

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Zeynep GÜVENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA

2000

SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Zeynep GÜVENÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ANTALYA

2000

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Zeynep GÜVENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 12/10./ 2000 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 95. not takdir edilerek
oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Doğan ÇOKER
(Danışman)

Öğr. Gör. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Yrd. Doç. Dr. Fatma GÖK

ÖZET

SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Zeynep GÜVENÇ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Eylül-2000, 53 Sayfa

Bu çalışma ile, “Klasik Topolojik Uzaylar” ’da önemli bir yer tutan “Filtreler”, “Kompaktlık”, ve “Yakınsaklık” konularının “Sezgisel Topolojik Uzaylar” ’a uygulaması yapılmış, bu kavramların klasik topolojik uzaylarda gösterdiği özellikler ile sezgisel topolojik uzaylarda gösterdiği özellikler arasındaki farklar ve benzerlikler araştırılmıştır.

Bu konuların daha somut bir hale gelmesi için örnekler verilmiş, bu örnekler sayesinde kavramların gösterdiği özelliklerin kolayca görülebilmesi amaçlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELE: Sezgisel Küme, Sezgisel Topoloji, Sezgisel Topolojik Uzay, Sezgisel Süreklilik, Sezgisel Filtre, Sezgisel Yakınsaklık, Sezgisel Kompaktlık.

JÜRİ: Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Öğr. Gör. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Yrd. Doç. Dr. Fatma GÖK

ABSTRACT

ON INTUITIONISTIC TOPOLOGICAL SPACES

Zeynep GÜVENÇ

M.Sc. in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Doğan ÇOKER

September-2000, 53 Pages

The aim of this study is to construct the basic concepts related to filters, convergence, compactness in intuitionistic topological spaces. Here we introduce the concepts of filter, continuity, convergence, compactness and obtain several properties and some characterizations concerning these concepts in intuitionistic topological spaces. These concepts and their properties are explained with some examples.

KEY WORDS: Intuitionistic Set, Intuitionistic Topology, Intuitionistic Topological Spaces, Intuitionistic Continuity, Intuitionistic Filters, Intuitionistic Convergence, Intuitionistic Compactness.

COMMITTEE: Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Öğr. Gör. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Yrd. Doç. Dr. Fatma GÖK

ÖNSÖZ

Belirtisiz küme teorisi, 1960'lı yılların başında Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır. 1965'ten bu yana, belirtisiz küme, Zadeh ve çok sayıda araştırmacı tarafından geliştirilmektedir. Bu teori, pek çok bilimsel alanda uygulanmaya başlanmıştır.

Belirtisiz kümelerden yola çıkılarak tanımlanan farklı özelliklere sahip kümelerden biri de sezgisel kümedir. Atanassov'un (1982),(1986) sezgisel belirtisiz küme tanımından sonra, Çoker (1996),(1997),(2000) sezgisel belirtisiz topolojik uzay, sezgisel küme ve sezgisel topolojik uzay kavramlarını tanımladı. Bu, sezgisel kümeler üzerinde bilinen topolojik yapıların kurulup kurulamayacağı sorusunu beraberinde getirdi. KAYNAKLAR bölümünde de görülebileceği gibi, bu sorunun cevabı bir çok kişi tarafından araştırılmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar cevabın "evet" olduğunu göstermiştir. Bu tez çalışmasının da, cevabın "evet" olduğunu pekiştiren bir çalışma olması amaçlanmıştır. Bu amaca uygun olarak, sezgisel yakınsaklık, sezgisel filtre, sezgisel kompaktlık ve sezgisel süreklilik üzerinde çalışılmıştır. Yapılan bu çalışmanın, bu konudaki bazı soru işaretlerini gidermesini dilerim.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Doğan Çoker'e (Ak. Üni. Fen-Edeb. F.) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Kapsamı ve Amacı	1
1.2. Sezgisel Kümeler	1
2. SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR	6
2.1. Sezgisel Topolojik Uzay Kavramı	6
2.1.1. Sezgisel topolojik uzaylara örnekler	9
2.2. Sezgisel Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri	13
2.3. Sezgisel Topolojik Uzaylarda İç	16
2.4. Sezgisel Süreklilik	20
2.4.1. Sezgisel sürekli fonksiyon örnekleri	21
2.4.2. Sezgisel noktasal süreklilik	24
2.4.3. Sezgisel noktasal sürekli fonksiyon örnekleri	25
2.5. Sezgisel Yakınsaklık	27
2.6. Sezgisel Filtreler	32
2.7. Sezgisel Kompaktlık	34

2.7.1. Sezgisel kompakt uzay örnekleri	36
2.7.2. Sezgisel yakın ve hemen hemen kompaktlık	38
3. SONUÇ	42
4. KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı ve Amacı

Bu çalışmanın kapsamını özetle; sezgisel küme, sezgisel nokta, sezgisel topolojik uzay, sezgisel topolojik uzaylarda komşuluk sistemleri, sezgisel kümelerin içi, sezgisel süreklilik, sezgisel yakınsaklık, sezgisel filtre, sezgisel kompaktlık oluşturmaktadır.

Bu tez çalışması ile, daha önce Sezgisel Kümeler ve Sezgisel Topolojik Uzaylar üzerine yapılan çalışmalardan faydalanılarak, “Sezgisel Yakınsaklık”, “Sezgisel Filtre”, “Sezgisel Kompaktlık” kavramları tanımlanıp, ne gibi özellikler gösterdikleri araştırılacak, uygun örneklerle konu sağlam bir yapıya oturtulmaya çalışılacaktır. Aşağıdaki bölümde, bu çalışmanın tamamında gerekli olan tanım ve özellikler verilecektir.

1.2. Sezgisel Kümeler

“Belirtisiz küme” ilk olarak L. Zadeh (1965) tarafından tanımlanmış, daha sonra K. Atanassov (1984),(1986) tarafından bunun bir genelleştirilmesi olan “sezgisel belirtisiz kümeler” e giriş yapılmıştır. Daha sonra D. Çoker (1996),(1997),(2000) “sezgisel belirtisiz topolojik uzay”, “sezgisel küme”, “sezgisel topolojik uzay” kavramlarını tanımladı.

“Sezgisel küme”, bir X kümesi üzerinde, X ’in klasik altkümelerinden farklı olarak, ancak klasik altkümelerden yararlanılarak tanımlanmış altkümeler olarak ifade edilebilir. Bir “sezgisel küme” nin farklı niteliklere sahip, farklı iki tipte elemanı vardır. Bu farklı tanımlı elemanların varlığı, kümenin gösterdiği özelliklerin de farklılaşmasına ve üzerinde kurulan yapıların klasik anlamdaki yapılardan farklı olmasına yol açar.

X üzerinde tanımlanan bu yeni tipteki “sezgisel kümeler” üzerinde de acaba klasik kümeler üzerinde tanımlanan topolojik yapılar kurulabilir mi? Bundan sonraki bölümlerden, bu sorunun cevabı alınabilecektir:

Tanım 1.2.1. (Çoker 1996) X boş olmayan bir küme, A_1 ve A_2 , X 'in $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olacak şekilde iki altkümesi olsun.

$$A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$$

şeklinde gösterilen A , bir sezgisel küme (kısaca SK) olarak adlandırılır. A_1 kümesi, A 'nın üyelerinin kümesi, A_2 kümesi A 'nın üyesizlerinin kümesi olarak adlandırılır. Bir X kümesindeki tüm SK 'lerin ailesi $I(X)$ ile gösterilir.

Boş olmayan bir X kümesindeki her A altkümesinin $\langle X, A, A' \rangle$ formunda bir SK belirttiği açıktır. SK 'ler arasındaki birkaç bağıntı ve işlem aşağıda tanımlanmıştır:

Tanım 1.2.2. (Çoker 1996) X boş olmayan bir küme ve A ve B sırasıyla $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, $B = \langle X, B_1, B_2 \rangle$ formunda iki SK ve $\{A_i : i \in J\}$ her i için $A_i = \langle X, A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \rangle$ olacak şekilde X 'teki SK 'lerin herhangi bir ailesi olsun. Bu durumda, şu tanımlamalar yapılır:

- (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1$ ve $A_2 \supseteq B_2$;
- (b) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$;
- (c) $\bar{A} = \langle X, A_2, A_1 \rangle$;
- (d) $\emptyset = \langle X, \emptyset, X \rangle$ ve $X = \langle X, X, \emptyset \rangle$;
- (e) $A \cup B = \langle X, A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2 \rangle$;
- (f) $A \cap B = \langle X, A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2 \rangle$;
- (g) $\bigcup A = \langle X, A_1, A_1' \rangle$;
- (h) $\langle \rangle A = \langle X, A_2', A_2 \rangle$;
- (i) $\bigcup A_i = \langle X, \bigcup A_i^{(1)}, \bigcap A_i^{(2)} \rangle$;
- (j) $\bigcap A_i = \langle X, \bigcap A_i^{(1)}, \bigcup A_i^{(2)} \rangle$;
- (k) $A - B = A \cap \bar{B}$.

Sonuç 1.2.3. (Çoker 1996) A, B ve A_i ($i \in J$), X 'te SK 'ler olsunlar.

- (a) $(\forall i \in J) A_i \subseteq B \Rightarrow \bigcup A_i \subseteq B$;
- (b) $(\forall i \in J) B \subseteq A_i \Rightarrow B \subseteq \bigcap A_i$;
- (c) $\overline{\bigcup A_i} = \bigcap \bar{A}_i$;
- (d) $\overline{\bigcap A_i} = \bigcup \bar{A}_i$;
- (e) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$;
- (f) $\overline{\bar{A}} = A$;

$$(g) \bar{\emptyset} = X;$$

$$(h) \bar{X} = \emptyset .$$

Şimdi bir SK 'nin görüntüsünü ve öngörüntüsünü tanımlayalım. X ve Y iki boş olmayan küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

Tanım 1.2.4. (Çoker 1996)

(a) $B = \langle Y, B_1, B_2 \rangle$, Y 'de bir SK ise, B 'nin f altındaki öngörüntüsü $f^{-1}(B)$, X 'te bir SK 'dir ve

$$f^{-1}(B) = \langle X, f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \rangle$$

ile tanımlıdır.

(b) $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$ X 'te bir SK ise, A 'nın f altındaki görüntüsü $f(A)$, Y 'de bir SK 'dir ve $f_-(A_2) = (f(A_2^t))^t$ olmak üzere

$$f(A) = \langle Y, f(A_1), f_-(A_2) \rangle$$

ile tanımlıdır.

Şimdi ileriki bölümlerde sıkça kullanacağımız görüntü ve öngörüntünün özelliklerini görelim:

Sonuç 1.2.5. (Çoker 1996) A, A_i ($i \in J$), X 'te SK 'ler, B, B_j ($j \in K$), Y 'de SK 'ler ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$(a) A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$$

$$(b) B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

$$(c) A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ [} f \text{ bire-bir ise, } A = f^{-1}(f(A)) \text{.]}$$

$$(d) f(f^{-1}(B)) \subseteq B \text{ [} f \text{ örten ise, } f(f^{-1}(B)) = B \text{.]}$$

$$(e) f^{-1}(\cup B_j) = \cup f^{-1}(B_j)$$

$$(f) f^{-1}(\cap B_j) = \cap f^{-1}(B_j)$$

$$(g) f(\cup A_i) = \cup f(A_i)$$

$$(h) f(\cap A_i) \subseteq \cap f(A_i) [f \text{ bire-bir ise, } f(\cap A_i) = \cap f(A_i).]$$

$$(i) f^{-1}(\underline{Y}) = \underline{X}$$

$$(j) f^{-1}(\underline{\emptyset}) = \underline{\emptyset}$$

$$(k) f \text{ örten ise, } f(\underline{X}) = \underline{Y}$$

$$(l) f(\underline{\emptyset}) = \underline{\emptyset}$$

$$(m) f \text{ örten ise, } \overline{f(\bar{A})} \subseteq f(\bar{A}). [Ayrıca f bire-bir ise, \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A}).]$$

$$(n) f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

Tanım 1.2.6. (Çoker 1996) X boş olmayan bir küme ve $p \in X$, X 'te sabit bir eleman olsun. $\underline{p} = \langle X, \{p\}, \{p\}^t \rangle$ sezgisel kümesi X 'te bir sezgisel nokta (kısaca SN), $\underline{\underline{p}} = \langle X, \emptyset, \{p\}^t \rangle$ sezgisel kümesi X 'te bir sıfırlanan sezgisel nokta (kısaca SSN) olarak adlandırılır.

