



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL SMOOTH TOPOLOJİ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Turan CANSU
20152110003

2018

GİRESUN

**T.C
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SEZGİSEL SMOOTH TOPOLOJİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Turan CANSU

Enstitü Ana Bilim Dalı : FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Kerim BEKAR

Haziran 2018

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL SMOOTH TOPOLOJİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Turan CANSU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 12/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN**

.....
Jüri Başkanı

**Dr. Öğr. Üyesi
Erdal ÜNLÜYOL**

.....
Üye

**Dr. Öğr. Üyesi
Kerim BEKAR**

.....
Üye

Doç. Dr. Bahadır KOZ

.....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerden herhangi bir tahrifat yapılmadığını başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Turan CANSU

../../2018

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyerek bana karşılaştığım her zorluğun üstesinden gelmemde yardımcı olan çok değerli tez danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Kerim Bekar'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nün çok değerli hocalarıma sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım. Ayrıca daima yanımda olan dualarını, desteklerini benden esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1.GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.KAYNAK ARAŞTIRILMASI	3
2.1. Bulanık Kümeler ve Bazı Temel Kavramlar	3
2.2.Bulanık Topolojik Uzaylar	6
2.3.Sezgisel Bulanık Kümeler	7
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1.Sezgisel Bulanık Kümelerle İlgili Literatürde Bulunan Bazı Sonuçlar	9
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	25
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$:=$	: Tanım olarak eşittir
$\Rightarrow$	: Gerek koşul
$\Leftarrow$	: Yeter koşul
$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır, mevcuttur
I	: $[0,1]$ kapalı aralığı
I^X	: X 'in bütün bulanık alt kümeleri
$\vee A$	: A nın supremumu
$\wedge A$	: A nın infimumu
$A = B$	: A, B ye eşittir
$\bar{A}$	: A 'nın tümleyeni
U	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
μ_A	: Ait olma derecesini gösteren fonksiyon
ν_A	: Ait olmama derecesini gösteren fonksiyon
$\tau_1(A)$	: A 'nın açıklık derecesi
$\tau_2(A)$	: A 'nın kapalılık derecesi
$\text{int}A$	: A bulanık kümesinin içi
$\text{cl}A$	: A bulanık kümesinin kapanışı
$\text{Sint}(A, r, s)$	: Bulanık (r, s) – yarı iç
$\text{Scl}(A, r, s)$	: Bulanık (r, s) – yarı kapanma
$I(X)$	: X 'deki tüm sezgisel bulanık kümelerin ailesi
SoIFTS	: Sostak anlamında sezgisel topolojik uzay

SEZGİSEL SMOOTH TOPOLOJİ

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ilk bölümünde öncelikle çalışmanın tarihi süreci ele alınmıştır. İkinci bölümde ise bulanık kümelerin genel özelliklerine değinilmiş bulanık topolojik uzay tanımı verilmiştir. Ayrıca bu bölümde sezgisel bulanık küme kavramı tanıtılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde sezgisel bulanık küme kavramının bazı özellikleri kullanılarak çeşitli teoremler ispatlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümde ise Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay tanımı ve özellikleri verilmiştir. Son olarak bu bölümde bulanık (r, s) –yarı açık küme ve bulanık (r, s) – yarı kapalı küme tanımları incelenmiştir.

Tezin son bölümde ise tartışma ve sonuç kısmı verilmiştir.

Anahtar kelimeler : Bulanık kümeler, Sezgisel bulanık topoloji, Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay, bulanık (r, s) – yarı açık küme ve bulanık (r, s) – yarı kapalı küme.

INTUITIONISTIC SMOOTH TOPOLOGY

SUMMARY

This study consists of five parts. In the first part of the study, the historical process of study is was first considered. In the second part, the definition of fuzzy topological spaces is given, which refer to general properties of fuzzy clusters. In addition, this section introduces the concept of intuitionistic fuzzy sets.

In the third part of thesis, various theorems have been proved by using some features of the concept of intuitionistic fuzzy sets.

In the fourth part of the thesis, definition and properties of topological space in the sense of Sostak are given. Finally, in this section, fuzzy (r, s) –semiopen cluster and fuzzy (r, s) – semiclosed cluster definitious are examined.

In the last part of the thesis, discussion and conclusion part are given.

Key Words : Fuzzy topology, intuitionistic fuzzy sets, intuitionistic fuzzy topological space in Sostak'ın sense fuzzy (r, s) –semiopen cluster and fuzzy (r, s) –semiclosed cluster.

BÖLÜM 1.GİRİŞ

Nesnelerin özellikleri veya ölçütlerine yönelik bilgi veya verilerin düzenlenmesi, özetlenmesi, sınıflandırılması veya genelleştirilmesi işlemlerinde küme kavramı ön plana çıkmaktadır. Klasik küme, evrensel kümedeki nesnelerin ortak özelliklerine göre bir araya getirme işlemi olarak tanımlanmaktadır. Burada nesneler bir kümenin elemanı ise üye, elemanı değilse üye değil şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durum sayısallaştırıldığında üye olanlar 1 değerini, olmayanlar 0 değerini almaktadır. Bulanık kümelerde ise klasik kümelerdeki elemandır veya değildir ifadesi yerine şu kadar elemandır ya da şu kadar eleman değildir ifadesi yer alır. Bir eleman için eleman olma durumu 1 veya olmama durumu 0 ile değil 0 ile 1 arasındaki üyelik derecesiyle gösterilir.

Bulanık küme kavramı ilk kez 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılmıştır [1]. Zadeh'in yaptığı bu çalışma bilgisayar teknolojisinde ve uygulamalı matematik alanlarında çalışan birçok insanın dikkatini çekmiştir. Ayrıca optimizasyon, yapay zeka, ekonomi, işletme gibi birçok farklı alanlarda çalışan bilim insanlarını etkilemiştir. Chang [2] bulanık topolojik uzay teorisini, topoloji kavramlarını ele alarak vermiştir. Daha sonra birçok araştırmacı bulanık topoloji üzerine çalışmalar yapmıştır.

Bulanık kümelerin bir genellemesi olan sezgisel bulanık kümeler kavramı 1968 yılında Atanassov [4] tarafından tanımlandı. Son zamanlarda Çoker ve diğerleri de sezgisel bulanık kümeler üzerinde topoloji kavramını tanımladı. [5 – 7]

Son yıllarda bulanık topoloji kavramına farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Sostak [8] bir kümenin bulanık alt kümelerinin açıklık derecesini tanımladı. Bu tanımda açık küme yerine kümenin açıklık derecesi, kapalılık derecesi gibi kavramları vermiştir. Sostak'ın oluşturduğu yapıya benzer bir yapıyı daha sonra Chattopadhyay, Hazra, ve Samanta [9] bulanık kümesini açıklık derecesi kavramını

tanımlamıştır. Ramadan [10] Sostak'ın tanımına benzer olan Smooth topoloji olarak adlandırdığı bir bulanık topoloji tanımını vermiştir.

Çoker ve Demirci [11] açıklık derecesi ve kapalılık derecesi fikirlerini kullanarak Sostak anlamına göre sezgisel bulanık topolojik uzayları bir genelleme olarak, smooth topolojik uzaylar ve sezgisel bulanık topolojik uzay olarak tanımlamıştır.



BÖLÜM 2.KAYNAK ARAŞTIRILMASI

2.1. Bulanık Kümeler ve Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve $I = [0,1]$ kapalı aralığı olsun. $A: X \rightarrow I$ fonksiyonuna X ' in bir bulanık alt kümesi denir. A bulanık kümesi

$A = \{ \langle x, A(x) : x \in X \}$ şeklinde gösterilebilir.

X ' in bütün bulanık alt kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir. Buna göre,

$I^X := \{A \mid A: X \rightarrow I \text{ bir fonksiyon} \}$ dur.

$x \in X$ ve $A \in I^X$ olmak üzere $A(x)$ değerine x noktasının A bulanık kümesine ait olma derecesi denir.

$\{x \in X \mid A(x) > 0\} \subset X$ alt kümesine A bulanık kümesinin desteği denir ve $\text{supp}(A)$ ile gösterilir.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi karakteristik fonksiyonu :

$$\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

ile X ' in bir bulanık alt kümesi olarak alınabilir. Dolayısıyla her klasik bir küme bulanık kümedir.

$$\chi_\emptyset : X \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \rightarrow \chi_\emptyset(x) = 0$$

sabit fonksiyonu ile X 'in boş bulanık kümesi elde edilir ve $\chi_\emptyset = \tilde{0}$ yazılır.

$$\chi_x : X \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \rightarrow \chi_x(x) = 1$$

sabit fonksiyonu ile X' e karşılık gelen bulanık kümesi ifade edilir ve $\chi_x = \tilde{1}$ [1] .

Tanım 2.1.2. Eğer X' in bir A bulanık kümesi bir tek $x \in X$ noktası hariç X' in diğer bütün noktalarında 0 değerini alıyorsa bu bulanık kümeye bir bulanık nokta denir.

X' deki bir bulanık noktanın bir $x \in X$ noktasındaki değeri λ ($0 < \lambda \leq 1$) ise bu bulanık nokta x_λ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$x_\lambda: X \rightarrow I$ olmak üzere

$$x_\lambda(y) := \begin{cases} \lambda, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

Bu durumda x' e x_λ bulanık noktasının desteği, λ değerine de x_λ bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir. Ve sırayla $\text{supp}(x_\lambda) = x$ ve $h(x_\lambda) = \lambda$ ile gösterilir. X' deki bütün noktaların kümesi $P(X)$ ile gösterilir. Dolayısıyla

$$P(X) := \{x_\lambda | x \in X, 0 < \lambda \leq 1\}$$

olur. $A \in I^X$ ve $x_\lambda \in P(X)$ olsun. Eğer $A(x) \geq \lambda$ ise x_λ bulanık noktası A kümesine aittir denir ve $x_\lambda \in A$ yazılır. Yani $x_\lambda \in A \Leftrightarrow A(x) \geq \lambda$ [13] dır.

Tanım 2.1.3. A ve B iki bulanık küme olsun.

$$1) A = B : \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) = B(x)$$

$$2) A \leq B : \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) \leq B(x)$$

$$3) A^c : X \rightarrow I \text{ ve } \forall x \in X$$

$x \rightarrow A^c(x) : = 1 - A(x)$ olarak tanımlanan A^c bulanık kümesine A kümesinin tümleyeni denir [1] .

Tanım 2.1.4. $A, B \in I^X$ olsun.

a) A ile B bulanık kümelerin birleşim işlemi, $\forall x \in X$ için

$$(A \cup B)(x) := \max\{A(x), B(x)\} \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Daha genel olarak, X üzerindeki bulanık kümelerin ailesi $\{A_m \in I^X | m \in M\}$ için

$$\text{birleşim işlemi } \forall x \in X \text{ için } (\bigcup_{m \in M} A_m)(x) := \sup\{A_m(x) | m \in M\} = (\bigvee_{m \in M} A_m)(x)$$

b) A ile B bulanık kümelerin kesişim işlemi $\forall x \in X$ için

$$(A \cap B)(x) := \min\{A(x), B(x)\} \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Daha genel olarak, X üzerindeki bulanık kümelerin ailesi $\{A_m \in I^X | m \in M\}$ için

kesişim ailesi $\forall x \in X$ için $(\bigcap_{m \in M} A_m)(x) := \inf\{A_m(x) | m \in M\} = (\bigwedge_{m \in M} A_m)(x)$

biçiminde tanımlanır [13].

Tanım 2.1.5. X ve Y boştan farklı iki küme olsun. $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

$A \in I^X$ bulanık kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü $\forall y \in Y$ için

$$f(A): Y \rightarrow I \quad f(A)(y) := \begin{cases} \sup A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $B \in I^Y$ bulanık kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(B): X \rightarrow I \quad f^{-1}(B)(x) := (B \circ f)(x) = B(f(x)) \quad (\forall x \in X) [13].$$

2.2.Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme $\tau \subset I^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde bir bulanık topoloji denir [2] .

