

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA YAKLAŞIK SABİT NOKTA
ÖZELLİĞİ

YÜKSEK LİSANS

Gizem GÜZEL TAN

ARALIK-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**SEZGİSEL BULANIK NÖRMLÜ UZAYLARDA YAKLAŞIK SABİT NOKTA
ÖZELLİĞİ**

**APPROXIMATE FIXED POINT PROPERTY IN INTUITIONISTIC FUZZY
NORMED SPACES**

YÜKSEK LİSANS

Gizem GÜZEL TAN

**ARALIK-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA YAKLAŞIK SABİT NOKTA
ÖZELLİĞİ**

**APPROXIMATE FIXED POINT PROPERTY IN INTUITIONISTIC FUZZY
NORMED SPACES**

YÜKSEK LİSANS

Gizem GÜZEL TAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

ARALIK-2023

GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Yaklaşık Sabit Nokta Özelliği**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

14/12/2023

Gizem GÜZEL TAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması aşamasında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA'ya teşekkür ederim. Ayrıca, her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen değerli eşime, oğluma ve aileme teşekkür ederim.

Gizem GÜZEL TAN
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez çalışmasına temel teşkil eden konunun daha iyi anlaşılması için genel bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak fonksiyonel analizin temel kavramları, daralma dönüşümleri ile sabit nokta teorisi üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ise bulanık küme ve temel özellikleri, sezgisel bulanık metrik uzay ve sezgisel bulanık normlu uzay yapıları literatürdeki gelişimlerine göre incelendi. Dördüncü bölümde sezgisel bulanık daralma dönüşümleri ve bu daralma dönüşümleri için yaklaşık sabit nokta özelliği üzerine yapılan çalışmalar irdelendi. Tezin son kısmında ise yeni sezgisel bulanık daralma dönüşümleri tanımlanarak bu dönüşümler için yaklaşık sabit nokta teoremleri ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Bulanık metrik, Bulanık norm, Bulanık daralma, Bulanık yaklaşık sabit nokta, Sezgisel bulanık norm.

SUMMARY

This thesis consists of four parts. In the first chapter, general information is given for a better understanding of the subject that forms the basis of the thesis study. In the second part, the basic concepts of functional analysis, contraction mappings and fixed point theory, which will be used in the thesis, are emphasized. In the third chapter, fuzzy sets and their basic properties, intuitionistic fuzzy metric space and intuitionistic fuzzy normed space structures are examined according to their developments in the literature. In the fourth chapter, studies on intuitionistic fuzzy contraction mappings and the approximate fixed point property for these contraction mappings are discussed. In the last part of the thesis, new intuitionistic fuzzy contraction mappings are defined and approximate fixed point theorems for these mappings are proved.

Keywords: Fuzzy metric, Fuzzy norm, Fuzzy contraction, Fuzzy approximate fixed point, Intuitionistic fuzzy norm.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Metrik ve Normlu Uzay Kavramları	3
2.2. Daralma Dönüşümleri ve Sabit Nokta Teoremi.....	12
3. BULANIK KÜME VE BULANIK UZAYLAR.....	18
3.1. Bulanık Küme ile İlgili Temel Kavramlar	18
3.2. Bulanık Metrik Uzaylar ve Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylar	24
3.3. Bulanık Normlu Uzaylar ve Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylar	45
4. BULGULAR.....	50
4.1. Bazı Sezgisel Bulanık Daralma Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri ..	53
4.2. Yeni Sezgisel Bulanık Daralma Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri ...	56
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	62
KAYNAKÇA.....	63
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\leq$	: Küçük eşit
$\geq$	: Büyük eşit
$\in$	: Elemanıdır
ε	: Epsilon
δ	: Delta
α	: Alfa
β	: Beta
$\exists$	: Öyle ki
$\forall$	: Herhangi
$\Rightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri
$F(T)$	: T dönüşümün sabit noktalar kümesi
$F_{\varepsilon}^{\mu, \nu}(T)$	: T dönüşümün yaklaşık sabit noktalar kümesi
$\ll$	: Kısmi sıralama bağıntısı

1. GENEL BİLGİLER

Matematik geçmişten bugüne kadar ele aldığı her konuda mutlaka bir kesinlik aramıştır. Bu durum 1879 yılında Cantor'un küme kavramını açıklaması ile başlamıştır. Cantor' un tanımladığı iki farklı küme tanımından biri olan klasik mantıkta küme tanımı şunu ifade eder “bir eleman bir kümeye ya tam aittir ya da değildir”. Örneğin bugün hava soğuktur, bunun kesin olarak herkesçe aynı olmasını ister oysaki hava bugün bazı insanlara göre sıcaktır. Böyle durumların sonucunda belirsizlik kaçınılmaz olacaktır.

1930 yılında belirsizlik üzerine çalışmalar yapan Max Planck ne kadar üzerinde çalışsa da belirsizlik kavramını 1965 de asıl ismi Lotfi Askarzadeh olan Azeri kökenli, Kaliforniya Üniversitesi profesörü ve aynı zamanda Elektrik Elektronik mühendisi olan Zadeh yayınladığı “Fuzzy Sets” başlıklı makalesinde açığa kavuşturmuştur. Zadeh kesinlik olmayan bu belirsizlik kavramını oldukça geliştirerek bulanık mantığı ve bulanık kümeleri keşfetmiştir. Bulanık kümeleri sadece matematikle sınırlamayıp fizik, genetik, astronomi ve kendi alanı olan mühendislikte de kullanmıştır (Zadeh, 1975).

Klasik topolojide önemli birçok kavramın bulanık küme kavramı ile olan bağlantısı 1968 yılında Chang tarafından bulanık topolojik uzay tanımının verilmesiyle başlamıştır (Chang, 1968). Daha sonra 1976 yılında Lowen ve daha birçok matematikçi bu bağlamda çalışmalar yapmıştır (Lowen, 1996). Hatta zamanla kompakt bulanık topoloji gibi farklı bulanık topolojik yapıları üzerine de çalışmalar yapılmıştır.

Bulanık topolojilerinin gelişimine paralel olarak fonksiyonel analizde önemli bir yere sahip olan metrik uzay kavramı da 1975 de Kramosil ve Michalek başta olmak üzere 1983 Abu Osman, 1984 Kaleva ve Seikkala tarafından farklı bulanık metrik uzay tanımları ile başka şekillerde açıklanmaya çalışılmış ve klasik analizde yeni bir alan oluşturulmuştur (Kramosil ve Michalek, 1975), (Abu Osman, 1983), (Kaleva ve Seikkala, 1984). Ayrıca, 1994 yılında George ve Veeramani bulanık metrik tanımını farklı bir şekilde vermiştir (George ve Veeramani, 1994). Bulanık mantığın öne sürdüğü bir ifade olan “artık bir eleman bir kümenin belirli bir dereceye kadar elemanı olabilmektedir”. Yani $[0,1]$ arasındaki değerler elemanın üyelik derecesini belirlemektedir. Dolayısıyla literatüre yeni bir konu açan bu mantık bulanık kümelerinin başka bir genellemesi olarak 1986 yılında Atanosssov tarafından ortaya konmuştur (Atanassov, 1986). Bu genelleştirme sezgisel bulanık küme olarak adlandırılır. Burada bir nesnenin bir kümeye ait olma derecesi ile olmama derecesi birlikte incelenir. Yani bir diğer anlamda bu derecelerin toplamının 1 den küçük ya da eşit olma şartı ortaya konulmuştur. Bu durumla birlikte şu da ortaya çıkmıştır; bulanık küme, sezgisel bulanık

kümenin özel bir halidir. Sezgisel bulanık kümenin açıklanması ile birlikte bu alanda çok sayıda çalışma yapılmıştır. George ve Veeramani bulanık metrik uzay kavramına değinerek bulanık metrik uzayın temel özelliklerini incelemiştir. Park ise sürekli t-norm ve sürekli t-conorm kavramlarını kullanarak sezgisel bulanık kümeyi ve bulanık metrik uzayla bağlantısı olan sezgisel bulanık metrik uzayı tanımlamıştır (George ve Veeramani, 1994; Park, 2004). Ayrıca, bulanık metrik uzaylardan da bilindiği üzere, bir vektör uzayı verilip bunun üzerinden farklı uyarlamalarla Katsaras (1984), Felbin (1992), Cheng ve Mordeson (1994) ve Saadati ve Vaezpour (2005) bulanık normu tanımlanmıştır.

Öte yandan, sabit nokta teorisi matematiğin hem içinde hem de dışında muazzam uygulamaları olan, matematiğin en başarılı ve etkili araçlarından biridir ve matematiğin birçok dalında, özellikle diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve diğer ilgili alanların varlığı teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Abu Osman, Banach'ın sabit nokta teoremini bulanık metrik uzaylarda ele almıştır (Abu Osman, 1983). Ardından George ve Verammani (1994), Felbin (1992), Hadzic (2002) ve Gregori (2004) gibi araştırmacılar, sabit nokta teoremini ve bulanık metrik uzayların diğer özelliklerini incelediler. Birçok araştırmacı bu alanda çalışmalarını sürdürmektedir.

Uygulamalı matematikte sabit nokta teorisi ile çözülebilecek birçok problem olmasına rağmen, sabit bir noktanın varlığını kanıtlamak her zaman kolay değildir. Aslında, uygulamalara bakıldığında, birçok gerçek dünya problemlerinde yaklaşık bir çözümün fazlasıyla yeterli olduğu görülmektedir. Bu nedenle sabit noktaların varlığı kesinlikle gerekli değildir, “yaklaşık” sabit noktaların varlığı gereklidir. Doğal olarak, “yaklaşık” sabit nokta ve yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip bir fonksiyon olan ε -sabit nokta (veya yaklaşık sabit nokta) kavramları ortaya atılmış ve bunlarla ilgili uygun bir teori elde edilmiştir (Berinde, 2007). İlk olarak klasik metrik uzaylarda verilen yaklaşık sabit nokta kavramı daha sonra bulanık metriklerde hızla geliştirildi.

Bütün bu gelişmeler bulanık küme kavramının yalnız analiz ve topolojide değil aynı zamanda uygulamalı matematik ve birçok mühendislik alanında da yaygın bir kullanıma sahip olduğunu göstermektedir. Tüm çalışmalar ise bizi bu konu üzerine tez çalışması hazırlamaya motive etmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sırasıyla metrik uzay, normlu uzay ve sabit nokta ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Metrik ve Normlu Uzay Kavramları

Tanım 2.1.1: X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $\forall u, v, w \in X$ olsun.

- i) $d(u, v) \geq 0$
- ii) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- iii) $d(u, v) = d(v, u)$ (simetri)
- iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X de bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar, 2006).

Şimdi yukarıda tanımı verilen ifade üzerinden çeşitli örnekler verilecektir.

Örnek 2.1.2: $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(u, v) = |u - v|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir.

Çözüm: Öncelikle $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $d(u, v) < +\infty$ olduğunu yani iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\forall u, v \in X$ için

$$d(u, v) = |u - v| \leq |u + v| \leq |u| + |v| < +\infty$$

olur. Şimdi metrik şartlarına bakalım. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ olsun.

- i) $d(u, v) = |u - v| \geq 0$
- ii) $d(u, v) = |u - v| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v$
- iii) $d(u, v) = |u - v| = |-(v - u)| = |-1||v - u| = d(v, u)$
- iv) $d(u, v) = |u - v| = |u - w + w - v|$
 $\leq |u - w| + |w - v|$
 $= d(u, w) + d(w, v)$

olur. Böylece $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği veya mutlak değer metriği denir.

Örnek 2.1.3: $d(u, v) = \sqrt{|u - v|}$ ile tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}$ de bir metriktir.

Çözüm: d fonksiyonunun metrik şartlarını sağladığını gösterelim. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\text{i) } d(u, v) = \sqrt{|u - v|} \geq 0$$

$$\text{ii) } d(u, v) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|u - v|} = 0$$

$$\Leftrightarrow |u - v| = 0$$

$$\Leftrightarrow u - v = 0$$

$$\Leftrightarrow u = v$$

olduğundan (ii) şartı sağlanır.

iii) $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $d(u, v) = \sqrt{|u - v|} = \sqrt{|v - u|} = d(v, u)$ olduğundan (ii) sağlanır.

iv) Her $u, v, w \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} d^2(u, v) &= |u - v| \\ &= |u + w - w - v| \\ &\leq |u - w| + |w - v| \\ &\leq |u - w| + |w - v| + 2\sqrt{|u - w||w - v|} \\ &= \left(\sqrt{|u - w|} + \sqrt{|w - v|} \right)^2 \end{aligned}$$

olup

$$d(u, v) \leq \sqrt{|u - w|} + \sqrt{|w - v|} = d(u, w) + d(w, v)$$

gerçeklenir. O halde (iv) özelliği sağlanır. Böylece d fonksiyonu $\mathbb{R}$ de bir metriktir.

Örnek 2.1.4: $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(u, v) = \begin{cases} 0, & u = v \\ 1, & u \neq v \end{cases}$$

olarak tanımlanan d bir metrik $(\mathbb{R}, d)$ de bir metrik uzaydır. Bu metriğe ayrık (discrete) metrik denir.

Örnek 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay olsun. d metriğinden faydalanarak X üzerinde

$$d^*(u, v) = \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)}$$

şeklinde yeni bir metrik tanımlanabilir.

Çözüm: Şimdi metrik koşullarının sağlandığını gösterelim. Her $u, v, w \in X$ için

i) d bir metrik olduğundan $d(u, v) \geq 0$ olup

$$\frac{\overbrace{d(u, v)}^{\geq 0}}{\underbrace{1 + d(u, v)}_{\geq 0}} \geq 0$$

dir. Dolayısıyla,

$$d^*(u, v) \geq 0$$

olur.

ii) $d^*(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d^*(u, v) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)} = 0 \\ &\Leftrightarrow d(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow u = v \end{aligned}$$

olur.

iii) $d^*(u, v) = d^*(v, u)$ olduğunu gösterelim.

$$d^*(u, v) = \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)} = \frac{d(v, u)}{1 + d(v, u)} = d^*(v, u)$$

olur.

iv) $d^*(u, v) \leq d^*(u, w) + d^*(w, v)$ olduğunu gösterelim. d^* in tanımı ve $d(w, v) \geq 0$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
d^*(u, v) &= \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)} \leq \frac{d(u, w) + d(w, v)}{1 + d(u, w) + d(w, v)} \\
&= \frac{d(u, w)}{1 + d(u, w) + d(w, v)} + \frac{d(w, v)}{1 + d(u, w) + d(w, v)} \\
&\leq \frac{d(u, w)}{1 + d(u, w)} + \frac{d(w, v)}{1 + d(w, v)} \\
&= d^*(u, w) + d^*(w, v)
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$d^*(u, v) \leq d^*(u, w) + d^*(w, v)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.6: $X = (X, d)$ metrik uzay, $u_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayı olsun. Bu takdirde

açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi sırasıyla

$$\begin{aligned}
B(u_0, r) &= B_r(u_0) = \{u \in X : d(u, u_0) < r\} \\
B[u_0, r] &= \bar{B}_r[u_0] = \{u \in X : d(u, u_0) \leq r\} \\
S(u_0, r) &= S(u_0) = \{u \in X : d(u, u_0) = r\}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu üç durumda da u_0 a merkez r ye yarıçap denir (Bayraktar, 2006).