Şimdi bir SN veya bir SSN 'nın bir SK 'ye ait olma durumlarını gösterelim:

Tanım 1.2.7. (Çoker 1996) $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te bir SK ve $p \in X$ olsun.

$$(a) \underline{p}, A \text{ 'nın bir elemanıdır (kısaca } \underline{p} \in A) \Leftrightarrow p \in A_1.$$

$$(b) \underline{\underline{p}}, A \text{ 'nın bir elemanıdır (kısaca } \underline{\underline{p}} \in A) \Leftrightarrow p \notin A_2 \Leftrightarrow p \in A_2^t.$$

Önerme 1.2.8. (Çoker 1996) $\{A_i : i \in J\}$, X 'te SK 'lerin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$(a1) \underline{p} \in \cap_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \forall i \in J \text{ için } \underline{p} \in A_i.$$

$$(a2) \underline{\underline{p}} \in \cap_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \forall i \in J \text{ için } \underline{\underline{p}} \in A_i.$$

$$(b1) \underline{p} \in \cup_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \exists i \in J \text{ için } \underline{p} \in A_i.$$

$$(b2) \quad p \in \bigcup_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \exists i \in J \text{ için } p \in A_i.$$

Önerme 1.2.9. (Çoker 1996) A ve B , X 'te iki SK olsun. Bu durumda,

$$(a) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \text{Her } p \text{ için } p \in A \Rightarrow p \in B \text{ ve her } p \text{ için } p \in A \Rightarrow p \in B.$$

$$(b) \quad A = B \Leftrightarrow \text{Her } p \text{ için } p \in A \Leftrightarrow p \in B \text{ ve her } p \text{ için } p \in A \Leftrightarrow p \in B.$$

Önerme 1.2.10. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ ve $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te bir SK olsun. Bu durumda,

$$(a) \quad p \in \bar{A} \Leftrightarrow p \notin A \quad (b) \quad p \notin \bar{A} \Leftrightarrow p \in A$$

$$(c) \quad p \in A \Leftrightarrow p \notin \bar{A} \quad (d) \quad p \notin A \Leftrightarrow p \in \bar{A}$$

$$\text{Kanıt (a)} \quad p \in \bar{A} = \langle X, A_1, A_2 \rangle \Leftrightarrow p \in A_2 \Leftrightarrow p \notin A'_2 \Leftrightarrow p \notin A$$

Diğerleri de benzer şekilde kanıtlanır.

Önerme 1.2.11. (Çoker 1996) A , X 'te bir SK olsun. Bu durumda,

$$A = (\bigcup \{p : p \in A\}) \cup (\bigcup \{p : p \in A\}).$$

Bu önerme X 'teki her A SK 'sinin, $\underline{A} = \bigcup \{p : p \in A\}$ ve $\bar{A} = \bigcup \{p : p \in A\}$ olmak üzere, $A = \underline{A} \cup \bar{A}$ şeklinde yazılabileceğini gösterir. Burada $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$ ise, $\underline{A} = \langle X, A_1, A'_1 \rangle$ ve $\bar{A} = \langle X, \emptyset, A_2 \rangle$ olduğunu göstermek kolaydır.

Önerme 1.2.12. (Çoker 1996) A , X 'te bir SK ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f(A) = f(\underline{A}) \cup f(\bar{A})$ olur.

Kanıt $A = \underline{A} \cup \bar{A}$ olduğundan açıktır.

2. SEZGİSEL TOPOLOJİK UZAYLAR

2.1. Sezgisel Topolojik Uzay Kavramı

Tanım 2.1.1. (Çoker 1997) Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki bir sezgisel topoloji (kısaca ST), $\emptyset$ ve X 'i içeren, sonlu kesişim ve herhangi birleşim altında kapalı X 'teki sezgisel kümelerin bir τ ailesidir. Bu durumda (X, τ) ikilisi bir sezgisel topolojik uzay (kısaca STU) olarak adlandırılır ve τ 'daki her SK, X 'te bir sezgisel açık küme (kısaca SAK) olarak bilinir. (X, τ) STU 'ndaki bir A SAK 'nin tümleyeni $\bar{A}$, X 'te bir sezgisel kapalı küme (kısaca SKK) olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.2. (Çoker 1997) Açıktır ki, her (X, τ_0) topolojik uzayı, X 'in bir A altkümesini $A' = \langle X, A, A' \rangle$ karşılığıyla bir tuttuğumuzu düşünürsek, $\tau = \{A' : A \in \tau_0\}$ formundaki bir STU 'dır.

Örnek 2.1.3. (Çoker 1997) τ_0 indiskret topoloji olmamak üzere (X, τ_0) topolojik uzayını gözönüne alalım: $\tau_0 = \{\emptyset, X\} \cup \{G_i : i \in J\}$. Bu durumda X üzerinde iki ST kurabiliriz:

(a) $\tau^1 = \{\emptyset, X\} \cup \{\langle X, G_i, \emptyset \rangle : i \in J\},$

(b) $\tau^2 = \{\emptyset, X\} \cup \{\langle X, \emptyset, G_i^! \rangle : i \in J\}.$

Önerme 2.1.4. (Çoker 1997) (X, τ) , bir STU olsun. Bu durumda, X üzerinde aşağıdaki yollarla iki ST kurulabilir:

(a) $\tau_{0,1} = \{\llbracket G : G \in \tau \rrbracket\},$

(b) $\tau_{0,2} = \{\langle \rangle G : G \in \tau\}.$

Hatırlatma 2.1.5. (Çoker 1997) (X, τ) , bir STU olsun.

(a) $\tau_1 = \{G_1 : G = \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \tau\}, X$ üzerinde bir topolojidir.

(b) $\tau_2^* = \{G_2 : G = \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \tau\}$. X üzerindeki $\tau_2 = \{G_2^t : G = \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \tau\}$ topolojisinin bütün kapalı kümelerinin ailesidir.

(c) Her $G = \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \tau$ için $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olduğundan, $G_1 \subseteq G_2^t$ ve $G_2 \subseteq G_1^t$ 'dir.

(d) (a) ve (b) kullanılarak (X, τ_1, τ_2) 'nin bir bitopolojik uzay olduğu sonucuna varabiliriz.

Tanım 2.1.6. (Çoker 1997) (X, τ_1) ve (X, τ_2) iki STU olsun. τ_1, τ_2 tarafından kapsanıyorsa ($\tau_1 \subseteq \tau_2$), " τ_1, τ_2 'den daha kabadır" veya " τ_2, τ_1 'den daha incedir" denir.

Tanım 2.1.7. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU olsun.

(a) τ 'nın her elemanı β 'nın elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, $\beta \subseteq \tau$ ailesi (X, τ) için bir taban olarak adlandırılır.

(b) δ ailesinin elemanlarının sonlu kesişimlerinin ailesi (X, τ) için bir taban oluşturuyorsa, $\delta \subseteq \tau$ ailesi (X, τ) STU 'nın bir alttabanı olarak adlandırılır. Bu durumda, " τ, δ tarafından oluşturulur" denir.

Tanım 2.1.8. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU ve $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$ X 'te bir SK olsun. Bu durumda A 'nın içi ve kapanışı şu şekilde tanımlıdır:

$$int(A) = \cup \{G : G \text{ } X \text{ 'te SAK ve } G \subseteq A\},$$

$$cl(A) = \cap \{K : K \text{ } X \text{ 'te SKK ve } A \subseteq K\}.$$

Burada, $cl(A)$ 'nın X 'te bir SKK ve $int(A)$ 'nın X 'te bir SAK olduğu görülebilir ve

(a) A, X 'te bir SKK 'dir $\Leftrightarrow cl(A) = A$;

(b) A, X 'te bir SAK 'dir $\Leftrightarrow \text{int}(A) = A$

olur.

Önerme 2.1.9. (Çoker 1997) (X, τ) 'daki her A SK 'si için,

(a) $cl(\bar{A}) = \overline{\text{int}(A)},$

(b) $\text{int}(\bar{A}) = \overline{cl(A)}.$

Önerme 2.1.10. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU ve A, B, X 'te SK 'ler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $\text{int}(A) \subseteq A$

(a') $A \subseteq cl(A)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$

(b') $A \subseteq B \Rightarrow cl(A) \subseteq cl(B)$

(c) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

(c') $cl(cl(A)) = cl(A)$

(d) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$

(d') $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$

(e) $\text{int}(X) = X$

(e') $cl(\emptyset) = \emptyset$

Önerme 2.1.11. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU ve $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te bir SK olsun. Bu durumda,

$$\text{int}(A) \subseteq \langle X, \text{int}_{\tau_1}(A_1), cl_{\tau_2}(A_2) \rangle \subseteq A$$

ve

$$A \subseteq \langle X, cl_{\tau_2}(A_1), \text{int}_{\tau_1}(A_2) \rangle \subseteq cl(A)$$

olur.

Sonuç 2.1.12. (Çoker 1997) $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$ (X, τ) 'da bir SK olsun. Bu durumda,

(a) A bir SKK ise, $A_1, (X, \tau_2)$ 'de kapalıdır ve $A_2, (X, \tau_1)$ 'de açıktır.

(b) A bir SAK ise, $A_1, (X, \tau_1)$ 'de açıktır ve $A_2, (X, \tau_2)$ 'de kapalıdır.

2.1.1. Sezgisel topolojik uzaylara örnekler

Örnek 2.1.1.1. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ ve $X \neq \{p\}$ olsun. X 'in

$$\tau = \{\underline{X}, \emptyset\} \cup \{\langle X, A, \{p\} \rangle \mid A \subseteq X, p \notin A\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Özel Sezgisel Dışlanmış Nokta Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.2. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ olsun. X 'in

$$\begin{aligned}\tau_p &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \in \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \in G_1\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Özel Nokta Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.3. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ olsun. X 'in

$$\begin{aligned}\tau_{\tilde{p}} &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \tilde{p} \in \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin G_2\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Özel Sıfırlanan Nokta Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.4. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ ve $X \neq \{p\}$ olsun. X 'in

$$\begin{aligned}\tau_{\sim p} &= \{\underline{X}\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\underline{X}\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin G_1\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Dışlanmış Nokta Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.5. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ ve $X \neq \{p\}$ olsun. X 'in

$$\begin{aligned}\tau_{\sim p} &= \{\underline{X}\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\underline{X}\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \in G_2\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Dışlanmış Sıfırlanan Nokta Topolojisi” olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.1.6.

(a) $X \neq \emptyset$ ve $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te bir SK olsun. A 'nın sonlu bir SK olması demek, A_2^t 'nin sonlu olması demektir.

(b) $X \neq \emptyset$ ve $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te bir SK olsun. A 'nın sayılabilir bir SK olması demek, A_2^t 'nin sayılabilir olması demektir.

Örnek 2.1.1.7. $X \neq \emptyset$ ve X sonsuz bir küme olmak üzere, X 'in

$$\begin{aligned}\tau &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \overline{\langle X, G_1, G_2 \rangle} \text{ sonlu}\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid G_1^t \text{ sonlu}\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Sonlu Tümleyenler Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.8. $X \neq \emptyset$ ve X sonsuz bir küme olmak üzere, X 'in

$$\begin{aligned}\tau &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \overline{\langle X, G_1, G_2 \rangle} \text{ sayılabilir}\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid G_1^t \text{ sayılabilir}\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Sayılabilir Tümleyenler Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.9. $X \neq \emptyset$, X sonsuz bir küme ve $p \in X$ olsun. X 'in

$$\begin{aligned}\tau &= \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \overline{\langle X, G_1, G_2 \rangle} \text{ sonlu ve } p \notin \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid G_1^t \text{ sonlu ve } p \notin G_1\}\end{aligned}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde “Sezgisel Fort Topolojisi” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.10. $\mathbb{R}$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, +\infty) \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \\ \cup \{\langle \mathbb{R}, (-\infty, a), \emptyset \rangle \mid a \in \mathbb{R}\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde “Sezgisel Sol-Sol Topoloji” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.11. $\mathbb{R}$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, (a, \infty), (-\infty, b] \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, b \leq a\} \\ \cup \{\langle \mathbb{R}, (a, \infty), \emptyset \rangle \mid a \in \mathbb{R}\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde “Sezgisel Sağ-Sağ Topoloji” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.12. (Çoker 1997) $\mathbb{R}$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), (-\infty, c] \rangle \mid c \leq \inf\{a_i\}, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}\} \\ \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), \emptyset \rangle \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, c] \rangle \mid c \in \mathbb{R}\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde “Sezgisel Bilinen-Sağ Topoloji” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.13. (Çoker 1997) $\mathbb{R}$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), [c, \infty) \rangle \mid \sup\{b_i\} \leq c, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}\} \\ \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), \emptyset \rangle \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \emptyset, [c, \infty) \rangle \mid c \in \mathbb{R}\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde “Sezgisel Bilinen-Sol Topoloji” olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.1.14. $\mathbb{R}$ 'nin

$$\delta = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

$$\cup \{ \langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), (-\infty, c] \cup [d, \infty) \rangle \mid c \leq \inf\{a_i\}, \sup\{b_i\} \leq d, a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir ST üretir. Bu ST “Sezgisel Bilinen Topoloji” olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} & \{ \langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), (-\infty, c] \rangle \mid c \leq \inf\{a_i\}, a_i, b_i, c \in \mathbb{R} \}, \\ & \{ \langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), [c, \infty) \rangle \mid \sup\{b_i\} \leq c, a_i, b_i, c \in \mathbb{R} \}, \\ & \{ \langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), (-\infty, c] \cup [d, e] \cup [f, \infty) \rangle \mid \inf\{a_i\}, \sup\{b_i\} \text{ var ve} \\ & \cup(a_i, b_i) \cap ((-\infty, c] \cup [d, e] \cup [f, \infty)), \}, \\ & \{ \langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), \emptyset \rangle \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \}, \\ & \{ \langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, c] \cup [d, \infty) \rangle \mid c, d \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

SK 'leri bu ST 'ye göre SAK 'lerdir.