(X, τ) ikilisine de bir bulanık topolojik uzay denir [2] .

$$1) \tilde{0}, \tilde{1} \in \tau$$

$$2) A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$$

$$3) \forall m \in M \text{ için } A_m \in \tau \Rightarrow \bigvee_{m \in M} A_m \in \tau$$

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \in I^X$ olsun. $A^c \in \tau$ ise A 'ya kapalı bulanık küme denir.

X kümesinin tüm kapalı bulanık alt kümeleri τ' ile gösterilir [2].

Tanım 2.2.2. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki bulanık topolojik uzay olsun.

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ fonksiyonu bulanık süreklidir $\Leftrightarrow \forall B \in \tau^*$ için $f^{-1}(B) \in \tau$. [2]

2.3.Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde A sezgisel bulanık kümesi

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada $\mu_A: X \rightarrow I$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için x' in A' ya ait olma durumu derecesi ve $\nu_A: X \rightarrow I$ fonksiyonuna ise $\forall x \in X$ için x' in A'ya ait olmama derecesini gösteren bulanık kümelerdir. Ayrıca $\forall x \in X$ için

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1.$$

Kolaylık olması için X' deki tüm sezgisel bulanık kümelerin ailesini $IF(X)$ olarak gösterelim. Basitlik olması için biz $A = (\mu_A(x), \nu_A(x))$ olarak alalım.

UYARI 2.3.2. A bir bulanık küme olmak üzere $\forall x \in X$ in A'ya ait olma derecesi $A(x)$, ait olmama derecesi $1 - A(x)$ olarak düşünüldüğünde bu A bulanık kümesi bir sezgisel bulanık küme olarak göz önüne alınabilir. Yani A bulanık kümesi özel olarak ;

$$A = \{ \langle x, A(x), 1 - A(x) \rangle : x \in X \}$$

sezgisel bulanık küme şeklinde yazılabilir [14].

Tanım 2.3.3. A sezgisel bulanık küme olsun.

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), x \in X$$

şeklinde tanımlanan değere x noktasının A sezgisel bulanık kümesinde belirsizlik derecesi denir. Buradaki değere biz x elemanının A kümesine ait olup olmama belirsizliğinin derecesi denir. O zaman $\pi_A(x)$, 0 ile 1 aralığında değişmektedir. Yani

$$0 \leq \pi_A(x) \leq 1 \text{ dir}$$

Tanım 2.3.4. [14] X boştan farklı bir küme ve A,B iki sezgisel bulanık küme olsun.

Buna göre

$$1) A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)$$

$$2) A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

$$3) \bar{A} = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$4) A \cap B = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$5) A \cup B = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$6) A+B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), v_A(x) \cdot v_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$7) A \cdot B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), v_A(x) + v_B(x) - v_A(x) \cdot v_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$8) \cup A_i = \{ \langle x, \bigvee \mu_{A_i}(x), \bigwedge v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$9) \cap A_i = \{ \langle x, \bigwedge \mu_{A_i}(x), \bigvee v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$



BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Sezgisel Bulanık Kümelerle İlgili Literatürde Bulunan Bazı Sonuçlar

Teorem 3.1.1 [15,16]

a) $\cap$ ve $\cup$ işlemleri değişmeli, birleşmeli, aralarında sağa ve sola

dağılmış eş güçlü olduğundan De Morgan kuralını sağlar.

b) $+$ ve $\cdot$ işlemleri De Morgan yasasına benzer şekilde değiştirilebilir bir kanun uygular.

c) $+$ ve $\cdot$ işlemleri $\cap$ ve $\cup$ işlemine göre sağa ve sola değiştirilir.

İspat: a) $X - \cap_{i \in \Lambda} A_i = \cup_{i \in \Lambda} (X - A_i)$ olduğunu gösterelim.

$$\cap_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, \inf \mu_{A_i}(x), \sup v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\cup_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, \sup \mu_{A_i}(x), \inf v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}.$$

$$\overline{\cap_{i \in \Lambda} A_i} = \{ \langle x, \sup \mu_{A_i}(x), \inf v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (1)$$

$$A_i = \{ \langle x, \mu_{A_i}(x), v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}.$$

$$\overline{A_i} = \{ \langle x, v_{A_i}(x), \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}.$$

$$\cup_{i \in \Lambda} \overline{A_i} = \{ \langle x, \sup v_{A_i}(x), \inf \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (2)$$

(1) ve (2)'den $X - \cap_{i \in \Lambda} A_i = \cup_{i \in \Lambda} (X - A_i)$ 'dir.)

b) i) $\overline{\cup_{i \in \Lambda} A_i} = \cap_{i \in \Lambda} \overline{A_i} \Rightarrow [X - (\cup_{i \in \Lambda} A_i) = \cap_{i \in \Lambda} (X - A_i)]$ bakalım.

$$\cup_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, \sup \mu_{A_i}(x), \inf v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$X - \cup_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, v_{A_i}(x), \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} = \overline{\cup_{i \in \Lambda} A_i}$$

$$\overline{+_{i \in \Lambda} A_i} = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) - +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} = X - (+_{i \in \Lambda} A_i) \quad (3)$$

$$\overline{+_{i \in \Lambda} A_i} = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) - +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} = +_{i \in \Lambda} (X - A_i) \quad (4)$$

(3) ve (4) birbirine eşittir

$$\text{ii) } \overline{+_{i \in \Lambda} A_i} = +_{i \in \Lambda} \overline{A_i} \Rightarrow [X - (+_{i \in \Lambda} A_i) = +_{i \in \Lambda} (X - A_i)]$$

$$+_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$+_{i \in \Lambda} A_i = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x) - +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$(X - A_i) = \{ \langle x, v_{A_i}(x), \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} = \overline{A_i}$$

$$X - (+_{i \in \Lambda} A_i) = \overline{+_{i \in \Lambda} A_i} = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x) - +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (5)$$

$$+_{i \in \Lambda} (X - A_i) = \{ \langle x, +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x) - +_{i \in \Lambda} v_{A_i}(x), +_{i \in \Lambda} \mu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (6)$$

(5) ve (6) birbirine eşittir.

$$\text{c) i) } A + (B \cup C) = (A + B) \cup (A + C)$$

$$\text{ii) } A.(B \cup C) = (A.B) \cup (A.C) \text{ olduğu aşikârdır.}$$

Her sezgisel bulanık kümeyi bir bulanık kümeye dönüştüren sezgisel bulanık kümelerinin iki işlemini tanımlayalım.

Tanım 3.1.2. A herhangi bir sezgisel bulanık kümesi için

$$\Box A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle : x \in X \} = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

ifadesine gereklilik operatörü denir.

$$\Diamond A = \{ \langle x, 1 - v_A(x) \rangle : x \in X \} = \{ \langle x, 1 - v_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

ifadesine ise olanaklılık operatörü denir.

Teorem 3.1.3. A sezgisel bulanık kümesi için aşağıdakiler doğrudur.

$$1) \Box A = \overline{\Diamond A};$$

$$2) \Diamond A = \overline{\Box A};$$

$$3) \Box A \subset A \subset \Diamond A;$$

$$4) \square\square A = \square A ;$$

$$5) \square\Diamond A = \Diamond A ;$$

$$6) \Diamond\square A = \square A$$

$$7) \Diamond\Diamond A = \Diamond A \quad [15,16].$$

İspat: 1) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$

$$\square A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond A = \{ \langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\overline{A} = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond\overline{A} = \{ \langle x, 1 - \mu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Diamond\overline{A}} &= \{ \langle x, 1 - \mu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \} \\ &= \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \} \end{aligned}$$

2) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$

$$\square A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond A = \{ \langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\overline{A} = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\square\overline{A} = \{ \langle x, \nu_A(x), 1 - \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\begin{aligned} \overline{\square\overline{A}} &= \overline{\{ \langle x, \nu_A(x), 1 - \nu_A(x) \rangle : x \in X \}} \\ &= \{ \langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \} \end{aligned}$$

3) $\square A \subset A \Rightarrow \forall x \in X$ için

$$\mu_{\square A}(x) = \mu_A(x) \leq \mu_A(x) \text{ ve } \nu_{\square A}(x) = 1 - \mu_A(x) \leq \nu_A(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (7)$$

$$A \subset \Diamond A \Rightarrow \forall x \in X \text{ için}$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_{\diamond A}(x) = 1 - v_A(x) \text{ ve } v_A(x) \geq v_{\diamond A}(x) \quad (8)$$

(7) ve (8) den $\Box A \subset A \subset \Diamond A$ 'dir.

$$4) \Box A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box \Box A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \} \text{ olduğundan}$$

$$\Box \Box A = \Box A \text{ 'dir}$$

$$5) A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond A = \{ \langle x, 1 - v_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box \Diamond A = \{ \langle x, 1 - v_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box \Diamond A = \Diamond A \text{ 'dir.}$$

$$6) A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond \Box A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond \Box A = \Box A$$

$$7) A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond A = \{ \langle x, 1 - v_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond \Diamond A = \{ \langle x, 1 - v_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond \Diamond A = \Diamond A \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.1.3. A ve B sezgisel bulanık kümeleri için aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

$$1) \Box (A \cup B) = \Box A \cup \Box B$$

$$2) \Diamond (A \cup B) = \Diamond A \cup \Diamond B$$

İspat: 1) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), v_B(x) \rangle : x \in X \}$

$$(A \cup B) = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\square (A \cup B) = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), 1 - \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\square A \cup \square B = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$1 - \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$ olduğunu gösterelim.

$\mu_A(x) := a$ ve $\mu_B(x) := b$ olsun. O zaman $a < b$ veya $a > b$ dir.

i) Eğer $a < b$ ise $\max(a, b) = b$

$$1 - a > 1 - b \text{ ise } \min(1 - a, 1 - b) = 1 - b \quad (9)$$

ii) Eğer $a > b$ ise $\max(a, b) = a$

$$1 - a < 1 - b \text{ ise } \min(1 - a, 1 - b) = 1 - a \quad (10)$$

(9) ve (10) dan dolayı $\square (A \cup B) = \square A \cup \square B$

$$2) A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle : x \in X \}, B = \{ \langle x, \mu_B(x), v_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$(A \cup B) = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\diamond(A \cup B) = \{ \langle x, 1 - \min(v_A(x), v_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\diamond A \cup \diamond B = \{ \langle x, \max(1 - v_A(x), 1 - v_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$1 - \min(v_A(x), v_B(x)) = \max(1 - v_A(x), 1 - v_B(x))$ olduğunu gösterelim

$v_A(x) = c$ ve $v_B(x) = d$ olsun.

$$1 - \min(c, d) = \max(1 - c, 1 - d)$$

$c < d$ veya $c > d$ olsun.

i) Eğer $c < d \Rightarrow \min(c, d) = c$

$$1 - c > 1 - d \Rightarrow \max(1 - c, 1 - d) = 1 - c \quad (11)$$

ii) $c > d \Rightarrow \min(c, d) = d$

$$1 - c < 1 - d \Rightarrow \max(1 - c, 1 - d) = 1 - d \quad (12)$$

(11) ve (12) dan $\diamond(A \cup B) = \diamond A \cup \diamond B$ dir.

Teorem 3.1.4. A ve B sezgisel bulanık kümeler için aşağıdakiler doğrudur.

$$1) \square (A \cap B) = \square A \cap \square B$$

$$2) \diamond (A \cap B) = \diamond A \cap \diamond B$$

$$3) \square (A + B) = \square A + \square B$$

$$4) \diamond (A + B) = \overline{\diamond A \cdot \diamond B}$$

$$5) \square (A \cdot B) = \square A \cdot \square B$$

$$6) \diamond (A \cdot B) = \overline{\diamond A + \diamond B}$$

İspat: 1) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle : x \in X \}$

$$A \cap B = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\square (A \cap B) = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), 1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\square A \cap \square B = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$ olduğunu gösterelim.

