kümesi τ ya ait değildir.

Örnek 3.1.4.3. $f: M \rightarrow N$ bir çoklu fonksiyon ve $\tau = P^*(M)$ ifadesi de M üzerindeki M-topolojisi olan M nin çoklu kuvvet kümesinin destek kümesi olsun. O halde bir $f: M \rightarrow N$ çoklu fonksiyonu N üzerindeki herhangi bir M-topolojisi için süreklidir.

Örnek 3.1.4.4. $f: M \rightarrow N$ bir çoklu fonksiyon, $\tau' = PF(N) \cup \{\emptyset\}$ ifadesi ise N üzerinde bir M-topolojisi olsun. O halde her bir $f: M \rightarrow N$ çoklu fonksiyonu, M üzerindeki herhangi bir M-topolojisi için süreklidir. Çünkü τ' da bulunan açık çoklu kümeler, destek kümesi N^* olan N 'nin alt çoklu kümeleridir. H ve $\emptyset$, τ' de açık olsun. O halde $f^{-1}(H) = M$ ve $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ olur. Bundan dolayı f , herhangi bir τ için süreklidir.

Teorem 3.1.4.5. M ve N , iki M-topolojik uzayları, $f: M \rightarrow N$ ifadesi de bir çoklu fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f çoklu fonksiyonu süreklidir.
2. M nin her bir alt çoklu kümesi A için $C_{f(CI(A))}(x) \leq C_{CI(f(A))}(x)$ şeklindedir.

3. N nin her bir kapalı çoklu kümesi B için, $f^{-1}(B)$ çoklu kümesi M de kapalı bir çoklu kümedir.

4. $\forall x \in^k M$ ve $f(k/x)$ in her bir komşuluğu olan V için komşuluğu vardır. Öyle ki $C_{f(U)}(x) \leq C_V(x)$ olur (Girish and John 2012).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) f çoklu fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. A da M nin alt çoklu kümesi olsun. Eğer $x \in^k CI(A)$ olursa, o halde bazı r ler için $f(k/x) \in^r CI(f(A))$ olarak olduğunu gösterebiliriz. Eğer $V, f(k/x)$ in bir komşuluğu ise o halde $f^{-1}(V), k/x$ 'i kapsayan M 'nin açık çoklu bir kümesidir ki bu k/x , bazı n/y noktalarında A ile kesişir. O halde $V, f(n/y)$ noktasında $f(A)$ ile, ve bazı $f(k/x) \in^r CI(f(A))$ ile kesişir.

(2) $\Rightarrow$ (3) B, N de kapalı bir çoklu küme ve $A = f^{-1}(B)$ olarak olsun. A nın, M de kapalı bir çoklu küme olduğunu İspatlamak istiyoruz. $CI(A) = A$ olarak gösteririz. Buradan da $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ifadesini elde ederiz. Bundan dolayı $x \in^k CI(A)$ olursa o halde $f(k/x) \in^r CI(f(A)) \subseteq CI(f(A) \subseteq CI(B) = B$ olur. Öyle ki $x \in^k f^{-1}(B) = A$ şeklindedir. Bundan dolayı $CI(A) \subseteq A$ diyebiliriz. Öyle ki $CI(A) = A$ ifadesi de çıkar.

(3) $\Rightarrow$ (1) V, N nin açık bir çoklu küme ve $B = N \ominus V$ olarak olsun. O halde $U = f^{-1}(V), k/x$ 'in bir komşuluğudur. Öyle ki $f(U) \subseteq V$ olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) V, N nin açık çoklu kümesi ve k/x de $f^{-1}(V)$ nin bir noktası olsun. O halde bazı r 'ler için $f(k/x) \in^r V$ olur. Bu varsayımla k/x 'in bir U_x komşuluğu vardır. Öyle ki $f(U_x) \subseteq V$ şeklindedir. o halde de $U_x \subseteq f^{-1}(V)$ olur. Bundan şu sonucu çıkarabiliriz. $f^{-1}(V), U_x$ açık çoklu kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. Bundan dolayı $f^{-1}(V), M$ 'nin açık bir çoklu kümesidir ve f de süreklidir.

Teorem 3.1.4.6. Eğer M, N, P M -topolojik uzayları ise $f: M \rightarrow N$ ile $g: N \rightarrow P$ de sürekli çoklu küme fonksiyonları ise o halde onun bileşkesi olan $gof: M \rightarrow P$ ifadesi sürekli bir çoklu fonksiyondur (Girish and John 2012).

İspat. Eğer H, P de açık bir çoklu küme ise, o halde $g^{-1}(H)$, g nin sürekliliği yanında N de açık çoklu kümedir. Şimdi yeniden f in sürekliliği nezdinde, $f^{-1}(g^{-1}(H)) = (gof)^{-1}(H)$, M de açık bir çoklu kümedir. Bundan dolayı gof sürekli bir çoklu fonksiyondur.

Not 1. Genel topolojide, ayrık topoloji X in tüm alt kümelerin kümesidir ve açık şekilde n 'in X in niceliği olduğu yerde 2^n eleman içerir. Fakat M -topolojisinde ayrık M -topolojisi $P^*(M)$, $[X]^w$ daki M nin çoklu kuvvet kümesinin destek kümesidir ve

$$\prod_{i=1}^n (1 + m_i) < 2^n$$

elemanlarını içerir ki bu ifade m_i nin, M çoklu kümesindeki bir x_i elemanın ortaya çıktığı yerde ve n 'nin de M çoklu kümesinin eleman sayısı olduğunda olur.