Örnek 2.1.1.15. $\mathbb{R}$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{ \langle \mathbb{R}, (-\delta, +\delta), (-\infty, -\delta - \epsilon] \cup [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \mid \delta, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir sezgisel topolojidir.

Örnek 2.1.1.16. $\mathbb{R}^+$ 'nin

$$\tau = \{\mathbb{R}^+, \emptyset\} \cup \{ \langle \mathbb{R}^+, (0, \delta), [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \mid \delta, \epsilon > 0 \}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir sezgisel topolojidir.

Örnek 2.1.1.17. $X \neq \emptyset, \emptyset \neq A = \langle X, A_1, A_2 \rangle \in I(X)$ olsun. X 'in

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{ \langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \langle X, A_1, A_2 \rangle \subseteq \langle X, G_1, G_2 \rangle \}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, X üzerinde bir sezgisel topolojidir.

Örnek 2.1.1.18 (X, τ) bir STU, $p \notin X$, $\overline{X} = X \cup \{p\}$ olsun. $\overline{X}$ 'in

$$\overline{\tau} = \{\overline{\emptyset}\} \cup \{G \cup p \mid G \in \tau\}$$

sezgisel altkümelerinin ailesi, $\overline{X}$ üzerinde bir sezgisel topolojidir.

2.2. Sezgisel Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri

Tanım 2.2.1. (Coşkun, Çoker 1998) (X, τ) STU verilsin.

(a) $\underline{p}$, X 'te bir SN olsun. $\underline{p} \in G \subseteq N$ olacak şekilde $G \in \tau$ SAK 'si bulunabiliyorsa, X 'in N SK 'si, X 'te $\underline{p}$ 'nin bir komşuluğudur.

(b) $\underline{\underline{p}}$, X 'te bir SSN olsun. $\underline{\underline{p}} \in G \subseteq N$ olacak şekilde $G \in \tau$ SAK 'si bulunabiliyorsa, X 'in N SK 'si, X 'te $\underline{\underline{p}}$ 'nin bir komşuluğudur.

$\underline{p}$ 'nin bütün komşuluklarının kümesini $N(\underline{p})$ ile, $\underline{\underline{p}}$ 'nin bütün komşuluklarının kümesini $N(\underline{\underline{p}})$ ile göstereceğiz. $N(\underline{p})$ ve $N(\underline{\underline{p}})$ komşuluk sistemleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

Önerme 2.2.2. (Coşkun, Çoker 1998) (X, τ) STU 'ındaki $N(\underline{p})$ komşuluk sistemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

(N1) $N \in N(\underline{p})$ ise, $\underline{p} \in N$.

(N2) $N \in N(\underline{p})$ ve $N \subseteq M$ ise, $M \in N(\underline{p})$.

(N3) $N_1, N_2 \in N(\underline{p})$ ise, $N_1 \cap N_2 \in N(\underline{p})$.

(N4) $N \in N(\underline{p})$ ise, her $\underline{q} \in M$ için $N \in N(\underline{q})$ olacak şekilde $M \in N(\underline{p})$ vardır.

Kanıt (N1), (N2) ve (N4) kolayca görülebilir.

(N3) $N_1, N_2 \in N(\underline{p})$ olsun. Bu durumda, $\underline{p} \in G_i \subseteq N_i$ ($i = 1, 2$) olacak şekilde G_1 ve G_2 SAK 'leri vardır. $G := G_1 \cap G_2$ açığı için, $\underline{p} \in G \subseteq N_1 \cap N_2$ 'dir. Yani, $N_1 \cap N_2 \in N(\underline{p})$.

Önerme 2.2.3. (Coşkun, Çoker 1998) (X, τ) STU 'ındaki $N(\underline{p})$ komşuluk sistemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

(N1) $N \in N(\underline{p})$ ise, $\underline{p} \in N$.

(N2) $N \in N(\underline{p})$ ve $N \subseteq M$ ise, $M \in N(\underline{p})$.

(N3) $N_1, N_2 \in N(\underline{p})$ ise $N_1 \cap N_2 \in N(\underline{p})$.

(N4) $N \in N(\underline{p})$ ise, her $\underline{q} \in M$ için $N \in N(\underline{q})$ olacak şekilde $M \in N(\underline{p})$ vardır.

Kanıt Bir önceki teoreme benzer şekilde kanıtlanır.

Şimdi,

$$\tau = \{G : \text{her } \underline{p} \in G \text{ için } G \in N(\underline{p})\}$$

ve

$$\tau_{\approx} = \{G : \text{her } \underline{p} \in G \text{ için } G \in N(\underline{p})\}.$$

ailelerini tanımlayalım. Açıktır ki, her $G_1, G_2 \in \tau$ için $G_1 \cap G_2 \in \tau$ 'dır. Ayrıca, $(G_i)_{i \in J}$, τ 'da SAK 'lerin bir ailesi ve $G := \bigcup_{i \in J} G_i$ olsun. Bu durumda, her $\underline{p} \in G$ için $\underline{p} \in G_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in J$ indeksi vardır. Burada $G_{i_0} \in N(\underline{p})$ ve $G_{i_0} \subseteq G$ olduğu gözönüne alınırsa, (N2) 'den $G \in N(\underline{p})$ çıkar. Yani $G \in \tau$ 'dir. Sonuç olarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 2.2.4. (Coşkun, Çoker 1998) τ ve $\tau_{\approx}$, X üzerinde birer ST 'dir.

Önerme 2.2.5. (Coşkun, Çoker 1998) $\tau \subseteq \tau_{\approx}$ ve $\tau \subseteq \tau_{\approx}$.

Kanıt $G \in \tau$ olsun. Sırasıyla her $\underline{p} \in G$ ve $\underline{p} \in G$ için $G \in N(\underline{p})$ ve $G \in N(\underline{p})$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $G \in \tau$ ve $G \in \tau_{\approx}$ doğrudan çıkar.

Örnek 2.2.6. (Coşkun, Çoker 1998) $X = \{a, b, c, d\}$ ve

$$A_1 = \langle X, \{a, b\}, \{d\} \rangle, \quad A_2 = \langle X, \{c\}, \{b, d\} \rangle,$$

$$A_3 = \langle X, \emptyset, \{b, d\} \rangle, \quad A_4 = \langle X, \{a, b, c\}, \{d\} \rangle$$

olmak üzere,

$$\tau = \{\emptyset, X, A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

SK ailesini göz önüne alalım. Bu durumda, τ X üzerinde bir ST 'dir ve bu sezgisel topolojik uzaydan τ ve τ ST 'leri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} A_5 &= \langle X, \{c\}, \{b\} \rangle, & A_6 &= \langle X, \{c\}, \{d\} \rangle, & A_7 &= \langle X, \{a, b\}, \emptyset \rangle, \\ A_8 &= \langle X, \{a, b, c\}, \emptyset \rangle, & A_9 &= \langle X, \{c\}, \emptyset \rangle, & A_{10} &= \langle X, \emptyset, \{a\} \rangle, \\ A_{11} &= \langle X, \emptyset, \{b\} \rangle, & A_{12} &= \langle X, \emptyset, \{c\} \rangle, & A_{13} &= \langle X, \emptyset, \{d\} \rangle, \\ A_{14} &= \langle X, \emptyset, \{a, b\} \rangle, & A_{15} &= \langle X, \emptyset, \{a, c\} \rangle, & A_{16} &= \langle X, \emptyset, \{a, d\} \rangle, \\ A_{17} &= \langle X, \emptyset, \{b, c\} \rangle, & A_{18} &= \langle X, \emptyset, \{c, d\} \rangle, & A_{19} &= \langle X, \emptyset, \{a, b, c\} \rangle, \\ A_{20} &= \langle X, \emptyset, \{a, b, d\} \rangle, & A_{21} &= \langle X, \emptyset, \{a, c, d\} \rangle, & A_{22} &= \langle X, \emptyset, \{b, c, d\} \rangle, \\ A_{23} &= \langle X, \emptyset, \emptyset \rangle \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\tau = \tau \cup \{A_i : i = 5, 6, \dots, 23\}$$

ve $A_{24} = \langle X, \{a, c\}, \{b, d\} \rangle$, $A_{25} = \langle X, \{a\}, \{b, d\} \rangle$ olmak üzere,

$$\tau = \tau \cup \{A_{24}, A_{25}\}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7. (Coşkun, Çoker 1998) X 'in her p elemanı için Önerme 2.2.2. 'de verilen (N1), (N2), (N3) ve (N4) özelliklerini sağlayan X 'in SK 'lerinin $N(\underline{p})$ gibi bir ailesi varsa, X üzerinde, her $p \in X$ için $N(\underline{p})$, $\underline{p}$ 'nin bütün komşuluklarının ailesi olacak şekilde bir ST vardır.

Önerme 2.2.8. (Coşkun, Çoker 1998) X 'in her p elemanı için Önerme 2.2.3 'de verilen (N1), (N2), (N3) ve (N4) özelliklerini sağlayan X 'in SK 'lerinin $N(\underline{p})$ gibi

bir ailesi varsa, X üzerinde, her $p \in X$ için $N(p)$, p 'nin bütün komşuluklarının ailesi olacak şekilde bir ST vardır.

Şimdi bu iki STU arasındaki bağıntıları vereceğiz:

Önerme 2.2.9. (Coşkun, Çoker 1998) $\tau = \tau_{\sim} \cap \tau_{\approx}$.

Önerme 2.2.10. (Coşkun, Çoker 1998) A , (X, τ) STU 'nda bir SK olsun. Bu durumda,

$$int(A) = int_{\tau_{\sim}}(A) \cap int_{\tau_{\approx}}(A).$$

Genelde aşağıdaki kapsamalar vardır:

$$int(A) \subseteq int_{\tau_{\sim}}(A) \text{ ve } int(A) \subseteq int_{\tau_{\approx}}(A).$$

Ancak ters kapsamaların doğru olması gerekmez:

Örnek 2.2.11. (Coşkun, Çoker 1998) Örnek 2.2.6 'daki (X, τ) STU 'ını ve $A = \langle X, \{a, c\}, \{d\} \rangle$ SK 'sini gözönüne alırsak;

$$int(A) = \langle X, \{c\}, \{b, d\} \rangle$$

ve

$$int_{\tau_{\sim}}(A) = \langle X, \{c\}, \{d\} \rangle, \quad int_{\tau_{\approx}}(A) = \langle X, \{a, c\}, \{b, d\} \rangle$$

bulunur.

2.3. Sezgisel Topolojik Uzaylarda İç

(X, τ) STU verildiğinde, herhangi bir A SK 'sinin içi τ , $\tau_{\sim}$ ve $\tau_{\approx}$ ST 'lerine göre elde edilebilir. Ayrıca aşağıdaki kavramların koşullarında bir SK 'nin içinin farklı tipleri oluşturulabilir.

Tanım 2.3.1. (Coşkun, Çoker 1998)

(a) A, X 'te bir SK, $p \in A$ bir SN ve $\tilde{p} \in A$ bir SSN olsun. Bu durumda, eğer $A, \tilde{p}$ 'nin bir komşuluğu ise, p, A 'nın τ -iç noktasıdır denir. Eğer $A, \tilde{p}$ 'nin bir komşuluğu ise, p, A 'nın τ -iç noktasıdır denir.

(b) A 'nın bütün τ -iç ve τ -iç noktaları sırasıyla $\tau - int(A)$ ve $\tau - int(A)$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.2. (Coşkun, Çoker 1998)

(a) $A \in \tau \Leftrightarrow \tilde{A} = \tau - int(A)$.

(b) $A \in \tau \Leftrightarrow \tilde{A} = \tau - int(A)$.

Kanıt

(a) $A \in \tau$ ve $p \in \tilde{A}$ alalım. $\tilde{A} \subseteq A$ olduğundan $p \in A$ 'dır. $A \in \tau$ olduğundan A, p 'nin bir komşuluğudur. Buradan, $p \in \tau - int(A)$ bulunur, yani $\tilde{A} \subseteq \tau - int(A)$ olur. Tersine, $\tau - int(A) = \cup\{p : A \in N(p)\}$ ve $p \in \tau - int(A)$ olsun. $A \in N(p)$ olduğundan, $p \in A$ ve $p \in \tilde{A}$ olur. Buradan $\tau - int(A) \subseteq \tilde{A}$ demektir. Bu iki içermekten $\tilde{A} = \tau - int(A)$ sonucu çıkar.

Şimdi $\tilde{A} = \tau - int(A)$ varsayalım. $A \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $p \in A$ herhangi bir SN ise, $p \in \tilde{A}$ 'dır ve buradan $A, p \in A$ 'nin bir komşuluğudur. Sonuç olarak, tanım gereği, $A \in \tau$ elde edilir.

(b) Kanıtı (a) 'ya benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 2.3.3. (Coşkun, Çoker 1998) $(G_i)_{i \in J}$ X 'te SK 'lerin bir ailesi ve $G = \cup_{i \in J} G_i$ olsun. Bu durumda,

(a) $\tilde{G} = \cup_{i \in J} \tilde{G}_i$,

(b) $\tilde{G} = \cup_{i \in J} \tilde{G}_i$.