$\mu_A(x) := a$ ve $\mu_B(x) := b$ olsun. O zaman $a < b$ veya $a > b$ dir.

i) Eğer $a < b$ ise

$$\min(a, b) = a$$

$$1 - a > 1 - b \Rightarrow \max(1 - a, 1 - b) = 1 - a \quad (13)$$

ii) $a > b$ ise

$$1 - \min(a, b) = b$$

$$1 - a < 1 - b \Rightarrow \max(1 - a, 1 - b) = 1 - b \quad (14)$$

(13) ve (14) dan $\square (A \cap B) = \square A \cap \square B$

2) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle : x \in X \}$

$$A \cap B = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond(A \cap B) = \{ \langle x, 1 - \max(v_A(x), v_B(x)), \max(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\Diamond A \cap \Diamond B = \{ \langle x, \min(1 - v_A(x), 1 - v_B(x)), \max(v_A(x), v_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$1 - \max(v_A(x), v_B(x)) = \min(1 - v_A(x), 1 - v_B(x)) \text{ olduğunu gösterelim}$$

$$v_A(x) := c \text{ ve } v_B(x) := d \text{ olsun.}$$

$$c < d \text{ veya } c > d \text{ dir.}$$

i) Eğer $c < d$

$$1 - \max(c, d) = 1 - d$$

$$1 - c > 1 - d \Rightarrow \min(1 - c, 1 - d) = 1 - d \quad (15)$$

$$\text{ii) } c > d \Rightarrow 1 - \max(c, d) = 1 - c$$

$$1 - c < 1 - d \Rightarrow \min(1 - c, 1 - d) = 1 - c \quad (16)$$

$$(15) \text{ ve } (16) \text{ dan } \Diamond(A \cap B) = \Diamond A \cap \Diamond B$$

$$3) (A + B) = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), v_A(x) \cdot v_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box(A + B) = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), 1 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box A + \Box B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), (1 - \mu_A(x)), 1 - \mu_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$(1 - \mu_A(x)) \cdot (1 - \mu_B(x)) = 1 - \mu_B(x) - [\mu_A(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)]$$

$$= 1 - \mu_B(x) - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \text{ olduğundan}$$

$$\Box(A \cup B) = \Box A + \Box B \text{ dir.}$$

4) 3 e benzer şekilde yapılır.

$$5) A \cdot B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), 1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box A \cdot \Box B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), 1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\Box(A \cdot B) = \Box A \cdot \Box B$$

$$\begin{aligned}
6) \diamond (A \cdot B) &= \diamond \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x) \rangle : x \in X \} \\
&= \{ \langle x, 1 - \nu_A(x) - \nu_B(x) + \nu_A(x) \cdot \nu_B(x) \rangle : x \in X \} \\
&= \overline{\{ \langle x, \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x) \cdot \nu_B(x) \rangle : x \in X \}} \\
&= \overline{\{ \langle x, \nu_A(x) \rangle : x \in X \} + \{ \langle x, \nu_B(x) \rangle : x \in X \}} \\
&= \overline{\diamond A + \diamond B}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki iki ilişki mümkündür.[17]

$$a) A \subset_{\square} B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

$$b) A \subset_{\diamond} B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \nu_A(x) \geq \nu_B(x).$$

$\subset_{\square}$ ve $\subset_{\diamond}$ kavramların bir gerekçesi şu şekildedir.

Teorem 3.1.5. A ve B sezgisel bulanık kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

$$1) A \subset_{\square} B \Leftrightarrow \square A \subset \square B$$

$$2) A \subset_{\diamond} B \Leftrightarrow \diamond A \subset \diamond B$$

İspat: 1) " $\Rightarrow$ " $A \subset_{\square} B$ olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

$\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olduğundan $-\mu_A(x) \geq -\mu_B(x) \Rightarrow 1 - \mu_A(x) \geq 1 - \mu_B(x)$ dir.

Bu ise $\subset$ tanımına göre $\square A \subset \square B$ dir.

" $\Leftarrow$ " Eğer $\square A \subset \square B$ ise $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dir. Yani $A \subset_{\square} B$ 'dir.

$$2) " $\Rightarrow$ " $A \subset_{\diamond} B$ olsun. $\forall x \in X$ için $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$.$$

$$\forall x \in X \text{ için } -\nu_A(x) \leq -\nu_B(x) \Rightarrow 1 - \nu_A(x) \leq 1 - \nu_B(x)$$

$$\forall x \in X \text{ için } \nu_A(x) \geq \nu_B(x) \text{ ve } 1 - \nu_A(x) \leq 1 - \nu_B(x)$$

Bu ise $\subset$ tanımına göre $\diamond A \subset \diamond B$

" $\Leftarrow$ " Eğer $\diamond A \subset \diamond B$ ise o zaman $\forall x \in X$ için $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ dir. Yani $A \subset_{\diamond} B$ dir.

Not 3.1.6. A sezgisel bir bulanık küme ve $x \in X$ olsun.

$$\text{Eğer } A \sqsubset B \Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \pi_A(x) \leq \pi_B(x)$$

Teorem 3.1.7. A ve B sezgisel bulanık kümeleri için ;

$$1) A \sqsubset_{\square} B \text{ ve } A \sqsubset_{\diamond} B \Leftrightarrow A \sqsubset B$$

$$2) A \sqsubset_{\square} B \text{ ve } A \sqsubset B \text{ o zaman } A \sqsubset B$$

$$3) A \sqsubset_{\diamond} B \text{ ve } B \sqsubset A \text{ o zaman } A \sqsubset B$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: 1) Eğer $A \sqsubset_{\square} B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve}$

$$A \sqsubset_{\diamond} B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } v_A(x) \geq v_B(x) \text{ dir.}$$

$A \sqsubset_{\square} B$ ve $A \sqsubset_{\diamond} B$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $v_A(x) \geq v_B(x)$ dir

Bu nedenle $A \sqsubset B$ 'dir. Aksine $A \sqsubset B$ ise $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $v_A(x) \geq v_B(x)$ olur. Yani $A \sqsubset_{\square} B$ ve $A \sqsubset_{\diamond} B$ 'dir.

$$2) A \sqsubset_{\square} B \text{ olduğundan } \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (17)$$

$$A \sqsubset B \text{ olduğundan } \forall x \in X \text{ için } \pi_A(x) \leq \pi_B(x) \text{ dir.}$$

$$\forall x \in X \text{ için } 1 - \mu_A(x) - v_A(x) \leq 1 - \mu_B(x)$$

$$-1 + \mu_A(x) + v_A(x) \geq -1 + \mu_B(x) + v_B(x)$$

$$\mu_A(x) + v_A(x) \geq \mu_B(x) + v_B(x)$$

$$\mu_B(x) + v_B(x) \leq \mu_A(x) + v_A(x) \quad (18) \text{ ve } \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

(17) den $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olduğundan her iki tarafa $v_B(x)$ eklersek

$$\mu_A(x) + v_B(x) \leq \mu_B(x) + v_B(x) \text{ elde ederiz.} \quad (19)$$

(17) ve (19) dan $\mu_A(x) + v_B(x) \leq \mu_B(x) + v_B(x) \leq \mu_A(x) + v_A(x)$

$$\mu_A(x) + v_B(x) \leq \mu_A(x) + v_A(x) \Rightarrow v_B(x) \leq v_A(x) \quad (20)$$

(17) ve (20) den $A \subset B$ 'dir.

$$3) A \subset_\emptyset B \text{ olduğundan } \forall x \in X \text{ için } v_A(x) \geq v_B(x) \quad (21)$$

$B \subset A$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\pi_B(x) \leq \pi_A(x)$ dir

$$\forall x \in X \text{ için } 1 - \mu_B(x) - v_B(x) \leq 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$$

$$-1 + \mu_B(x) + v_B(x) \geq -1 + \mu_A(x) + v_A(x)$$

$$\mu_A(x) + v_A(x) \leq \mu_B(x) + v_B(x) \quad (1) \text{ ve } v_A(x) \geq v_B(x) \quad (22)$$

(22) nin her tarafına $\mu_B(x)$ eklersek

$$v_A(x) + \mu_B(x) \geq v_B(x) + \mu_B(x) \quad (23)$$

$$v_A(x) + \mu_B(x) \geq v_B(x) + \mu_B(x) \geq \mu_A(x) + v_A(x)$$

$$v_A(x) + \mu_B(x) \geq \mu_A(x) + v_A(x) \Rightarrow \mu_B(x) \geq \mu_A \Rightarrow \mu_A \leq \mu_B(x) \quad (24)$$

(21) ve (24) den $A \subset B$ 'dir.

Teorem 3.1.8. $A, B, C, B_i \in I(X)$ ve $i \in I$ olsun.

$$1) \tilde{0} \subset A \subset \tilde{1}$$

$$2) (\overline{\tilde{0}}) = \tilde{1} ; (\overline{\tilde{1}}) = \tilde{0}$$

$$3) A \subset B \text{ ve } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$4) A, B \subset A \cup B ; A \cap B = A, B$$

$$5) A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$$

$$6) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$7) A \cup (\cap_i B_i) = \cap_i (A \cup B_i) ; A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$$

$$8) A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

$$9) (\overline{\cup_i B_i}) = \cap_i \overline{B_i} ; (\overline{\cap_i B_i}) = \cup_i \overline{B_i}$$

$$10) \overline{\overline{A}} = A$$

İspat: 1) $\tilde{0} = (\widetilde{0,1})$ dir

$x \in X$ keyfi verilsin ve $0 \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq 1$ 'dir. Çünkü $\mu_A(x), \nu_A(x) : X \rightarrow I = [0,1]$ dir. Dolayısıyla $\tilde{0} \subset A$ 'dır. (25)

$A \subset \tilde{1}$ olduğunu gösterelim.

$$A = (\mu_A(x), \nu_A(x)) \text{ ve } \tilde{1} = (\widetilde{1,0}) \quad (26)$$

$x \in X$ keyfi verilsin. $\mu_A(x) \leq 1$ ve $\nu_A(x) \geq 0$ 'dır.

Çünkü $\mu_A(x), \nu_A(x) : X \rightarrow I = [0,1]$

Dolayısıyla $A \subset \tilde{1}$ 'dır.

(25) ve (26) dan $\tilde{0} \subset A \subset \tilde{1}$, olup ispat tamamlanır.

2) $(\overline{\tilde{0}}) = \tilde{1}$ olduğunu gösterelim.

$$(\overline{\tilde{0}}) = (\overline{\widetilde{0,1}}) = (\widetilde{1,0}) = \tilde{1}$$

$$(\overline{\tilde{1}}) = (\overline{\widetilde{1,0}}) = (\widetilde{0,1}) = \tilde{0} \text{ dir.}$$

3) $A = (\mu_A(x), \nu_A(x))$, $B = (\mu_B(x), \nu_B(x))$, $C = (\mu_C(x), \nu_C(x))$ olsun.

Eğer $x \in X$ keyfi ise $A \subset B \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ dir. (27)

Eğer $x \in X$ keyfi ise $B \subset C \Rightarrow \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$, $\nu_B(x) \geq \nu_C(x)$ dir. (28)

(27) ve (28) den $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_C(x)$ dir.

4) $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle : x \in X \}$

$$A \cup B = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle : x \in X \}$$

$$(\mu_A(x), \nu_A(x)), (\mu_B(x), \nu_B(x)) \subset \left\{ \left(\langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle : x \in X \right) \right\}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\nu_{A \cup B}(x) = \min(\nu_A(x), \nu_B(x))$$

$$\mu_A(x), \mu_B(x) \leq \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$v_A(x), v_B(x) \geq v_{A \cup B}(x) = \min(v_A(x), v_B(x))$ olduğundan $A, B \subset A \cup B$ dir.