2. Genel topolojide eğer X in ayrık bir topolojisi, Y nin her hangi bir topolojisi varsa herhangi bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli dir. Ama topolojik uzayları durumunda $f: M \rightarrow N$ çoklu fonksiyonunun her biri sürekli dir. Yalnız bu durum $[X]^w$ da bulunan M 'nin M -topolojisinin $\prod_{i=1}^n (1 + m_i) < 2^n$ elemanlarını içermesi ve $[X]^w$ daki N nin her bir M -topolojisi için olur. Yukarıdaki ifade de yer alan m_i , M çoklu kümesinde bulunan bir x_i elemanın varlığı ve n de, çoklu küme olan M nin eleman sayısı olduğunda gerçekleşir.

3.2. Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 3.2.1. $\tau \leq I^X$ bulanık kümelerin ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, τ ya X de yarı- bulanık topolojisi (X, τ) ikilisine de yarı-bulanık topolojik uzayı denir.

- i. $\emptyset, X \in \tau$ ($0, 1 \in \tau$)
- ii. $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \wedge B \in \tau$
- iii. $\forall i \in I$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$

τ topolojisinin her elemanına bulanık açık küme, X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye bulanık kapalı küme denir. Genel topolojide τ ailesi sadece $\emptyset$ ve X oluşuyorsa (X, τ) topolojik uzayına indiskret topolojik uzay ve τ ailesi X in tüm alt kümelerinden oluşuyorsa (X, τ) topolojik uzayına da diskret topolojik uzay denir. Aynı durum bulanık topolojik uzaylar içinde geçerlidir (Chang 1968).

Tanım 3.2.2. $\tau < I^X$ bulanık kümelerinin ailesi olsun. τ ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ ya X de bir bulanık topolojisi (X, τ) ikilisine de bulanık topolojik uzay denir.

- i. $\forall \lambda \in I^X (\lambda \text{ sabit olmak üzere})$ bulanık kümesi $\lambda \in \tau$
- ii. $\forall \mu_A, \mu_B \in \tau \Rightarrow \mu_A \wedge \mu_B \in \tau$ ($A, B \in \tau \Rightarrow A \wedge B \in \tau$)
- iii. $\{A_i\}_{i \in I} \leq \tau \Rightarrow \forall_{i \in I} \mu_{A_i} \in \tau$ ($\{A_i\}_{i \in I} \leq \tau \Rightarrow \forall_{i \in I} A_i \in \tau$)

Yarı bulanık topolojik uzayı ile bulanık topolojik uzayı arasındaki fark; yarı bulanık topolojik uzayındaki sabit kümelerin özel hali olan X ve $\emptyset$ un τ da olması şartı vardır. Bulanık topolojik uzayında ise, bunlara ek olarak bütün sabitlerin τ da olması şartı vardır (Chang 1968).

Örnek 3.2.3. $X = \{a, b\}$ olmak üzere X kümesi üzerinde bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A = \{(a, 0.3), (b, 0.6)\}$$

$$B = \{(a, 0.4), (b, 0.1)\}$$

$$C = \{(a, 0.3), (b, 0.1)\}$$

$$D = \{(a, 0.4), (b, 0.6)\}$$

$$X = \{(a, 1), (b, 1)\}$$

$$\emptyset = \{(a, 0), (b, 0)\}$$

Bulanık kümeleriyle $\tau = \{\emptyset, X, A, B, C, D\}$ biçiminde tanımlanan τ ailesi X üzerinde bir yarı bulanık topolojik uzayı oluşturur.

- i. $\emptyset, X \in \tau$ dir.
- ii. τ ailesine ait her sonlu elemanın kesişimi τ ailesine aittir. $\emptyset$ kümesinin diğerleri ile kesişimi $\emptyset$, X diğerleri ile kesişimi diğerlerini verir.

Ayrıca;

$$A \wedge B = \{(a, 0.3), (b, 0.1)\} = C \in \tau \quad A \wedge C = \{(a, 0.3), (b, 0.1)\} = C \in \tau$$

Benzer şekilde;

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = C \in \tau, \quad A \wedge (B \wedge D) = (A \wedge B) \wedge D = D \in \tau$$

- iii. Keyfi birleşimleride τ ya ait olduğu (ii) şıkkına benzer şekilde gösterilir. O halde τ ailesi X de bir yarı topolojik uzaydır.

X üzerinde benzer şekilde sonsuz çoklukta bulanık topolojisi konulabilir, çünkü $a, b \in X$ olmak üzere μ_A üyelik fonksiyonu I sonsuz değer alır. Örnekte verilen X üzerinde en fazla dört tane topolojik yapı konulabilir.

Tanım 3.2.4. X kümesi üzerinde birden fazla τ_1 ve τ_2 bulanık topolojisi var olsun. Eğer; $\tau_1 < \tau_2$ ise, τ_2 bulanık topolojisi τ_1 bulanık topolojisinden daha incedir, ya da τ_1 bulanık topolojisi τ_2 bulanık topolojisinden daha kabadır (Pu Pao and Ming 1980).

Teorem 3.2.5. (X, τ) yarı bulanık topolojik uzay olsun.

$K = \{A \leq X : A \text{ bulanık kapalı} \Leftrightarrow A^C \in \tau\}$ ailesi aşağıdaki şartları sağlar.

- i. $\emptyset, X \in \tau$
- ii. $\forall A, B \in K \Rightarrow A \vee B \in K$
- iii. $\{A_i\}_{i \in I} \in K \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} A_i \in K$ (Alaca 2001).