Kanıt (b) 'nin kanıtı (a) 'ya benzer olduğundan, sadece (a) 'nın kanıtı yapılacaktır:

(a) $G_i = \langle X, G_{i1}, G_{i2} \rangle$, ($i \in J$) olsun. Bu durumda,

$$G = \cup_{i \in J} G_i = \langle X, \cup_{i \in J} G_{i1}, \cap_{i \in J} G_{i2} \rangle$$

olur. Şimdi bir SN seçelim: $p \in G$.

$p \in \cup_{i \in J} G_{i1}$ olacağı açıktır. Bu durumda, $p \in G_{i1}$ olacak şekilde bir G_i vardır. Bu da $p \in \underline{G}_i$ demektir ve buradan $p \in \cup_{i \in J} \underline{G}_i$ olur.

Tersine $p \in \cup_{i \in J} \underline{G}_i$ olsun. Bu durumda, $p \in \underline{G}_i$ olacak şekilde $i \in J$ vardır. Buradan $p \in G_{i1}$ ve $p \in \cup_{i \in J} G_{i1}$ olduğu görülür. Bunun sonucunda, $\cup_{i \in J} \underline{G}_i \subseteq G$ çıkar.

Önerme 2.3.4. (Coşkun, Çoker 1998)

$$(a) \tau - int(A) = \bigcup_{G \subseteq A, G \in \tau} G,$$

$$(b) \tau - int(A) = \bigcup_{G \subseteq A, G \in \tau} G.$$

Kanıt (b) 'nin kanıtı (a) 'nın kanıtına benzediğinden, sadece (a) 'nın kanıtı yapılacaktır.

(a) $p \in \cup \{ \underline{G} : G \subseteq A, G \in \tau \}$ olsun. Bu durumda, $G \subseteq A$ ve $p \in G$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ vardır. $G \in \tau$ ve $p \in G$ olduğundan, $G \in N(p)$ olur ve buradan da $A \in N(p)$ elde edilir. Bu da $p \in \tau - int(A)$ anlamına gelir.

Tersine $p \in \tau - int(A)$ olsun. $p \in G \subseteq A$ olacak şekilde, $G \in \tau$ vardır. $p \in G$ ve $G \in \tau$ ifadelerinden sonuca ulaşırız.

Daima aşağıdaki kapsamaların geçerli olduğuna dikkat ediniz:

$$\tau - int(A) \subseteq int_{\tau}(A) \text{ ve } \tau - int(A) \subseteq int_{\tau}(A).$$

Aşağıdaki ters örnek bu kapsamaların tersinin genelde doğru olmadığını gösterir:

Örnek 2.3.5. (Coşkun, Çoker 1998) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi ve

$$\tau = \{\emptyset, X, \langle X, \{a, b, c\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{c, d\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{c\}, \{d, e\} \rangle, \langle X, \{a, b, c, d\}, \emptyset \rangle\}.$$

olmak üzere, (X, τ) STU 'ını gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\tau = \tau \cup \{\langle X, \{a, b, c\}, \emptyset \rangle, \langle X, \{c, d\}, \emptyset \rangle, \langle X, \{c\}, \{d\} \rangle, \langle X, \{c\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{c\}, \emptyset \rangle\} \cup \{\langle X, \emptyset, S \rangle : S \subseteq X\}$$

ve

$$\tau = \tau \cup \{\langle X, \{a, b, c, d\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{a, b, c\}, \{d\} \rangle, \langle X, \{a, c, d\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{b, c, d\}, \{e\} \rangle, \langle X, \{a, b, c\}, \{d, e\} \rangle, \langle X, \{a, c\}, \{d, e\} \rangle, \langle X, \{b, c\}, \{d, e\} \rangle\}.$$

olduğunu göstermek kolaydır. $B = \langle X, \{b, c\}, \{d\} \rangle$ SK 'sini alırsak, $int(B) = \langle X, \{c\}, \{d, e\} \rangle$ ve

$$int_{\tau}(B) = \langle X, \{c\}, \{d\} \rangle, \quad int_{\tau}(B) = \langle X, \{b, c\}, \{d, e\} \rangle,$$

$$\tau - int(B) = \langle X, \{c\}, \{a, b, d, e\} \rangle, \quad \tau - int(B) = \langle X, \emptyset, \{d, e\} \rangle,$$

olur. Bu da aşağıdaki içermeleri gerektirir:

$$int_{\tau}(A) \supseteq \tau - int(A), \quad int_{\tau}(A) \neq \tau - int(A),$$

$$int_{\tau}(A) \supseteq \tau - int(A), \quad int_{\tau}(A) \neq \tau - int(A).$$

$\tau - int$ ve $\tau - int$ iç operatörlerinin özelliklerini inceleyelim:

Önerme 2.3.6. (Coşkun, Çoker 1998) (X, τ) bir STU ve $A, B \in X$ 'te iki SK olsun. Bu durumda,

$$(a) \tau - int(A) \subseteq A$$

$$(b) \tau - int(A) \subseteq A$$

$$(c) A \subseteq B \implies \tau - \text{int}(A) \subseteq \tau - \text{int}(B)$$

$$(d) A \subseteq B \implies \tau - \text{int}(A) \subseteq \tau - \text{int}(B)$$

$$(e) \tau - \text{int}(A \cap B) = \tau - \text{int}(A) \cap \tau - \text{int}(B)$$

$$(f) \tau - \text{int}(A \cap B) = \tau - \text{int}(A) \cap \tau - \text{int}(B)$$

$$(g) \tau - \text{int}(X) = X$$

$$(h) \tau - \text{int}(X) = X$$

Kanıt Sadece (e) 'nin kanıtını yapalım, diğerleri doğrudan çıkmaktadır:

(e) Önce p , $A \cap B$ 'nin τ -iç noktası olsun, yani $A \cap B \in N(p)$. Buradan $A \in N(p)$ ve $B \in N(p)$ çıkar ki bu, p 'nin hem A 'nın hem de B 'nin τ -iç noktası olması demektir. Bu durumda,

$$p \in \tau - \text{int}(A) \text{ ve } p \in \tau - \text{int}(B) \implies p \in \tau - \text{int}(A) \cap \tau - \text{int}(B).$$

olur.

Diğer taraftan, eğer $p \in \tau - \text{int}(A) \cap \tau - \text{int}(B)$ ise, $A \in N(p)$ ve $B \in N(p)$ yani $A \cap B \in N(p)$ olur. Bu da p 'nin $A \cap B$ 'nin τ -iç noktası olması demektir.

Genelde,

$$\tau - \text{int}(\tau - \text{int}(A)) = \tau - \text{int}(A),$$

$$\tau - \text{int}(\tau - \text{int}(A)) = \tau - \text{int}(A)$$

sağlanmadığına dikkat ediniz. Bunun için, Örnek 2.3.5. teki (X, τ) STU 'ını ve $A = \langle X, \{b, c\}, \{d\} \rangle$ SK 'sini alalım. Bu durumda aşağıdakileri elde ederiz:

$$\tau - \text{int}(A) = \langle X, \{c\}, \{a, b, d, e\} \rangle \text{ ve } \tau - \text{int}(\tau - \text{int}(A)) = \langle X, \emptyset, X \rangle = \emptyset.$$

2.4. Sezgisel Süreklilik

Tanım 2.4.1. (Çoker 1997) (X, τ) ve (Y, ϕ) iki STU ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun sürekli olması demek, ϕ 'deki her SK 'nin öngörüntüsünün τ 'da bir SK olması demektir.

Tanım 2.4.2. (Çoker 1997) (X, τ) ve (Y, ϕ) iki STU ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun açık olması demek, τ 'daki her SK 'nin görüntüsünün ϕ 'de bir SK olması demektir.

Önerme 2.4.3. (Çoker 1997) (X, τ) ve (Y, ϕ) iki STU ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y 'deki her SKK 'nin öngörüntüsü X 'te SKK olmasıdır.

Önerme 2.4.4. (Çoker 1997) (X, τ) ve (Y, ϕ) iki STU olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (a) $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ süreklidir.
- (b) Y 'deki her B SK 'si için $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$.
- (c) Y 'deki her B SK 'si için $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl(B))$.

Önerme 2.4.5. (Çoker 1997) (X, τ) ve (Y, ϕ) iki STU ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

- (a) $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \phi_1)$ süreklidir.
- (b) $f : (X, \tau_2) \rightarrow (Y, \phi_2)$ süreklidir.

2.4.1. Sezgisel sürekli fonksiyon örnekleri

Örnek 2.4.1.1. Sabit fonksiyonun sezgisel sürekliliği:

$p \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = p$ fonksiyonu için $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$ fonksiyonunun

sezgisel sürekliliğini inceleyelim:

$A = \langle \mathbb{R}, A_1, A_2 \rangle \in \tau^*$ SAK 'sini gözönüne alalım. A 'nın ters görüntüsü,
 $f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \rangle$

$p \in A_1 \Rightarrow f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, \emptyset \rangle = \mathbb{R} \in \tau$

$p \in A_2 \Rightarrow f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} \rangle = \emptyset \in \tau$

$p \notin A_1, p \notin A_2 \Rightarrow f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \emptyset, \emptyset \rangle$

Bu durumda, $\langle \mathbb{R}, \emptyset, \emptyset \rangle \in \tau$ ise f süreklidir.

Örnek 2.4.1.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde τ sezgisel sonlu tümleyenler topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ fonksiyonu sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.3. τ $\mathbb{R}$ üzerinde sezgisel sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere $(\mathbb{R}, \tau)$ STU 'ını ve $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \tau), f(x) = x^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda f fonksiyonu süreklidir.

Örnek 2.4.1.4. $p \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = p$ ve τ_p $\mathbb{R}$ üzerinde sezgisel özel nokta topolojisi olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau_p) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_p)$ fonksiyonunun sezgisel sürekliliğini inceleyelim:

$\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \in \tau_p$ SAK 'sinin ters görüntüsünün τ_p 'da olup olmadığını araştıralım.

$\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \in \tau_p \Rightarrow p \in \langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \Rightarrow p \in G_1.$

$f^{-1}\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, \emptyset \rangle \in \tau_p.$

O halde f , sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.5. $p \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = p$, ve $\tau_{\sim p}$ $\mathbb{R}$ üzerinde sezgisel dışlanmış nokta topolojisi olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau_{\sim p}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\sim p})$ fonksiyonunun sezgisel sürekliliğini inceleyelim:

$\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \in \tau_{\sim p}$ SAK 'sinin ters görüntüsünün $\tau_{\sim p}$ 'da olup olmadığını araştıralım.

$\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \in \tau_{\sim p} \Rightarrow p \notin \langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \Rightarrow p \notin G_1 \Rightarrow p \in G_1^t$

İki durum sözkonusudur:

* $p \in G_2 \Rightarrow f^{-1}\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} \rangle \in \tau_{\sim p}$
 * $p \notin G_2 \Rightarrow f^{-1}\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \rangle = \langle \mathbb{R}, \emptyset, \emptyset \rangle \in \tau_{\sim p}$
 O halde f , sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau_{sol\ sol}$ sezgisel sol-sol topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol})$ fonksiyonunun sezgisel sürekliliğini araştıralım. $\langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle \in \tau_{sol\ sol}$ SAK 'sini alalım.

$$\begin{aligned} f^{-1}\langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle &= \langle \mathbb{R}, f^{-1}(-\infty, a), f^{-1}[b, \infty) \rangle \\ &= \langle \mathbb{R}, (-\infty, \frac{a}{3}), [\frac{b}{3}, \infty) \rangle; \end{aligned}$$

$$a \leq b \Rightarrow \frac{a}{3} \leq \frac{b}{3} \Rightarrow \langle \mathbb{R}, (-\infty, \frac{a}{3}), [\frac{b}{3}, \infty) \rangle \in \tau_{sol\ sol}.$$

O halde f , sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde τ sezgisel bilinen topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ fonksiyonu sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde τ sezgisel bilinen-sol topolojisi ve $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau^* = \{ \mathbb{R}, \emptyset \} \cup \{ \langle \mathbb{R}, (0, +\delta), [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \mid \delta, \epsilon > 0 \}$ topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$ fonksiyonu sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau_{sol\ sol}$ sezgisel sol-sol topolojisi ve $\tau_{sağ\ sağ}$ sezgisel sağ-sağ topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{sağ\ sağ})$ fonksiyonunun sezgisel sürekliliğini araştıralım.

$$\begin{aligned} * A = \langle \mathbb{R}, (a, \infty), (-\infty, b] \rangle \in \tau_{sağ\ sağ} &\Rightarrow \\ f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(a, \infty), f^{-1}(-\infty, b] \rangle &= \langle \mathbb{R}, (-\infty, -a), [-b, \infty) \rangle \in \tau_{sol\ sol} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * A = \langle \mathbb{R}, (a, \infty), \emptyset \rangle \in \tau_{sağ\ sağ} &\Rightarrow \\ f^{-1}(A) = \langle \mathbb{R}, f^{-1}(a, \infty), f^{-1}(\emptyset) \rangle &= \langle \mathbb{R}, (-\infty, -a), \emptyset \rangle \in \tau_{sol\ sol} \end{aligned}$$

O halde f , sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde τ sezgisel bilinen topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ fonksiyonu sezgisel süreklidir.