Burada $u_0 \in B(u_0, r)$ olduğundan $B(u_0, r) \neq \emptyset$ dir. Böylece u_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar merkeze olan uzaklığı r den daha küçük olan X e ait noktaların kümesidir. Yuvar yüzeyi ise u_0 a olan uzaklığı r ye eşit olan X e ait noktaların kümesidir. Ayrıca $S(u_0, r) = B[u_0, r] \setminus B(u_0, r)$ olduğu açıktır. Yuvar deyimi yerine civar veya komşuluk ifadeleri de kullanılır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $u \in A$ için $B(u, r) \subset A$ koşulunu sağlayan bir tek $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa A kümesine (X, d) metrik uzayında bir açık küme denir. Eğer $B \subset X$ için B nin tümleyeni, X de açık ise B kümesine kapalı küme denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.8: Bir (X, d) metrik uzayında bir (u_n) dizisi alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki $\forall n > n_0(\varepsilon)$ için $d(u_n, u) < \varepsilon$ ise (u_n) dizisi X de u ya yakınsaktır denir (Bryan ve Youngson, 2000).

(u_n) dizisi yakınsak değilse ıraksaktır denir.

Tanım 2.1.9: (X, d) metrik uzayında bir (u_n) dizisi ele alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > n_0(\varepsilon)$ için $d(u_m, u_n) < \varepsilon$ ise (u_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Bryan ve Youngson, 2000).

Tanım 2.1.10: Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi uzayın bir elemanına yakınsıyor ise X e tam uzay denir (Bryan ve Youngson, 2000).

Örnek 2.1.11: $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tamdır.

Örnek 2.1.12: $\mathbb{R}$ nin $d(u, v) = |\arctan u - \arctan v|$ ile tanımlı metrik ile tam olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{R}$ de $(u_n) = n$ ile tanımlı diziyi göz önüne alalım. Tanjant fonksiyonu artan olduğundan her $n > m$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(u_n, u_m) \\ &= |\arctan u_n - \arctan u_m| \\ &= \arctan n - \arctan m \\ &= \arctan \frac{n - m}{1 + nm} \\ &\leq \arctan \frac{n}{1 + nm} \\ &\leq \arctan \frac{n}{nm} \\ &\leq \arctan \frac{1}{m} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(u_n, u_m) \rightarrow 0$ bulunur. Bu ise (u_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Kabul edelim ki $(u_n) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, L) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\arctan n - \arctan L| \\ &= \left| \frac{\pi}{2} - \arctan L \right| \end{aligned}$$

olur. Böylece $\arctan L = \frac{\pi}{2}$ elde edilir ki bu ise böyle bir L sayısı olmayacağından çelişkidir. Yani (u_n) dizisi yakınsak değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ tam değildir.

Tanım 2.1.13: X boştan farklı herhangi bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere
 $+$: $X \times X \rightarrow X$

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \rightarrow X$$

işlemleri tanımlı olsun. $(X, +)$ işlemine göre değişmeli bir grup ise yani her $u, v, w \in X$ için

- i) $u + v \in X$,
- ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$,
- iii) $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,
- iv) $u + (-u) = (-u) + u = \theta$ olacak şekilde $-u \in X$ vardır,
- v) $u + v = v + u$,

ayrıca her $u, v \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere

- vi) $\alpha \cdot u \in X$,
- vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
- viii) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
- ix) $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$,
- x) $1 \cdot u = u$ ($1, \mathbb{F}$ nin birim elemanıdır),

şartları sağlanıyorsa X e $\mathbb{F}$ üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X e reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X e kompleks vektör uzayı adı verilir (Pugachev ve Sinitsyn, 1999).

Tanım 2.1.14: X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

- i) $\forall u \in X$ için $\|u\| \geq 0$,
- ii) $\forall u \in X$ için $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$,
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için ve $\forall u \in X$ için $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,
- iv) $\forall u, v \in X$ için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

şartlarını sağlıyor ise $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Şimdi yukarıda tanımı verilen ifade ile ilgili bazı örneklere yer vereceğiz.

Örnek 2.1.15: $X = \mathbb{R}$ alınırsa, $u \in \mathbb{R}$ için

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \rightarrow \|u\| = |u|,$$

şeklinde tanımlansın. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır.

Çözüm: $\forall u, v \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

i) $\|u\| \geq 0$,

ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow |u| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

iii) $\|\lambda u\| = |\lambda u| = |\lambda||u| = |\lambda|\|u\|$,

iv) $\|u + v\| = |u + v| \leq |u| + |v| = \|u\| + \|v\| \Rightarrow \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

dir.

Örnek 2.1.16: $u = (u_1, u_2, \dots)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{k-1} - u_k| < \infty$$

özellikliğini sağlayan kompleks değerli tüm u dizilerinin vektör uzayı X olsun.

$$\|u\| = |u_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|$$

fonksiyonu X de bir norm tanımlar.

Çözüm: $\forall u, v \in \mathbb{R}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

i) Mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden dolayı her $u = (u_1, u_2, \dots) \in X$ için $\|u\| \geq 0$ olduğunu görürüz.

ii) $u = (0, 0, \dots) = 0$ ise $\|u\| = 0$ olur. $\|u\| = 0$ ise o zaman

$$|u_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| = 0$$

ve böylece $u_1 = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|u_{k+1} - u_k| = 0$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k = 0$ yani $u = (0, 0, \dots) = 0$ bulunur.

iii) $u = (u_1, u_2, \dots) \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ için $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots)$ dir ve

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\| &= |\lambda u_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda u_{k+1} - \lambda u_k| \\
&= |\lambda| |u_1| + |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| \\
&= |\lambda| \|u\|
\end{aligned}$$

olur.

$$\text{iv) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

olduğunu göstereceğiz. $u = (u_1, u_2, \dots) \in X$, $v = (v_1, v_2, \dots) \in X$ ve herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |(u_{k+1} + v_{k+1}) - (u_k + v_k)| &= \sum_{k=1}^n |(u_{k+1} - u_k) + (v_{k+1} - v_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |u_{k+1} - u_k| + \sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|
\end{aligned}$$

dır. Aynı zamanda $|u_1 + v_1| \leq |u_1| + |v_1|$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|u + v\| &= |u_1 + v_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k+1} + v_{k+1}) - (u_k + v_k)| \\
&\leq |u_1| + |v_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| \\
&= \|u\| + \|v\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.1.17: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(u, v) = \|u - v\|, \quad (u, v \in X)$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir (Musayev ve Alp, 2000).

Lemma 2.1.17 de verilen bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir (Musayev ve Alp, 2000). Bu lemmanın doğal bir sonucu olarak her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.18 $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayı, bir $u_0 \in X$ ve pozitif bir r sayısı verilsin. Bu taktirde;

$$B(u_0, r) = B_r(u_0) = \{u \in X: \|u - u_0\| < r\}$$

kümesine u_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\bar{B}(u_0, r) = \bar{B}_r(u_0) = \{u \in X: \|u - u_0\| \leq r\}$$

kümesine u_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(u_0, r) = S_r(u_0) = \{u \in V: \|u - u_0\| = r\}$$

kümesine u_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

$$\bar{B}(u_0, r) = B(u_0, r) \cup S(u_0, r)$$

olduğu açıktır. $B_r(u_0)$ açık yuvarına $u_0 \in L$ noktasının bir komşuluğu,

$$B(u_0, r) - \{u_0\}$$

kümesine ise u_0 noktasının bir delinmiş komşuluğu denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.19: X normlu uzay olsun

$$d: X \rightarrow \mathbb{R}, d(u, v) = \|u - v\|, (u, v \in X)$$

norm metriğine göre tam ise X ye Banach uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.20: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, M ise bu uzaydan alınmış bir küme olsun. Her bir $u_0 \in M$ noktası için

$$B(u_0, r) = \{u \in M: \|u - u_0\| < r\} \subset M$$

şartı sağlayan öyle $r > 0$ sayısı varsa M kümesine X normlu uzayında açık küme denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.21: X bir normlu uzay ve $A \subset X$ bir küme olsun. Eğer her $(u_n) \subset A$ dizisi A kümesinde bir elemana yakınsayan bir alt dizi içeriyorsa $A \subset X$ kümesine bir kompakt küme denir (Bryan ve Youngson, 2000).

Örnek 2.1.22: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Euclid uzayında her kapalı sınırlı küme kompakttır.

Tanım 2.1.23: X ve Y iki Banach uzayı ve $A \in L(X, Y)$ olsun. Eğer X deki her sınırlı kümenin A altında görüntüsünün kapanışı Y de kompakt ise A ya kompakt operatör denir (Kreyszig, 1978).

2.2. Daralma Dönüşümleri ve Sabit Nokta Teoremi

Bu kesimde daralma dönüşümleri verilmiş ve sabit nokta teorisi hakkında genel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall u, v \in X$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \lambda d(u, v)$$

koşulunu sağlayan bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T ye bir Lipschitz dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.2: $X = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $T(u) = \frac{1}{u}$ bağıntısı verilsin. T , $\lambda \geq 4$ için bir Lipschitz dönüşümüdür.

Çözüm: $\forall u, v \in X$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(T(u), T(v)) &= \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right| \\ &= \left| \frac{v - u}{u \cdot v} \right| \\ &= \frac{|(-1)(u - v)|}{|u \cdot v|} \\ &= \frac{|u - v|}{u \cdot v} \\ &\leq \frac{|u - v|}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 4d(u, v) \end{aligned}$$

$d(T(u), T(v)) \leq 4d(u, v)$ olup $\lambda \geq 4$ için bir Lipschitz dönüşümü olduğu görülür.

Tanım 2.2.3: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşümü olsun. Eğer $\forall u, v \in X$ için,

$$d(Tu, Tv) \leq \lambda d(u, v)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T ye daralma (contraction) dönüşümü veya daraltan dönüşüm denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.4: $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $T(u) = \frac{u}{2} + 4$ bağıntısı ile verilsin. T daralma dönüşümüdür.

Örnek 2.2.5: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $T(u) = T((u_1, u_2)) = \left(\frac{1}{3}\sin u_2, \frac{1}{3}\cos u_1 + 2\right)$ ile tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış metriğe göre her bir $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ için $d((T(u), T(v))) \leq \frac{1}{2}d(u, v)$ sağlanır. Yani; $\mathbb{R}^2$ de bir daralma dönüşümüdür.

Uyarı 2.2.6: $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daralma dönüşümü olamaz. Fakat T daralma dönüşümü olmasa bile T^n bir daraltan dönüşüm olabilir.

Örnek 2.2.7: $T: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$T(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,1] \\ 1, & u \in (1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü $u = 1$ de süreksizdir ve dolayısıyla daralma dönüşümü olmaz. Diğer taraftan $T^2: \{0,1\} \rightarrow \{0\}$, $T^2(u) = 0$ olup bir daralma dönüşümüdür.

1968 yılında R. Kannan çalışmasında T nin X üzerinde süreklilik gerektirmeyen bir daralma şartı tanımlayıp, Banach daralma prensibini Tanım 2.2.8 de genelleştirerek sunmuştur (Kannan, 1968).

Tanım 2.2.8: X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \alpha [d(u, Tu) + d(v, Tv)]$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise T ye Kannan dönüşümü denir (Kannan, 1968).

Kannan dönüşümünden yola çıkarak T nin sürekli olmadığı bazı tipteki dönüşümler için birçok daralma dönüşümü tanımı yapılmıştır. Bunlardan birisi de Chatterjea tarafından aşağıda ifade edilmiştir (Chatterjea, 1972).

Tanım 2.2.9: X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $u, v \in X$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \beta [d(u, Tv) + d(v, Tu)]$$

olacak şekilde en az bir $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise T ye Chatterjea dönüşümü denir.

Zamfirescu tüm bu tanımları bir araya getirerek aşağıdaki tanımı geliştirmiştir (Zamfirescu, 1972).

Tanım 2.2.10: X bir tam metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için

- i) $d(Tu, Tv) \leq \lambda d(u, v)$,
- ii) $d(Tu, Tv) \leq \alpha [d(u, Tv) + d(v, Tv)]$,
- iii) $d(Tu, Tv) \leq \beta [d(u, Tv) + d(v, Tu)]$,

koşullarından en az birisi doğru olsun. Eğer $\lambda \in [0, 1)$, $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{2}$ şartlarını sağlayan λ, α ve β reel sayıları varsa T ye Zamfirescu dönüşümü denir.

Berinde, Zamfirescu'nun tanımındaki i) ve iii) şartlarından daha kapsamlı olan ve T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen daralma şartını tanımlayarak aşağıdaki dönüşümü tanımlamıştır (Berinde, 2007).

Tanım 2.2.11: X bir tam metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \delta d(u, v) + Ld(v, Tu)$$

veya

$$d(Tu, Tv) \leq \delta d(u, v) + Ld(u, Tv)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa, T ye bir zayıf (weak) daralma dönüşümü veya hemen hemen (almost) daralma dönüşümü denir.

Daralma şartları bazı fonksiyonlar yardımıyla genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.12: X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall u, v \in X$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \delta d(u, v) + \varphi(d(u, Tu))$$

koşulunu sağlayan bir $\delta \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu varsa, T ye bir contractive-like dönüşüm denir (Şoltuz ve Grosan, 2008).

Tanım 2.2.13: (f –Daralma Dönüşümü): (X, d) bir metrik uzay ve $f, T: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ için $0 \leq k < 1$ olacak şekilde

$$d(fT(u), fT(v)) \leq kd(f(u), f(v))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne f –daralma dönüşümü denir (Beiranvand vd., 2009).

f –daralma dönüşümleri $f = I$ (I birim dönüşüm) alınması halinde daralma dönüşümlerine denk olur.

Tanım 2.2.14: $X \neq \emptyset$ ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T(u) = u$ olacak biçimde bir $u \in X$ varsa, bu u noktasına T nin sabit noktası denir. T nin tüm sabit noktalar kümesi $F(T)$ ile gösterilir (Berinde, 2007).

Şimdi sabit noktaları bulunan ve bulunmayan bir takım özel dönüşüm örnekleri verilecektir.

Örnek 2.2.15:

- i) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(u) = u^2 + 5u + 4$ ise $F(T) = \{-2\}$.
- ii) Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(u) = u + 2$ ise $F(T) = \emptyset$.
- iii) $T: \{s, u, v\} \rightarrow \{s, u, v\}$; $T(u) = v$, $T(s) = s$ ve $T(v) = u$ ile tanımlı dönüşümünü ele alalım. Bu durumda $F(T) = \{s\}$ dir.

Örnek 2.2.16: $X = \{a, b\}$ olmak üzere $T(a) = b$ ve $T(b) = a$ ile tanımlı $T: X \rightarrow X$ sabit noktası yoktur. Ayrıca $X = [1,5]$, $Y = [6,9]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \rightarrow Y$ veya $T: Y \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.17: $T(u) = \begin{cases} 2u & , \quad 0 < u \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2u & , \quad \frac{1}{2} \leq u < \frac{2}{3} \end{cases}$ dönüşümünde 0 ve $\frac{2}{3}$ noktaları

dönüşümün tanım kümesine ait olmadığından, bu dönüşümün sabit noktaları yoktur.