Teorem 3.2.6. $X \neq \emptyset$ K ailesi teorem 3.1.5 şartları sağlasın. Bu durumda $\tau = \{A \leq X : A^C \in K\}$ ailesi X üzerinde bir tek yarı bulanık topolojisi (Alaca 2001).

Tanım 3.2.7. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A bulanık kümesini kapsayan bulanık kapalı kümelerin ara kesitine A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ veya $cl(A)$ ile gösterilir.

Yani;

$cl(A) = \bar{A} = \bigwedge \{B : A \leq B, B^C \in \tau\} = \inf \{B : A \leq B, B^C \in \tau\}$ dir (Azad 1981).

Teorem 3.2.8. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $A, B \in I^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $X = \bar{X}, \emptyset = \bar{\emptyset}$
- ii. $\bar{A}$ bulanık kapalıdır.
- iii. $A \leq \bar{A}$
- iv. $\bar{A}, A$ yı kapsayan en dar kapalı bulanık kümesidir.
- v. $A \leq B \Leftrightarrow \bar{A} \leq \bar{B}$
- vi. A bulanık kapalı $\Leftrightarrow A = \bar{A}$
- vii. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- viii. $\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$ (Pu Pao and Ming 1980).

Tanım 3.2.9. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A nın kapsadığı bütün bulanık açık kümelerin birleşimine A nın içine denir ve $\overset{0}{A}$ veya $int(A)$ ile gösterilir. Yani;

$$int(A) = \overset{0}{A} = \vee_0 = \{B: B \leq A, B \in \tau\} = sup\{B: B \leq A, B \in \tau\}$$

dir (Azad 1981).

Teorem 3.2.10. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $A, B \in I^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $X = \overset{0}{X}, \emptyset = \overset{0}{\emptyset}$
- ii. $\overset{0}{A} \leq A$
- iii. $\overset{0}{A}$ bulanık açıktır
- iv. $\overset{0}{A}$, A yı kapsayan en geniş bulanık açık kümesidir.
- v. $A \leq B \Rightarrow \overset{0}{A} \leq \overset{0}{B}$
- vi. $(A \wedge B)^0 = \overset{0}{A} \wedge \overset{0}{B}$
- vii. $(\overset{0}{A})^0 = \overset{0}{A}$
- viii. A bulanık açıktır $\Leftrightarrow A = \overset{0}{A}$ (Chattopadhyay et al. 1992).

Tanım 3.2.11. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve A, X üzerinde bir bulanık küme olsun.

- i. Eğer $A = (\overline{A})^0$ ise, A ya bulanık düzenli açık küme
- ii. Eğer $A = \overline{(\overset{0}{A})}$ ise, A ya bulanık düzenli kapalı küme denir.

Teorem 3.2.12. Bir X kümesi üzerindeki A bulanık kümesinin bulanık düzenli açık (kapalı) olması için gerek ve yeter şart A^c bulanık kümesinin düzenli kapalı(açık) olmasıdır (Pu Pao and Ming 1980).

Teorem 3.2.13. (X, τ) bulanık topolojik uzay olsun.

- i. A, X üzerinde bulanık açık küme ise, $\overline{A}$ bulanık düzenli kapalı kümedir.

- ii. A, X üzerinde bulanık kapalı küme ise, $\overset{\circ}{A}$ bulanık düzenli açık kümedir (Pu Pao and Ming 1980).

Tanım 3.2.14. X ve Y herhangi iki küme olsun. $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve B, Y de bir bulanık kümesi olmak üzere B nin $g^{-1}(B)$ ile gösterilen g altındaki ters görüntüsü, X üzerinde bir bulanık kümesidir denir ve üyelik fonksiyonu her $x \in X$ için;

$$\mu_{g^{-1}(B)}(X) = \mu_B(g(X))$$

biçiminde gösterilir. Ayrıca X üzerindeki bir A bulanık kümesinin $g(A)$ ile gösterilen g altındaki görüntüsü, Y üzerinde bir bulanık kümesidir denir v üyelik fonksiyonu $\forall y \in Y$ için;

$$\mu_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{z \in g^{-1}(y)} \{\mu_A(z)\}, & g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

biçiminde gösterilir (Chang 1968).

Tanım 3.2.15. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

- i. $\forall B \in \tau'$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise, f ye bulanık sürekli fonksiyon,
- ii. $\forall A \in \tau$ için $f(A) \in \tau'$ ise, f ye bulanık açık fonksiyon,
- iii. Her $A \tau$ - kapalı bulanık kümesi için $f(A) \tau'$ - kapalı ise, f ye kapalı fonksiyon,
- iv. Y üzerinde her B bulanık düzenli açık kümesi $f^{-1}(B) \in \tau$ ise f ye bulanık hemen hemen sürekli fonksiyon,
- v. X üzerindeki her A bulanık düzenli açık kümesi için $f(A) \in \tau'$ ise, f ye hemen hemen açık fonksiyon denir (Azad 1981).

Teorem 3.2.16. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. f fonksiyonu bulanık süreklidir,
- ii. Her τ' - kapalı bulanık kümenin ters görüntüsü τ - kapalı bulanık kümedir (Alaca 2001).

Teorem 3.2.17. X, Y ve Z birer küme $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonlar olsun. X üzerinde A, A_1, A_2 bulanık kümeleri ve Y üzerinde B, B_1, B_2 bulanık kümeler verilsin.