Örnek 2.4.1.11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau_{sol\,sol}$ sezgisel sol-sol topolojisi için, $f : (\mathbb{R}, \tau_{sol\,sol}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{sol\,sol})$ fonksiyonunun sezgisel sürekliliğini araştıralım.

$A = \langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle \in \tau_{sol\,sol}$ SAK 'sini alalım.

$$\begin{aligned} f^{-1}\langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle &= \langle \mathbb{R}, f^{-1}(-\infty, a), f^{-1}[b, \infty) \rangle \\ &= \langle \mathbb{R}, (-\infty, \llbracket a \rrbracket + 1), [\llbracket b \rrbracket + 1, \infty) \rangle \in \tau_{sol\,sol} \end{aligned}$$

O halde f , sezgisel süreklidir.

2.4.2. Sezgisel noktasal süreklilik

Tanım 2.4.2.1. (X, τ) , (Y, ϕ) STU 'lar, $p \in X$, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) f fonksiyonu,

$$\forall U \in N(f(p)) \exists V \in N(p) f(V) \subseteq U$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna p 'de sürekli denir.

(b). f fonksiyonu,

$$\forall U \in N(f(\underline{p})) \exists V \in N(\underline{p}) f(V) \subseteq U$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\underline{p}$ 'de sürekli denir.

(c) Hem p 'de hem $\underline{p}$ 'de sürekli olan f fonksiyonuna p 'de sürekli denir.

(d) Her $p \in X$ 'de sürekli olan f fonksiyonuna noktasal sürekli denir.

Önerme 2.4.2.2. (X, τ) , (Y, ϕ) STU 'lar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul f 'nin noktasal sürekli olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$: $p \in X$ olsun.

p 'de süreklilik: $U \in N(f(p))$ alalım. $V = f^{-1}(U)$ seçersek istenen koşul sağlanır.

$\underline{p}$ 'de süreklilik: Benzer işlem yapılır.

Buradan f , noktasal süreklidir.

$\Leftarrow: G = \langle Y, G_1, G_2 \rangle \in \phi$ ve $H = f^{-1}(G) = \langle X, f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \rangle$ olsun.

$p \in H \Rightarrow f(p) \in G \Rightarrow G$ için $\exists U \in N(p) \ni f(U) \subseteq G \Rightarrow p \in U \subseteq f^{-1}(G) = H$.

$\underline{p} \in H \Rightarrow f(\underline{p}) \in G \Rightarrow G$ için $\exists V \in N(\underline{p}) \ni f(V) \subseteq G \Rightarrow \underline{p} \in V \subseteq f^{-1}(G) = H$.

H 'nin tüm noktaları için, o noktayı içeren ve H 'nin kapsadığı bir açık bulunabildiğinden $H (X, \tau)$ STU 'nda bir SAK 'dır. Yani $H = f^{-1}(G) \in \tau$ bulunur. O halde f , sürekli.

2.4.3. Sezgisel noktasal sürekli fonksiyon örnekleri

Örnek 2.4.3.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu verilsin. τ sezgisel bilinen topoloji olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ fonksiyonunun sürekliliğini ve noktasal sürekliliğini inceleyelim:

$G = \langle \mathbb{R}, (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, \infty) \rangle \in \tau$ SAK 'sinin ters görüntüsü, $f^{-1}(G) = \langle \mathbb{R}, [2, 3), (-\infty, 1) \cup [3, \infty) \rangle \notin \tau$ olduğundan f sürekli değildir.

Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{Z}$ noktasını alalım. $f(a) = a$ 'dır.

$\underline{a}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}, (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}), (-\infty, a - \frac{3}{2}] \cup [a + 1, \infty) \rangle \in N(f(\underline{a}))$
 $f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, [a, a + 1), (-\infty, a - 1) \cup [a + 1, \infty) \rangle$ olur. $\underline{a} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{a}$ 'da sürekli değildir.

$\underline{\underline{a}}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}, (a + \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2}), (-\infty, a - 1] \cup [a + 2, \infty) \rangle \in N(f(\underline{\underline{a}}))$
 $f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, [a + 1, a + 2), (-\infty, a) \cup [a + 2, \infty) \rangle$ olur. $\underline{\underline{a}} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{\underline{a}}$ 'da sürekli değildir.

Ancak $a \notin \mathbb{Z}$ olduğunda, $f, \underline{a}$ 'da ve $\underline{\underline{a}}$ 'da sürekli.

Örnek 2.4.3.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sgn}(x)$ fonksiyonu verilsin. τ sezgisel bilinen topoloji olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ fonksiyonunun sürekliliğini ve noktasal sürekliliğini inceleyelim:

$G = \langle \mathbb{R}, (2, 3), (-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [4, \infty) \rangle \in \tau$ SAK 'sinin ters görüntüsü, $f^{-1}(G) = \langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, 0) \rangle \notin \tau$ olduğundan f sürekli değildir.

Şimdi 0 noktasını alalım. $f(0) = 0$ 'dır.

$\underline{0}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}, (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty) \rangle \in N(f(\underline{0})) \Rightarrow$

$f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, \{0\}, \emptyset \rangle$ olur. $\underline{0} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{0}$ 'da sürekli değildir.

$\underline{0}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}, (2, 3), (-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [4, \infty) \rangle \in N(f(\underline{0})) \Rightarrow f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, 0) \rangle$ olur. $\underline{0} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{0}$ 'da sürekli değildir.

Örnek 2.4.3.3. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu verilsin. $\tau = \{\mathbb{R}^+, \emptyset\} \cup \{(\mathbb{R}^+, (0, \delta), [\delta + \epsilon, \infty)) \mid \delta, \epsilon > 0\}$ olmak üzere $f : (\mathbb{R}^+, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \tau)$ fonksiyonunun sürekliliğini ve noktasal sürekliliğini inceleyelim:

$G = \langle \mathbb{R}^+, (0, \delta), [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \in \tau$ SAK 'sinin ters görüntüsü,

$$f^{-1}(G) = \langle \mathbb{R}^+, (\frac{1}{\delta}, \infty), (0, \frac{1}{\delta + \epsilon}] \rangle \notin \tau$$

olduğundan f sürekli değildir.

Şimdi $a \in \mathbb{R}^+$ noktasını alalım. $f(a) = \frac{1}{a}$ 'dır.

$\underline{a}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}^+, (0, b), (c, \infty) \rangle \in N(f(\underline{a})) \Rightarrow \frac{1}{a} \in (0, b) \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < b \Rightarrow \frac{1}{b} < a$ $f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}^+, (\frac{1}{b}, \infty), (0, \frac{1}{c}] \rangle$ olur. $\underline{a} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{a}$ 'da sürekli değildir.

$\underline{a}$ 'da süreklilik: $V = \langle \mathbb{R}^+, (0, b), (c, \infty) \rangle \in N(f(\underline{a})) \Rightarrow \frac{1}{a} < c \Rightarrow \frac{1}{c} < a$ $f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}^+, (\frac{1}{b}, \infty), (0, \frac{1}{c}] \rangle$ olur. $\underline{a} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. O halde $f, \underline{a}$ 'da sürekli değildir.

Örnek 2.4.3.4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonu verilsin. τ sezgisel sayılabilir tümleyenler topolojisi ve τ^* sezgisel bilinen topoloji olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$ fonksiyonunun sürekliliğini ve noktasal sürekliliğini inceleyelim:

$G = \langle \mathbb{R}, (1, 2), (-\infty, 0] \cup [3, \infty) \rangle \in \tau^*$ SAK 'sinin ters görüntüsü, $f^{-1}(G) = \langle \mathbb{R}, (1, 2), (-\infty, 0] \cup [3, \infty) \rangle \notin \tau$ olduğundan f sürekli değildir.

Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasını alalım. $f(a) = a$ 'dır.

$\underline{a}$ 'da süreklilik: $\epsilon > 0$ olmak üzere;

$V = \langle \mathbb{R}, (a - \epsilon, a + \epsilon), (-\infty, a - \epsilon] \cup [a + \epsilon, \infty) \rangle \in N(f(\underline{a}))$ SAK 'sinin ters görüntüsü, $f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, (a - \epsilon, a + \epsilon), (-\infty, a - \epsilon] \cup [a + \epsilon, \infty) \rangle$ olur. $U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde

$U \in N(\underline{a})$ yoktur. O halde f , $\underline{a}$ 'da sürekli değildir.
 f 'nin $\underline{a}$ 'da sürekli olmadığı da benzer şekilde gösterilebilir.

2.5. Sezgisel Yakınsaklık

Tanım 2.5.1. $X \neq \emptyset$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{p}_n = \langle X, \{p_n\}, \{p_n\}' \rangle$ şeklinde tanımlı her fonksiyona X 'te bir $\underline{p}$ -dizi denir ve $(\underline{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.5.2. $X \neq \emptyset$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{p}_n = \langle X, \emptyset, \{p_n\}' \rangle$ şeklinde tanımlı her fonksiyona X 'te bir $\underline{p}$ -dizi denir ve $(\underline{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.5.3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(n) = \frac{1}{n}$ olsun.

$(\underline{x}_n) = (\langle \mathbb{R}, \{\frac{1}{n}\}, \{\frac{1}{n}\}' \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir $\underline{p}$ -dizidir.

$(\underline{x}_n) = (\langle \mathbb{R}, \emptyset, \{\frac{1}{n}\}' \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir $\underline{p}$ -dizidir.

Tanım 2.5.4. (X, τ) bir STU, $(\underline{x}_n)$ bir $\underline{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $U \in N(\underline{x}_0)$ için $n \geq n_0 \Rightarrow \underline{x}_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, $(\underline{x}_n)$ $\underline{p}$ -dizisine (X, τ) 'da $\underline{x}_0$ 'a yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0 \text{ veya } \underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_0$$

şeklinde gösterilir. Burada $\underline{x}_0$, $(\underline{x}_n)$ dizisinin limitidir.

Önerme 2.5.5. (X, τ) bir STU, $(\underline{x}_n)$ bir $\underline{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\underline{x}_n \xrightarrow{\tau} \underline{x}_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{I_1} x_0$$

Kanıt

$$\begin{aligned} \underline{x}_n \xrightarrow{\tau} \underline{x}_0 &\Leftrightarrow \forall U \in N(\underline{x}_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \Rightarrow \underline{x}_n \in U \\ &\Leftrightarrow \forall U \in N(\underline{x}_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U_1 \\ &\Leftrightarrow \forall U_1 \in N_{\tau_1}(x_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U_1 \\ &\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{I_1} x_0 \end{aligned}$$

Tanım 2.5.6. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $U \in N(\underset{\sim}{x}_0)$ için $n \geq n_0 \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, $(\underset{\sim}{x}_n)$ $\underset{\sim}{p}$ -dizisine (X, τ) 'da $\underset{\sim}{x}_0$ 'a yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{x}_0 \text{ veya } \underset{\sim}{x}_n \rightarrow \underset{\sim}{x}_0$$

şeklinde gösterilir. Burada $\underset{\sim}{x}_0, (\underset{\sim}{x}_n)$ dizisinin limitidir.

Önerme 2.5.7. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}_0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau_2} \underset{\sim}{x}_0$$

Tanım 2.5.8. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $U \in N(\underset{\sim}{x}_0)$ için $n \geq n_0 \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, $(\underset{\sim}{x}_n)$ $\underset{\sim}{p}$ -dizisine (X, τ) 'da $\underset{\sim}{x}_0$ 'a yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{x}_0 \text{ veya } \underset{\sim}{x}_n \rightarrow \underset{\sim}{x}_0$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 2.5.9. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\underset{\sim}{x}_n \rightarrow \underset{\sim}{x}_0 \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}_0$$

Kanıt

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{x}_n \rightarrow \underset{\sim}{x}_0 &\Rightarrow \forall U \in N(\underset{\sim}{x}_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in U \\ &\Rightarrow \forall U \in N(\underset{\sim}{x}_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in U \\ &\Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}_0 \end{aligned}$$

Önerme 2.5.10. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir $\underset{\sim}{p}$ -dizi ve $x \in X$ olsun.

$$(a) \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau_2} \underset{\sim}{x}$$

$$(b) \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}$$

Kanıt

(a) $\Rightarrow$: $N \in N_{\tau}(\underset{\sim}{x})$ ise, $\exists U \in \tau$ vardır öyle ki $\underset{\sim}{x} \in U \subseteq N$ 'dir. τ 'nun tanımı gereği $U \in N(\underset{\sim}{x})$ olur. $\underset{\sim}{x}_n \rightarrow \underset{\sim}{x}$ olduğu için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $n_0 \leq n \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in U \subseteq N \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in N$ 'dir. Bu durumda $\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}$ olur.

$\Leftarrow$: $N \in N(\underset{\sim}{x})$ olsun. $\exists U \in \tau$ vardır öyle ki $\underset{\sim}{x} \in U \subseteq N$ 'dir. $\tau \subseteq \tau$ olduğu için $U \in \tau$ olup, $N \in N_{\tau}(\underset{\sim}{x})$ 'dir. Buradan, $\exists n_0$ vardır ve $n_0 \leq n \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in N$ olarak istenen çıkar. Yani $\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}$ 'dir.