Örnek 2.2.18: $Tu = e^u$ dönüşümünün de hiçbir sabit noktası mevcut değildir. Buna karşın $Tu = e^{u-1}$ ve $Tu = -e^{u+1}$ dönüşümlerinin sabit noktası sırasıyla 1 ve -1 dir.

Tanım 2.2.19: X boştan farklı herhangi bir küme, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $u \in X$ için $T^{k+1}(u) = T(T^k(u))$ olacak şekilde $T^k(u)$ tanımlansın. $T^k(u)$ ya u nun T altındaki k . iterasyonu denir (Berinde, 2007).

Daralma dönüşümlerde X bir tam metrik uzay alınırsa, bu dönüşümün sabit bir noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Şimdi bu durumu karakterize eden teoremi ifade edelim (Banach, 1922).

Teorem 2.2.20 (Banach Daralma Prensibi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda,

- i) T, X te bir tek u sabit noktasına sahiptir;
- ii) Herhangi bir $(u_0) \in X$ için $u_{n+1} = Tu_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ ile tanımlanan Picard iterasyonu tarafından üretilen $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ dizi u noktasına yakınsar.

Bu teoremin Tanım 2.2.3 de verilen daralma dönüşümü dışında yukarıda ifade edilen diğer daralma dönüşümleri ve literatürde mevcut olan birçok farklı daralma dönüşümleri, iterasyon metotları ve farklı uzay yapıları kullanılarak yeni versiyonları elde edilmiştir. Yeni elde edilen bu teoremler ise uygulamalı matematikte ve matematik dışında birçok ana bilim dalında uygulama bulmuştur. Dolayısıyla bu gelişmeler matematik anabilim dalında sabit nokta teorisi olarak yerleşmesine neden olmuştur.

Şimdi de metrik uzaylarda yaklaşık sabit nokta tanımını verelim (Berinde, 2007).

Tanım 2.2.21: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$, $\varepsilon > 0$, $u_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$d(T(u_0), u_0) < \varepsilon,$$

ise u_0 noktasına T nin yaklaşık (approximate) sabit noktası veya ε –sabit noktası denir (Berinde, 2006).

T nin bütün ε -sabit noktaları verilen bir ε için $F_\varepsilon(T) = \{u \in X: u, T \text{ nin bir } \varepsilon - \text{sabit noktası}\}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.2.22: $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu taktirde eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $F_\varepsilon(T) \neq \emptyset$ ise T ye yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Berinde, 2006).

Aşağıdaki Lemma bir metrik uzay üzerindeki bir operatörünün ε - sabit noktasının varlığını garanti eder.

Lemma 2.2.23: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ asimptotik regülerlik şartını sağlasın. Yani $\forall u \in X$ için

$$d(T^n(u), T^{n+1}(u)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

olsun. Bu taktirde T yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Berinde, 2006).

İspat: $u_0 \in X$ olsun. Bu taktirde,

$$d(T^n(u_0), T^{n+1}(u_0)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ öyleki } \forall n > n_0(\varepsilon)$$

için

$$d(T^n(u_0), T^{n+1}(u_0)) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ öyleki } \forall n \geq n_0(\varepsilon) \text{ için}$$

$$d(T^n(u_0), T(T^n(u_0))) < \varepsilon$$

dur. $y_0 = T^n(x_0)$ olarak tanımlanırsa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in X \text{ öyleki } d(y_0, T(y_0)) < \varepsilon$$

olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için T nin X de bir ε - sabit noktası vardır. Yani T dönüşümünün ε - sabit noktası y_0 dır. Bunun anlamı tam olarak T yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki önerme hangi koşullar altında bir dönüşümün sabit noktaların varlığının yaklaşık sabit noktalarının varlığını gerektirdiğini ifade eder.

Önerme 2.2.24: (X, d) metrik uzayın bir kapalı alt kümesi A ve $T: A \rightarrow X$ bir kompakt dönüşüm olsun. Bu taktirde T bir sabit noktaya sahiptir ancak ve ancak T yaklaşık sabit noktaya sahiptir (Granas ve Dugundji, 2003).

3. BULANIK KÜME VE BULANIK UZAYLAR

Bu bölümde bulanık küme, bulanık metrik uzay, sezgisel bulanık metrik uzay, bulanık normlu uzay ve sezgisel bulanık normlu uzay kavramları ve bu kavramlar ile ilgili temel özelliklere yer verilmiştir.

3.1. Bulanık Küme ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: $X \neq \emptyset$ bir küme, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $X \rightarrow I$ ya fonksiyonların tümünün kümesini I^X ile gösterelim. I^X in her bir elemanına X in bir bulanık kümesi denir (Zadeh, 1965).

Tanım 3.1.2: X herhangi bir küme ve $A \subset X$ olsun.

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1 & , u \in A \\ 0 & , u \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_A(u) : X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir (Zadeh, 1965).

Tanım 3.1.3: X herhangi bir küme, $A \subset X$ ve $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f_A : X \rightarrow I$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$A = \{(u, f_A(u)) : u \in X\} \subset X \times I ,$$

kümesine X de bir bulanık küme denir. Burada f_A ya A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\forall u \in X$ için $f_A(u) \in I$ değerine de X in A ya ait olma derecesi denir (Zadeh, 1965).

Tanım 3.1.4: Her $a \in (0,1]$ ve $u \in X$ için üyelik fonksiyonu

$$f_a(v) = \begin{cases} a, & v = u \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_a : X \rightarrow [0,1]$ bulanık kümesine X de bir bulanık nokta denir (Wong, 1974).

Tanım 3.1.5: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall u \in X$ için $f_X(u) = 1$ ve $f_\emptyset(u) = 0$ üyelik fonksiyonları ile karakterize edilen $\emptyset$ ve X bulanık kümeleri

$$\emptyset = \{(u, 0) : u \in X\} \text{ ve } X = \{(u, 1) : u \in X\},$$

şeklinde ifade edilir (Zadeh, 1965).

Tanım 3.1.6: $X \neq \emptyset$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere her $u \in X$ için $\lambda^*(u) = \lambda$ şeklinde tanımlanan λ^* bulanık kümesine sabit bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Yukarıdaki tanımlara göre klasik anlamdaki her küme bir bulanık kümesidir. Şimdi ise bu tanımların daha iyi anlaşılması için bir örnek verilecektir.

Örnek 3.1.7: $f_A: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$f_A(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 1 \\ \frac{1}{3}(u-1), & 1 \leq u \leq 4 \\ 1, & 4 \leq u \end{cases}$$

olarak tanımlanan

$$A = \{(u, f_A(u)) : u \in \mathbb{R}\}$$

kümesi bulanık kümedir.

Tanım 3.1.8: Kümeler teorisinden de bildiğimiz kapsama, birleşme, kesişme ve eşitlik sembolleri bulanık kümelerde sırasıyla “ $\leq, \vee, \wedge, =$ ” şeklinde ifade edilir. Bu işlemler tanımlanacak olursa: A, B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. f_A ve f_B fonksiyonları ise A ve B nin üyelik fonksiyonları olmak üzere $\forall u \in X$ için

i) $f_B(u) \leq f_A(u)$ ise A bulanık kümesi B bulanık kümesini kapsar yani $A \leq B$ dir.

ii) $A \vee B = \{(u, f_{A \vee B}(u)) : f_{A \vee B}(u) = \max\{f_A(u), f_B(u)\}\}$ kümesi A ve B bulanık kümelerinin birleşimidir.

iii) $A \wedge B = \{(u, f_{A \wedge B}(u)) : f_{A \wedge B}(u) = \min\{f_A(u), f_B(u)\}\}$ kümesi A ve B bulanık kümelerinin kesişimidir.

iv) $f_A(u) = f_B(u)$ ise A ve B bulanık kümeleri birbirine eşittir yani $A = B$ dir.

Bununla birlikte tümleyen ve fark işlemleri de aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i) $A' = \{(u, f_{A'}(u)) : f_{A'}(u) = 1 - f_A(u)\}$ bulanık kümesi ise A nın tümleyenidir,

ii) $A - B = \{(u, f_{A-B}(u)) : f_{A-B}(u) = \min\{f_A(u), f_{B'}(u)\}\}$ bulanık kümesi ise A, B bulanık kümelerinin farkı olarak tanımlanır (Chang, 1968).

Tanım 3.1.9: $\{A_i\}_{i \in I}$, X deki bulanık kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali $\forall u \in X$ için

i) $C = \bigvee_{i \in I} A_i \Leftrightarrow f_C(u) = \max_{i \in I} \{f_{A_i}(u)\}$

ii) $D = \bigwedge_{i \in I} A_i \Leftrightarrow f_D(u) = \min_{i \in I} \{f_{A_i}(u)\}$

olarak tanımlanır (Chang, 1968).

Teorem 3.1.10: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subset X$ iki bulanık küme olsun. Böylece

i) $(A')' = A$

ii) $A \leq B \Leftrightarrow B' \leq A'$

iii) $(A \wedge B)' = A' \vee B'$, $(A \vee B)' = A' \wedge B'$

iv) $(\bigvee_{i \in I} A_i)' = \bigwedge_{i \in I} A_i'$

v) $(\bigwedge_{i \in I} A_i)' = \bigvee_{i \in I} A_i'$

özellikleri sağlanır (Chang, 1968).

İspat: A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu f_A , B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu f_B olmak üzere;

i) $f_{A'}(u) = 1 - f_A(u)$ ve $f_{(A')'}(u) = 1 - (1 - f_A(u)) = f_A(u)$

olduğundan

$$(A')' = A$$

dir.

ii) $f_{A'}(u) = 1 - f_A(u)$ ve $f_{B'}(u) = 1 - f_B(u)$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
A \leq B &\Leftrightarrow f_A(u) \leq f_B(u) \\
&\Leftrightarrow 1 - f_A(u) \geq 1 - f_B(u) \\
&\Leftrightarrow 1 - f_B(u) \leq 1 - f_A(u) \\
&\Leftrightarrow f_{B'}(u) \leq f_{A'}(u) \\
&\Leftrightarrow B' \leq A'
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $(A \vee B)' = A' \wedge B'$ eşitliğini göstermek için ilk olarak $\forall u \in X$ için

$$f_{(A \vee B)'}(u) = f_{A' \wedge B'}(u)$$

eşitliği gösterilmelidir. $f_A, f_B : X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonları olmak üzere

$\min\{1 - f_A, 1 - f_B\}$, $A' \wedge B'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,
 $\max\{f_A, f_B\}$, $A \vee B$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu,
 $1 - \max\{f_A, f_B\}$ de $(A \vee B)'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

dır.

$$1 - \max\{f_A, f_B\} = \min\{1 - f_A, 1 - f_B\}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$\min\{1 - f_A, 1 - f_B\}$, $(A \vee B)'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

olur. Dolayısıyla $\forall u \in X$ için

$$f_{(A \vee B)'}(u) = f_{A' \wedge B'}(u)$$

olup

$$(A \vee B)' = A' \wedge B'$$

dir. Şu halde benzer olarak,

$\max\{1 - f_A, 1 - f_B\}, A' \vee B'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

$1 - \min\{f_A, f_B\}, (A \wedge B)'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

dır. Buradan,

$$1 - \min\{f_A, f_B\} = \max\{1 - f_A, 1 - f_B\}$$

olduğu kullanılırsa

$\max\{1 - f_A, 1 - f_B\}, (A \wedge B)'$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

olur. Böylece $\forall u \in X$ için

$$f_{(A \wedge B)'}(u) = f_{A' \vee B'}(u)$$

dır.

$$\text{iv) } (\bigvee_{i \in I} A_i) = \max\{f_{A_i}(u)\} \text{ ve } (\bigvee_{i \in I} A_i)' = 1 - \max\{f_{A_i}(u)\}$$

olduğundan

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = \min\{1 - f_{A_i}(u)\}$$

dir. Tümlenme özelliğinden

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)' = \min\{f_{A'_i}(u)\} = \bigwedge_{i \in I} A'_i$$

olur.

$$\text{v) } (\bigwedge_{i \in I} A_i) = \min\{f_{A_i}(u)\} \text{ ve } (\bigwedge_{i \in I} A_i)' = 1 - \min\{f_{A_i}(u)\}$$

olduğundan

$$\left(\bigwedge_{i \in I} A_i\right)' = \max\{1 - f_{A_i}(u)\} = \max\{f_{A'_i}(u)\} = \bigvee_{i \in I} A'_i$$

bulunur.

Uyarı 3.1.11: X bir küme ve A bir bulanık küme olsun.

i) $A \wedge A' \neq \emptyset$

ii) $A \vee A' \neq X$

dir. Yani klasik küme teorisinden farklı olarak

$$f_{A \cup A'}(X) = f_X(X) \text{ ve } f_{A \cap A'}(X) = f_{\emptyset}(X)$$

eşitlikleri geçerli olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekle bu durumu inceleyebiliriz.

Örnek 3.1.12: $X = \{\alpha, \beta\}$, $A = \{(\alpha, 0.3), (\beta, 0.8)\}$ olsun. $A \wedge A' = \emptyset$ ve $A \vee A' = X$ eşitliklerinin sağlanıp sağlanmadığını araştırınız.

Çözüm: $A' = \{(\alpha, 0.7), (\beta, 0.2)\}$ dir. $f_{A \wedge A'}(u) = \min\{f_A(u), f_{A'}(u)\}$ olarak tanımlı olduğundan

$$A \wedge A' = \{(\alpha, 0.3), (\beta, 0.2)\} \neq \emptyset$$

bulunur. Ayrıca $f_{A \vee A'}(u) = \max\{f_A(u), f_{A'}(u)\}$ olduğundan

$$A \vee A' = \{(\alpha, 0.7), (\beta, 0.8)\} \neq X$$

bulunur.

Yukarıdaki bulanık küme ile ilgili tanım ve teoremler göz önüne alındığında $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B, C \subset X$ bulanık kümeler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır (Chang, 1968).

i) $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$ (Tek kuvvet özelliği)

ii) $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$ (Değişme özelliği)

iii) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (Birleşme özelliği)

- iv) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(Dağılma özelliği)
- v) $A \vee X = X$, $A \wedge \emptyset = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)
- vi) $A \vee \emptyset = A$, $A \wedge X = A$ (Etkisiz eleman özelliği)
- vii) $(A \wedge B)' = A' \vee B'$, $(A \vee B)' = A' \wedge B'$ (De Morgan kuralı)

Tanım 3.1.13: $X \neq \emptyset$ bir küme, $A \in I^X$ ve χ_a bir bulanık nokta olsun. $\forall u \in X$ için $\alpha \leq A(u)$ ise $\chi_a \in A$ denir. Bir bulanık küme, bu bulanık kümeye ait bulanık noktalarının birleşimi şeklinde yazılabilir, dolayısıyla A ya ait her bulanık noktası aynı zamanda A nın bir bulanık alt kümesidir (Pao-Ming ve Ying-Ming, 1980).