Bu durumda;

- i. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$
- ii. f fonksiyonu örten ise, $(f(A))^c \leq (f(A^c))$,
- iii. $f(f^{-1}(B)) \leq B$ ve özel olarak f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$ dir.
- iv. $A \leq f^{-1}(f(A))$,
- v. $B_1 \leq B_2$ ise, $f^{-1}(B_1) \leq f^{-1}(B_2)$,
- vi. $A_1 \leq A_2$ ise,, $f(A_1) \leq f(A_2)$,
- vii. f ve g fonksiyonların bileşkesi gof olmak üzere Z üzerindeki her C bulanık kümesi için $(gof)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ olur (Chang 1968).

Teorem 3.2.18. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. f bulanık hemen hemen sürekli fonksiyondur.
- ii. Y nin her bulanık düzenli kapalı B kümesi için $f^{-1}(B)$, X üzerinde τ - kapalı bulanık kümedir.
- iii. Her $B \in \tau'$ için $f^{-1}(B) \leq (f^{-1}(\overline{B}^0))^0$ dir.
- iv. Y deki her bulanık kapalı kümesi için $\overline{f^{-1}(B^0)} \leq f^{-1}(B)$ dir (Azad 1981).

Tanım 3.2.19. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $B \in \tau'$ için $f^{-1}(B) \leq (f^{-1}(\overline{B}))^0$ ise f ye bulanık zayıf sürekli fonksiyon denir (Azad 1981).

Tanım 3.2.20. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Eğer X üzerindeki her A bulanık kümesi için $f(\overline{A}) \leq f(A)$ ise, f ye bulanık güçlü sürekli fonksiyon denir (Azad 1981).

Teorem 3.2.21. (X, τ) ve (Y, τ') bulanık topolojik uzayları verilsin. Bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ fonksiyon bulanık güçlü sürekli ise, bulanık süreklidir (Günel, 2006).

Tanım 3.2.22. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve p, X in bir bulanık noktası olsun. p bulanık noktasını içeren $\forall A \in \tau$ bulanık kümesini kapsayan N bulanık kümesine p nin bulanık komşuluğu yani;

N, p nin bulanık komşuluğu $\Leftrightarrow \exists A \in \tau$ var $\ni p < A \leq N$ denir ve p nin bütün bulanık komşuluklarının ailesini $N(p)$ ile gösterilir. Yani;

$N(p) = \{N \in I^X : N, p \text{ nin bulanık komşuluğu} \}$ dir (Alaca 2001).

Tanım 3.2.23. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. A yı içeren her $B \in \tau$ elemanını kapsayan $N \in I^X$ kümesine A bulanık kümesinin komşuluğu denir. Yani $A, N \in I^X$ için $A \leq B \leq N$ olacak şekilde $B \in \tau$ varsa N ye A bulanık kümesinin komşuluğu denir (Alaca 2001).

Tanım 3.2.24. (X, τ) bulanık topolojik uzay verilmiş olsun.

- i. $\beta \leq \tau$ olmak üzere $\forall A \in \tau$, için $A_i \in \beta$, $i \in I$ olmak üzere $\mathcal{A} = \bigvee_{i \in I} A_i$, β bulanık kümeler ailesine τ nun tabanı denir.
- ii. $S \leq \tau$ olmak üzere S ye ait bulanık kümelerin sonlu arakesitleri τ için bir taban ise S ye τ nun tabanı denir (Gürsul 2006).

Tanım 3.2.25. (X, τ) bulanık topolojik uzay ve β, τ nun bir taban olsun. X in bir p bulanık noktası için $Bp = \{B : p < B \text{ ve } B \in \beta\}$ ailesini göz önüne alalım. $p < A$ olmak üzere, $\forall A \in \tau$ için $p < B \leq A$ olacak şekilde Bp nin bir elemanı varsa, Bp ailesine p bulanık noktasına ait τ topolojisinin yerel tabanı (lokal taban) denir (Alaca 2001).

Tanım 3.2.26. X ve Y herhangi iki küme olsun. X den Y ye birebir ve örten bir g fonksiyonu varsa, X ve Y kümelerine elemanları sayı bakımından denktir ya da aynı kardinaliteye sahiptir denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı, bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir (Wong 1973).

Tanım 3.2.27. (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $\beta\tau = \{\beta : \tau \text{ nun tabanı}\}$ ailesi olsun. $\forall \beta \in \beta\tau$ için β kardinal sayılar kümesinin en küçük elemanına (X, τ) bulanık topolojik uzayının ağırlığı (weight) denir ve $\omega(X, \tau)$ ile gösterilir yani;

$$\omega(X, \tau) = \text{eke}\{|\beta| : \beta \in \beta\tau\}$$

(Wong 1973).

Tanım 3.2.28. (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $p \in X$ ve $\{E(p)\}$ komşuluklar tabanlarının bir ailesi olsun. $E(p)$ komşuluklar tabanlarının $|E(p)|$ kardinal sayılarının en küçük elemanına, p bulanık noktasının karakteri denir ve $\chi(p, (X, \tau))$ ile gösterilir, yani;

$$\chi(p, (X, \tau)) = \min\{|E(p)| : E(p), p \text{ nin komşuluklar tabanı}\}$$

(Chang 1968).

Tanım 3.2.29. (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $N(p)$ X kümesinde p nin komşulukları ailesi ve $E(p)$ de $N(p)$ nin bir alt ailesi olsun. $N(p)$ 'nin her N elemanına karşılık $E \leq N$ olacak şekilde $E(p)$ nin bir E elemanı varsa $E(p)$ üzerindeki τ bulanık topolojisi için p bulanık noktasının bulanık komşuluklar tabanı denir (Alaca 2001).

Teorem 3.2.30. (X, τ) bulanık topolojik uzayı ve $\beta \leq \tau$ olsun. β nın τ topolojisi için bir taban olması için gerek ve yeter şart her $p \in X$ için

$$E(p) = \{E \in \beta : p \in E\}$$

ailesinin p bulanık noktası için bir komşuluklar tabanı olmasıdır (Alaca 2001).