(b) Benzer şekilde çıkar.

Önerme 2.5.11. (X, τ) bir STU, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir p -dizi, $(\underset{\sim}{x}_n)$ bir p -dizi ve $x \in X$ olsun.

$$(a) \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau_{0,1}} \underset{\sim}{x}$$

$$(b) \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau_{0,2}} \underset{\sim}{x}$$

Kanıt

(b) $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} N \in N_{\tau_{0,2}}(\underset{\sim}{x}) &\Rightarrow \exists T = \langle X, T_1, T_2 \rangle \in \tau \ni \underset{\sim}{x} \in \langle X, T_2^t, T_2 \rangle \subseteq N \\ &\Rightarrow \exists n_0 \ni n_0 \leq n \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in \langle X, T_1, T_2 \rangle \\ &\Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in \langle X, T_1, T_2 \rangle \subseteq \langle X, T_2^t, T_2 \rangle \subseteq N \\ &\Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in N. \end{aligned}$$

O halde $\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau_{0,2}} \underset{\sim}{x}$ 'dir.

$\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} N \in N_{\tau}(\underset{\sim}{x}) &\Rightarrow \exists T = \langle X, T_1, T_2 \rangle \in \tau \ni \underset{\sim}{x} \in T \subseteq N \\ &\Rightarrow x \in T_2^t \Rightarrow \underset{\sim}{x} \in \langle X, T_2^t, T_2 \rangle \in \tau_{0,2} \\ &\Rightarrow \exists n_0 \ni n_0 \leq n \Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in \langle X, T_2^t, T_2 \rangle \\ &\Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in \langle X, T_1, T_2 \rangle \subseteq N \\ &\Rightarrow \underset{\sim}{x}_n \in N. \end{aligned}$$

O halde $\underline{x}_n \xrightarrow{\tau} \underline{x}$ 'dir.

(a) Benzer şekilde çıkar.

Tanım 2.5.12. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. X 'te $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_0$ koşulunu sağlayan her $(\underline{x}_n)$ p -dizisi için, Y 'de $f(\underline{x}_n) \rightarrow f(\underline{x}_0)$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna $\underline{x}_0$ 'da dizisel süreklidir denir.

Tanım 2.5.13. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. X 'te $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_0$ koşulunu sağlayan her $(\underline{x}_n)$ p -dizisi için Y 'de $f(\underline{x}_n) \rightarrow f(\underline{x}_0)$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna $\underline{x}_0$ 'da dizisel süreklidir denir.

Önerme 2.5.14. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f, \underline{x}_0$ 'da ve $\underline{x}_0$ 'da dizisel sürekli ise $f \underline{x}_0$ 'da dizisel süreklidir denir.

Önerme 2.5.15. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

$f, \underline{x}_0$ 'da süreklidir. $\Rightarrow f, \underline{x}_0$ 'da dizisel süreklidir.

Kanıt $f, \underline{x}_0$ 'da sürekli $\Rightarrow \forall V \in N(f(\underline{x}_0)) \exists U \in N(\underline{x}_0) \ni f(U) \subseteq V$
 $(\underline{x}_n)$, X 'te bir p -dizi olsun ve $\underline{x}_0$ 'a yakınsasın. $f(\underline{x}_0)$ 'ın bir V komşuluğunu seçelim:

$$\begin{aligned} V \in N(f(\underline{x}_0)) &\Rightarrow \exists U \in N(\underline{x}_0) \ni f(U) \subseteq V \\ &\Rightarrow f(\underline{x}_0) \in f(U) \subseteq V \\ &\Rightarrow \underline{x}_0 \in U \subseteq f^{-1}(V) \\ &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n \geq n_0 \text{ için } \underline{x}_n \in U \subseteq f^{-1}(V) \\ &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n \geq n_0 \text{ için } f(\underline{x}_n) \in V \end{aligned}$$

Bu da $f(\underline{x}_n)$ 'ın $f(\underline{x}_0)$ 'a yakınsaması demektir. O halde $f, \underline{x}_0$ 'da dizisel süreklidir.

Önerme 2.5.16. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

$$f, \underset{\sim}{x}_0 \text{ 'da sürekli} \Rightarrow f, \underset{\sim}{x}_0 \text{ 'da dizisel süreklidir.}$$

Kanıt Kanıtı bir önceki teoremin kanıtına benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 2.5.17. (X, τ) ve (Y, τ^*) iki STU, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

(a) $f, \underset{\sim}{x}_0$ 'da sürekli $\Rightarrow f, \underset{\sim}{x}_0$ 'da dizisel süreklidir.

(b) $f, \underset{\sim}{x}_0$ 'da sürekli $\Rightarrow f, \underset{\sim}{x}_0$ 'da dizisel süreklidir.

(c) f, x_0 'da sürekli $\Rightarrow f, x_0$ 'da dizisel süreklidir.

Bu gerektirmelerin tersi doğru olmayabilir. Bunu bir kaç ters örnekle gösterebiliriz:

Örnek 2.5.18. τ sezgisel sayılabilir tümleyenler topolojisi ve τ^* sezgisel bilinen topoloji olmak üzere; $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$, $f(x) = x$ fonksiyonunu gözönüne alalım. (x_0) $\mathbb{R}$ 'de bir p -dizi, $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}_0$ olsun. A sezgisel kümesini şöyle tanımlayalım:

$$A = \cup \{ \underset{\sim}{x}_n \mid \underset{\sim}{x}_n \neq \underset{\sim}{x}_0, n \in \mathbb{N} \} = \langle \mathbb{R}, \{x_1, x_2, \dots\}, \{x_1, x_2, \dots\}' \rangle$$

$$\Rightarrow \overline{A} = \langle \mathbb{R}, \{x_1, x_2, \dots\}', \{x_1, x_2, \dots\} \rangle \in \tau, \underset{\sim}{x}_0 \in \overline{A}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \in N(\underset{\sim}{x}_0)$$

$\underset{\sim}{x}_n \xrightarrow{\tau} \underset{\sim}{x}_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ iken $\underset{\sim}{x}_n \in \overline{A}$ 'dır. Ancak burada çelişkiye düşülmektedir. Bu durumda $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki, $n \geq n_0$ için $\underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{x}_0$ ve bu $n_0 \in \mathbb{N}$ için, $n \geq n_0$ ise $f(\underset{\sim}{x}_n) = f(\underset{\sim}{x}_0)$ olur. Bu da $f(\underset{\sim}{x}_n) \xrightarrow{\tau^*} f(\underset{\sim}{x}_0)$ demektir. Yani $f, \underset{\sim}{x}_0$ 'da dizisel süreklidir.

Şimdi $\underset{\sim}{x}_0$ 'daki sürekliliği inceleyelim.

$V = \langle \mathbb{R}, (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), (-\infty, x_0 - \epsilon] \cup [x_0 + \epsilon, \infty) \rangle \in N(f(\underset{\sim}{x}_0))$ olsun.

$f^{-1}(V) = \langle \mathbb{R}, (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), (-\infty, x_0 - \epsilon] \cup [x_0 + \epsilon, \infty) \rangle$ olur.

Bu durumda, hiç bir $U \in N(\underline{x}_0)$ yoktur ki, $U \subseteq f^{-1}(V)$ sağlansın. Bu da f 'nin $\underline{x}_0$ 'da sürekli olmadığını gösterir.

Örnek 2.5.19. $\tau = \{(\mathbb{R}^+, (0, \delta), [\delta + \epsilon, \infty)) \mid \delta > 0, \epsilon \geq 0\} \cup \{\mathbb{R}^+, \emptyset\}$ olmak üzere $f : (\mathbb{R}^+, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \tau)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun sürekliliğini ve noktasal sürekliliğini inceleyelim:

$a \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$V = (\mathbb{R}^+, (0, b), [c, \infty)) \in N(\frac{1}{a}) \Rightarrow \frac{1}{a} < c \Rightarrow \frac{1}{c} < a$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = (\mathbb{R}^+, (\frac{1}{b}, \infty), (0, \frac{1}{c}]) \Rightarrow$$

$\frac{a}{c} \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde $U \in \tau$ yoktur. Bu durumda $f, \frac{a}{c}$ 'da sürekli değildir.

2.6. Sezgisel Filtreler

Tanım 2.6.1. $X \neq \emptyset$, $\mathbf{F} \subseteq I(X)$, $\mathbf{F} \neq \emptyset$ olsun. Bu $\mathbf{F}$ SK ailesinin bir sezgisel filtre olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekli ve yeterlidir:

F1- $\emptyset \notin \mathbf{F}$.

F2- $F_1, F_2 \in \mathbf{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathbf{F}$.

F3- $F \in \mathbf{F}$ ve $F \subseteq F' \Rightarrow F' \in \mathbf{F}$.

Önerme 2.6.2. $\mathbf{F}$, X üzerinde bir sezgisel filtre olsun.

(a) $\mathbf{F}_1 = \{F_1 \mid \langle X, F_1, F_2 \rangle \in \mathbf{F}\}$ X üzerinde bir filtre olup olmadığı incelenirse:

$\emptyset$ 'nin $\mathbf{F}_1$ 'e ait olması, $F_1 = \emptyset$, $F_2 \neq X$ olacak şekilde bir $\langle X, F_1, F_2 \rangle$ SK 'sinin $\mathbf{F}$ 'ye ait olmasıyla mümkün olur. Yani, böyle bir SK $\mathbf{F}$ 'de varsa $\mathbf{F}_1$, X üzerinde bir filtre değildir.

(b) $\mathbf{F}_2 = \{F_2^t \mid \langle X, F_1, F_2 \rangle \in \mathbf{F}\}$, X üzerinde bir filtredir.

Kanıt (b)

F1- $\emptyset$ 'nin $\mathbf{F}_2$ 'ye ait olduğunu varsayalım. Bu durumda, bir $\langle X, F_1, F_2 \rangle \in \mathbf{F}$ için $F_2^t = \emptyset$ olur. Bu $F_2 = X$ ve $F_1 = \emptyset$ demektir. Bu sonuç da $\mathbf{F}$ 'nin filtre olmasıyla çelişir. Yani $\emptyset \notin \mathbf{F}_1$ 'dir.

F2- $\langle X, F_1, F_2 \rangle, \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \mathbf{F}$ için, $F_2^t, G_2^t \in \mathbf{F}_2$ olsun. $\mathbf{F}$ 'nin bir sezgisel filtre olmasından, $\langle X, F_1, F_2 \rangle \cap \langle X, G_1, G_2 \rangle = \langle X, F_1 \cap G_1, F_2 \cup G_2 \rangle \in \mathbf{F}$ olacağı için $(F_2 \cup G_2)^t = F_2^t \cap G_2^t \in \mathbf{F}_2$ olacaktır.

F3- $F_2^t \in \mathbf{F}_2$ ve $F_2^t \subseteq H$ olsun. Bu durumda,
 $F_2^t \subseteq H \Rightarrow F_1 \subseteq H$ ve $F_2 \supseteq H^t$ olur. Bu da $\langle X, F_1, F_2 \rangle \subseteq \langle X, H, H^t \rangle$ ve $\langle X, H, H^t \rangle \in \mathbf{F}$ demektir. Yani $(H^t)^t = H \in \mathbf{F}_2$ 'dir.

Tanım 2.6.3. $\mathbf{F}$ bir sezgisel filtre ve $\mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{F}$ olsun. Eğer her $F \in \mathbf{F}$ için $F_1 \subseteq F$ olacak şekilde bir $F_1 \in \mathbf{F}_1$ varsa, bu $\mathbf{F}_1$ ailesine $\mathbf{F}$ 'nin bir tabanı (sezgisel filtre tabanı) adı verilir.

Tanım 2.6.4. $X \neq \emptyset$, $\beta \subseteq I(X)$, $\beta \neq \emptyset$ olsun. β 'nın X üzerinde bir sezgisel filtre tabanı olması demek, her $B_1, B_2 \in \beta$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ bulunabilmesi demektir.

Örnek 2.6.5. $X \neq \emptyset$, $\emptyset \neq A$, X 'te bir sezgisel küme olsun. $\mathbf{F} = \{F \in I(X) \mid A \subseteq F\}$ X üzerinde bir sezgisel filtredir ve $\beta = \{A\}$ bu filtrenin tabanıdır.

Örnek 2.6.6. $X \neq \emptyset$, (X, τ) STU ve $x \in X$ olsun. $N(x)$, X üzerinde bir sezgisel filtredir. Bu filtreye x 'nin komşuluk filtresi denir.

Örnek 2.6.7. $X \neq \emptyset$, $p \in X$ olsun. $\mathbf{F}_p = \{A \in I(X) \mid p \in A\}$ ve $\mathbf{F}_{\tilde{p}} = \{A \in I(X) \mid \tilde{p} \in A\}$ şeklinde tanımlanan SK aileleri X üzerinde birer filtredir. Burada $\mathbf{F}_{\tilde{p}} \subseteq \mathbf{F}_p$ olduğu gösterilebilir.

Örnek 2.6.8. $X \neq \emptyset$, (X, τ) STU ve $x \in X$ olsun. $N(x)$, X üzerinde bir sezgisel filtredir. Bu filtreye x 'nin komşuluk filtresi denir.