Tanım 3.1.14: $X \neq \emptyset$ bir küme, τ ise I^X deki bulanık kümelerden oluşan bir alt aile olsun. Eğer τ ailesi

- i) $\emptyset, X \in \tau$,
- ii) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigwedge_{i=1}^n A_i \in \tau$,
- iii) $\{A_i\}_{i \in I} < \tau$ için $\bigvee_{i \in I} A_i \in \tau$,

özelliklerini sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde Chang anlamında bulanık topoloji ve (X, τ) ikilisine de Chang anlamında bulanık topolojik uzay denir (Chang, 1968).

3.2. Bulanık Metrik Uzaylar ve Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylar

Tanım 3.2.1: $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlem tanımlansın. Buna göre $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ olmak üzere

- i) $a * b = b * a$
- ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$
- iii) $*$ işlemi süreklidir
- iv) $a * 1 = a$
- v) $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$

koşullarını sağlayan $*$ işlemine sürekli t-norm denir (Schwiezer ve Sklar 1960).

Örnek 3.2.2: Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_1 b = \max\{0, a + b - 1\}$$

şeklinde tanımlı ikili işlem sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma Lukasiewicz t-normu denir.

Çözüm: $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için

i) $a *_1 b = \max\{0, a + b - 1\} = \max\{0, b + a - 1\} = b *_1 a$ olur. Böylece $_1$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } (a *_1 b) *_1 c &= (\max\{0, a + b - 1\}) *_1 c \\
 &= \max\{0, \max\{0, a + b - 1\} + c - 1\} \\
 &= \max\{0, a + b - 1 + c - 1\} \\
 &= \max\{0, a + b + c - 1 - 1\} \\
 &= \max\{0, a + \max\{0, b + c - 1\} - 1\} \\
 &= a *_1 (\max\{0, b + c - 1\}) \\
 &= a *_1 (b *_1 c)
 \end{aligned}$$

olup

$$(a *_1 b) *_1 c = a *_1 (b *_1 c)$$

dir. Böylece $_1$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

iii) $(a_n), (b_n) \subset [0,1]$ üzerinde tanımlı iki dizi ve $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b ; n \rightarrow \infty$ ise

$$a_n *_1 b_n = \max\{0, a_n + b_n - 1\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \max\{0, a + b - 1\} = a *_1 b$$

dır. Dolayısıyla,

$$a_n *_1 b_n \rightarrow a *_1 b ; n \rightarrow \infty$$

olduğu görüldüğünden $_1$ dizisel süreklidir. O halde $_1$ işlemi süreklidir.

iv) $\forall a \in [0,1]$ için

$$a *_1 1 = \max\{0, a + 1 - 1\} = \max\{0, a\} = a \Rightarrow a *_1 1 = a$$

elde edilir.

v) $a \leq c$ ve $b \leq d$ olmak üzere her $a, b, c, d \in [0,1]$ için

$$a + b \leq c + d$$

dir. O halde,

$$a + b - 1 \leq c + d - 1$$

$$\max\{a + b - 1\} \leq \max\{c + d - 1\}$$

$$a *_1 b \leq c *_1 d$$

olur.

Böylece (i)-(iv) den $*_1$ işlemi sürekli t-normdur.

Örnek 3.2.3: Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_2 b = a.b$$

şeklinde tanımlı ikili işlem sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma çarpım t-normu denir.

Örnek 3.2.4: Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_3 b = \min\{a, b\}$$

şeklinde tanımlı ikili işlem sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma minimum t-normu denir.

Yukarıdaki örneklerde tanımlanan $*_1$, $*_2$ ve $*_3$ birer sürekli t-normdur. Ayrıca kolayca görülebilir ki

$$a *_1 b \leq a *_2 b \leq a *_3 b$$

dir.

Klasik metrik uzayın başka bir ifadesi olan ve Menger tarafından 1942 yılında tanımı yapılarak Schweizer ve Sklar tarafından 1960 yılında geliştirilmiş olan olasılıksal metrik uzay kavramı 1975 yılında Kramosil ve Michalek tarafından bulanık metriğe genelleştirilmiştir.

Tanım 3.2.5: X keyfi seçilmiş küme, $*$ sürekli bir t-norm olsun. Eğer $M, X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde her $u, v, w \in X$ ve $s, t > 0$ için

- i) $M(u, v, 0) = 0,$
- ii) Her $t > 0$ için $M(u, v, t) = 1 \Leftrightarrow u = v,$
- iii) $M(u, v, t) = M(v, u, t),$
- iv) $M(u, v, t) * M(v, w, s) \leq M(u, w, t + s),$
- v) $M(u, v, \cdot) : [0,1] \rightarrow [0,1]$ sol süreklidir,

koşullarını sağlayan bir bulanık kümesi ise $(X, M, *)$ sıralı üçlüsüne bir bulanık metrik uzay denir. $M(u, v, t)$ değeri u ile v arasında t ye göre yakınlık derecesi olarak düşünülebilir. Her $t > 0$ için $M(u, v, t) = 1$ ile $u = v$ ve ∞ ile $M(u, v, t) = 0$ aynı anlama gelmektedir (Kramosil ve Michalek, 1975).

Şimdi Kaleva ve Seikkala tarafından ifade edilen bulanık metrik tanımını verelim.

Tanım 3.2.6: $\forall t < 0$ için $u(t) = 0$ ise u (bulanık sayısı) negatif olmayandır. Negatif olmayan bütün bulanık sayıların kümesi $\mathcal{G}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{R}$ deki tüm bulanık sayıların kümesi için ise $L(\mathbb{R})$ sembolü kullanılacaktır. Öte yandan bulanık sayıların toplamaya göre birimi ve çarpmaya göre birimleri sırasıyla $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ olarak gösterilecektir. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 3.2.7: X bir keyfi küme, $L, R : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ simetrik ve artan iki dönüşüm ve $L(0,0) = 0, R(1,1) = 1$ olsun. Bu durumda $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathcal{G}$ fonksiyonu

- i) $\bar{d}(u, v) = \bar{0} \Leftrightarrow u = v$
- ii) $\forall u, v \in X$ için $\bar{d}(u, v) = \bar{d}(v, u)$
- iii) $\forall u, v, w \in X$ için

a-) $s \leq u_1(u, w), t \leq u_1(w, v), s \leq u_1(u, w)$ olmak üzere

$$\bar{d}(u, v)(s + t) > L(\bar{d}(u, w), (s), \bar{d}(w, v), (t))$$

b-) $\bar{d}(u, v)(s + t) \leq R(\bar{d}(u, w), (s), \bar{d}(w, v)(t))$

$$s \geq u_1(u, w)$$

$$t \geq u_1(w, v)$$

$$s + t \geq u_1(u, v)$$

koşullarını sağlıyorsa $(X, \bar{d}, L, R)$ ye bulanık metrik uzay denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Şimdi de literatürde de geniş bir kullanıma sahip olan Kromasil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik üzerinde çalışılarak George ve Verammani tarafından tanımlanan bulanık metrik uzayı ifade edelim.

Tanım 3.2.8: X boştan farklı herhangi bir küme ve $*$ işlemi bir sürekli t-norm ve $M, X^2 \times (0, \infty)$ da tanımlı bir bulanık küme olsun. M her $u, v, w \in X$ ve $t, s > 0$ için

- i) $M(u, v, t) > 0$
- ii) $M(u, v, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$
- iii) $M(u, v, t) = M(v, u, t)$
- iv) $M(u, v, t) * M(v, w, s) \leq M(u, w, t + s)$
- v) $M(u, v, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli.

şartlarını sağlanıyorsa M ye X de bir bulanık metrik ve $(X, M, *)$ üçlüsüne de bir bulanık metrik uzay denir (George ve Veremmani, 1994).

Lemma 3.2.9: $(X, M, *)$ üçlüsü bir bulanık metrik uzay olsun. Bu taktirde her $u, v \in X$ için $M(u, v, \cdot)$ azalmayan bir fonksiyondur (Grabiec, 1988).

İspat: $0 < t < s$ için $M(u, v, t) > M(u, v, s)$ olsun. Bu taktirde Tanım 3.2.5 den

$$M(u, v, t) * M(v, v, s - t) \leq M(u, v, s) < M(u, v, t)$$

olur. Yine Tanım 3.2.5 gereğince $M(v, v, s - t) = 1$ olacağından

$$M(u, v, t) < M(u, v, t)$$

bulunur. Fakat bu bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak her $0 < t < s$ için

$$M(u, v, t) \leq M(u, v, s)$$

dir.

Tanım 3.2.10: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay, $u \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ ise

$$B_M(u, r, t) = \{v \in X : M(u, v, t) > 1 - r\}$$

kümesine u merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir (George ve Verammani, 1994).

Lemma 3.2.11: Her açık yuvar açık bir kümedir (George ve Verammani, 1994).

İspat: $B_M(u, r, t)$ açık yuvarını inceleyelim. $v \in B_M(u, r, t)$ bir keyfi nokta olsun. $B_M(u, r, t)$ ifadesinin tanımından

$$\begin{aligned} v \in B_M(u, r, t) &\Rightarrow M(u, v, t) > 1 - r \\ M(u, v, t) > 1 - r &\Rightarrow M(u, v, t_0) > 1 - r \end{aligned}$$

olacak şekilde $0 < t_0 < t$ aralığında bir t_0 bulunmuş olur.

$$r_0 = M(u, v, t_0)$$

olsun.

$$r_0 = M(u, v, t_0) > 1 - r$$

olup

$$r_0 > 1 - s > 1 - r$$

olacak şekilde $0 < s < 1$ aralığında bir s bulunmuş olur. Ayrıca $r_0 > 1 - s$ olacak şekilde verilen r_0 ve s için

$$r_0 * r_1 \geq 1 - s$$

koşulunu sağlayan $0 < r_1 < 1$ aralığında bir r_1 bulunabilir. Şimdi $B_M(v, 1 - r_1, t - t_0)$ açık yuvarını dikkate alalım. Gösterelim ki

$$B_M(v, 1 - r_1, t - t_0) \subset B_M(u, r, t)$$

dir. $w \in B_M(v, 1 - r_1, t - t_0)$ olsun. O halde,

$$M(v, w, t - t_0) > 1 - (1 - r_1) = r_1$$

dir. Dolayısıyla,

$$M(u, w, t) \geq M(u, w, t_0) * M(v, w, t - t_0)$$

$$M(u, w, t) > r_0 * r_1 \geq 1 - s$$

$$M(u, w, t) > 1 - r$$

$$w \in B_M(u, r, t)$$

olur. Böylece,

$$B_M(v, 1 - r_1, t - t_0) \subset B_M(u, r, t)$$

bulunur. $v \in B_M(u, r, t)$ keyfi seçildiğinden her $v \in B_M(u, r, t)$ için en az bir

$$B_M(v, 1 - r_1, t - t_0)$$

açık yuvarı vardır. Öyle ki

$$B_M(v, 1 - r_1, t - t_0) \subset B_M(u, r, t)$$

olur. Dolayısıyla $B_M(u, r, t)$ açık bir kümedir.

Sonuç 3.2.12: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\tau_M = \{A \subseteq X : \text{her bir } u \in A \text{ için } B_M(u, r, t) \subseteq A \text{ olacak şekilde } r \in (0,1) \text{ ve } t > 0 \text{ vardır} \}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji tanımlar (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.13: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay ve $u \in A$ olmak üzere (A, τ_M) topolojisine göre

$$\left\{ B_M \left(u, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) : n = 1, 2, \dots \right\},$$

açık yuvarının ailesi u noktasının bir yerel bazıdır (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.14: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay $(u_n) \subset X$ olsun. $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(u_n, u, t) = 1$ şartı sağlanırsa (u_n) dizisi u noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ şeklinde gösterilir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.15: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay $(u_n) \subset X$ olsun. $\forall t > 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > n_0(\varepsilon)$ için $M(u_n, u_m, t) > 1 - \varepsilon$ ise (u_n) dizisine Cauchy dizisi denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.16: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay $(u_n) \subset X$ olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayına tamdır denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.17: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesindeki yakınsak her dizinin limiti A da ise A ya X de kapalıdır denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.18: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesindeki her dizinin A da en az bir yakınsak alt dizi var ise A kümesine X de kompakt denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.19: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $K(X)$, X in boştan farklı kompakt alt kümelerinin ailesini göstermek üzere $\forall A, B \in K(X)$ ve $t > 0$ için,

$$H_M(A, B, t) = \min\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \},$$

ile tanımlanan $H_M: K(X) \times K(X) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna M bulanık metriğinin oluşturduğu Hausdorff bulanık metrik denir (Rodriguez-Lopez ve Romaguera, 2004).

Teorem 3.2.20: Her bulanık metrik uzay Hausdorff bulanık metrik uzaydır (George ve Verammani, 1994).

İspat: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay $u, v \in X$ ve $u \neq v$ olsun. Bulanık metrik uzayın tanımına göre $u \neq v$ olduğundan $0 < M(u, v, t) < 1$ dir. Dolayısıyla $r = M(u, v, t)$ dersek $0 < r < 1$ olur. $r < r_0 < 1$ olacak şekilde her bir r_0 için $r_1 * r_1 \geq r_0$ eşitsizliğini sağlayan r_1 bulunabilir. Şimdi,

$$B_M\left(u, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \text{ ve } B_M\left(v, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right)$$

açık yuvarını inceleyelim. Şöyle ki

$$B_M\left(u, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \cap B_M\left(v, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) = \emptyset$$

dir. Kabul edelim ki

$$B_M\left(u, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \cap B_M\left(v, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \neq \emptyset$$

olsun. $\exists w \in B_M\left(u, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \cap B_M\left(v, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right)$ için

$$M\left(u, w, \frac{1}{2}t\right) > 1 - (1 - r_1) = r_1$$

ve

$$M\left(v, w, \frac{1}{2}t\right) > 1 - (1 - r_1) = r_1$$

$$r = M(u, v, t) \geq M\left(u, w, \frac{1}{2}t\right) * M\left(w, v, \frac{1}{2}t\right)$$

$$r > r_1 * r_1$$

$$r > r_0$$

$$r > r$$

olur. Bu çelişkidir. Böylece $u, v \in X$ ve $u \neq v$ için;

$$B_M\left(u, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) \cap B_M\left(v, 1 - r_1, \frac{1}{2}t\right) = \emptyset$$

dir. Buna göre $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı Hausdorff uzayıdır.

Tanım 3.2.21: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer M, t den bağımsız ise yani her $u, v \in X$ için

$$M_{u,v}(t) = M(u, v, t)$$

sabit ise M ye X üzerinde yerleşik bulanık metrik ve $(X, M, *)$ da yerleşik (stationary) bulanık metrik uzay denir. Bu durumda $M(u, v, t)$ yerine (M, u, v) kullanılır (Gregori ve Romaguera, 2004)

Tanım 3.2.22: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer her bir $u \in X$ ve $t > 0$ için

$$\{B(u, r, t) : r \in (0,1)\}$$

ailesi X in bir yerel tabanı ise M ye temel bulanık metrik ve $(X, M, *)$ üçlüsüne de temel (principal) bulanık metrik uzay denir (Gregori vd, 2009).

Tanım 3.2.23: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $M, \forall u, v, w \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(u, w, t) \geq M(u, v, t) * M(v, w, t)$$

özelliğini sağlanıyorsa M ye kuvvetli (strong) bulanık metrik denir (Gregori vd, 2010).