$A \cap B \subset A, B$ olduğunu gösterelim.

$$A \cap B = \{x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(v_A(x), v_B(x)) : x \in X\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ dir.}$$

$$v_{A \cap B}(x) = \max(v_A(x), v_B(x)) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla " $\subset$ " tanımından

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq \mu_A(x), \mu_B(x) \quad (29)$$

$$v_{A \cap B}(x) = \max(v_A(x), v_B(x)) \geq v_A(x), v_B(x) \quad (30)$$

(29) ve (30) dan $A \cap B \subset A, B$ dir.

$$5) A \cup B = \{x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(v_A(x), v_B(x)) : x \in X\}$$

$$B \cup A = \{x, \max(\mu_B(x), \mu_A(x)), \min(v_B(x), v_A(x)) : x \in X\}$$

$$\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(\mu_B(x), \mu_A(x)) \text{ ve}$$

$$\min(v_A(x), v_B(x)) = \min(v_B(x), v_A(x)) \text{ olduğundan } A \cup B = B \cup A$$

$A \cap B = B \cap A$ olduğunu gösterelim.

$$A \cap B = \{x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(v_A(x), v_B(x)) : x \in X\}$$

$$B \cap A = \{x, \min(\mu_B(x), \mu_A(x)), \max(v_B(x), v_A(x)) : x \in X\}$$

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min(\mu_B(x), \mu_A(x)) \quad (31)$$

$$\max(v_A(x), v_B(x)) = \max(v_B(x), v_A(x)) \quad (32)$$

Dolayısıyla (31) ve (32) den $A \cap B = B \cap A$ dir.

$$6) B \cup C = (\max(\mu_B(x), \mu_C(x)), \min(v_B(x), v_C(x)))$$

$$A \cup (B \cup C) = \left(\max(\mu_A(x), \max(\mu_B(x), \mu_C(x))), \min(v_A(x), \min(v_B(x), v_C(x))) \right)$$

$$(A \cup B) \cup C = \left(\max(\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)), \min(\min(v_A(x), v_B(x), v_C(x))) \right)$$

$a, b, c \in [0,1]$ için $\mu_A(x) = a$ ve $\mu_B(x) = b$, $\mu_C(x) = c$ olsun.

$\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$ olduğunu gösterelim.

i) Eğer $a \geq b, c$ ise $a = \max(a, b)$ 'dir ve $a \geq \max(b, c)$

$$a = \max(a, \max(b, c)) \quad (33)$$

$$\max(\max(a, b), c) = \max(a, b) = a \quad (34)$$

olduğundan (33) ve (34) den eşitlik sağlanır.

$$\text{Eğer } b \geq a, c \Rightarrow \max(a, \max(b, c)) = \max(a, b) = b \quad (35)$$

$$\max(a, \max(b, c)) = \max(b, c) = b \quad (36)$$

(35) ve (36) den sağlanır.

Eğer $c \geq a, b$ olsun. $\Rightarrow \max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$

$$\max(a, \max(b, c)) = \max(a, c) = c \quad (37)$$

$$\max(\max(a, b), c) = \max(c, c) = c \quad (38)$$

(37) ve (38) den sağlanır.

$\min(v_A(x), \min(v_B(x), v_C(x))) = \min(\min(v_A(x), v_B(x)), v_C(x))$ olduğundan

$v_A(x) := t$, $v_B(x) := s$, $v_C(x) := k$ olsun.

$$\min(t, \min(s, k)) = \min(\min(t, s), k) \text{ dır.}$$

i) Eğer $t \leq s, k$ ise

$$\min(t, t) = t \quad (39)$$

$$\min(\min(t, s), k) = \min(t, k) = \min(t, k) = t \quad (40)$$

(39) ve (40)'den eşitlik sağlanır.

ii) Eğer $s \leq t, k$ ise

$$\min(t, \min(s, k)) = \min(t, s) = s \quad (41)$$

$$\min(\min(t, s), k) = \min(s, k) = s \quad (42)$$

(41) ve (42) den eşitlik sağlanır.

iii) $k \leq s, t$ ise

$$\min(t, \min(s, k)) = \min(t, k) = k \quad (43)$$

$$\min(\min(t, s), k) = \min(k, k) = k \quad (44)$$

(43) ve (44) den eşitlik sağlanır. Dolayısıyla $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ benzer şekilde yapılır.

7) $\{a_i : i \in \Lambda\} \subset [0,1]$ ve $z \in [0,1]$ olsun.

$\max(z, \bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i \max(z, a_i)$ olduğunu gösterelim.

$\bigwedge_i \max(z, a_i) = : k$ olsun.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists i_0 \in \Lambda$ öyle ki $\max(z, a_{i_0}) < k + \varepsilon$ buradan $z < k + \varepsilon$ ve $a_{i_0} < k + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $z \leq k$ ve $\bigwedge_i a_i \leq k$ dir.

$\Rightarrow \max(z, \bigwedge_i a_i) \leq k$

$$\max(z, \bigwedge_i a_i) \leq \bigwedge_i \max(z, a_i) \quad (45)$$

Tersine $\max(z, \bigwedge_i a_i) = : k$ olsun.

$\Rightarrow z \leq k \quad \forall \varepsilon > 0$ için ve $\bigwedge_i a_i \leq k$ dir

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists i_0 \in \Lambda$ öyle ki $a_{i_0} < k + \varepsilon$ dir. Buradan ve $z \leq k$ olduğundan

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists i_0 \in \Lambda$ öyle ki $\max(z, a_{i_0}) < k + \varepsilon$

$$\Rightarrow \bigwedge_i \max(z, a_i) \leq k = \max(z, \bigwedge_i a_i) \quad (46)$$

(45) ve (46) dan $\max(z, \bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i \max(z, a_i)$ dir.

8) $A = (\mu_A(x), \nu_A(x))$, $B = (\mu_B(x), \nu_B(x))$, $\bar{A} = (\nu_A(x), \mu_A(x))$, $\bar{B} = (\nu_B(x), \mu_B(x))$ olsun.

" $\Rightarrow$ " $x \in X$ keyfi verilsin. O zaman $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ olduğundan $\nu_A(x) \leq \nu_B(x)$ ve $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ dir.

" $\Leftarrow$ " Eğer $x \in X$ keyfi verilsin. $\bar{A} \subset \bar{B}$ olduğundan $v_A(x) \leq v_B(x)$ ve $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ dir. O zaman

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } v_A(x) \geq v_B(x) \text{ dir.}$$

$$9) i) (\cup_i B_i) = \{ \langle x, \bigvee_i \mu_{B_i}(x), \bigwedge_i v_{B_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\overline{\cup_i B_i} = \{ \langle x, \bigwedge_i v_{B_i}(x), \bigvee_i \mu_{B_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (47)$$

$$\bar{B}_i = \{ \langle x, v_{B_i}(x), \mu_{B_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$\cap \bar{B}_i = \{ \langle x, \bigwedge_i v_{B_i}(x), \bigvee_i \mu_{B_i}(x) \rangle : x \in X \} \quad (48)$$

(47)ve (48) den eşitlik sağlanır.

ii) $\overline{\cap_i B_i} = \cup \bar{B}_i$ benzer şekilde yapılır.

$$10) \overline{A} = (\mu_A(x), v_A(x)) = \bar{A} = (\mu_A(x), v_A(x))$$

$$\bar{\bar{A}} = (\overline{v_A(x), \mu_A(x)}) = (\mu_A(x), v_A(x)) \text{ olur.}$$

$$\bar{\bar{\bar{A}}} = A \text{ dır}$$

Tanım 3.1.9. X ve Y boş olmayan iki küme $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \in I(X)$ olsun.

a) A, X' de sezgisel bulanık küme olmak üzere A 'nın f altındaki görüntüsü $f(A)$ ile gösterilir ve $f(A) = (\mu_{f(A)}, v_{f(A)})$ şeklinde ifade edilir.

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee \{ \mu_A(x) : x \in f^{-1}(y) \} , & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 , & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

$$v_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigwedge \{ v_A(x) : x \in f^{-1}(y) \} , & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 1 , & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

b) $B \in I(X)$ olsun. B, Y' de sezgisel bulanık küme olmak üzere B 'nin f altındaki

ters görüntüsü $f^{-1}(B) = (\mu_{f^{-1}(B)}, \nu_{f^{-1}(B)})$ olarak tanımlanır.

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)), \quad \nu_{f^{-1}(B)}(x) = \nu_B(f(x)) \text{ dir.}$$

Sonuç 3.1.10. $A, A_i, \in I(X)$ ve $B, B_i \in I(Y)$, $i \in I, j \in J$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

$$1). A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$2). B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$3). \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) \text{ dir. Eğer } f \text{ örten ise eşitlik sağlanır.}$$

$$4). f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)} \text{ dir.}$$

$$5). A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ dir. Eğer } f \text{ 1-1 ise eşitlik sağlanır.}$$

$$6). B \subset f(f^{-1}(B)) \text{ dir. Eğer } f \text{ örten ise eşitlik sağlanır.}$$

$$7). f^{-1}(\cup_j B_j) = \cup_j f^{-1}(B_j)$$

$$8). f^{-1}(\cap_j B_j) = \cap_j f^{-1}(B_j)$$

$$9). f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$$

$$10). f(\cap_i A_i) = \cap_i f(A_i)' \text{ dir. Eğer } f \text{ 1-1 ise eşitlik sağlanır.}$$

$$11). f^{-1}(\tilde{1}_Y) = \tilde{1}_X$$

$$12). f^{-1}(\tilde{0}_Y) = \tilde{0}_X [5] .$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde bulanık (r, s) – yarı açık kümeleri ve bulanık (r, s) – yarı kapalı kümelerini Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzaylarda tanıttık ve daha sonra bazı özelliklerini inceledik.

Tanım 4.1 X üzerinde smooth bulanık bir topoloji şu şekilde tanımlanır. $\tau : I^X \rightarrow I$ bir fonksiyon olsun.

- 1). $\tau(\tilde{0}) = \tau(\tilde{1}) = 1$
- 2). $\tau(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq \tau(\mu_1) \wedge \tau(\mu_2)$
- 3). $\tau(\vee \mu_i) \geq \wedge (\mu_i)$

şartları sağlıyorsa (X, τ) ya smooth bulanık topolojik uzay adı verilir.

X üzerindeki sezgisel bulanık topoloji, X' deki sezgisel bulanık kümelerin τ ailesi olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) $0_-, 1_- \in \tau$
- 2) $A_1, A_2 \in \tau$ için $A_1 \cap A_2 \in \tau$
- 3) $\{A_i\}_{i \in J} \subset \tau$ için $\bigcup A_i \in \tau$

(X, τ) ya sezgisel bulanık topolojik uzay olarak adlandırılır. $I(X)$, X' in bütün sezgisel bulanık kümelerinden oluşan bir ailesi olsun. $I \otimes I$, $(r, s) \in \tau$ ve $r + s \leq 1$ koşulunu sağlayan (r, s) çiftlerinin bir kümesi olsun.

Tanım 4.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde Sostak anlamında bir sezgisel bulanık topoloji (biz kısaca SoIFTS olarak tanımlayalım) için $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ ve $\tau : I(X) \rightarrow I \otimes I$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır [11].

- 1) $\tau_1(0_-) = \tau_1(1_-) = 1$ ve $\tau_2(0_-) = \tau_2(1_-) = 0$
- 2) $\tau_1(A \cap B) \geq \tau_1(A) \wedge \tau_1(B)$ ve

$$\tau_2(A \cap B) \leq \tau_2(A) \vee \tau_2(B)$$

$$3) \tau_1(\cup A_i) \geq \wedge \tau_1(A_i) \text{ ve } \tau_2(\cup A_i) \leq \vee \tau_2(A_i)$$

$(X, \tau) = (X, \tau_1, \tau_2)$ 'ye Sostak anlamında bir sezgisel bulanık topolojik uzay denir. $\tau_1(A)$ 'ya A'nın bir açıklık derecesi denir. $\tau_2(A)$ 'ya A'nın kapalılık derecesi denir.