Tanım 3.2.31. (X, τ) bulanık topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, bu uzaya birinci sayılabilir uzay denir (Ganter *et al.* 1978).

Tanım 3.2.32. (X, τ) bulanık topolojik uzayı sayılabilir bir tabana sahip ise bu uzaya ikinci sayılabilir uzay denir (Ganter *et al.* 1978).

Teorem 3.2.33. İkinci sayılabilir her bulanık uzayı, birinci sayılabilir bulanık uzayıdır (Ganter *et al.* 1978).

İspat: (X, τ) ikinci sayılabilir bir bulanık topolojik uzay olsun. İkinci sayılabilirlik tanımından (X, τ) bulanık topolojik uzayının sayılabilir bir tabanı vardır. Yani $\exists \beta \in \tau$ tabanı var $\ni |\beta|$ sayılabilir tabana sahiptir. Teorem 3.2.29 dan $p \in X$ bulanık noktasının $E(p)$ komşuluklar tabanı β nın bir alt ailesidir. O halde,

$$E(p) \leq \beta \Rightarrow |E(p)| \leq |\beta|$$

Tanım 3.2.34. (X, τ) bulanık topolojik uzay, X de bulanık noktaların ailesi χ ve

$p = p_\chi^\lambda \in \chi$ de X in f - noktası olmak üzere;

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \chi$$

$$n \rightarrow (p_\chi^\lambda)_n = p_n$$

biçiminde tanımlı fonksiyona (doğal sayılar tarafında indislenen bulanık noktalarının kümesine) X de bulanık dizisi denir ve $(p_\chi^\lambda)_n = p_n$ ile gösterilir (Alaca 2001).

Tanım 3.2.35. (X, τ) bulanık topolojik uzay (p_n) , X de bulanık noktaların dizisi ve $A \in X$ olsun. Bu durumda:

- i. (p_n) Bulanık dizisi sonunda A dadır gerek ve yeter şart $\exists m \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \leq m$ için $p \leq A((p_n) = A)$ dir.
- ii. (p_n) bulanık dizisi bir A bulanık kümesine (p bulanık noktasına) yakınsıyor denir, eğer, (p_n) bulanık dizisi sonunda A nın (p nin) her bir komşuluğunda ise (Alaca 2001).

Tanım 3.2.36. (X, τ) bulanık topolojik uzay (p_n) X de bulanık noktaların dizisi ve $p_0 \in X$ olsun. p_0 in her $N \in N(p_0)$ komşuluğu için

$$m \leq n \Rightarrow p_n \in N$$

olacak şekilde N komşuluğuna bağlı $m \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (p_n) dizisi p_0 noktasına yakınsıyor veya (p_n) dizisinin limiti p_0 dır denir. Ve

$$p_n \rightarrow p_0 \text{ veya } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$$

Şeklinde yazılır yani;

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0 \Leftrightarrow \forall N \in N(p_0)$ için $\exists m \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq m \Rightarrow p_n \in N$ dir (Alaca 2001).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Sezgisel Bulanık Çoklu Küme Topolojik Uzayları

Tanım 4.1.1 X , boş olmayan bir küme olsun. X ten alınan, bir bulanık küme olan A kümesi; $X \rightarrow [0,1]$ ifadesinin A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu olduğu durumda,

$$A = \{ \langle x: \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

olarak tanımlanmaktadır. (Zadeh 1965)

Tanım 4.1.2. X , boş olmayan bir küme olsun. X ten yararlanılan bulanık bir çoklu küme olan $A(FMS)$, CM_A olarak simgelenen A nın “üyelik derecesi” olan fonksiyon tarafından nitelendirilir. Öyle ki, $CM_A: X \rightarrow Q$ şeklindedir. Yalnız, yukarıdaki ifadenin gerçekleşebilmesi için Q ifadesinin $[0,1]$ birim aralığından alınan tüm yeni çoklu kümelerin kümesi olması gerekir. O halde, her bir $x \in X$ için, üyelik dizisi, $CM_A(x)$ ifadesindeki elemanların azalan sıralı dizisi olarak tanımlar. Ve bu, $\mu_A^1 \geq \mu_A^2 \geq \dots \geq \mu_A^P$ olduğu durumlarda, $(\mu_A^1(x), \mu_A^2(x), \dots, \mu_A^P(x))$ olarak ifade edilir (John and Kunnam-bath 2017).

Tanım 4.1.3. X , boş olmayan bir küme olsun. Sezgisel bulanık bir küme (IFS) olan A , $A = \{ \langle x: \mu_A(x), V_A(x) \rangle : x \in X \}$ formuna sahip bir nesnedir. Bu durum her bir $x \in X$ için, $0 \leq \mu_A(x) + V_A(x) \leq 1$ olarak olmasıyla beraber $\mu_A: x \rightarrow [0,1]$ ve $V_A: x \rightarrow [0,1]$ fonksiyonların sırasıyla, A kümesi bir $x \in X$ elemanların üyelik derecesine ve üye olmama derecesini tanımladığı durumlarda geçerlidir (Atanassov 1986).

Not Boş olmayan bir küme olan X üzerindeki her bir bulanık A kümesi, $A = \{ \langle x: \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$ formuna sahip apaçık sezgisel bir bulanık kümedir.