Tanım 3.2.8 deki bulanık metrik tanımının (iv) aksiyomu ile Tanım 3.2.23 daki aksiyom değiştirilemez. Çünkü bu durumda M, X in üstünde bulanık metrik olmayabilir. Tanım 3.2.8 deki (iv) aksiyom yerine Tanım 3.2.23 daki aksiyom alınarak ve Tanım 3.2.8 ki (v) aksiyomda $M(u, v, \cdot)$ nın t ye göre artan sürekli olması istenerek bir kuvvetli bulanık metrik tanımından bulanık metrik elde etmek mümkündür. Gerçekten,

$$M(u, w, t + s) \geq M(u, v, t + s) * M(v, w, t + s) \geq M(u, v, t) * (v, w, s)$$

tir. Yerleşik bulanık metrikler aynı zamanda kuvvetli bulanık metriklerdir.

Şimdi değişik sürekli t-normları göz önüne alınarak George ve Veremmani tarafından verilen bulanık metrik tanımı için örnekler inceleyelim.

Örnek 3.2.24: $X = \mathbb{R}$ ve $a *_2 b = ab$ olsun. $\forall u, v \in X$ ve $t > 0$ için M fonksiyonu

$$M(u, v, t) = \frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Çözüm: $\forall u, v, w \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$\text{i) } M(u, v, t) > 0$$

$$\text{ii) } M(u, v, t) = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}}} = 1$$

$$e^{\frac{|u-v|}{t}} = 1$$

$$\frac{|u-v|}{t} = 0$$

$$|u-v| = 0$$

$$u = v$$

$$\text{iii)} \quad M(u, v, t) = \frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|v-u|}{t}}} = M(v, u, t)$$

$$\text{iv)} \quad M(u, v, t) *_2 M(v, w, s) \leq M(u, w, t+s)$$

olduğunu göstermek için

$$|u-w| \leq |u-v| + |v-w|$$

olup

$$|u-w| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|u-v| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|v-w|$$

eşitsizliğini ele alalım.

$$\frac{|u-w|}{t+s} \leq \frac{|u-v|}{t} + \frac{|v-w|}{s}$$

$$e^{\frac{|u-w|}{t+s}} \leq e^{\frac{|u-v|}{t} + \frac{|v-w|}{s}}$$

$$e^{\frac{|u-w|}{t+s}} \leq e^{\frac{|u-v|}{t}} e^{\frac{|v-w|}{s}}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}} e^{\frac{|v-w|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|u-w|}{t+s}}}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}}} \frac{1}{e^{\frac{|v-w|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|u-w|}{t+s}}}$$

$$M(u, v, t) *_2 M(v, w, s) \leq M(u, w, t+s)$$

v) $\forall t_0 > 0$ için;

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(u, v, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow t_0} e^{\frac{|u-v|}{t}}} \\
&= \frac{1}{e^{\frac{|u-v|}{t_0}}} \\
\lim_{t \rightarrow t_0} M(u, v, t) &= M(u, v, t_0)
\end{aligned}$$

olup $M(u, v, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli.

Böylece $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Şimdi verilecek bulanık metrikler ile ilgili örneklerin çözümünde kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.25: (X, d) bir metrik uzay, $s, t > 0$ ve $u, v, w \in X$ olsun. $\forall n \geq 1$ tam sayısı için

$$\frac{d(u, w)}{\frac{d(u, v)}{t^n} (t + s)^n} \leq \max \left\{ \frac{d(u, v)}{t^n}, \frac{d(v, w)}{s^n} \right\} \quad (1)$$

eşitsizliği doğrudur (Sapena, 2002).

İspat: Aşağıdaki üç duruma bakalım.

- i) $d(u, w) \leq d(u, v)$
- ii) $d(u, w) \leq d(u, w)$
- iii) $d(u, w) > d(u, v)$ ve $d(u, w) > d(v, w)$

(i) ve (ii) durumlarında eşitsizliğin doğru olduğu açıktır. (iii) nin sağlandığını varsayalım. O zaman iki olasılık ortaya çıkar. Bunlar;

$$(a) \ d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$$

$$(b) \ d(u, w) < d(u, v) + d(v, w)$$

dir.

(a) sağlansın. $\beta \in (0, 1)$ olmak üzere $d(u, v) = \beta d(u, w)$ alınsın. Bu durumda

$$d(v, w) = (1 - \beta)d(u, w)$$

olur. (1) eşitsizliğini kanıtlamak için

$$\frac{1}{(t+s)^n} \leq \max \left\{ \frac{R}{t^n}, \frac{1-\beta}{s^n} \right\}$$

eşitsizliğinin doğru olduğuna bakalım. Bunun için $f(\beta) = \frac{t^n}{\beta}$ ve $g(\beta) = \frac{s^n}{1-\beta}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Böylece f kesin azalırken, g de artan fonksiyondur.

$$\min \left\{ \frac{t^n}{\beta}, \frac{s^n}{1-\beta} \right\}$$

nin alacağı en büyük değer $f(\beta) = g(\beta)$ durumda yani; $\beta = \frac{t^n}{t^n+s^n}$ olur. Böylece

$$(t+s)^n \geq t^n + s^n = f\left(\frac{t^n}{t^n+s^n}\right) \geq \min \left\{ \frac{t^n}{\beta}, \frac{s^n}{1-\beta} \right\}$$

olur. Buradan (1) eşitsizliği kolayca elde edilir. (b) de (a) nın bir sonucu olarak kolayca görülür.

Örnek 3.2.26: (X, d) metrik uzay olsun. $u, v \in X$ ve $t > 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$M(u, v, w) = \frac{1}{e^{\frac{d(u,v)}{t^n}}}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $(X, M, *_3)$ bir bulanık metriktir. Özel olarak $n = 1$ George ve Verammani, tarafından verilmiş olup bu durumda $(X, M, *_3)$ temel bulanık metrik uzaydır. Ayrıca $(X, M, *)$ de kuvvetli bulanık metrik uzaydır.

Çözüm: Tanım 3.2.8, Lemma 3.2.25 nin sonucu olup diğer özellikler açık olduğundan $(X, M, *_3)$ bir bulanık metriktir.

Örnek 3.2.27: (X, d) bir metrik uzay ve $a *_2 b = ab$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_a(u, v, t) = \frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(u, v)}$$

olarak ifade edilen fonksiyon bir bulanık metriktir (George ve Verammani,1994).

Çözüm:

i) $t \in (0, \infty)$ ve metrik uzay tanımından $d(u, v) > 0$ olur ve $M(u, v, t) > 0$ dır.

ii) $\forall u, v \in X$ ve $t > 0$ için;

$$M(u, v, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + d(u, v)} = 1$$

$$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

olur.

iii) Metrik tanımından $d(u, v) = d(v, u)$ olup

$$M(u, v, t) = \frac{t}{t + d(u, v)} = \frac{t}{t + d(v, u)} = M(v, u, t)$$

dir.

iv) $\forall u, v, w \in X$ ve $s, t > 0$ için

$$M(u, v, t) * _2 M(v, w, s) \leq M(u, w, t + s)$$

eşitsizliğinin sağlanmasına bakalım. Metrik tanımına göre

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

ve

$$\frac{t + s}{t} > 1, \quad \frac{t + s}{s} > 1$$

olduğundan

$$d(u, w) \leq \left(\frac{t + s}{t}\right) d(u, v) + \left(\frac{t + s}{s}\right) d(v, w)$$

$$\frac{d(u, w)}{t + s} \leq \frac{d(u, v)}{t} + \frac{d(v, w)}{s}$$

$$\frac{d(u, w)}{t + s} \leq \frac{sd(u, v) + td(v, w)}{st}$$

$$1 + \frac{d(u, w)}{t + s} \leq 1 + \frac{sd(u, v) + td(v, w)}{st}$$

$$\frac{t + s + d(u, w)}{t + s} \leq \frac{st + sd(u, v) + td(v, w)}{st}$$

$d(u, v)d(v, w) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{t + s + d(u, w)}{t + s} &\leq \frac{st + sd(u, v) + td(v, w)}{st} \\ &\leq \frac{st + sd(u, v) + td(v, w) + d(u, v)d(v, w)}{st} \\ &\leq \frac{t + s}{t + s + d(u, w)} \\ \left(\frac{t}{t + d(u, v)} \right) \left(\frac{s}{s + d(v, w)} \right) &\leq \frac{t + s}{t + s + d(u, w)} \end{aligned}$$

$$M(u, v, t) *_2 M(v, w, s) \leq M(u, w, t + s)$$

elde edilir.

v) Her $u, v \in X$ ve $t_0 > 0$ için;

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} M(u, v, t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t}{t + d(u, v)} \\ &= \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} t}{\lim_{t \rightarrow t_0} t + d(u, v)} \\ &= \frac{t_0}{t_0 + d(u, v)} \\ &= M(u, v, t_0) \end{aligned}$$

olduğundan $M(u, v, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir.

O halde M, X de bir bulanık metrik ve $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Bu son örnekte sürekli t-norm $*_3$ olarak alındığında da $(X, M, *_3)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Örnek 3.2.28: (X, d) metrik uzay olsun. $u, v \in X$ ve $t > 0$ olmak üzere her bir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(u, v, t) = \frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(u, v)}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $(X, M, *_3)$ bir bulanık metrik uzaydır (Sapena, 2001).

Çözüm: Diğer bulanık metrik aksiyomlarını açık olduğundan sadece bulanık metrik koşullarından (iv) aksiyomu gösterilecektir. Lemma 3.2.25 den

$$1 + \frac{\beta d(u, w)}{\alpha(t+s)^n} \leq \max \left\{ 1 + \frac{\beta d(u, v)}{\alpha t^n}, 1 + \frac{\beta d(v, w)}{\alpha s^n} \right\}$$

olup buradan

$$\frac{\alpha(t+s)^n}{\alpha(t+s)^n + \beta d(u, w)} \geq \min \left\{ \frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(u, v)}, \frac{\alpha s^n}{\alpha s^n + \beta d(v, w)} \right\}$$

bulunur. Böylece $M(u, w, t+s) > M(u, v, t) *_3 M(u, w, t)$ ispatlanmış olur.

Bu örnek $n \in \mathbb{R}^+$ için geçerli değildir. Gerçekten $d, \mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği ise $\alpha = \beta = 1$ olmak üzere $n = \frac{1}{2}$ olarak alındığında $M, \mathbb{R}$ üzerinde bulanık metrik uzay olmaz.

Tanım 3.2.29: Örnek 3.2.27 ve Örnek 3.2.28 da eğer $\alpha = \beta = n = 1$ alınırsa

$$M_d(u, v, t) = \frac{t}{t + d(u, v)}$$

bulunur. Bu durumda M_d bulanık metriğine d tarafından indirgenen standart bulanık metrik denir (George ve Verammani, 1994).

Sonuç 3.2.30: Örnek 3.2.27 ve Örnek 3.2.28 örneklerinin bir sonucu olarak her metrik uzay bir bulanık metrik uzaydır diyebiliriz. Ancak tersi doğru değildir. Aşağıda bu durum için bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.31: $X \in \mathbb{N}$ ve $a *_2 b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için

$$M(u, v, t) = \begin{cases} \frac{u}{v} & ; u \leq v \\ \frac{v}{u} & ; v \leq u \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $(\mathbb{N}, M, *_2)$ bir bulanık metriktir. Fakat bu bulanık metrik için $\mathbb{N}$ üzerinde

$$M(u, v, t) = \frac{t}{t + d(u, v)}$$

eşitliğini sağlayan bir d metriği yoktur. Gerçekten d metriğinin var olduğu kabul edilerek gerekli işlemler yapılırsa,

$$d(u, v) = \frac{t(1 - M(u, v, t))}{M(u, v, t)}$$

dir. Bu fonksiyon metriğin üçüncü aksiyomunu sağlamaz. Bu nedenle (X, d) nin bir metrik uzay olmadığı görülür. Dolayısıyla her bulanık metrik uzay, bir metrik uzay değildir.

Örnek 3.2.32: (X, d) metrik uzay olsun. $u, v \in X$ ve $\alpha > 0$ bir sabit ise

$$M(u, v, t) = \frac{\alpha}{\alpha + d(u, v)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bulanık metriktir (Gregori vd., 2011).

Örnek 3.2.33: $X \neq \emptyset$ bir küme $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ birebir fonksiyon ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty)$ artan sürekli fonksiyon olsun. $\alpha, \beta > 0$ sabit sayılar $a *_2 b = ab$ olmak üzere $u, v \in X$, $t > 0$ için

$$M(u, v, t) = \left(\frac{(\min\{f(u), f(v)\})^\alpha + g(t)}{(\max\{f(u), f(v)\})^\alpha + g(t)} \right)^\beta$$

şeklinde tanımlanan M fonksiyonu, X üzerinde bir bulanık metriktir (Gregori vd., 2011).

Uyarı 3.2.34: Eğer Örnek 3.2.33 de $f = I$ ve $\alpha = \beta = 1$ olarak alınırsa;

a) $X = \mathbb{R}^+$ olsun. $u, v \in X$, $t > 0$ için

$$M(u, v, t) = \frac{\min\{u, v\} + t}{\max\{u, v\} + t}$$

b) $X \in \mathbb{N}$ ve $g(t) = 0$ olması halinde

$$M(u, v, t) = \frac{\min\{u, v\}}{\max\{u, v\}}$$

olarak tanımlanırsa $(X, M, *)$ bir bulanık metriktir.

Uyarı 3.2.35:

- Örnek 3.2.27 ve Örnek 3.2.28 de özel olarak $\alpha = \beta = n = 1$ alınırsa standart bulanık metrik elde edilir.
- Standart bulanık metrik uzaylar ve yerleşik bulanık metrik uzaylar temel bulanık metrik uzaylara birer örnektir.
- Örnek 3.2.32 de $(X, M, *)$ yerleşik bulanık metrik dolayısıyla kuvvetli ve temel bulanık metriktir. Fakat genelde $(M, *_3)$ yerleşik bulanık metrik olmaz.

Bu kısımda Park'ın sürekli t-norm ve sürekli t-conorm üzerinden vermiş olduğu sezgisel bulanık metrik uzay tanımı verilecektir. Ayrıca bu sezgisel bulanık metrik uzay ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 3.2.36: $\diamond : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi

- i) $\diamond$ işlemi birleşmeli ve değişmeli,
- ii) $\diamond$ işlemi sürekli,
- iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a \diamond 0 = a$,
- iv) $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a \diamond b \leq c \diamond d$.

koşullarını sağlıyorsa bu işleme sürekli t-conorm denir (Schweizer, 1960).

Örnek 3.2.37: $a, b \in [0,1]$ için

$$a \diamond_1 b = \min\{a + b - 1, 0\}$$

$$a \diamond_2 b = a + b - ab$$

$$a \diamond_3 b = \max\{a, b\}$$

Yukarıda verilen $\diamond_1, \diamond_2, \diamond_3$ birer sürekli t-conormdur. Ayrıca,

$$a \diamond_1 b \geq a \diamond_2 b \geq a \diamond_3 b$$

olduğu kolayca görülür. Öte yandan,

$$a \diamond b = 1 - (1 - a) * (1 - b)$$

dir.

Örnek 3.2.38: $a, b \in [0,1]$ için $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$ olarak tanımlı $\diamond$ işlem bir t-conormdur.