Tanım 4.1.3. A sezgisel bulanık küme, (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve $(r,s) \in I \otimes I$. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır [12] .

$$1) \tau_1(A) \geq r \text{ ve } \tau_2(A) \leq s \Rightarrow A \text{ 'ya bulanık } (r,s)\text{-açık}$$

$$2) \tau_1(A^c) \geq r \text{ ve } \tau_2(A^c) \leq s \Rightarrow A \text{ 'ya bulanık } (r,s)\text{-kapalı}$$

Tanım 4.1.4. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay ve $\forall (r,s) \in I \otimes I$ ve $\forall A \in I(X)$ olsun [12] .

1) $\text{int}(A, r, s) = \cup \{B \in I(X) : A \supset B, B \text{ bulanık } (r, s) - \text{açık}\}$ ifadesine A'nın içi denir.

2) $\text{cl}(A, r, s) = \cap \{B \in I(X) : A \subset B, B \text{ bulanık } (r, s) - \text{kapalı}\}$ ifadesine bulanık A'nın kapanışı denir. $\text{Int} : I(X) \times I \otimes I \rightarrow I(X)$ ve $\text{cl} : I(X) \times I \otimes I \rightarrow I(X)$ sırasıyla (X, τ_1, τ_2) de bulanık iç operatör ve bulanık kapanış operatörü olarak adlandırılır.

Lemma 4.1.5. A bulanık (r,s) açıktır $\Leftrightarrow A^c$ bulanık (r,s) kapalıdır.

İspat : " $\Rightarrow$ " A bulanık (r,s) açık alalım.

$$\tau_1(A) \geq r \text{ ve } \tau_2(A) \leq s$$

$$\tau_1((A^c)^c) \geq r \text{ ve } \tau_2((A^c)^c) \leq s$$

$$\Rightarrow A^c \text{ bulanık } (r,s) \text{ kapalıdır.}$$

" $\Leftarrow$ " A^c bulanık (r,s) kapalı olsun .

$$\tau_1((A^c)^c) \geq r \text{ ve } \tau_2((A^c)^c) \leq s$$

$$\tau_1(A) \geq r \text{ ve } \tau_2(A) \leq s$$

$$\Rightarrow A \text{ bulanık } (r,s) \text{ açıktır.}$$

NOT 4.1.6. $0_{\sim}=(0,1)$ ve $1_{\sim}=(1,0)$ dir.

Lemma 4.1.7. A sezgisel bulanık küme (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay ve $(r,s) \in I \otimes I$ olsun [12].

$$1) [\text{int}(A, r, s)]^c = \text{cl}(A^c, r, s)$$

$$2) [\text{cl}(A, r, s)]^c = \text{int}(A^c, r, s)$$

İspat: 1) $\text{int}(A, r, s) = (\bigvee \mu_B, \bigwedge \nu_B)$

$$[\text{int}(A, r, s)]^c = (\bigwedge \nu_B, \bigvee \mu_B)$$

$$\text{cl}(A, r, s) = (\bigwedge \mu_F, \bigvee \nu_F)$$

$$\text{cl}(A^c, r, s) = (\bigwedge \mu_F, \bigvee \nu_F)$$

$(\bigwedge \nu_B, \bigvee \mu_B) = (\bigwedge \mu_F, \bigvee \nu_F)$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $\bigwedge \nu_B = \bigwedge \mu_F$ olduğuna bakalım.

$$X := \{ \nu_B | B \subset A, \tau_1(B) \geq r, \tau_2(B) \leq s \}$$

$Y := \{ \mu_F | A^c \subset F, \tau_1(F^c) \geq r, \tau_2(F^c) \leq s \}$ olarak tanımlayalım.

$\nu_B \in X$ keyfi verilsin

$$\Rightarrow B \subset A, \tau_1(B) \geq r \text{ ve } \tau_2(B) \leq s \text{ 'dir.}$$

$$A^c \subset B^c, \tau_1((B^c))^c \geq r \text{ ve } \tau_2((B^c))^c \leq s$$

$\Rightarrow A^c \subset B^c$ ve B^c bulanık (r,s) kapalıdır ve ayrıca $B^c = (\mu_{B^c}, \nu_{B^c}) = (\nu_B, \mu_B)$ olduğundan Y 'nin tanımından $\nu_B = \mu_{B^c} \in Y$ 'dir. Dolayısıyla $\nu_B \in Y$ 'dir.

$$\Rightarrow X \subset Y \text{ 'dir} \quad (49)$$

$\mu_F \in Y$ keyfi verilsin.

O halde $A^c \subset F, \tau_1(F^c) \geq r$ ve $\tau_2(F^c) \leq s$ 'dir.

$$\Rightarrow F^c \subset A, \tau_1(F^c) \geq r \text{ ve } \tau_2(F^c) \leq s \text{ 'dir.}$$

$\Rightarrow F^c \subset A$ ve F^c bulanık (r,s) açıktır. Ayrıca $F^c = (\mu_{F^c}, \nu_{F^c}) = (\nu_F, \mu_F)$ olduğundan ve X ' in tanımından $\mu_F = \nu_{F^c} \in X$ 'dir. Yani $\mu_F \in X$ 'dir.

$$\Rightarrow Y \subset X \text{ 'dir} \quad (50)$$

(49) ve (50) 'den $X = Y$ 'dir.

2) Benzer şekilde yapılır.

(X, τ) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay olsun. O zaman $\forall (r, s) \in I \otimes I$ için $\tau_{(r,s)}$ ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tau_{(r,s)} = \{A \in I(X) | \tau_1(A) \geq r \text{ ve } \tau_2(A) \leq s\}$$

ve X üzerinde sezgisel bulanık topolojidir.

İspat : $\tau_{(r,s)}$, X üzerinde bir sezgisel bulanık topoloji olduğunu gösterelim.

i). $0_{\sim} \in \tau_{(r,s)}$ olduğunu gösterelim. $r \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ olsun.

$\tau_1(0_{\sim}) = 1 \geq r$ ve $\tau_2(0_{\sim}) \leq s$ olduğundan $0_{\sim} \in \tau_{(r,s)}$ dir.

$1_{\sim} \in \tau_{(r,s)}$ olduğunu gösterelim. $r \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ olsun.

$\tau_1(1_{\sim}) = 1 \geq r$ ve $\tau_2(1_{\sim}) \leq s$ $1_{\sim} \in \tau_{(r,s)}$ dir.

ii) $A_1, A_2 \in \tau$ keyfi verilsin. $A_1 \in \tau_{(r,s)}$ ve $A_2 \in \tau_{(r,s)}$ olsun.

$$\tau_1(A_1) \geq r \text{ ve } \tau_2(A_1) \leq s$$

$\tau_1(A_2) \geq r$ ve $\tau_2(A_2) \leq s$ dir. (X, τ) bir Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay olduğundan

$$\tau_1(A_1 \cap A_2) \geq \tau_1(A_1) \wedge \tau_1(A_2) \geq r \wedge r$$

$$\Rightarrow \tau_1(A_1 \cap A_2) \geq r \text{ 'dir}$$

$$\tau_2(A_1 \cap A_2) \leq \tau_2(A_1) \vee \tau_2(A_2) \leq s \vee s$$

$$\Rightarrow \tau_2(A_1 \cap A_2) \leq s \text{ 'dir.}$$

iii) $A_i \in \tau_{(r,s)}$, $\forall i \in I$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{(r,s)}$ olduğunu gösterelim.

$\forall i \in I$ için $A_i \in \tau_{(r,s)}$ olsun.

$\forall i \in I$ için $\tau_1(A_i) \geq r$ ve $\tau_2(A_i) \leq s$ dir. Buradan $\bigwedge_{i \in I} \tau_1(A_i) \geq r$ ve $\bigvee_{i \in I} \tau_2(A_i) \leq s$ dir.

(X, τ) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay olduğundan ve tanım 4.1.2 den $\tau_1(\bigcup_{i \in I} A_i) \geq \wedge \tau_1(A_i) \geq r$ ve $\tau_2(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \vee \tau_1(A_i) \leq s$ dir. Yani

$$\tau_1(\bigcup A_i) \geq r \text{ ve } \tau_2(\bigcup A_i) \leq s \text{ dir. Dolayısıyla } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{(r,s)} \text{ 'dir.}$$

Teorem 4.1.8. (X, τ) sezgisel bir topolojik uzay ve $(r,s) \in I \otimes I$ ve $\tau^{(r,s)} : I(X) \rightarrow I \otimes I$ olsun. O zaman

$$\tau^{(r,s)}(A) = \begin{cases} (1,0), & A = 0_{\sim}, 1_{\sim} \\ (r,s), & A \in \tau - \{0_{\sim}, 1_{\sim}\} \\ (0,1), & A \notin \tau, \end{cases}$$

X üzerinde Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojidir.

İspat: 1) $\tau^{(r,s)} : I(X) \rightarrow I \otimes I$ olsun. $\tau^{(r,s)} : (\tau_1^{(r,s)}, \tau_2^{(r,s)})$ olarak gösterelim.

$$\tau_1^{(r,s)}(0_{\sim}) = ?$$

$$\tau^{(r,s)}(0_{\sim}) = (1,0) \Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(0_{\sim}) = 1 \text{ ve } \tau_2^{(r,s)}(0_{\sim}) = 0$$

$$\tau_1^{(r,s)}(1_{\sim}) = ?$$

$$\tau^{(r,s)}(1_{\sim}) = (1,0) \Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(1_{\sim}) = 1 \text{ ve } \tau_2^{(r,s)}(1_{\sim}) = 0$$

2) $A, B \in I(X)$ keyfi verilsin

Göstermemiz gereken : $\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B)$

$$\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B)$$

i) $A \notin \tau$ ve $B \notin \tau$ olması durumunda

$$\tau^{(r,s)}(A) = \tau^{(r,s)}(B) = (0,1) \Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(A) = \tau_1^{(r,s)}(B) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B)$$

ii) $A, B \in \tau - \{0,1\}$ olsun.

$$\tau^{(r,s)}(A) = \tau^{(r,s)}(B) = r$$

diğer yandan (X, τ) bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve $A, B \in \tau - \{0,1\}$ olduğundan $A \cap B \in \tau$ 'dir. O halde

$$\tau^{(r,s)}(A) = \begin{cases} (1,0), A = 0_{\sim}, 1_{\sim} \\ (r,s), A \in \tau - \{0_{\sim}, 1_{\sim}\} \\ (0,1), \text{diğer} \end{cases}$$

dönüşümüne göre $\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq r$ dir. O halde

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

iii) $A = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun.

$$(A \cap B) = 0_{\sim} \text{ veya } 1_{\sim} \Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(A \cap B) = (1,0) . \text{Yani}$$

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) = 1 \text{ 'dir}$$

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) = 1 = \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

iv) $A \notin \tau$ ve $B \in \tau - \{0,1\}$ olsun.

$$\tau_1^{(r,s)}(A) = 0 \text{ ve } \tau_1^{(r,s)}(B) = r$$

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq 0 = \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

v) $A \notin \tau$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun.