Tanım 2.6.9. Bir tabanı β olan $\mathbf{F}$ filtresine, β ile üretilen filtre denir. $\mathbf{F}$, β 'nın tüm elemanlarının bütün üst kümelerinden oluşur ve $\mathbf{F} = \langle \beta \rangle$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.6.10. (x_n) , X 'te bir p -dizi olsun. Her k için $B_k = \cup_{n \geq k} x_n$ olmak üzere $\beta = \{B_k \mid k \in N\}$ ailesi X üzerinde bir sezgisel filtre tabanıdır. $F = \langle \beta \rangle$ filtresine (x_n) dizisi ile üretilen filtre denir.

Örnek 2.6.11. (x_n) , X 'te bir p -dizi olsun. Her k için $B_k = \cup_{n \geq k} x_n$ olmak üzere $\beta = \{B_k \mid k \in N\}$ ailesi X üzerinde bir sezgisel filtre tabanıdır. $F = \langle \beta \rangle$ filtresine (x_n) dizisi ile üretilen filtre denir.

Tanım 2.6.12. F_1 ve F_2 , X üzerinde iki sezgisel filtre olsun. $F_1 \subseteq F_2$ ise; F_1 , F_2 'den kaba veya F_2 , F_1 'den incedir denir. X üzerindeki bir F filtresinden daha ince bir filtre yoksa, F filtresine ultrafiltre denir.

Önerme 2.6.13. F X üzerinde bir filtre ve $\{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \cup G_2 \neq X\} \subseteq F$ olsun. Her $A \in I(X)$ için $A \in F$ ya da $\bar{A} \in F$ ise; F , X üzerinde bir sezgisel ultrafiltredir.

Kanıt $F \subset G$ olacak şekilde bir G filtresi varolsun.

$\exists G \in G$ için $G = \langle X, G_1, G_2 \rangle \notin F$ ve $G_1 \cup G_2 = X$ 'tir. Varsayımdan $\bar{G} = \langle X, G_1, G_2 \rangle \in F \subset G \Rightarrow \bar{G} \in G$. Burada çelişkiye düşülmektedir. Çünkü $G \cap \bar{G} = \emptyset$ 'dir. Bu durumda $F \subset G$ olacak şekilde bir G filtresi yoktur. Yani F , X üzerinde bir ultrafiltredir.

2.7. Sezgisel Kompaktlık

Tanım 2.7.1. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU olsun.

(a) X 'te $\cup\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\} = X$ koşulunu sağlayan SAK 'lerin bir ailesine X 'in bir açık örtüsü denir. X 'in $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ açık örtüsünün sonlu bir altailesi X 'in bir açık örtüsü ise, bu altaileye $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ açık örtüsünün bir sonlu altörtüsü denir.

(b) X 'teki SKK 'lerinin bir $\{\langle X, K_i^{(1)}, K_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ ailesinin sonlu kesişim özelliğini sağlaması için gerek ve yeterli koşul, her sonlu $\{\langle X, K_i^{(1)}, K_i^{(2)} \rangle : i = 1, 2, \dots, n\}$ altailesinin $\cap_{i=1}^n \langle X, K_i^{(1)}, K_i^{(2)} \rangle \neq \emptyset$ özelliğini sağlaması demektir.

Tanım 2.7.2. (Çoker 1997) Bir STU 'ın kompakt olması demek, her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsünün olması demektir.

Önerme 2.7.3. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU olsun.

$$\begin{aligned} (X, \tau) \text{ kompakttır} &\Leftrightarrow (X, \tau_{0,1}) \text{ kompakttır} \\ &\Leftrightarrow (X, \tau_1) \text{ kompakttır} \end{aligned}$$

Sonuç 2.7.4. (Çoker 1997) Bir (X, τ) STU 'ın kompakt olması için gerek ve yeter koşul, X 'teki sonlu kesişim özelliğine sahip her $\{\langle X, K_i^{(1)}, K_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ SKK ailesinin boş olmayan kesişime sahip olmasıdır.

Sonuç 2.7.5. (Çoker 1997) $(X, \tau), (Y, \phi)$ iki STU ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli, örten bir fonksiyon olsun. (X, τ) kompakt ise, (Y, ϕ) de kompakttır.

Tanım 2.7.6. (Çoker 1997) (X, τ) bir STU ve A, X 'te bir SK olsun.

(a) $A \subset \cup\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ koşulunu sağlayan X 'teki bir $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ SAK ailesine A 'nın bir açık örtüsü denir. A 'nın $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ açık örtüsünün sonlu bir altailesi A 'nın bir örtüsü ise, bu altaileye $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$ açık örtüsünün bir sonlu altörtüsü denir.

(b) (X, τ) STU 'ında bir $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$ SK 'sinin kompakt olması demek, A 'nın her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsünün olması demektir.

Sonuç 2.7.7. (Çoker 1997) $(X, \tau), (Y, \phi)$ iki STU ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $A, (X, \tau)$ 'da kompakt ise, $f(A)$ da (Y, ϕ) içinde kompakttır.

Önerme 2.7.8. (X, τ) bir STU ve A, X 'te bir SK olsun. A sonlu ise, A kompakttır.

Kanıt $A = \langle X, A_1, A_2 \rangle$, X 'te sonlu bir SK olsun. A 'nın açık bir örtüsü $\{U_i\}_{i \in I}$ olsun. A_1 'in (X, τ_1) uzayında, A_2 'nin (X, τ_2) uzayında sonlu olması ve bunun sonucunda kompakt olmaları kullanılarak aşağıdakiler yazılabilir:

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow A_1 \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i^1$ olup, $A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i^1$ olacak biçimde bir sonlu altörtü seçilebilir.

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow A_2 \supseteq \bigcup_{j \in J} U_j^2 \Rightarrow \bigcup_{j \in J} (U_j^2)' \supseteq A_2'$ olup, $\bigcup_{j=1}^m (U_j^2)' \supseteq A_2'$ olacak biçimde bir sonlu altörtü seçilebilir. Dolayısıyla, $A_2 \supseteq \bigcup_{j=1}^m U_j^2$ çıkar.

U ailesi aşağıdaki şekilde oluşturulursa;

$$U = \{U_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{U_j \mid j = 1, 2, \dots, m\},$$

$A = \langle X, A_1, A_2 \rangle \subseteq \bigcup U = \langle X, (\bigcup_{i=1}^n U_i^1) \cup (\bigcup_{j=1}^m U_j^1), (\bigcap_{i=1}^n U_i^2) \cap (\bigcup_{j=1}^m U_j^2) \rangle$ olup A kompakttır.

2.7.1. Sezgisel kompakt uzay örnekleri

Örnek 2.7.1.1. (Çoker 1997) $X = \mathbb{N}^+$ olsun ve aşağıdaki A_n SK 'lerini gözönüne alalım:

$$A_1 = \langle X, \{2, 3, 4, \dots\}, \emptyset \rangle,$$

$$A_2 = \langle X, \{3, 4, 5, \dots\}, \{1\} \rangle,$$

$$A_3 = \langle X, \{4, 5, 6, \dots\}, \{1, 2\} \rangle,$$

$$A_n = \langle X, \{n+1, n+2, \dots\}, \{1, 2, \dots, n-1\} \rangle \quad (n \geq 2).$$

Bu durumda, $\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ X üzerinde bir ST 'dir ve (X, τ) kompakttır.

Örnek 2.7.1.2. (Çoker 1997) $X = (0, 1)$ olsun ve aşağıdaki A_n SK 'lerini gözönüne alalım:

$$A_n = \langle X, (\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}), (0, \frac{1}{n}) \rangle, \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

Bu durumda $\tau = \{\underline{X}, \emptyset\} \cup \{A_n : n = 3, 4, 5, \dots\}$, X üzerinde kompakt olmayan bir ST 'dir.

Örnek 2.7.1.3. (X, τ) bir STU, $p \notin X$, $\overline{X} = X \cup \{p\}$ ve $\overline{\tau} = \{\emptyset\} \cup \{U \cup p \mid U \in \tau\}$ olsun.

(X, τ) 'nun kompakt olması için gerek ve yeter koşul $(\overline{X}, \overline{\tau})$ 'nin kompakt olmasıdır.

$\Rightarrow$: $\{\langle X, G_i^{(1)} \cup \{p\}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$, $\overline{X}$ 'in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, $\overline{X} = \bigcup \langle X, G_i^{(1)} \cup \{p\}, G_i^{(2)} \rangle \Rightarrow \overline{X} = \bigcup [G_i^{(1)} \cup \{p\}] \Rightarrow X \cup \{p\} = \bigcup [G_i^{(1)}] \cup \{p\}$ olur. (X, τ) 'nun kompaktlığından yararlanılırsa, $X = \bigcup_{i=1}^n G_i^{(1)}$ olur. Buradan, $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (G_i^{(1)})^t$ bulunur. $X = \bigcup_{i=1}^n G_i^{(1)}$ eşitliğinde her iki tarafın $\{p\}$ ile birleşimi alınır, $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^n G_i^{(1)} \cup \{p\}$ elde edilir. Ayrıca, $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (G_i^{(1)})^t$ eşitliği de $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n G_i^{(2)}$ eşitliğini gerektirir. Bu iki eşitliğin sonucunda, $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^n \langle X, G_i^{(1)} \cup \{p\}, G_i^{(2)} \rangle$ bulunur. Bu da $(\overline{X}, \overline{\tau})$ 'nin kompakt olması demektir.

$\Leftarrow$: $\{\langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle : i \in J\}$, X 'in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, $X = \bigcup \langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle \Rightarrow X = \bigcup G_i^{(1)}$ ve $\emptyset = \bigcap G_i^{(2)}$ olur. Birinci eşitliğin her iki tarafının $\{p\}$ ile birleşimi, ikinci eşitliğin her iki tarafının $\{p\}^t$ ile kesişimi alınır, $X \cup \{p\} = \bigcup [G_i^{(1)}] \cup \{p\}$ ve $\emptyset \cap \{p\}^t = \bigcap G_i^{(2)} \cap \{p\}^t$ elde edilir. Buradan, $\overline{X} = \bigcup [G_i^{(1)} \cup \{p\}]$ ve $\emptyset = \bigcap [G_i^{(2)} \cap \{p\}^t]$ bulunur. $(\overline{X}, \overline{\tau})$ 'nin kompakt olması kullanılırsa, $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^n [G_i^{(1)} \cup \{p\}]$ ve $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n G_i^{(2)}$ çıkar. Buradan, $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^n G_i^{(1)} \cup \{p\}$ ve $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n G_i^{(2)}$ olur. Birinci eşitlikte her iki taraftan p elemanını çıkarırsak; $X = \bigcup_{i=1}^n G_i^{(1)}$ ve $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n G_i^{(2)}$ bulunur. Bu iki eşitliğin sonucunda, $X = \bigcup_{i=1}^n \langle X, G_i^{(1)}, G_i^{(2)} \rangle$ bulunur. Bu da (X, τ) 'nun kompakt olması demektir.

Örnek 2.7.1.4. (X, τ) bir STU, $p \notin X$, $\overline{X} = X \cup \{p\}$ olsun. $\overline{X}$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan ST ile $(\overline{X}, \overline{\tau})$ STU 'ı kompakttır:

$$\overline{\tau} = \{\emptyset, \overline{X}\} \cup \{\langle \overline{X}, G_1, \{p\} \rangle \mid \langle X, G_1, G_2 \rangle \in \tau\}$$

Örnek 2.7.1.5. Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki sezgisel dışlanmış nokta topolojisi ile (X, τ) STU kompakttır.

Örnek 2.7.1.6. Sonsuz bir X kümesi üzerindeki sezgisel sonlu tümleyenler topolojisi,

$$\begin{aligned}\tau &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid \overline{\langle X, G_1, G_2 \rangle} \text{ sonlu}\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid G_1^t \text{ sonlu}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıydı. Bu (X, τ) STU 'nın kompakt olduğunu görelim:

$\{\langle X, G_i^1, G_i^2 \rangle : i \in J\}$ X 'in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, $X = \bigcup_{i \in J} \langle X, G_i^1, G_i^2 \rangle \Rightarrow X = \bigcup_{i \in J} G_i^1$

Bir $p_0 \in J$ seçelim.

$$\begin{aligned}p_0 \in J &\Rightarrow G_{p_0} \in \{\langle X, G_i^1, G_i^2 \rangle : i \in J\} \\ &\Rightarrow (G_{p_0}^1)^t \text{ sonlu} \\ &\Rightarrow (G_{p_0}^1)^t = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.\end{aligned}$$

Bu $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ noktalarını kapsayan $G_1^1, G_2^1, \dots, G_n^1$ kümeleri vardır ki $\langle X, G_1^1, G_1^2 \rangle, \langle X, G_2^1, G_2^2 \rangle, \dots, \langle X, G_n^1, G_n^2 \rangle$ SK 'leri seçtiğimiz açık örtünün elemanlarıdır. Böylece X 'yı sonlu sayıda küme ile örtmüş oluyoruz:

$$\begin{aligned}X = G_{p_0}^1 \cup G_1^1 \cup G_2^1 \cup \dots \cup G_n^1 &\Rightarrow \emptyset = (G_{p_0}^1)^t \cap (G_1^1)^t \cap (G_2^1)^t \cap \dots \cap (G_n^1)^t \\ &\Rightarrow \emptyset = G_{p_0}^2 \cap G_1^2 \cap G_2^2 \cap \dots \cap G_n^2 \\ &\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n+1} G_i\end{aligned}$$

Böylece (X, τ) 'nun kompakt olduğu çıkar.