Tanım 3.2.39: $X \neq \emptyset$ ve $*$ işlemi sürekli t-norm, $\diamond$ işlemi sürekli t-conorm ve $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ kümeleri $X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde bulanık kümeler olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ beşlisine bir sezgisel bulanık metrik uzayı denir. $\forall u, v \in X$ ve $s, t > 0$ için

- i) $\mathcal{M}(u, v, t) + \mathcal{N}(u, v, t) \leq 1$,
- ii) $\mathcal{M}(u, v, t) > 0$,
- iii) $\mathcal{M}(u, v, t) = 1$ ancak ve ancak $u = v$,
- iv) $\mathcal{M}(u, v, t) = \mathcal{M}(v, u, t)$,
- v) $\mathcal{M}(u, v, t) * \mathcal{M}(v, w, s) \leq \mathcal{M}(u, w, t + s)$,
- vi) $\mathcal{M}(u, v, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli,dir,
- vii) $\mathcal{N}(u, v, t) < 1$,
- viii) $\mathcal{N}(u, v, t) = 0$ ancak ve ancak $u = v$
- ix) $\mathcal{N}(u, v, t) = \mathcal{N}(v, u, t)$,
- x) $\mathcal{N}(u, v, t) \diamond \mathcal{N}(v, w, s) \geq \mathcal{N}(v, w, t + s)$
- xi) $\mathcal{N}(u, v, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli,dir.

Yani bu tanıma göre kısaca $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ikilisine X üzerinde sezgisel bulanık metrik denir. Burada $\mathcal{M}(u, v, t)$ ve $\mathcal{N}(u, v, t)$ fonksiyonları sırası ile u ve v nin t ye göre birbirine yakın olma ve yakın olmama derecesidir (Schweizer, 1960).

Tanım 3.2.40: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık metrik uzay, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $u \in X$ olsun. $B(u, r, t) = \{v \in X : \mathcal{M}(u - v, t) > 1 - r, \mathcal{N}(u - v, t) < r\}$ kümesi t ye göre u merkezli ve r yarı çaplı açık yuvar olarak tanımlanır (Park, 2004).

Teorem 3.2.41: Her açık yuvar bir açık kümedir (Park, 2004).

Uyarı 3.2.42: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay olsun. Böylece,

$$\tau_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} = \{A \subset X : \forall u \in A \text{ için } B(u, v, t) \subset A \text{ olacak şekilde } t > 0 \text{ ve } r \in (0,1) \text{ vardır}\}$$

ailesi X de bir topolojidir (Park, 2004).

Teorem 3.2.43: Her sezgisel bulanık metrik uzay bir Hausdorff uzaydır (Park, 2004).

Tanım 3.2.44: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Böylece her $u, v \in A$ için

$$\mathcal{M}(u, v, t) > 1 - r \text{ ve } \mathcal{N}(u, v, t) < r$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ varsa, A kümesine sezgisel bulanık sınırlıdır denir (Park, 2004).

Tanım 3.2.45: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ X de d metriği tarafından üretilen sezgisel bulanık metrik uzay olsun. $A \subset X$ sezgisel bulanık sınırlıdır $\Leftrightarrow A$ kümesi sınırlıdır (Park, 2004).

Tanım 3.2.46: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık metrik uzay ve $\tau_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}$, $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ tarafından üretilen topoloji olsun. X üzerinde bir (u_n) dizisi $u \in X$ e yakınsaktır ancak ve ancak $n \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{M}(u_n, u, t) \rightarrow 1$ ve $\mathcal{N}(u_n, u, t) \rightarrow 0$ (Park, 2004).

Tanım 3.2.47: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $m, l > n_0$ olduğunda

$$\mathcal{M}(u_m, u_l, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \mathcal{N}(u_m, u_l, t) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (u_n) dizisine $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sezgisel bulanık metriğine göre bir Cauchy dizisi denir (Park, 2004).

Tanım 3.2.48: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ deki her Cauchy dizisi $\tau_{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}$ ye göre yakınsak ise $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ beşlisine tam sezgisel bulanık metrik uzay denir (Park, 2004).

Lemma 3.2.49: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık metrik uzay olsun. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \xrightarrow{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} u$ ve $v_n \xrightarrow{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} v$ ise $\forall t > 0$ için

- i) $\mathcal{M}(u, v, t) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u_k, v_k, t)$ ve $\mathcal{N}(u, v, t) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(u_k, v_k, t)$,
- ii) $\mathcal{M}(u, v, t) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u_k, v_k, t)$ ve $\mathcal{N}(u, v, t) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(u_k, v_k, t)$

eşitsizlikleri sağlanır (Alaca, vd., 2006).

Uyarı 3.2.50: $*$ t-normu ve $\diamond$ t-conormu $\forall u, v \in X$ için

$$u \diamond v = 1 - \left((1 - u) * (1 - v) \right)$$

olacak şekilde bağlantılı olmak üzere her $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı $(X, M, 1 - M, *, \diamond)$ formunda bir sezgisel bulanık metrik uzaydır (Lowen, 1996).

Uyarı 3.2.51: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık metrik uzayında $\forall u, v \in X$ için $\mathcal{M}(u, v, \cdot)$ azalmayan ve $\mathcal{N}(u, v, \cdot)$ artmayandır (Mohamad, 2006).

Örnek 3.2.52: (X, d) metrik uzay olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için

$$a *_2 b = ab \text{ ve } a \diamond b = \min\{1, a + b\}$$

ve $X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde $\mathcal{M}_d$ ve $\mathcal{N}_d$ bulanık kümeleri $\forall h, k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mathcal{M}_d(u, v, t) = \frac{ht^n}{ht^n + md(u, v)} \quad , \quad \mathcal{N}_d(u, v, t) = \frac{d(u, v)}{kt^n + md(u, v)}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $(X, \mathcal{M}_d, \mathcal{N}_d, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık metrik uzaydır. Bu bulanık metrik uzaya doğurulan (üretilen) bulanık metrik denir.

Uyarı 3.2.53: Yukarıdaki örnekte dikkat edilmelidir ki $a *_2 b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond b = \max\{a, b\}$ içinde bir sezgisel bulanık metrik uzaydır. Böylece $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sürekli bir t-norm ve sürekli t-conorm için sezgisel bulanık metrik uzaydır. Ayrıca yukarıdaki örnekte $h = k = m = n = 1$ alınır

$$\mathcal{M}_d(u, v, t) = \frac{t}{t + d(u, v)} \quad , \quad \mathcal{N}_d(u, v, t) = \frac{d(u, v)}{t + d(u, v)}$$

olup $(X, \mathcal{M}_d, \mathcal{N}_d, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık metrik uzaydır. Bu sezgisel bulanık metrik uzaya d metriği tarafından üretilen standart bulanık metrik uzay adı verilir.

Örnek 3.2.54: $X = \mathbb{N}$ olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için

$$a *_1 b = \max\{0, a + b - 1\} \text{ ve } a \diamond_2 b = a + b - ab$$

$X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ bulanık kümeleri $\forall u, v \in X, t > 0$ için

$$\mathcal{M}(u, v, t) = \begin{cases} \frac{u}{v} & ; u \leq v \\ \frac{v}{u} & ; v \leq u \end{cases}, \quad \mathcal{N}(u, v, t) = \begin{cases} \frac{v-u}{v} & ; u \leq v \\ \frac{u-v}{u} & ; v \leq u \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık metrik uzaydır.

Uyarı 3.2.55: Dikkat edilmelidir ki yukarıdaki örnekte $*$ t-normu ve $\diamond$ t-conorm bağlantılı değildir. Yukarıdaki örnekte X üzerinde $\mathcal{M}(u, v, t)$ ve $\mathcal{N}(u, v, t)$ bulanık kümeleri olmak üzere

$$\mathcal{M}_d(u, v, t) = \frac{t}{t + d(u, v)}, \quad \mathcal{N}_d(u, v, t) = \frac{d(u, v)}{t + d(u, v)}$$

olacak şekilde d metriği yoktur. Ayrıca yukarıdaki $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ fonksiyonları $a *_2 b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond_3 b = \max\{a, b\}$ olarak tanımlı t-norm ve t-conormlar ile birlikte bir sezgisel bulanık metrik uzay değildir.

3.3. Bulanık Normlu Uzaylar ve Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylar

Bu kesimde öncelikle bulanık normlu uzayın tanımı ifade edilecek ve bunun üzerinden sezgisel bulanık normlu uzayın tanımı ile birlikte bazı örnekler sunulacaktır.

Tanım 3.3.1 X bir vektör uzayı, $*$ dönüşümü sürekli t-norm ve N de $X \times (0, \infty)$ da tanımlı bir bulanık küme olsun. Burada N bulanık kümesi her $u, v \in X$ ve $t, s > 0$ için

- i) $N(u, t) > 0$,
- ii) $N(u, t) = 1 \Leftrightarrow u = 0$,
- iii) Her $\alpha \neq 0$ için $N(\alpha u, t) = N\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- iv) $N(u, t) * N(v, s) \leq N(u + v, t + s)$,
- v) $N(u, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli,
- vi) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(u, t) = 1$

şartlarını sağlanıyorsa N ye X vektör uzayı üzerinde bir bulanık norm ve $(X, N, *)$ üçlüsüne de bulanık normlu uzay denir (Saadati ve Vaezpour, 2005).

Örnek 3.3.2: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayı üzerinde $a *_2 b = ab$ alınsın. $u \in X$ ve $t \in (0, \infty)$ için

$$N(u, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|u\|}{t}}}$$

olarak tanımlansın. O halde $(X, N, *)$ bir bulanık normlu uzaydır.

Çözüm: $u \in X$ ve $t, s \in (0, \infty)$ için

i) $N(u, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|u\|}{t}}} > 0$ olduğu biliniyor.

ii) $N(u, t) = \frac{1}{e^{\frac{\|u\|}{t}}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\|u\|}{t}} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\|u\|}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u\| = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 0$$

iii) $\alpha \neq 0$ için

$$\begin{aligned} N(\alpha u, t) &= \frac{1}{e^{\frac{\|\alpha u\|}{t}}} \\ &= \frac{1}{e^{|\alpha| \frac{\|u\|}{t}}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{t}{|\alpha|}}} \\ &= N\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right) \end{aligned}$$

iv) Norm tanımından

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

olduğundan

$$\|u + v\| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right) \|u\| + \left(\frac{t+s}{s}\right) \|v\|$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\|u+v\|}{t+s} \leq \frac{\|u\|}{t} + \frac{\|v\|}{s}$$

olur. Üstel fonksiyonun özelliğinden

$$\begin{aligned} e^{\frac{\|u+v\|}{t+s}} &\leq e^{\frac{\|u\|}{t} + \frac{\|v\|}{s}} = e^{\frac{\|u\|}{t}} \cdot e^{\frac{\|v\|}{s}} \\ e^{\frac{\|u+v\|}{t+s}} &\leq e^{\frac{\|u\|}{t}} \cdot e^{\frac{\|v\|}{s}} \end{aligned}$$

olup

$$\frac{1}{e^{\frac{\|u\|}{t}}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\|v\|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{\|u+v\|}{t+s}}}$$

bulunur. Böylece,

$$N(u, t) *_2 N(v, s) \leq N(u+v, t+s)$$

eşitsizliği elde edilir.

v) e^u sürekli olduğundan $N(u, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli dir.

$$\begin{aligned} \text{vi) } \lim_{t \rightarrow \infty} N(u, t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{\|u\|}{t}}} \\ &= \frac{1}{e^0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $(X, N, *)$ bir bulanık normlu uzaydır.

Tanım 3.3.3: Eğer X bir vektör uzayı, $*$ işlemi bir sürekli t-norm, $\diamond$ işlemi sürekli bir t-conorm ve $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ kümeleri $X \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bulanık kümeler ise $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ beşlisine bir sezgisel bulanık normlu uzay denir. Her $u, v \in X$ ve $s, t > 0$ için

- i) $\mathcal{M}(u, t) + \mathcal{N}(u, t) \leq 1$,
- ii) $\mathcal{M}(u, t) > 0$,
- iii) $\mathcal{M}(u, t) = 1$ ancak ve ancak $u = 0$,
- iv) $\alpha \neq 0$ için $\mathcal{M}(\alpha u, t) = \mathcal{M}\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- v) $\mathcal{M}(u, t) * \mathcal{M}(v, s) \leq \mathcal{M}(u + v, s + t)$,
- vi) $\mathcal{M}(u, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli.
- vii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}(u, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{M}(u, t) = 0$,
- viii) $\mathcal{N}(u, t) < 1$,
- ix) $\mathcal{N}(u, t) = 0$ ancak ve ancak $t = 0$,
- x) $\alpha \neq 0$ için $\mathcal{N}(\alpha u, t) = \mathcal{N}\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- xi) $\mathcal{N}(u, t) \diamond \mathcal{N}(v, s) \geq \mathcal{N}(u + v, s + t)$,
- xii) $\mathcal{N}(u, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ sürekli,
- xiii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}(u, t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{N}(u, t) = 1$.

Böylece bu tanıma göre $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ikilisine bir sezgisel bulanık norm denir (Saadati ve Park, 2006). Eğer, $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ise

$$\text{xiv) Her } \alpha \in [0, 1] \text{ için } \alpha * \alpha = \alpha, \alpha \diamond \alpha = \alpha$$

koşulu sağlanır.

Örnek 3.3.4: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için

$$a *_2 b = a.b, \quad a \diamond b = \min\{1, a + b\}$$

olsun ve $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ kümeleri her $t \in \mathbb{R}^+$ için $X \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki gibi bulanık kümeler olsun.

$$\mathcal{M}(u, t) = \frac{1}{t + \|u\|} \quad \text{ve} \quad \mathcal{N}(u, t) = \frac{\|u\|}{t + \|u\|}$$

Bu taktirde $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzaydır (Saadati ve Vaezpour, 2005).

Tanım 3.3.5: (u_n) dizisi $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzayında u ya yakınsaktır denir ancak ve ancak her $t > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\mathcal{M}(u_n - u, t) \rightarrow 1 \text{ ve } \mathcal{N}(u_n - u, t) \rightarrow 0$$

dir. (u_n) dizisi u ya yakınsak ise $u_n \xrightarrow{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} u$ şeklinde gösterilir (Saadati ve Park, 2006).

Tanım 3.3.6: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $(u_n) \subset X$ dizi olsun. (u_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir ancak ve ancak her $t > 0$ ve her $\varepsilon \in (0, 1)$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k, m \geq k_0$ için

$$\mathcal{M}(u_k - u_m, t) > 1 - \alpha \text{ ve } \mathcal{N}(u_k - u_m, t) < \varepsilon$$

dir (Saadati ve Park, 2006).

Tanım 3.3.7: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu bir uzay olsun. $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ deki her Cauchy dizisi yakınsaksa $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ uzayına tamdır denir (Saadati ve Park, 2006).

Tanım 3.3.8: X ve Y iki sezgisel bulanık normlu uzay ve $f: X \rightarrow Y, u_0 \in X$ olsun. Eğer, X teki herhangi bir (u_n) dizisi u_0 a yakınsak iken $f(u_n)$ dizisi de Y de $f(u_0)$ a yakınsaksa f e $u_0 \in X$ de süreklidir denir. Eğer f, X in her noktasında sürekli ise bu taktirde f e X üzerinde süreklidir denir (Mursaleen ve Mohiuddine, 2009).