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq 0 = \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

vi) $A \in \tau - \{0,1\}$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun

$$\tau^{(r,s)}(A) = r \text{ ve } \tau_1^{(r,s)}(B) = 1$$

$A, B \in \tau$ olduğundan sezgisel bulanık topolojik uzay tanımına göre $A \cap B \in \tau \Rightarrow$

$$\tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq r \Rightarrow \tau_1^{(r,s)}(A \cap B) \geq r = \tau_1^{(r,s)}(A) \wedge \tau_1^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

$$\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B) \text{ olduğunu gösterelim.}$$

i) $A \notin \tau$ ve $B \notin \tau$ olması durumunda

$$\tau^{(r,s)}(A) = \tau^{(r,s)}(B) = (0,1) \Rightarrow \tau_2^{(r,s)}(A) = \tau_2^{(r,s)}(B) = 1$$

$$\Rightarrow \tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq 1 = \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

ii) $A, B \in \tau - \{0,1\}$ olsun.

$$\tau_2^{(r,s)}(A) = \tau_2^{(r,s)}(B) = s$$

Diğer yandan (X, τ) bir sezgisel bulanık topolojik uzay ve $A, B \in \tau - \{0, 1\}$ olduğundan $A \cap B \in \tau$ dir. O halde

$$\tau^{(r,s)}(A) = \begin{cases} (1,0), A = 0_{\sim}, 1_{\sim} \\ (r, s), A \in \tau - \{0_{\sim}, 1_{\sim}\} \\ (0,1), \text{diğer} \end{cases}$$

dönüşümüne göre $\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B)$ sağlanır

iii) $A = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun.

$A \cap B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim} \Rightarrow \tau^{(r,s)}(A \cap B) = (1,0)$. Yani

$\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) = 0 \Rightarrow \tau_2^{(r,s)}(A \cap B) = 0 = \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B)$ sağlanır.

iv) $A \notin \tau$ ve $B \in \tau - \{0, 1\}$ olsun.

$$\tau_2^{(r,s)}(A) = 1 \text{ ve } \tau_2^{(r,s)}(B) = s$$

$$\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq 1 = \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

v) $A \notin \tau$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun.

$$\tau_2^{(r,s)}(A) = 1 \text{ ve } \tau_2^{(r,s)}(B) = 0$$

$$\tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq 1 = \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

vi) $A \in \tau - \{0, 1\}$ ve $B = 0_{\sim}$ veya $1_{\sim}$ olsun.

$$\tau_2^{(r,s)}(A) = s \text{ ve } \tau_2^{(r,s)}(B) = 0$$

$A, B \in \tau$ olduğundan sezgisel bulanık topolojik tanımına göre $A \cap B \in \tau \Rightarrow \tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq s$

$$\Rightarrow \tau_2^{(r,s)}(A \cap B) \leq s = \tau_2^{(r,s)}(A) \vee \tau_2^{(r,s)}(B) \text{ sağlanır.}$$

Tanım 4.1.9. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında bir sezgisel bulanık topoloji ve A sezgisel bulanık kümesi için $(r, s) \in I \otimes I$ olsun

(1) Eğer $B \subset A \subset \text{cl}(B, r, s)$ olacak şekilde X 'de bir B bulanık (r, s) açık kümesi varsa A kümesine bulanık (r, s) -yarı açık denir.

(2) Eğer $\text{int}(B, r, s) \subset A \subset B$ olacak şekilde X 'de bir B bulanık (r, s) kapalı kümesi varsa A kümesine bulanık (r, s) – yarım kapalı denir.

Açıkçası her bulanık küme (r, s) -açık, $((r, s)$ - kapalı) kümesi bir bulanık (r, s) -yarı açık kümedir $((r, s)$ -yarı kapalıdır).Bunun tersi doğru değildir.

Örnek 4.1.10. $X = \{x, y\}$ ve A_1 ve A_2 X 'in bir sezgisel bulanık kümesi olarak tanımlayalım.

$$A_1(x) = (0.6, 0.3) \quad A_2(x) = (0.8, 0.1) \quad A_1(y) = (0.3, 0.5) \quad A_2(y) = (0.5, 0.4)$$

$\tau: I(X) \rightarrow I \otimes I$ olsun.

$$\tau(A) = (\tau_1(A), \tau_2(A)) = \begin{cases} (1, 0) & \text{için } A = 0_{\sim}, 1_{\sim} \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) & \text{için } A = A_1 \\ (0, 1) & A \notin \tau \end{cases}$$

Açıkça (τ_1, τ_2) X üzerinde bir Sostak anlamında bir sezgisel bulanık topolojidir.

Sezgisel bulanık küme A_2 , $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ -yarı açık, ama $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ açık değildir. A_2^c , $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ -yarı kapalı ama $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ kapalı değildir.

İspat : $A_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ yarı açık olduğunu gösterelim. Yarı açık küme tanımından $B \subset A \subset \text{cl}\left(B, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ olmalıdır.

$$A_1 \subset A_2 \subset \text{cl}\left(B, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ olsun.}$$

$A_1 \subset A_2$ olduğunu gösterelim.

$$\mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \Rightarrow 0.6 \leq 0.8$$

$$\nu_{A_1}(x) \geq \nu_{A_2}(x) \Rightarrow 0.3 \geq 0.1 \text{ olduğundan } A_1 \subset A_2 \text{ 'dır.} \quad (51)$$

$A_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ yarı açık olduğunu gösterelim.

$B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ açık olması gerekir ki $B \subset A \subset \text{cl}\left(B, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ olsun.

$A_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ açık olduğuna bakalım.

$$\tau_1(A_1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \tau_2(A_1) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow A_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \text{ açıktır} \quad (52)$$

$$\text{cl}\left(A, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \cap \left\{ B \mid A_1 \subset B, B \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalı} \right\}$$

$$A_1(x) = (0.6, 0.3), A_1(y) = (0.3, 0.5)$$

B bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalı}$ olan tüm B kümeleri bulalım .

$$\tau_1(0_{\sim}^c) = \tau_1(1_{\sim}) = 1 \geq \frac{1}{2} \text{ ve}$$

$$\tau_2(0_{\sim}^c) = \tau_2(1_{\sim}) = 0 \leq \frac{1}{3} \text{ olduğundan } 0_{\sim} \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalıdır.}$$

$$\tau_1(1_{\sim}^c) = \tau_1(0_{\sim}) = 1 \geq \frac{1}{2} \text{ ve}$$

$$\tau_2(1_{\sim}^c) = \tau_2(0_{\sim}) = 0 \leq \frac{1}{3} \text{ olduğundan } 1_{\sim} \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalıdır.}$$

$$A_1^c =: D \text{ olarak tanımlayalım. } ((A_1^c))^c = D^c \Rightarrow A_1 = D^c$$

$$D(x) = (0.3, 0.6), D(y) = (0.5, 0.3)$$

$$\tau_1(D^c) = \tau_1(A_1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ ve } \tau_2(D^c) = \tau_2(A_1) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \text{ olduğundan } D \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalıdır.}$$

Bu uzayda bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalı}$ kümelerinin tümü şunlardır ; $1_{\sim}, 0_{\sim}, D$

$$A_1 \subset 1_{\sim}, A_1 \not\subset 0_{\sim}, A_1 \not\subset D.$$

$$\text{O halde } \text{cl}\left(A_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \cap \left\{ B \mid A_1 \subset B, B \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{kapalı} \right\} = 1_{\sim} \text{ 'dır.}$$

$$\text{Dolayısıyla } A_2 \subset 1_{\sim} = \text{cl}\left(A_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ 'dır.}$$

$$\text{Yani } A_2 \subset \text{cl}\left(A_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad (53) \text{ elde edilir. Sonuç olarak (51) ve (53)'den } A_1 \subset A_2 \subset$$

$$\text{cl}\left(A_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ elde edilir ve ayrıca (52)'den}$$

$A_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ açık olduğundan yarı açık tanıma göre $A_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ yarı açıktır. Ancak $A_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ açık değildir. Çünkü $\tau(A_2) = (\tau_1(A_2), \tau_2(A_2)) = (0, 1)$ olduğundan $\tau_1(A_2) = 0$ ve $\tau_2(A_2) = 1$ 'dir. $\tau_1(A_2) = 0 \not\geq \frac{1}{2}$

Ve $\tau_2(A_2) = 1 \not\leq \frac{1}{3}$ olduğundan A_2 bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ açık değildir.

$A_2^c, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ yarı kapalı ama $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ kapalı değildir.

$A_2^c \subset A_1^c$ olduğuna bakalım

$A_2^c(x) = (0.1, 0.8)$, $A_2^c(y) = (0.4, 0.5)$ ve $A_1^c(x) = (0.3, 0.6)$, $A_1^c(y) = (0.5, 0.3)$ ise $\mu_{A_2^c}(x) \leq \mu_{A_1^c}(x) \Rightarrow 0.1 \leq 0.3$

$\nu_{A_2^c}(x) \geq \nu_{A_1^c}(x) \Rightarrow 0.8 \geq 0.6$ olduğundan $A_2^c \subset A_1^c$ dir.

$A_2^c, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ -yarı kapalı olduğunu göstermek için A_1^c kapalı olduğunu göstermemiz gerekir. Kapalı küme tanımından $\tau_1((A^c)^c) \geq r$ ise $\tau_1(A_1) \geq r$ ve

$\tau_2((A^c)^c) \leq s$ ise $\tau_2(A_1) \leq s$ dir. Böylece $A_1^c \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ kapalıdır.

$\text{int}\left(A_1^c, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \cap \left\{ B \mid B \subset A_1^c \text{ ve } B \text{ bulanık } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{açık} \right\}.$

B bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{açık} \Leftrightarrow \tau_1(B_1) \geq \frac{1}{2}$ ve $\tau_2(B_1) \leq \frac{1}{3}$ dir.

$A_2^c \subset A_1^c$ ve B bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) - \text{açık}$ olan tüm B kümelerini bulalım.

$\tau_1((0_\sim^c)^c) = \tau_1(0_\sim) = 1 \geq \frac{1}{2}$ ve $\tau_2((1_\sim^c)^c) = \tau_2(1_\sim) = 0 \leq \frac{1}{3}$ tür. $0_\sim$ bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ açıktır.

$\tau_1((1_\sim^c)^c) = \tau_1(1_\sim) = 1 \geq \frac{1}{2}$ ve $\tau_2((0_\sim^c)^c) = \tau_2(0_\sim) = 0 \leq \frac{1}{3}$ dir. $1_\sim$ bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ açıktır.

$A_1^c := K$ olarak tanımlayalım. $((A_1^c)^c) := K^c \Rightarrow A_1 = K^c$

$\tau_1(K^c) = \tau_1(A_1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ dir. $\tau_2(K^c) = \tau_2(A_1) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$

Bu uzayda B bulanık $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ – açık olan tüm B kümeler şunlardır; $1_{\sim}, 0_{\sim}, K$

$$A_1^c \subset 1_{\sim}, A_1^c \not\subset 0_{\sim}, A_1^c \not\subset K.$$

$\text{int}\left(A_1^c, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \subset A_2^c \subset A_1^c$ ’dir ve $A_1^c \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ kapalı olduğundan yarı kapalı tanımına göre $A_2^c, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ -yarı kapalıdır.

$A_2^c, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ kapalı değildir.

$\tau_1(A_2^c) = 0 \not\geq \frac{1}{2}$ ve $\tau_2(A_2^c) = 1 \not\leq \frac{1}{3}$ olduğundan $A_2^c, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ kapalı değildir.

Lemma 4.1.11. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topoloji $B \in I(X)$ ve B bulanık (r, s) – açık ise

$$B = \text{int}(B, r, s) \text{’dir.}$$

İspat: $B = \text{int}(B, r, s)$ olduğunu gösterelim.

$$\text{int}(B, r, s) = \bigcup \{G \in I(X) \mid G \subset B, G \text{ bulanık}(r, s) - \text{açık}\}$$

B bulanık (r, s) – açık olduğundan birleşiminin içerisinde vardır. Dolayısıyla

$$B \subset \text{int}(B, r, s) \tag{54}$$

$$\text{int}(B, r, s) \subset B \tag{55}$$

(54) ve (55)’den $B = \text{int}(B, r, s)$ ’dir

Teorem 4.1.12. A sezgisel bir bulanık küme, (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay ve $(r, s) \in I \otimes I$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) A bulanık (r, s) – yarı açık kümedir
- 2) A^c bulanık (r, s) – yarı kapalı kümedir
- 3) $\text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s) \supseteq A$
- 4) $\text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s) \subseteq A^c$

İspat: (1) $\rightarrow$ (3) A, X’in bulanık (r, s) yarı açık kümesi olsun.