Bulanık çoklu küme (FSM) ve sezgisel bulanık (IFS) tanımını kullanarak, yeni bir genelleştirilmiş kavram aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 4.1.4. X , boş olmayan bir küme olsun. X den alınan IFMS olarak simgelenen sezgisel bulanık çoklu küme olan A , iki fonksiyon ile nitelendirilir. Bunlardan ilki $CM_A: X \rightarrow Q$ tarafında verilen A nın üyelik derecesi (CM_A) ve bunlardan ikincisi olan $CN_A: X \rightarrow Q$ tarafında verilen A nın üyelik derecesi olmama (CN_A) fonksiyonlarıdır ki bu durum $[0,1]$ aralığında alınan tüm yeni çoklu kümelerin kümesi Q olduğunda gerçekleşir. Öyle ki her bir $x \in X$ için; üyelik dizisi, $CM_A(x)$ daki elemanların giderek

azalan sıralı bir dizisi olarak tanımlanır. $CM_A(x)$ ifadesi, $(\mu_A^1(x) \geq \mu_A^2(x) \geq \dots \geq \mu_A^p(x))$ olarak olduğunda $(\mu_A^1(x), \mu_A^2(x), \dots, \mu_A^p(x))$ ifadesi ile simgelenir ve yöndeş üye olmama dizisi, $V_A^1(x), V_A^2(x), \dots, V_A^p(x)$ olarak simgelenenecektir. Öyle ki; her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A^i(x) + V_A^i(x) \leq 1$ olur ve $i = 1, 2, \dots, p$ olarak olacaktır.

Bir IFMS olan A (IFMS: Sezgisel Bulanık Çoklu Küme) aşağıdaki şekilde simgelenmektedir.

$$A = \{ \langle x: (\mu_A^1(x), \mu_A^2(x), \dots, \mu_A^p(x)), (V_A^1(x), V_A^2(x), \dots, V_A^p(x)) \rangle : x \in X \}$$

(Shinoj and John 2013)

Not: Üyelik dizisini azalan sırada düzenleriz fakat yöndeş üye olmama dizisi azalan ya da artan sırada olmayabilir.

Tanım 4.1.5. X ve Y iki boş olmayan küme ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. O halde i. f fonksiyonu altındaki X de bulunan sezgisel bulanık bir çoklu küme olan A nın görüntüsü, $f(A)$ olarak simgelenir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$CM_{f[A]}(y) = \begin{cases} \bigvee_{f(x)=y} CM_A(x) & ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$CN_{f[A]}(y) = \begin{cases} \bigwedge_{f(x)=y} CN_A(x) & ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ii. f fonksiyonu altındaki Y de bulunan sezgisel bulanık bir çoklu küme olan B nin ters görüntüsü, $f^{-1}(B)$ olarak simgelenir ki bu durumda aşağıdaki durumda gerçekleşir:

$$CM_{f^{-1}[B]}(x) = CM_B f[x], CN_{f^{-1}[B]}(x) = CN_B f[x]$$

(Shinoj and John 2015)

$$\rightarrow 0 = \{ \langle x: (0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1) \rangle : x \in X \}$$

$$\rightarrow 1 = \{ \langle x: (1, 1, \dots, 1), (0, 0, \dots, 0) \rangle : x \in X \}$$

şeklinde tanımlansın (Shinoj and John 2015)

Tanım 4.1.6. X üzerindeki sezgisel bulanık çoklu küme topolojisi (IFMT) olan sezgisel bulanık çoklu kümelerin (IFMSs) bir r ailesidir. Öyle ki;

- i. $\rightarrow 0, \rightarrow 1 \in r$
- ii. Herhangi $G_1, G_2 \in r$ için $G_1 \cap G_2 \in r$ dir.

iii. r de herhangi bir raslantısal aile olan $\{G_i: i \in I\}$ için $\cup G_i \in r$ olmalıdır.

O halde, (X, r) sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı kısaca (IFMT) olarak adlandırılır ve r de herhangi bir sezgisel bulanık çoklu küme (OIFMS) olarak bilinir.

Not bir açık sezgisel bulanık çoklu kümenin (OIFMS) tümleyeni, kapalı sezgisel bulanık çoklu küme (CIFMS) olarak adlandırılır (John and Kunnambath 2017).

Boştan farklı bir X kümesini ele alalım. Sezgisel çoklu küme olarak

$$A = \{ \langle x: (\mu_A^1(x), \mu_A^2(x), \dots, \mu_A^P(x)), (V_A^1(x), V_A^2(x), \dots, V_A^P(x)) \rangle : x \in X \}$$

verilsin. $[]A$ sezgisel bulanık çoklu kümesi

$$[]A = \{ \langle x: (\mu_A^1(x), \mu_A^2(x), \dots, \mu_A^P(x)), x: (1 - \mu_A^1(x), 1 - \mu_A^2(x), \dots, 1 - \mu_A^P(x)) \rangle \}$$

şeklinde tanımlansın (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.1.7. (X, r) X üzerinde tanımlı sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olsun. O halde, $r_{0,1} = \{ []A: A \in r \}$, sezgisel bulanık çoklu topolojidir (Shinoj and John 2015).

4.2. Sezgisel Bulanık Çoklu Kümelerin Kapanışı ve İçi

Tanım 4.2.1. (X, r) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde, $cl(A)$ olarak simgelenen A nın kapanışı, $cl(A) = \cap \{M: M; X' \text{ de kapalı ve } A \subseteq M\}$ olarak tanımlanır (Shinoj and John 2015)

Tanım 4.2.2. (X, r) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve B, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde, B nin içi ve $int(B)$ ile simgelenir. $int(B) = \cup \{N: N, X' \text{ de açık ve } N \subseteq B\}$ olarak tanımlanır (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.2.3. (X, r) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde; $cl(A)$ kapalı bir sezgisel bulanık çoklu kümedir (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.2.4. (X, r) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde; $int(A)$ açık bir sezgisel bulanık çoklu kümedir (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.2.5. (X, τ) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde; $cl(\nabla A) = \nabla(int(A))$ olur (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.2.6. (X, τ) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde; A , ancak ve ancak $cl(A) = A$ kapalı bir sezgisel bulanık çoklu kümedir (Shinoj and John 2015).