Tanım 3.3.9: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu bir uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $u \in A$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \xrightarrow{(\mathcal{M}, \mathcal{N})} u$ olacak şekilde bir (u_n) dizisi varsa A ya X de yoğundur denir (Mursaleen vd, 2010).

Sezgisel bulanık normlu uzaylar için önemli özellikleri veren aşağıdaki lemmayı ifade edelim (Saadati ve Park, 2006).

Lemma 3.3.10: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır:

- i) $u \in X$ için sırasıyla $\mathcal{M}(u, \cdot)$ ve $\mathcal{N}(u, \cdot)$ azalmayan ve artmayandır.
- ii) Herhangi bir $t > 0$ için $\mathcal{M}(u - v, t) = \mathcal{M}(v - u, t)$ ve $\mathcal{N}(u - v, t) = \mathcal{N}(v - u, t)$ dir.

4. BULGULAR

Bu bölümde sezgisel bulanık normlu uzaylarda bir fonksiyonun yaklaşık (approximate) sabit nokta özelliği tanımı verilecektir. Ayrıca sabit nokta teorisinde kullanılan bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık versiyonları tanımlanacak ve bu dönüşümlerin yaklaşık sabit nokta özelliğini hangi şartlarda sağladığı incelenecektir.

Tanım 4.1: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olarak verilsin. Verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$\mathcal{M}(T(u_0) - u_0, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \mathcal{N}(T(u_0) - u_0, t) < \varepsilon$$

ise $u_0 \in X$, T nin sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktası veya ε -sabit noktası olarak adlandırılır. T nin sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktalarının kümesi $F_\varepsilon^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T)$ ile gösterilir (Ertürk, vd., 2022).

Tanım 4.2: Eğer her $\varepsilon > 0$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ ise T sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Ertürk, vd., 2022).

Örnek 4.3: $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(u) = u + \frac{1}{3}$ ile verilsin. $|\cdot|, \mathbb{R}$ üzerinde alışılmış mutlak değer normunu gösterebilir. Her $a, b \in [0, 1]$ için $a *_2 b = ab$ ve $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$ ise

$$\mathcal{M}(u, t) = \frac{t}{t + |u|} \text{ ve } \mathcal{N}(u, t) = \frac{|u|}{t + |u|}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzaydır. Bir sabit noktaya sahip değildir. Eğer $\varepsilon > \frac{1}{3t+1}$ ve $t > 0$ için

$$\mathcal{M}(T(u) - u, t) = \frac{1}{t + |T(u) - u|} > 1 - \varepsilon \text{ ve } \mathcal{N}(T(u) - u, t) = \frac{|T(u) - u|}{t + |T(u) - u|} < \varepsilon$$

olduğundan dolayı her $u \in \mathbb{R}$, T için bir sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktadır. Fakat $\varepsilon < \frac{1}{3t+1}$ ve $t > 0$, $F_\varepsilon^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) = \emptyset$ dir.

Örnek 4.4: Örnek 4.3 de verilen sezgisel bulanık norm, t-norm, t-conorm ile $(0,1)$ kümesi bir sezgisel bulanık normlu uzaydır. $T: (0,1) \rightarrow (0,1)$ dönüşümü $T(u) = \frac{u}{3}$ ile verilsin. Bu dönüşümün sabit noktası yoktur. Ayrıca her $u, v \in (0,1)$ ve $t > 0$ için

$$\mathcal{M}\left(T(u) - T(v), \frac{t}{3}\right) = \frac{\frac{t}{3}}{\frac{1}{3} + \left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|} = \frac{t}{t + |u - v|} = \mathcal{M}(u - v, t)$$

ve

$$\mathcal{N}\left(T(u) - T(v), \frac{t}{3}\right) = \frac{\left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|}{\frac{1}{3} + \left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|} = \frac{|u - v|}{t + |u - v|} = \mathcal{N}(u - v, t)$$

olduğundan T bir sezgisel bulanık daralma dönüşümdür. Her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$$\mathcal{M}(u - T(u), t) = \mathcal{M}\left(u - \frac{1}{3}u, t\right) = \mathcal{M}\left(\frac{2}{3}u, t\right) = \frac{t}{t + \left|\frac{2}{3}u\right|} > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\mathcal{N}(u - f(u), t) = \mathcal{N}\left(u - \frac{1}{3}u, t\right) = \mathcal{N}\left(\frac{2}{3}u, t\right) = \frac{\left|\frac{2}{3}u\right|}{t + \left|\frac{2}{3}u\right|} < \varepsilon$$

eşitsizliklerinden $\frac{1}{3}u < \frac{\varepsilon t}{1 - \varepsilon}$ yazılır. Her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $\frac{1}{3}u < \frac{\varepsilon t}{1 - \varepsilon}$ olacak şekilde $u \in (0,1)$ olduğundan bu dönüşüm sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

Şimdi verilen fonksiyonun sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktalarının olup olmadığını kontrol etmek için önemli bir role sahip olan ve bizim de yöntem olarak kullanılacağımız sezgisel bulanık asimptotik regülerlik tanımı verilecektir.

Tanım 4.5: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall u \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) = 1$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) = 0$$

ise T ye sezgisel bulanık asimptotik regüler denir (Ertürk, vd., 2022).

Teorem 4.6: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. T sezgisel bulanık asimptotik regüler ise T sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Ertürk, vd., 2022).

İspat: u_0 , X in keyfi seçilmiş elemanı olsun. T sezgisel bulanık asimptotik regüler olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) = 1$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) = 0$$

dır. Bu durumda her $k > k_0(\varepsilon, t)$ için

$$\mathcal{M}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \mathcal{N}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) < \varepsilon$$

olacak şekilde $k_0(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $T^k(u_0)$, v_0 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) &= \mathcal{M}(T(T^k(u_0)) - T^k(u_0), t) \\ &= \mathcal{M}(T(v_0) - v_0, t) \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T^{k+1}(u_0) - T^k(u_0), t) &= \mathcal{N}(T(T^k(u_0)) - T^k(u_0), t) \\ &= \mathcal{N}(T(v_0) - v_0, t) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu da v_0 ın T nin bir sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktası olduğunu gösterir.

4.1. Bazı Sezgisel Bulanık Daralma Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda literatürde Ertürk ve arkadaşları tarafından ortaya konan klasik analizde verilen bazı daralma dönüşümlerinin sezgisel bulanık versiyonlarının tanımlarına ve bu dönüşümlerin yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı ispatlanan teoremlere yer verilecektir.

Tanım 4.1.1: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(Tu - Tv, \alpha t) &\geq \mathcal{M}(u - v, t) \\ \mathcal{N}(Tu - Tv, \alpha t) &\leq \mathcal{N}(u - v, t)\end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ varsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne sezgisel bulanık daralma dönüşümü denir (Ertürk, vd., 2022).

Teorem 4.1.2: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon \in (0,1)$ için $F_{\varepsilon}^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dir (Ertürk, vd., 2022).

İspat: $u \in X$, $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ olsun. T nin sezgisel bulanık daralma dönüşümü olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) &= \mathcal{M}\left(T(T^k(u)) - T(T^{k-1}(u)), t\right) \\ &\geq \mathcal{M}\left(T^k(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\alpha}\right) \\ &\geq \mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\alpha^2}\right) \\ &\geq \dots \\ &\geq \mathcal{M}\left(T(u) - u, \frac{1}{\alpha^k}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) &= \mathcal{N}\left(T(T^k(u)) - T(T^{k-1}(u)), t\right) \\ &\leq \mathcal{N}\left(T^k(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\alpha}\right) \\ &\leq \mathcal{N}\left(T^{k-1}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\alpha^2}\right) \\ &\leq \dots \\ &\leq \mathcal{N}\left(T(u) - u, \frac{t}{\alpha^k}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliklerde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\alpha \in (0,1)$ olduğundan $\frac{t}{\alpha^k} \rightarrow \infty$ dur. Sezgisel bulanık normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) = 1 \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(T^{k+1}(u) - T^k(u), t) = 0$$

bulunur. Yani T sezgisel bulanık asimptotik regülerdir ve Teorem 4.6 den dolayı sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

Tanım 4.1.3: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ fonksiyon olsun. $\forall (u, v) \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T(u) - T(v), \alpha t) &\geq \mathcal{M}(u - T(u), t) * \mathcal{M}(v - T(v), t) \\ \mathcal{N}(T(u) - T(v), \alpha t) &\leq \mathcal{N}(u - T(u), t) \diamond \mathcal{N}(v - T(v), t) \end{aligned}$$

şeklinde bir $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ varsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne sezgisel bulanık Kannan dönüşümü denir (Ertürk, vd., 2022).

Teorem 4.1.4: $a *_3 b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond_3 b = \max\{a, b\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip bir sezgisel bulanık normlu uzay olsun. $\ll \subset X \times X$ kısmi sıralama bağıntısı için aşağıdakilerin sağladığını varsayalım.

i) $\ll, X \times X$ in bir alt vektör uzayıdır

veya

ii) X , tam sıralı bir kümedir.

Eğer her $u \in X$ için $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık Kannan dönüşümü $u \ll T(u)$ i sağlar ve her $t > 0$ ve $u \gg \theta$ koşulunu sağlayan her $u \in X$ için $\mathcal{M}(\cdot, t)$ azalmayan ve $\mathcal{N}(\cdot, t)$ artmayan ise, her $\varepsilon \in (0,1)$ için $F_{\varepsilon}^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dir. Bu da $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık Kannan dönüşümü yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Ertürk, vd., 2022).

Tanım 4.1.5: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall (u, v) \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T(u) - T(v), \alpha t) &\geq \mathcal{M}(u - T(v), t) * \mathcal{M}(v - T(u), t) \\ \mathcal{N}(T(u) - T(v), \alpha t) &\leq \mathcal{N}(u - T(v), t) \diamond \mathcal{N}(v - T(u), t) \end{aligned}$$

şeklinde $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ varsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne sezgisel bulanık Chatterjea dönüşümü denir (Ertürk, vd., 2022).

Teorem 4.1.6: $a *_3 b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond_3 b = \max\{a, b\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$, $\ll$ ile gösterilen kısmi sıralamaya sahip bir sezgisel bulanık normlu uzay olsun. $\ll \subset X \times X$ kısmi sıralama bağıntısı için aşağıdakilerin sağladığını varsayalım.

i) $\ll$, $X \times X$ in bir alt vektör uzayıdır,

veya

ii) X , tam sıralı bir kümedir.

Eğer her $u \in X$ için $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık Chatterjea dönüşümü $u \ll f(u)$ i sağlar ve her $t > 0$ ve $x \gg \theta$ şartını sağlayan her $u \in X$ için $\mathcal{M}(\cdot, t)$ azalmayan ve $\mathcal{N}(\cdot, t)$ artmayan ise, her $\varepsilon \in (0, 1)$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dir. Yani $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık Chatterjea dönüşümü yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Ertürk, vd., 2022).

Sonuç 4.1.7: Teorem 4.1.6 da sezgisel bulanık Chatterjea dönüşümü için $u \ll T(u)$ ise ve her $t > 0$ ve $u \ll \theta$ şartını sağlayan her $u \in X$ için $\mathcal{M}(\cdot, t)$ artmayan ve $\mathcal{N}(\cdot, t)$ azalmayan ise $T: X \rightarrow X$ sezgisel bulanık Chatterjea dönüşümü yine yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olur (Ertürk, vd., 2022).

Tanım 4.1.8: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall (u, v) \in X$ ve $t > 0$ için aşağıdakilerden en az biri doğru olacak şekilde

$$\alpha \in (0, 1), k \in \left(0, \frac{1}{2}\right), c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

varsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne sezgisel bulanık Zamfirescu dönüşümü denir (Ertürk, vd., 2022).

- i) $\mathcal{M}(T(u) - T(v), \alpha t) \geq \mathcal{M}(u - v, t)$
 $\mathcal{N}(T(u) - T(v), \alpha t) \leq \mathcal{N}(u - v, t)$
- ii) $\mathcal{M}(T(u) - T(v), kt) \geq \mathcal{M}(u - T(u), t) * \mathcal{M}(v - T(v), t)$
 $\mathcal{N}(T(u) - T(v), kt) \leq \mathcal{N}(u - T(u), t) \diamond \mathcal{N}(v - T(v), t)$
- ii) $\mathcal{M}(T(u) - T(v), ct) \geq \mathcal{M}(u - T(v), t) * \mathcal{M}(v - T(u), t)$
 $\mathcal{N}(T(u) - T(v), ct) \leq \mathcal{N}(u - T(v), t) \diamond \mathcal{N}(v - T(u), t)$

Teorem 4.1.9: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir sezgisel bulanık Zamfirescu dönüşümü olsun. Sezgisel bulanık Kannan ve Chatterjea dönüşümü için verilen şartlarla sezgisel bulanık Zamfirescu dönüşümü yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Ertürk, vd., 2022).

Tanım 4.1.10: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T(u) - T(v), t) &\geq \mathcal{M}\left(u - v, \frac{t}{\alpha}\right) * \mathcal{M}\left(v - f(u), \frac{t}{L}\right) \\ \mathcal{N}(T(u) - T(v), t) &\leq \mathcal{N}\left(u - v, \frac{t}{\alpha}\right) \diamond \mathcal{N}\left(v - f(u), \frac{t}{L}\right)\end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha \in (0, 1)$ ve $L \geq 0$ varsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümü sezgisel bulanık zayıf daralma olarak adlandırılır (Ertürk, 2014).

Teorem 4.1.11: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir sezgisel bulanık zayıf daralma dönüşümü olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $F_{\varepsilon}^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dır (Ertürk, vd., 2022).

4.2. Yeni Sezgisel Bulanık Daralma Dönüşümleri için Yaklaşık Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık versiyonu tanımlanacak ve bu dönüşümlerin sezgisel bulanık normlu uzaylarda hangi koşullar altında yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı araştırılacaktır.

Şimdi Mihet tarafından tanımlanan ψ –bulanık daralma dönüşümünün tanımını verelim.

Tanım 4.2.1: $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

- i) ψ sürekli,
- ii) ψ azalmayan,
- iii) $\forall t \in (0, 1)$ için $\psi(t) > t$,

özelliklerini sağlayan tüm ψ dönüşümlerinin sınıfı $\Psi = \{\psi \mid \psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$ olsun. Ayrıca, $(X, M, *)$ bulanık metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $u, v \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(T(u), T(v), t) \geq \psi(M(u, v, t))$$

şartını sağlıyorsa T ye ψ – bulanık daralma dönüşümü denir (Mihet, 2004).

Şimdi Tanım 4.2.1 de verilen ψ – bulanık daralma dönüşümünün sezgisel ψ – bulanık daralma dönüşümünü tanımlayarak bu dönüşümün hangi şartlar altında yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığını veren teoremi ispatlayalım.