X ‘de bir B bulanık (r, s) açık kümesi vardır. Yani $B = \text{int}(B, r, s) \subset \text{int}(A, r, s)$

Bundan dolayı $A \subset \text{cl}(A, r, s) \subset \text{cl}(\text{int}(A, r, s))$

(3) $\rightarrow$ (1) $\text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s) \supseteq A$ ve $B = \text{int}(A, r, s)$ olduğundan B bulanık (r, s) – açık küme ve $B = \text{int}(A, r, s) \subset A \subset \text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s) = \text{cl}(B, r, s)$ ‘dir

(2) $\rightarrow$ (4) A^c , X ’in bulanık (r, s) – yarı kapalı kümesi olsun.

X ’ de bir bulanık (r, s) kümesi varsa $\text{int}(B, r, s) \subset A \subset B'$ dir. Yani

$B = \text{cl}(B, r, s) \subset \text{cl}(A, r, s)$. O zaman $\text{int}(B, r, s) \subset A \subset \text{int}(\text{cl}(A^c, r, s))$ olur.

(4) $\rightarrow$ (2) $\text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s) \subset A^c$ ve $B = \text{cl}(A, r, s)$ ‘dir. B bulanık (r, s) kapalı küme ve $B = \text{cl}(B, r, s) \subset A^c \subset \text{int}(\text{cl}(A, r, s), r, s) = \text{int}(B, r, s)$

(4) $\rightarrow$ (3) $A \subset \text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s)$

$$A^c \supset [\text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s)]^c = \text{int}([\text{int}(A, r, s)]^c, r, s) = \text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s)$$

$$A^c \supset \text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s) \text{ 'dir.}$$

(3) $\rightarrow$ (4) $[\text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s)] \subset A^c$ için

$$[\text{int}(\text{cl}(A^c, r, s), r, s)]^c \supset (A^c)^c$$

$$\text{cl}([\text{cl}(A^c, r, s)]^c, r, s) \supset A$$

$$\text{cl}(\text{int}(A, r, s), r, s) \supset A$$

Teorem 4.1.13. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay ve $(r, s) \in I \otimes I$ olsun.

1) Eğer A bir bulanık (r, s) – yarı açık ve $\text{int}(A, r, s) \subset B \subset \text{cl}(A, r, s)$, o zaman B bulanık (r, s) – yarı açıktır.

2) Eğer A bulanık (r, s) – yarı kapalı ve $\text{int}(A, r, s) \subset B \subset \text{cl}(A, r, s)$, o zaman B bulanık (r, s) – yarı kapalıdır

İspat: 1) A bir bulanık (r, s) – yarı açık bir küme ve $\text{int}(A, r, s) \subset B \subset \text{cl}(A, r, s)$. O zaman vardır bir C bulanık küme (r, s) – açık küme öyle ki $C \subset A \subset \text{cl}(B, r, s)$ olsun. Buradan $C = \text{int}(B, r, s) \subset \text{int}(A, r, s) \subset A \subset \text{cl}(A, r, s) \text{cl}(\text{cl}(C, r, s), r, s) = \text{cl}(C, r, s)$. Dolayısıyla $C \subset \text{int}(A, r, s) \subset B \subset \text{cl}(A, r, s) \subset \text{cl}(C, r, s)$. Bu yüzden B bulanık (r, s) – yarı açıktır.

2) A bulanık (r, s) – yarı kapalı olduğundan en az bir D bulanık (r, s) – kapalı : $\text{int}(A, r, s) \subset A \subset D$ dir.

$\text{int}(D, r, s) = \text{int}(\text{int}(D, r, s), r, s) \subset \text{int}(A, r, s) \subset B \subset \text{cl}(A, r, s) \subset \text{cl}(D, r, s) = D$ dir.

Buradan $\text{int}(D, r, s) \subset B \subset D$ dir. Bu ise B ‘nin bulanık (r, s) – yarı kapalı olduğu görülür.

Teorem 4.1.14. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay ve $(r, s) \in I \otimes I$ olsun

1) Eğer $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ bulanık (r, s) – yarı açık kümelerinin bir ailesi ise $\bigcup A_i$ bulanık (r, s) – yarı açıktır.

2) Eğer $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ bulanık (r, s) – yarı kapalı kümelerinin ailesi ise $\bigcap A_i$ bulanık (r, s) – yarı kapalıdır.

İspat: 1) $\{A_i\}$ bulanık (r, s) – yarı açık kümelerin olsun. $\forall_i$ için bulanık (r, s) – açık B_i vardır : $B_i \subset A_i \subset \text{cl}(B_i, r, s)$. O zaman $\tau_1(\bigcup B_i) \geq \wedge \tau_1(B_i) \geq r$ ve $\tau_2(\bigcup B_i) \geq \vee \tau_2(B_i) \leq s$, $\bigcup B_i$ bir bulanık (r, s) – açık kümedir. Ayrıca $\bigcup B_i \subset \bigcup A_i \subset \text{cl}(\bigcup B_i, r, s)$. Bu yüzden $\bigcup A_i$ bulanık (r, s) – yarı açık kümedir.

2) $\forall_i \in I$ için A_i bulanık (r, s) – yarı kapalı olduğundan $\exists B_i$ bulanık (r, s) – kapalı : $\text{int}(B_i, r, s) \subset A_i \subset B_i$ dir.

$\forall_i$ için B_i bulanık (r, s) – kapalı olduğundan $\tau_1(B_i^c) \geq r$ ve $\tau_2(B_i^c) \leq s$ dir. $\bigcap \text{int}(B_i, r, s) \subset \bigcap A_i \subset \bigcap B_i$

$\tau_1((\bigcap B_i)^c) = \tau_1(\bigcup B_i^c) \geq \wedge \tau_1(B_i^c) \geq r$ ve

$\tau_2((\bigcap B_i)^c) = \tau_2(\bigcup B_i^c) \geq \vee \tau_2(B_i^c) \leq s$ dir. Dolayısıyla $\bigcap B_i$ bulanık (r, s) – kapalıdır.

$\text{int}(\bigcap B_i, r, s) = \bigcap \text{int}(B_i, r, s) \subset A_i \subset \bigcap B_i$ dir.

Buradan $\bigcap A_i$ bulanık (r, s) – yarı kapalıdır.

Lemma 4.1.15. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topoloji uzay ve $B \subset I(X)$ olsun. Bu taktirde

1) Eğer B bulanık (r, s) – açık küme ise B bulanık (r, s) – yarı açık kümedir.

2) Eğer B bulanık (r, s) – kapalı küme ise B bulanık (r, s) – yarı açık kümedir

İspat: 1) B bulanık (r, s) – açık küme olsun. $B \subset B \subset cl(B, r, s)$ olduğu aşikârdır.

B bulanık (r, s) – açık küme olduğundan bulanık (r, s) – yarı açık tanımına göre B bulanık (r, s) – yarı açıktır.

2) B bulanık (r, s) – kapalı küme olduğundan kesişimin içerisinde vardır. Bunun için $B \subset cl(B, r, s)$ 'dir. (56) Tersine $cl(B, r, s) \subset B$ 'dir. (57) olsun.

Bu taktirde (56) ve (57)'den $B = cl(B, r, s)$ olur.

Tanım 4.1.16. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay $\forall (r, s) \in I \otimes I$ ve $\forall A \in I(X)$ için bulanık (r, s) – yarı iç şöyle tanımlanır.

$$a) \text{ sint}(A, r, s) = \bigcup \{B \in I(X) \mid A \supset B, B \text{ bulanık } (r, s) \text{ – yarı açık küme} \}$$

ve bulanık (r, s) – yarı kapanma şöyle tanımlanır.

$$b) \text{ scl}(A, r, s) = \bigcap \{B \in I(X) \mid A \subset B, B \text{ bulanık } (r, s) \text{ – yarı kapalı küme} \}$$

Açıkkası $\text{scl}(A, r, s)$ A 'yı içeren en dar bulanık (r, s) – yarı kapalı kümedir ve

$\text{sint}(A, r, s)$ A 'nın içerisindeki en geniş bulanık (r, s) – yarı açık kümedir.

Ayrıca herhangi A bulanık (r, s) – yarı kapalı kümesi için $\text{scl}(A, r, s) = A$ 'dır ve herhangi A bulanık (r, s) – yarı açık kümesi için $\text{sint}(A, r, s) = A$ 'dır. Buradan

$$\text{int}(A, r, s) \subset \text{sint}(A, r, s) \subset A \subset \text{scl}(A, r, s) \subset cl(A, r, s)$$

Buna göre aşağıdaki sonuçlara sahip oluruz.

$$1) \text{ scl}(0_{\sim}, r, s) = 0_{\sim}, \text{ scl}(1_{\sim}, r, s) = 1_{\sim}$$

$$2) \text{ scl}(A, r, s) \supset A$$

$$3) \text{ scl}(A \cup B, r, s) \supset \text{scl}(A, r, s) \cup cl(A, r, s)$$

$$4) \text{ scl}(\text{scl}(A, r, s), r, s) = \text{scl}(A, r, s)$$

$$5) \text{ sint}(0_{\sim}, r, s) = 0_{\sim}, \text{ sint}(1_{\sim}, r, s) = 1_{\sim}$$

$$6) \text{sint}(A, r, s) \subset A$$

$$7) \text{sint}(A \cap B, r, s) \subset \text{sint}(A, r, s) \cap \text{sint}(B, r, s)$$

$$8) \text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) = \text{sint}(A, r, s)$$

İspat: 1) a) $\text{scl}(0_{\sim}, r, s) = 0_{\sim}$ olduğunu gösterelim.

$$\text{scl}(0_{\sim}, r, s) = \bigcap \{B \in I(X) | A \subset B, B \text{ bulanık}(r, s) - \text{yarı açık kapalı küme}\} = 0_{\sim} \quad (58)$$

$0_{\sim} \subset 0_{\sim}$ olduğu aşıkardır ve $0_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{yarı kapalı}$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $0_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{kapalı}$ olup olmadığına bakalım.

$$\tau_1(0_{\sim}^c) = \tau_1(1_{\sim}) = 1 \text{ ve } \tau_2(0_{\sim}^c) = \tau_2(1_{\sim}) = 0$$

$$\tau_1(0_{\sim}^c) = 1 \geq r, \tau_2(0_{\sim}^c) = 0 \leq s \text{ olduğundan } 0_{\sim} \text{ bulanık } (r, s) - \text{kapalıdır.}$$

$$\tau_1(0_{\sim}^c) = 1 \geq r, \tau_2(0_{\sim}^c) = 0 \leq s \text{ olduğundan } 0_{\sim} \text{ bulanık } (r, s) - \text{kapalıdır.}$$

4.1.14'ten dan $0_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{yarı kapalıdır}$. Ve (58) den $\text{scl}(0_{\sim}, r, s) = 0_{\sim}$

1) b) $\text{scl}(1_{\sim}, r, s) = 1_{\sim}$ olduğunu gösterelim.

$$\text{scl}(0_{\sim}, r, s) = \bigcap \{B \in I(x) | A \subset B, B \text{ bulanık}(r, s) - \text{yarı kapalı küme}\} = 1_{\sim} \quad (59)$$

$1_{\sim} \subset 1_{\sim}$ olduğu aşıkardır. $1_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{yarı kapalı}$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $1_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{kapalı}$ olup olmadığına bakalım.

$$\tau_1(1_{\sim}^c) = \tau_1(0_{\sim}) = 1 \text{ ve } \tau_2(1_{\sim}^c) = \tau_2(0_{\sim}) = 0$$

$$\tau_1(1_{\sim}^c) = 1 \geq r, \tau_2(0_{\sim}^c) = 0 \leq s \text{ olduğundan}$$

$1_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{kapalıdır}$. 4.1.14'ten $1_{\sim}$ bulanık $(r, s) - \text{yarı kapalıdır}$

2) Tanımdan aşıkârdır.