2.7.2. Sezgisel yakın ve hemen hemen kompaktlık

Tanım 2.7.2.1. (X, τ) bir STU olsun. (X, τ) 'nun hemen hemen kompakt olması demek, X 'in her açık örtüsünden, kapanışları X için yine bir örtü oluşturacak biçimde, sonlu bir altailenin seçilebilmesi demektir.

Tanım 2.7.2.2. (X, τ) bir STU olsun. (X, τ) 'nun hafif kompakt olması demek, X 'in sayılabilir her açık örtüsünden, kapanışları X için yine bir örtü oluşturacak biçimde, sonlu bir altailenin seçilebilmesi demektir.

Tanım 2.7.2.3. (X, τ) bir STU olsun. (X, τ) 'nun yakın kompakt olması demek, X 'in her açık örtüsünden, kapanışlarının içleri X için yine bir örtü oluşturacak biçimde, sonlu bir altailenin seçilebilmesi demektir.

Önerme 2.7.2.4. (X, τ) bir STU olsun.

(X, τ) kompakttır $\Rightarrow (X, \tau)$ yakın kompakttır $\Rightarrow (X, \tau)$ hemen hemen kompakttır.

Örnek 2.7.2.5. $X \neq \emptyset$ ve $p \in X$ olsun. X üzerindeki τ_p özel nokta topolojisini gözönüne alalım. (X, τ_p) 'nun kompakt olmadığı kolayca görülmektedir. Uzayın SAK 'lerinin ailesi

$$\begin{aligned}\tau_p &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \in \langle X, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle X, G_1, G_2 \rangle \mid p \in G_1\},\end{aligned}$$

uzayın SKK 'lerinin ailesi

$$\tau_p^k = \{X\} \cup \{\langle X, K_1, K_2 \rangle \mid p \in K_2\}$$

biçimindedir.

Şimdi de (X, τ_p) 'nun yakın kompaktlığını araştıralım: Önce bu uzaydaki SAK 'lerin kapanışlarının nasıl kümeler olduğunu belirleyelim.

$U = \langle X, U_1, U_2 \rangle \in \tau_p$, $cl(U) = K = \langle X, K_1, K_2 \rangle \in \tau_p^k$ olsun. Burada U 'nun SAK olmasından $p \in U_1$ olduğunu ve K 'nın SKK olmasından $p \in K_2$ olduğunu söyleyebiliriz.

$$\begin{aligned}cl(U) = K &\Rightarrow U \subseteq K \\ &\Rightarrow \langle X, U_1, U_2 \rangle \subseteq \langle X, K_1, K_2 \rangle \\ &\Rightarrow U_1 \subseteq K_1, K_2 \subseteq U_2 \\ &\Rightarrow K = X\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall U \in \tau_p$ için $cl(U) = X \Rightarrow (X, \tau_p)$ yakın kompakttır. (X, τ_p) hemen hemen kompakttır. Ancak (X, τ_p) kompakt değildir.

Örnek 2.7.2.6. $(\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol})$ STU 'ı kompakt değildir. Yakın kompaktlığı da aşağıdaki şekilde incelenebilir:

Önce bu topolojik uzayın SKK 'lerinin ailesini belirleyelim:

$$\begin{aligned}\tau_{sol\ sol}^k = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{ \langle \mathbb{R}, [b, \infty), (-\infty, a) \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \} \\ \cup \{ \langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a) \rangle \mid a \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

Şimdi bu uzaydaki herhangi bir SAK 'nin kapanışının nasıl bir SK olduğuna bakalım: $U = \langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle \in \tau$ ve $cl(U) = K = \langle \mathbb{R}, [c, \infty), (-\infty, d) \rangle \in \tau^k$ olsun. Bu durumda aşağıdakileri yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned}U \subseteq K &\Rightarrow \langle \mathbb{R}, (-\infty, a), [b, \infty) \rangle \subseteq \langle \mathbb{R}, [c, \infty), (-\infty, d) \rangle \\ &\Rightarrow (-\infty, a) \subseteq [c, \infty), (-\infty, d) \subseteq [b, \infty) \\ &\Rightarrow K = \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \forall U \in \tau \ cl(U) = \mathbb{R}.\end{aligned}$$

O halde $(\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol})$ yakın kompakttır. $(\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol})$ hemen hemen kompakttır. Ancak $(\mathbb{R}, \tau_{sol\ sol})$ kompakt değildir.

Örnek 2.7.2.7. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{ \langle \mathbb{R}, (-\delta, +\delta), (-\infty, -\delta - \epsilon] \cup [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \mid \delta, \epsilon \in \mathbb{R} \}$$

ST 'si incelenirse, $(\mathbb{R}, \tau)$ STU 'nın yakın kompakt olduğu görülür. Bu, sözkonusu STU 'ın aynı zamanda hemen hemen kompakt olduğu anlamına gelir. Ancak uzay kompakt değildir.

Örnek 2.7.2.8. $\mathbb{R}^+$ üzerindeki

$$\tau = \{\mathbb{R}^+, \emptyset\} \cup \{ \langle \mathbb{R}^+, (0, \delta), [\delta + \epsilon, \infty) \rangle \mid \delta, \epsilon > 0 \}$$

topolojisi ile $(\mathbb{R}^+, \tau)$ STU 'ı kompakt değildir. Ancak yakın kompakt ve hemen hemen kompakttır.

Örnek 2.7.2.9. (X, τ_p) sezgisel özel sıfırlanan nokta topolojik uzayında SAK 'lerin kapanışlarını inceleyelim:

$$\begin{aligned}\tau_p &= \{\emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid p \in \langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin G_2\} \\ \tau_p^k &= \{\mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid p \notin G_1\}\end{aligned}$$

$G = \langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \in \tau$ SAK 'sini alalım. Bu durumda $p \notin G_2$ 'dir. $cl(G) = K = \langle \mathbb{R}, K_1, K_2 \rangle \in \tau^k$ olsun. Bu durumda da $p \notin K_1$ 'dir.

$p \in G_1 \Rightarrow cl(G) = K = X$; $p \notin G_1 \Rightarrow cl(G) = K = G$ 'dir.

Şimdi uzayı $\mathbb{R}$ olarak, özel sıfırlanan noktayı da 0 olarak alalım:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \{\emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid 0 \in \langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid 0 \notin G_2\} \\ \tau_0^k &= \{\mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, G_1, G_2 \rangle \mid 0 \notin G_1\}\end{aligned}$$

$\{U_i\}_{i \in J}$, $\mathbb{R}$ 'nin bir açık örtüsü olsun.

$\Rightarrow \forall i \in J$ için $0 \notin U_i^2$ ve $\cup U_i^1 = \mathbb{R} \Rightarrow \exists i \in J$ için $cl(U_i) = \mathbb{R} \Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_0)$ yakın kompakttır $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_0)$ hemen hemen kompakttır.

Örnek 2.7.2.10. τ sezgisel bilinen-sağ topoloji olmak üzere $(\mathbb{R}, \tau)$ 'nun kompaktlığını araştırmak için, önce bu topolojiyi hatırlayalım:

$$\begin{aligned}\tau &= \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), (-\infty, c] \rangle \mid c \leq \inf\{a_i\}, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{\langle \mathbb{R}, \cup(a_i, b_i), \emptyset \rangle \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, c] \rangle \mid c \in \mathbb{R}\} \\ \tau^k &= \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\langle \mathbb{R}, (-\infty, c], \cup(a_i, b_i) \rangle \mid c \leq \inf\{a_i\}, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{\langle \mathbb{R}, \emptyset, \cup(a_i, b_i) \rangle \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle \mathbb{R}, (-\infty, c], \emptyset \rangle \mid c \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ 'nin bir açık örtüsünü seçelim: $\{\langle \mathbb{R}, (n-1, n), (-\infty, n-1] \rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

$\cup_{n \in \mathbb{Z}} \langle \mathbb{R}, (n-1, n), (-\infty, n-1] \rangle = \mathbb{R}$ olduğu açıktır.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $cl\langle \mathbb{R}, (n-1, n), (-\infty, n-1] \rangle = \langle \mathbb{R}, (-\infty, n-1], \emptyset \rangle$ 'dir. Bu durumda, bu açık örtünün, elemanlarının kapanışları bir örtü olacak şekilde hiç bir sonlu bir altailesi yoktur. $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ hemen hemen kompakt değildir. $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ yakın kompakt değildir. $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ kompakt değildir.

3. SONUÇ

“Belirtisiz küme ” kavramı ilk kez L. A. Zadeh tarafından 1965 yılında geliştirildi. K. Atanassov’un “Belirtisiz Küme” nin bir genelleştirilmesi olan “Sezgisel Belirtisiz Küme” kavramına girişinden sonra “Sezgisel Küme” (Sezgisel belirtisiz özel küme) ve “Sezgisel Nokta” D. Çoker (1996),(1997),(2000) tarafından tanımlandı. Bunun sonrasında, “Sezgisel Belirtisiz Topolojik Uzay” a giriş yapıldı ve bu kavramın bir klasik versiyonu olarak “Sezgisel Topolojik Uzay” tanımlandı.

“Sezgisel Topolojik Uzay” tanımı beraberinde, klasik topolojik uzaylardaki topolojik yapıların bu uzaylarda da kurulup kurulamayacağı sorusunu getirdi. Bu sorunun cevabı olarak “Sezgisel Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık”, “Sezgisel Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları”, “Sezgisel Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri” konuları üzerine çalışmalar yapıldı.

Bu tez çalışması ile, “Sezgisel Topolojik Uzaylar” konusu kapsamında, üzerinde henüz çalışılmamış “kompaktlık”, “filtre”, “yakınsaklık” kavramları tanımlanmış, bu kavramların, sezgisel topolojik uzaylarda gösterdikleri özellikler ile klasik topolojik uzaylarda gösterdikleri özellikler karşılaştırılmış, benzeştikleri ve farklılık gösterdikleri yönler araştırılmıştır. “Sezgisel Süreklilik” kavramı değişik karakterizasyonlarla ifade edilmeye çalışılmış, bu karakterizasyonlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Araştırılan bu konularla ilgili somut örnekler bulunarak konu zenginleştirilmiştir.

Bu çalışmalar sonrasında da “Sezgisel Topolojik Uzaylar” üzerinde çalışılmaya açık bir konu olma özelliğini korumaktadır. Bu tez çalışması ile, bundan sonra “Sezgisel Topolojik Uzaylar” konusunda çalışmak isteyen biri için yeterli bir kaynak oluşturulmuştur. Ayrıca KAYNAKLAR bölümündeki çalışmaların bir derlemesinin yanısıra, bu çalışmaların devamı sağlanmıştır. Bununla beraber, yukarıda ifade edilen kavramların “Sezgisel Topolojik Uzaylar” konusu içinde yerini alması sağlanmıştır.

4. KAYNAKLAR

- ATANASSOV, K. 1984 Intuitionistic fuzzy sets, in: V. Sgurev, Ed., VII ITKR's Session, Sofia, June 1983 (Central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences).
- ATANASSOV, K. 1986 Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20: 87-96.
- BAYHAN, S. and ÇOKER, D. On fuzzy separation axioms in intuitionistic fuzzy topological spaces. *BUSEFAL*, 67: 77-87.
- BAYHAN, S. and ÇOKER, D. On separation axioms in intuitionistic topological spaces, to appear in *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.
- COŞKUN, E. and ÇOKER, D. 1998 On neighborhood structures in intuitionistic topological spaces. *Mathematika Balkanica*, 12 (3-4): 289-293.
- ÇOKER, D. 1997 An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 88(-1): 81-89.
- ÇOKER, D. 1996 A note on intuitionistic sets and intuitionistic points. *Turkish Journal of Mathematics*, 20 (-3): 343-351.
- ÇOKER, D. 2000 An introduction to intuitionistic topological spaces. *BUSEFAL*, 81: 51-56.
- ÇOKER, D. and EŞ, H. 1995 On fuzzy compactness in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3 (-4): 899-909.
- GÜRÇAY, H., EŞ, H. and ÇOKER, D. 1997 On fuzzy continuity in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 5 (-2): 365-378.
- TURANLI, N. and ÇOKER, D. 2000 Fuzzy connectedness in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 116: 369-375.

- ÖZÇAĞ, S. and ÇOKER, D. 2000** A note on connectedness in intuitionistic fuzzy special topological spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 23 (-1): 45-54.
- ÖZÇAĞ, S. and ÇOKER, D. 1998** On connectedness in intuitionistic fuzzy special topological spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21 (-1): 33-40.
- ZADEH, L. A. 1965** Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep GÜVENÇ 1976 yılında Almanya'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1993 yılında girdiği Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı'ndan Haziran-1998'de mezun oldu. Eylül-1998 tarihinde Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.