Önerme 4.2.7. (X, τ) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve A, X de tanımlı bir sezgisel bulanık çoklu küme olsun. O halde; A , ancak ve ancak $int(A) = A$ şeklindeyse bir açık sezgisel bulanık çoklu küme olur (Shinoj and John 2015).

4.3. Sezgisel Bulanık Çoklu Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.3.1. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak ϕ deki her bir açık sezgisel bulanık çoklu kümenin ters görüntüsü, τ de tanımlı bir açık sezgisel bulanık çoklu küme ise (Shinoj and John 2015).

Teorem 4.3.2. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak ϕ daki her bir kapalı sezgisel bulanık çoklu kümenin ters görüntüsü τ de bir kapalı sezgisel bulanık çoklu küme ise (Shinoj and John 2015).

Teorem 4.3.3. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak X deki her bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olan A için, $f[cl(A)] \subseteq cl[f(A)]$ ise.

Teorem 4.3.4. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak Y deki her bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olan B için, $cl[f^{-1}(B)] \subseteq f^{-1}[cl(B)]$ ise (Shinoj and John 2015).

Teorem 4.3.5. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak X deki her bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olan A için, $int[f(A)] \subseteq f[int(A)]$ ise (Shinoj and John 2015).

Teorem 4.3.6. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ancak ve ancak Y deki her bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olan B için, $f^{-1}[\text{int}(B)] \subseteq \text{int}[f^{-1}(B)]$ olarak ise (Shinoj and John 2015).

4.4. Sezgisel Bulanık Çoklu Topolojik Uzayların Alt Topolojik Uzayları

Tanım 4.4.1. (X, τ) ve (Y, ϕ) iki sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayları olsun. Y topolojik uzayı, X topolojik uzayının bir alt uzayı olarak adlandırılır. Şayet bu durum, Y 'nin açık alt kümeleri tam olarak bazı açık alt kümeleri olan O için $O' = O \cap Y$ formunun O' alt kümeleri olduğunda ve $Y \subseteq X$ olarak olduğunda gerçekleşir. İşte biz burada, Y ye bir kısıtlama olduğunu söyleyebiliriz. O' aynı zamanda, Y de bağlı açık olarak adlandırılır (Shinoj and John 2015).

4.5. Sezgisel Bulanık Çoklu Kümelerde Kompaktlık

Tanım 4.5.1. (X, τ) , bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı ve $\{G_i: i \in I\}$ ifadesi de X de açık sezgisel bulanık çoklu kümelerin bir ailesi olsun. öyle ki, $\bigcup \{G_i: i \in I\} \rightarrow 1$ şeklindedir. O halde X in açık bir örtüsü olarak adlandırılır. $\{G_i: i \in I\}$ ifadesinin sonlu bir alt ailesi, X in bir açık örtüsüdür. O halde, X in bir alt örtüsü olarak adlandırılır (John and Kunnambath 2017).

Tanım 4.5.2. X deki kapalı sezgisel bulanık çoklu kümelerin bir ailesi olan $\{H_i: i \in I\}$ ifadesi, sonlu kesişim özelliğini sağlar. Şayet bu durum, ailenin her bir sonlu alt ailesi olan $\{H_i: i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ifadesi $\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \emptyset$ durumunu sağlarsa meydana gelir (John and Kunnambath 2017).

Tanım 4.5.3. (X, τ) bir sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzayı olsun. O halde, eğer X in her bir açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse X , kompakttır (John and Kunnambath 2017).

Örnek 4.5.4. $X = \{1, 2\}$ olsun ve aşağıda gösterildiği gibi X de bulunan sezgisel bulanık çoklu kümeleri tanımlansın. $n \in \mathbb{N}^+$ için, $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&= \{< 1: (n/n+1, n+1/n+2, \dots, n+p/n+p+1), (1/n+1, 1/n+3, \dots, 1/n+p+2) \\
&>, \\
&< 2: (n/n+1, n+2/n+3, \dots, n+p+1/n+p+2), (1/n+3, 1/n+4, \dots, 1/n+p+3) \\
&>\}
\end{aligned}$$

Verilen örnek kompakt değildir. Çünkü $\{G_n: n \in N^+\}$ ifadesinin sonlu bir örtüsü yoktur.

İspat. (X, τ) kompakt olsun. $\{[A_i; i \in I, A_i \in \tau]\}$ ifadesi ise $(X, \tau_{0,1})$ de X in açık bir örtüsü olsun.

olur, eğer aşağıdaki durumlar sağlanırsa:

$$A_i = \{ \langle x: (\mu_{A_i}^1(x), \mu_{A_i}^2(x), \dots, \mu_{A_i}^P(x)), (V_{A_i}^1(x), V_{A_i}^2(x), \dots, V_{A_i}^P(x)) \rangle : x \in X \}$$

[illegible]
$$\begin{aligned} V_{A_1}^1(x) \wedge V_{A_2}^2(x) \dots &\leq (1 - \mu_{A_1}^j(x)) \wedge (1 - \mu_{A_2}^j(x)) \wedge \dots \\ &= 1 - (\mu_{A_1}^j(x) \vee \mu_{A_2}^j(x) \vee \dots) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3)

(1) ve (3) $\Rightarrow \cup A_i = \rightarrow 1$

$\Rightarrow \{A_i; i \in I, A_i \in \tau\}$, (X, τ) deki X 'in bir açık örtüsüdür.