3) $\text{scl}(A, r, s) \cup (B, r, s) \subset \text{scl}(A \cup B, r, s)$ olduğunu gösterelim.

$$\text{scl}(A, r, s) \subset \text{scl}(A \cup B, r, s) \text{ ve } \text{scl}(B, r, s) \subset \text{scl}(A \cup B, r, s) \text{ olduğunu gösterelim}$$

Önce $\text{scl}(A, r, s) \subset \text{scl}(A \cup B, r, s)$ olduğunu gösterelim.

$A \subset A \cup B \subset scl(A \cup B, r, s)$ '2 den dolayı sağlanır.

Buradan $A \subset scl(A \cup B, r, s)$ ' dir (60)

Diğer yandan (60)'dan $scl(A \cup B, r, s)$ bulanık (r, s) – yarı kapalıdır (61)

(60) ve (61)' den $scl(A, r, s) \subset scl(A \cup B, r, s)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $scl(B, r, s) \subset scl(A \cup B, r, s)$ ' dir.

Dolayısıyla $scl(A \cup B, r, s) \supset scl(A, r, s) \cup scl(B, r, s)$ ' dir.

4) $scl(scl(A, r, s), r, s) = scl(A, r, s)$ olduğunu gösterelim.

(61)'den dolayı $scl(A, r, s) \subset scl(scl(A, r, s), r, s)$ (62)

Şimdi $scl(scl(A, r, s), r, s) \subset scl(A, r, s)$ olduğunu gösterelim.

$scl(scl(A, r, s), r, s) = \cap \{F | scl(A, r, s) \subset scl(A, r, s) \text{ F bulanık } (r, s) - \text{ yarı kapalı} \}$

$scl(A, r, s) \subset scl(A, r, s)$ olduğu aşıkardır ve $scl(A, r, s)$ (58)'a göre bulanık (r, s) – yarı kapalı olduğundan $scl(scl(A, r, s), r, s) \subset scl(A, r, s)$ ' dir. (63)

(62) ve (63)'den eşitlik sağlanır.

5) $sint(0_~, r, s) = \cup \{B \in I(x) | 0_~ \supset B, B \text{ bulanık } (r, s) - \text{ yarı açık} \} = 0_~ \dots$ (64)

$0_~ \subset 0_~$ olduğu aşıkardır. $0_~$ bulanık (r, s) – yarı açık mıdır?

$0_~ \subset 0_~ \subset cl(B, r, s)$ ' dir.

$0_~ (r, s)$ – açık mıdır?

$\tau_1(0_~) = \tau_1(1_~) = 1 \quad \tau_2(0_~) = \tau_2(1_~) = 0$

$\tau_1(0_~) = 1 \geq r \quad \tau_2(0_~) = 0 \leq s$ olduğundan $0_~ (r, s)$ – açıktır.

(64)'e göre $0_~ (r, s)$ – yarı açıktır.

b) $sin(1_~, r, s) = \cup \{B \in I(x) | 1_~ \supset B, B \text{ bulanık } (r, s) - \text{ yarı açık} \} = 1_~$

$1_~ \supset 1_~$ olduğu aşıkardır. $1_~$ bulanık (r, s) – yarı açık mıdır?

$1_{\sim}(r, s)$ – açık mı?

$$1_{\sim} \subset 1_{\sim} \subset \text{cl}(1_{\sim}, r, s)$$

$$\tau_1(1_{\sim}) = \tau_1(0_{\sim}) = 1 \quad \tau_2(0_{\sim}) = \tau_2(1_{\sim}) = 0$$

$\tau_1(1_{\sim}) = 1 \geq r, \tau_2(0_{\sim}) = 0 \leq s$ olduğundan $1_{\sim}(r, s)$ – açıktır.

(58)'e göre $0_{\sim}(r, s)$ – yarı açıktır.

6) Tanımdan açıktır.

7) $\text{sint}(A, r, s) = \bigcup \{B \in I(X) \mid A \supset B, B \text{ bulanık } (r, s) \text{ – yarı açık}\}$ olduğunu

göstermek için öncelikle $\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ ve $\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset$

$\text{sint}(B, r, s)$ olduklarını göstermemiz gerekir.

$\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ olduğunu bakalım.

(58)'den dolayı $\text{sint}(A \cap B), r, s)$ bulanık (r, s) – yarı açıktır. (65)

$\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset A \cap B \subset A$ olduğunu gösterelim.

$\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset A$ (6)'dan dolayı aşikârdır. (66)

(65) ve (66)'den $\text{sint}(A \cap B), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ 'dir. Benzer şekilde

$\text{sint}(A \cap B, r, s) \subset \text{sint}(B, r, s)$ 'dir.

8) $\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) = \text{sint}(A, r, s)$ olduğunu gösterelim.

(6)'dan dolayı $\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ (67)

Şimdi $\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ olduğunu gösterelim.

$$\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) = \bigcup \{F \mid F \subset \text{sint}(A, r, s) \text{ } F \text{ bulanık } (r, s) \text{ – yarı açık}\}$$

$\text{sint}(A, r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ olduğundan ve $\text{sint}(A, r, s)$ 'e $(\star\star)$ 'a göre bulanık – yarı

kapalı olduğundan $\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ (68)

(67) ve (68)'den $\text{sint}(\text{sint}(A, r, s), r, s) = \text{sint}(A, r, s)$

Teorem 4.1.17. (X, τ_1, τ_2) Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzay, A sezgisel bir bulanık küme ve $(r, s) \in I \otimes I$ olsun.

$$1) \text{sint}(A, r, s)^c = \text{scl}(A^c, r, s)$$

$$2) \text{scl}(A, r, s)^c = \text{sint}(A^c, r, s)$$

İspat: 1) $\text{sint}(A, r, s) \subset A$ ve $\text{sint}(A, r, s)$, X' 'te bir bulanık (r, s) – yarı açık, $A^c \subset$

$\text{sint}(A, r, s)^c$ ve $\text{sint}(A, r, s)^c$ X' te bir bulanık (r, s) – yarı kapalıdır.

$$\text{scl}(A^c, r, s) \subset \text{scl}(\text{sint}(A, r, s)^c, r, s) = \text{sint}(A, r, s)^c \quad (69)$$

Tersine $A^c \subset \text{scl}(A^c, r, s)$ ve $\text{scl}(A^c, r, s)$ X' te bulanık (r, s) – yarı kapalı.

$\text{scl}(A^c, r, s) \subset A$ ve $\text{scl}(A^c, r, s)^c$ X' 'te bulanık (r, s) – yarı açık .Bu yüzden

$\text{scl}(A^c, r, s)^c = \text{sint}(\text{scl}(A^c, r, s)^c, r, s) \subset \text{sint}(A, r, s)$ (66)'dan ve $\text{sint}(A, r, s)^c \subset \text{scl}(A^c, r, s)$ 'dir.

2) $A \subset \text{scl}(A, r, s)$ ve $\text{scl}(A, r, s)$ bulanık (r, s) – yarı kapalı ve

$\text{scl}(A, r, s)^c \subset A^c$ ve $\text{scl}(A, r, s)^c$ bulanık (r, s) – yarı açıktır.

$$\text{scl}(A, r, s)^c = \text{sint}(\text{scl}(A, r, s)^c, r, s) \subset \text{sint}(A^c, r, s)$$

$$\Rightarrow \text{scl}(A, r, s)^c \subset \text{int}(A^c, r, s) \quad (70)$$

Tersine $\text{int}(A^c, r, s) \subset A^c$ ve $\text{sint}(A^c, r, s)$ bulanık (r, s) – yarı açık ve

$A \subset \text{int}(A^c, r, s)^c$ ve $\text{sint}(A^c, r, s)^c$ bulanık (r, s) – yarı kapalıdır.

Buradan $\text{scl}(A, r, s) \subset \text{scl}(\text{sint}(A^c, r, s)^c, r, s) = \text{sint}(A^c, r, s)^c$

$$\Rightarrow \text{scl}(A, r, s) \subset \text{sint}(A^c, r, s)^c$$

$$\Rightarrow \text{sint}(A^c, r, s) \subset \text{scl}(A, r, s)^c \quad (71)$$

(70) ve (71)' den eşitlik sağlanır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması [1,2,4,6,8] makalelerinin derlemesinden oluşur. Burada bulanık küme kavramının tanımı yapıldıktan sonra sırasıyla bulanık topolojik uzaylar ve bulanık kümelerin bir genellemesi olan sezgisel bulanık kümeler incelenmiştir. Ayrıca, Sostak anlamında sezgisel bulanık topolojik uzaylarda yarı açık kümeler incelenmiş, elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde verilmiştir. Bu çalışmanın önemi bu alanda çalışacak olan bilim insanlarına yararlı bir kaynak oluşturmastır.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L., A. Fuzzy Sets , Information and Control vol:8,no:33 338-353,(1965)
- [2] Chang C., L.,Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol:24,no:1,182-190,(1968)
- [3] Lowen, R., Fuzzy Topological and Fuzzy Compactness, Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol:56,no:3,621-633,(1976)
- [4] Atanassov, K., Intuitionistic Fuzzy Sets,Fuzzy Sets and System,20,87-96,(1986)
- [5] Coker D,An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and System 88,81-89,(1997)
- [6] Coker D, and Haydar Es A, On fuzzy compactness in intuitionistic fuzzy topological sapces,J.Fuzzy Math.3 899-900 (1997)
- [7] Gürcay H,Coker,D.,Haydar Es,A., On fuzzy continuity in intuitionistic fuzzy topological spaces J.Fuzzy Math. 5, 365-378,(1997)
- [8] Sostak,A.,On a Fuzzy Topological Structure ,Supp,Rend.Circ.Mat.Palermo (Ser. II) 11 (1985)
- [9] Chattopadhyay K. C.,Hazra R. N., Samanta,S.K.,Gradation of Openness : Fuzzy Topological, Fuzzy Sets and Systems 49 237-242(1992)
- [10] Ramadan A.A., Smooth Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems 48,371-375,(1992)
- [11] Coker D, Demirci M, An introduction to intuitionistic fuzzy topological sapces in Sostak's sense, BUSEFAL 67-76 (1996)
- [12] Lee,E.P. and Im, Y.B. Mated fuzzy topological spaces,J.of Fuzzy Logic and Intelligent Systems 11, 161-165, (2001)

- [13] Ying-Ming, L., Mao-Kang, L., “Fuzzy Topology”, World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd, Uto-Print Singapore, 32-65, (1997)
- [14] Coker,D., Haydar Es A., On Fuzzy Compactness in Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, The Journal of Fuzzy Mathematics Los angeles, vol:3, no:4, 899-909,(1995)
- [15] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets,in:Sgurev,(Ed.),VII ITKR’s Session Sofia,Central Science and Technology Library Bulgaria Academy of Sciences (1984)
- [16] Atanassov,K.,Stoeva S.,Intuitionistic fuzzy sets, in: Polish Symp. on Interval And Fuzzy Mathematics, Poznan 23-26 (1983)

ÖZGEÇMİŞ

Turan Cansu 1992 yılında Siirt'te doğdu. İlk, Orta ve Lise eğitimini İstanbul'da tamamladı.2010 yılında Pendik Kavakpınar Lisesi'nde mezun oldu.2011 yılında başladığı Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2015 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamış olduğu yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.