Tanım 4.2.2 (Sezgisel ψ – Bulanık Daralma Dönüşümü): $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ψ – bulanık daralma dönüşümü olsun. Eğer her $u, v \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mathcal{M}(T(u) - T(v), t) \geq \psi(\mathcal{M}(u - v, t))$$

$$\mathcal{N}(T(u) - T(v), t) \leq \psi(\mathcal{N}(u - v, t))$$

olacak şekilde ψ fonksiyonu varsa T dönüşümüne sezgisel ψ – bulanık daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 4.2.3: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir sezgisel ψ – bulanık daralma dönüşümü olsun. Eğer,

$$\mathcal{M}(T(u) - T(v), t) \geq \psi\left(\mathcal{M}\left(u - v, \frac{t}{\lambda}\right)\right)$$

$$\mathcal{N}(T(u) - T(v), t) \leq \psi\left(\mathcal{N}\left(u - v, \frac{t}{\lambda}\right)\right)$$

olacak şekilde her $t > 0$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi^k(t) = 0$ ve $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ var ise bu taktirde $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dır.

İspat: $u \in X, \varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olsun. Sezgisel bulanık normlu uzayın ve T sezgisel ψ – bulanık daralma dönüşümünün özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) &= \mathcal{M}\left(T\left(T^{k-1}(u)\right) - T\left(T^k(u)\right), t\right) \\ &\geq \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{\lambda}\right)\right) \\ &= \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^{k-1}(u) + T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda} + \frac{t}{2\lambda}\right)\right) \\ &\geq \psi\left(\underbrace{\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{2\lambda}\right)}_1 * \mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi \left(\mathcal{M} \left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda} \right) \right) \\
&> \mathcal{M} \left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda} \right) \\
&= \mathcal{M} \left(T(T^{k-2}(u)) - T(T^{k-1}(u)), \frac{t}{2\lambda} \right) \\
&\geq \psi \left(\mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{2\lambda^2} \right) \right) \\
&\geq \psi \left(\mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-2}(u) + T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{4\lambda^2} + \frac{t}{4\lambda^2} \right) \right) \\
&\geq \psi \left(\underbrace{\mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{4\lambda^2} \right)}_1 * \mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{4\lambda^2} \right) \right) \\
&= \psi \left(\mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{(2\lambda)^2} \right) \right) \\
&> \mathcal{M} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{(2\lambda)^2} \right) \\
&\quad \vdots \\
&> \mathcal{M} \left(u - T(u), \frac{t}{(2\lambda)^k} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ iken $\frac{t}{(2\lambda)^k} \rightarrow \infty$ dir. Sezgisel bulanık normun (vii) özelliklerinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M} \left(u - T(u), \frac{t}{(2\lambda)^k} \right) = 1$$

olup

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) = 1 \quad (2)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) &= \mathcal{N} \left(T(T^{k-1}(u)) - T(T^k(u)), t \right) \\
&\leq \psi \left(\mathcal{N} \left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{\lambda} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi \left(\mathcal{N} \left(T(T^{k-2}(u)) - T(T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda}), \frac{t}{\lambda} \right) \right) \\
&\leq \psi \left(\psi \left(\mathcal{N} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda^2} \right) \right) \right) \\
&= \psi^2 \left(\mathcal{N} \left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda^2} \right) \right) \\
&= \psi^2 \left(\mathcal{N} \left(T(T^{k-3}(u)) - T(T^{k-2}(u), \frac{t}{\lambda^2}), \frac{t}{\lambda^2} \right) \right) \\
&\leq \psi^2 \left(\psi \left(\mathcal{N} \left(T^{k-3}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\lambda^3} \right) \right) \right) \\
&= \psi^3 \left(\mathcal{N} \left(T^{k-3}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\lambda^3} \right) \right) \\
&\vdots \\
&\leq \psi^k \left(\mathcal{N} \left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k} \right) \right)
\end{aligned}$$

olup $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ iken $\frac{t}{\lambda^k} \rightarrow \infty$ dir. Sezgisel bulanık normun (xiii) özelliklerinden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N} \left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k} \right) = 0$ ve her $t = 0$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi^k(t) = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi^k \left(\mathcal{N} \left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k} \right) \right) = 0$$

dir. Böylece,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) = 0 \quad (3)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2) ve (3) den sezgisel ψ –bulanık daralma dönüşümü sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

Şimdi de Tanım 2.2.13 da verilen dönüşüm sınıfının sezgisel bulanık versiyonunu tanımlayalım.

Tanım 4.2.4 (Sezgisel f –Bulanık Daralma Dönüşümü): $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $f, T: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mathcal{M}(fT(u) - fT(v), t) \geq \mathcal{M}\left(f(u) - f(v), \frac{t}{\lambda}\right)$$

$$\mathcal{N}(fT(u) - fT(v), t) \leq \mathcal{N}\left(f(u) - f(v), \frac{t}{\lambda}\right)$$

olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ sayısı varsa T dönüşümüne sezgisel f –bulanık daralma dönüşümü adı verilir.

Uyarı 4.2.5: Sezgisel f – bulanık daralma dönüşümleri $f = I$ (I birim dönüşüm) alınması halinde sezgisel bulanık daralma dönüşümlerine denk olur.

Aşağıdaki teoremden ise sezgisel f – bulanık daralma dönüşümünün yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.6: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \diamond)$ sezgisel bulanık normlu uzay. $f, T: X \rightarrow X$ iki dönüşüm ve T bir sezgisel f – bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon \in (0,1)$ için $F_{\varepsilon}^{(\mathcal{M}, \mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $u \in X$, $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ olsun. T sezgisel f –bulanık daralma dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) &= \mathcal{M}\left(f(TT^{k-1}(u)) - f(TT^k(u)), t\right) \\ &\geq \mathcal{M}\left(fT^{k-1}(u) - fT^k(u), \frac{t}{\lambda}\right) \\ &= \mathcal{M}\left(f(TT^{k-2}(u)) - f(TT^{k-1}(u)), \frac{t}{\lambda}\right) \\ &\geq \mathcal{M}\left(f(T^{k-2}(u)) - f(T^{k-1}(u)), \frac{t}{\lambda^2}\right) \\ &\geq \vdots \\ &\geq \mathcal{M}\left(fT(u) - fT^2(u), \frac{t}{\lambda^{k-1}}\right) \\ &\geq \mathcal{M}\left(f(u) - fT(u), \frac{t}{\lambda^k}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) &= \mathcal{N}\left(f(TT^{k-1}(u)) - f(TT^k(u)), t\right) \\ &\leq \mathcal{N}\left(fT^{k-1}(u) - fT^k(u), \frac{t}{\lambda}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(f(TT^{k-2}(u)) - f(TT^{k-1}(u)), \frac{t}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathcal{N}\left(f\left(T^{k-2}(u)\right)-f\left(T^{k-1}(u)\right), \frac{t}{\lambda^2}\right) \\
&\leq \quad \vdots \\
&\leq \mathcal{N}\left(f T(u)-f T^2(u), \frac{t}{\lambda^{k-1}}\right) \\
&\leq \mathcal{N}\left(f(u)-f T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda \in (0,1)$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $\frac{t}{\lambda^k} \rightarrow \infty$ dur. Sezgisel bulanık normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}\left(f T^k(u)-f T^{k+1}(v), \lambda t\right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}\left(f(u)-f T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)=1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(f T^k(u)-f T^{k+1}(v), \lambda t\right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(f(u)-f T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)=0$$

elde edilir. Şu halde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}\left(f T^k(u)-f T^{k+1}(u), t\right)=1 \quad (4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(f T^k(u)-f T^{k+1}(u), t\right)=0 \quad (5)$$

olup (4) ve (5) den sezgisel f – bulanık daralma dönüşümünün sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğu görülür.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, genel olarak bulanık kavramı incelendi. Bulanık metrik uzaylar, bulanık normlu uzaylar ve sezgisel bulanık metrik uzaylar ile sezgisel bulanık normlu uzaylar hakkında genel bir literatür taraması yapıldı. Bu kapsamda yapılan araştırmalar sonucu sezgisel bulanık normlu uzaylarda yaklaşık sabit nokta özelliği üzerinde duruldu. Son bölümde ise klasik analizdeki bazı daralma dönüşümlerinin sezgisel bulanık kapsamında yeniden tanımları yapıldı ve bu dönüşümlerin yaklaşık sabit nokta özelliğini hangi şartlar altında sağladığı gösterildi. Sonuç olarak, farklı uzaylar ve farklı daralma dönüşümleri için yaklaşık sabit nokta teoremleri geliştirilebilir.

Ayrıca, tez çalışması boyunca yapılan çalışmalar sonucunda aşağıdaki kazanımlar elde edildi:

Bulanık kavramı mutlak bir kesinlik dışında belirsizlik durumlarını da matematiksel olarak modellemek için ortaya konmuş bir kavramdır.

Yaklaşık yüz yıllık bir gelişime sahip olan bulanık kavramı matematiğin birçok dalında hem teorik hem uygulamalı olarak yer almaktadır.

Özellikle topolojideki birçok kavram bulanık kümeler ile yeniden ifade edilmiştir.

Fonksiyonel analizin temel kavramlarından olan metrik uzay ve normlu uzay yapısı bulanık metrik uzay ve bulanık normlu uzaylar olarak birçok matematikçi tarafından farklı şekillerde yeniden tanımlanmıştır.

Bulanık metrik uzay ve bulanık normlu uzaylara paralel olarak sezgisel bulanık metrik uzay ve sezgisel bulanık normlu uzay kavramları geliştirildi.

Bulanık kavramındaki gelişmeler doğal olarak uygulamalı matematikte yaygın bir şekilde kullanılmaya başlandı. Özellikle uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan sabit nokta teorisi bulanık kavramı ile yeniden incelendi.

Bulanık metrik uzaylarda elde edilen birçok sabit nokta teorisinin yanı sıra yaklaşık sabit nokta özelliği üzerinde de ilerlemeler kaydedildi.

Bulanık kavramında elde edilen gelişmeler sadece matematikle sınırlı kalmayıp fizik, genetik, astronomi ve mühendislik gibi birçok farklı bilim dalında kullanılmaktadır.

KAYNAKÇA

- Abu Osman, M.T. (1983). Fuzzy metric spaces and fixed fuzzy set theorem. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 6(1), 1-4.
- Alaca, C. Türkoğlu, D. and Yıldız, C. (2006). Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons and Fractals*, 29: 1073-1078.
- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
- Banach, S. (1922). *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*, *Fund. Math*, 3: 49.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitapevi, Ankara.
- Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M. ve Pazandeh. H. (2009). Two fixed-point theorems for special mappings., arXiv:0903.1504v
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*: Springer, Berlin.
- Berinde, V.(2006). Approximation Fixed Point Theorems, *Studiu Univ. BABE-BOLYAI, Mathematica*, Volume LI, No1,11-25.
- Bryan, P.R. and Youngson M.A. (2000). *Linear Functional Analysis*, Springer, London.
- Browder, F.E. and Petryshyn, W. (1966). The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72,571-575.
- Chang, C .L. (1968). Fuzzy topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24: 182-190.
- Chatterjea, S. K. (1972). Fixed point theorems, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 25, 727-730.
- Cheng S. C. ve Mordeson J. M. (1994). Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bull.Calcutta Math Soc.*,86 (5),429-436.
- Çınar, M. (2015). *Fuzzy Metrik Uzaylar, Yüksek Lisans Tezi, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak (411461)*.
- Ertürk, M. and Karakaya, V. (2014). n –tuple coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces, *Jour. Function Spaces Appl.*, Volume 2014, Article number 821342,1-14.
- Ertürk, M., Karakaya, V. and Mursaleen, M. (2022). Approximate fixed point property in Ifns, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 12(1),329-346.

- Felbin, C. (1992). Finite dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and systems*. 48(2), 239-248.
- George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 6495-399.
- Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27, 385-389.
- Granas, A. and Dugundji, J. (2003). Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York.
- Gregori, V. and Sapane, A. (2002). On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 125, 245–252.
- Gregori V. and Romaguera S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 144, 411-420.
- Gregori, V., Lopez-Crevilén, A., Morillas S. and Sapena A. (2009). On convergence in fuzzy metric spaces. *Topology and its Applications*, 156, 3002-3006.
- Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A. (2010). On a class of completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 161, 2193-2205
- Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A., (2011). Examples of Fuzzy Metrics and Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170, 95-111.
- Hadzic O. and Pap, E. (2002). A fixed point theorem for multivalued mapping in propbalitistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*. 127, 333-344.
- Kaleva, O. and Seikkala, S., 1984). On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 12: 215-229.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.
- Katsaras A. K., (1984). Fuzzy Topological Vector Spaces. *Fuzzy Set and System*, 12143-154
- Kramosil, O. and Michalek, J. (1975). *Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces*. Kybernetika, 11, 326-334.
- Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John and Sons.
- Lowen, R. (1996). Fuzzy Set Theory, Dordrecht:Kluwer Academic Publishers.
- Mihet, D. (2004). A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 144, 431–439.
- Mohamad, A. (2006). Fixed-point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34 (2007), 1689–1695.

- Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Kütahya.
- Mursaleen, M. and Mohiuddine, S. (2009). Nonlinear Operators Between Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces and Frechet Derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2),1010-1015.
- Mursaleen, M., Karakaya, V. and Mohiuddine, S. A. (2010). *Schauder Basis, Separability and Approximation Property in Intuitionistic Fuzzy Normed Space*, Abstr. Appl. Anal., Volume 2010, Article ID 131868,1-14.
- Pao-Ming, P. and Ying-Ming, L. (1980). Fuzzy topology. II. Product and quotient spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 77, 20-37.
- Park, J.H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons Fractals*, 22, 1039-1046.
- Pugachev, V.V.S. and Sinitsyn, I.I.N. (1999). *Lectures on Functional Analysis and Applications*: World Scientific.
- Rodriguez-Lopez, J. and Romaguera, S. (2004). The Hausdorff Fuzzy Metric on Compact Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 147, 273-283.
- Saadati, R. and Park, J.H. (2006). *On the Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27331-344.
- Saadati, R. and Vaezpour S. (2005). *Some Results on Fuzzy Banach Spaces*, *J. Appl. Math & Computing* Vol. 17, No. 1-2,475 484.
- Schwiezer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10, 314-334.
- Şoltuz, S.M. and Grosan, T. (2008). Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-like Operators, *Fixed Point Theory and Applications*, (1), 1-7.
- Zadeh, L. A. (1975). Fuzzy Sets, *Information and Control*, 338-353.
- Zamfirescu, T. (1972). *Fixed Point Theorems in Metric Spaces*. *Archiv der Mathematik*, 23(1), 292-298.
- Wong, C. K. (1974). Fuzzy Topology: Product and Quotient Theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45, 512-521
- Wong, C. K. (1974). Fuzzy Topology: Product and Quotient Theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45, 512-521.

ÖZGEÇMİŞ

Gizem GÜZEL TAN . İlköğrenimini Osmaniye’de orta öğrenimini Bayburt’ta ve lise yıllarını İstanbul’da tamamladı. 2013 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimine başladı ve 2017 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2017 itibarıyla Milli Eğitim Müdürlüğünde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli olup, bir erkek çocuk annesidir.

Bildiri:

Cona, L. and Güzel Tan, G. (2023). Approximate Fixed Point in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces, 2. Bilsel International World Scientific and Research Congress, September 16-17, İstanbul, Turkey.