(X, τ) kompakt olduğu için, sonlu bir alt örtü olan $\{A_i; i \in \tau, i = 1, 2, \dots, n\}$ mevcuttur.

Öyle ki;

$$\cup_{i=1}^n A_i = \rightarrow 1 \quad (4)$$

(4) de verilen ifadeye göre $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$\mu_{A_1}^j(x) \vee \dots \vee \mu_{A_n}^j(x) = 1 \text{ ve}$$

$$1 - \mu_{A_1}^j(x) \wedge \dots \wedge 1 - \mu_{A_n}^j(x) = 1 - (\mu_{A_1}^j(x) \vee \dots \vee \mu_{A_n}^j(x)) = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \{[]A_i; i \in \tau, i = 1, 2, \dots, n\} \in \tau_{0,1}$ ifadesi $(X, \tau_{0,1})$ in sonlu bir alt örtüsüdür.

$\Rightarrow (X, \tau_{0,1})$ ifadesi kompakttır.

5. SONUÇLAR

Bu tezde öncelikle çoklu kümeler, bulanık kümeler, çoklu küme topolojik uzayı, bulanık küme topolojik uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Özellikle, sezgisel bulanık çoklu küme topolojik uzaylarında temel tanım ve teoremlerin verilmesinin yanı sıra bazı genel topolojik kavramların bu uzay altındaki incelenmesi yapılmıştır.



KAYNAKÇA

- Alaca, C., 2001. Fuzzy Uzaylarında Süreklilik. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- Azad, K. K., 1981. On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy Weakly Continuity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 82: 14-32
- Atanassov, K. T., 1983. Intuitionistic Fuzzy sets, VII ITKRs Session, Sofia (deposed in Central Science-Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84) (in Bulgarian)
- Babuska, R., Fuzzy Modeling for Control, Kluwer Academic Publisher, 1998.
- Chang, C. L., 1968. Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24: 182- 190
- Chattopadhyay, K. C., Hazra, R. N., Samanta, S. K., 1992. Gradation of Openness Fuzzy Topology. Fuzzy Sets and Systems, 49, 237 – 242.
- Concilio, A. D. and Gerla, G., 1984, Almost Compactness in Fuzzy Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 13: 187 – 192 (1984).
- Çoker, D., 1997. An Introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy sets and systems, 88 , 81-89
- Gantner T. E., Steinlage R. c., Warren R. H., 1978. Compactness İn Fuzzy Topological Spaces Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62: 547-562
- Girish, K. P., John, S. J., 2009. Relations and functions in multiset context, Information Sciences 179, 758-768.
- Girish, K. P., John, S. J., 2012. Multiset topologies induced by multiset relations, Information Sciences 188, 298-313,

- G. F. Simmons, Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill International Student Edition
- Günel, G., 2006. Pürüssüz Topolojik Uzaylarda Kompaktlık ve Çeşitli Kompaktlık Türleri Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstit. Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Ankara
- Jena, S.P., Ghosh, S.K. and Tripathy, B.K., 2001. On the theory of bags and lists. Information Sciences 132(1&4), 241 – 254.
- Liu Y.-Ming and Luo M.-Kang, 1998. Fuzzy Topology, World Scientific Publishing 9, 147-177
- Kaya Akşit A, 2013. Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara
- Kaufmann A., 1975. Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London
- Osmanoğlu İ., 2013. Esnek Çoklu Kümeler ve Topolojik Uzaylar. Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Nevşehir
- Pao, P. –Ming, L. Y. M., 1980. Fuzzy Topology I. Neighborhood structure of fuzzy point and Moore Smith convercenge, Journal of Matematical Analysis and applications , 76: 571-599
- Shinoj T. K., John S. J., 2012. Intuitionistic Fuzzy Multiset and its application in Medical Diagnosis, International Journal of Mathematical and Computational Sciences, World Academy of Science, Engineering and Technology(WASET), Volume 6, 34-38
- Shinoj T. K., Baby, A., John, S. J., 2015. On Some Algebraic Structures of Fuzzy Multisets, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume 9, No 1, January , 77-90
- Shinoj, T. K., John S. J., 2015. Topological Structures on Intuitionistic Fuzzy Multisets, International Journal of Scientific & Engineering Research, volume 6, issue 1
- Smithson, M. and Verkuilen J., 2006. Fuzzy Set Theory Applications in the Social Sciences, SAGE Publications, London, ISBN: 0-7619-2986-X, 1-96, 96.

- Sunil, J.J & Shinoj, T.K., 2017. Compactness in Intuitionistic Fuzzy Multiset Topology. Journal Of New Theory, Department of Mathematics, NIT Calicut, INDIA, 16, 92-101
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets, Information and Control, 8: 338 – 358 (1965)
- Wong C., K., 1973. Covering Properties of Fuzzy Topological Space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 43;697-704
- Yager, R. R. (1987). Cardinality of fuzzy sets via bags. Mathematical Modelling 9(6), 441 – 446.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mahmut YERLİKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	Eleşkirt – 01.06.1982
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Dicle Üniversitesi, Siirt Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü.(2004)
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
İş Deneyimi	
Stajlar	MEB
Çalıştığı Kurumlar	MEB
İletişim	
E-posta Adresi	Muhteremadam@hotmail.com
Mezuniyet Tarihi	