



T.C.

Ardahan Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı

İleri Teknolojiler Bilim Dalı

**SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNİN
GELİŞTİRİLMİŞ $\frac{1}{G}$ - AÇILIM METODU İLE AKIŞKANLAR
MEKANİĞİNİN DİNAMİKLERİ**

Aleyna AYDIN

Doç. Dr. Hülya DURUR

Yüksek Lisans Tezi

Ardahan, 2025

SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNİN GELİŞTİRİLMİŞ $\frac{1}{G}$ -
AÇILIM METODU İLE AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN DİNAMİKLERİ

Aleyna AYDIN

Doç. Dr. Hülya DURUR

Ardahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İleri Teknolojiler Ana Bilim Dalı
İleri Teknolojiler Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ardahan, 2025

KABUL VE ONAY

Aleyna Aydın tarafından hazırlanan “Sharma-Tasso-Olver-Burgers Denkleminin Geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - Açılım Metodu ile Akışkanlar Mekaniğinin Dinamikleri” başlıklı bu çalışma, 12.09.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Asif YOKUŞ (Başkan)

Doç. Dr. Hülya DURUR (Danışman)

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet Yusuf CEVHER

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ŞENEL
Enstitü Müdürü

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Ardahan Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinleri yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan **“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / Ardahan Üniversitesi Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir. ⁽¹⁾
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ay ertelenmiştir. ⁽²⁾
- Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir. ⁽³⁾

12/09/2025

Aleyna AYDIN

“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”

- (1) *Madde 6. 1. Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez **danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulu** iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.*
- (2) *Madde 6. 2. Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez **danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulunun** gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.*
- (3) *Madde 7. 1. Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, **tezin yapıldığı kurum** tarafından verilir *. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, **ilgili kurum ve kuruluşun önerisi** ile **enstitü** veya **fakültenin** uygun görüşü üzerine **üniversite yönetim kurulu** tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.*

Madde 7.2. Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

** Tez **danışmanının** önerisi ve **enstitü anabilim dalının** uygun görüşü üzerine **enstitü** veya **fakülte yönetim kurulu** tarafından karar verilir.*

ETİK BEYAN

Bu çalışmadaki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, yararlandığım kaynaklara bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu, tezimin kaynak gösterilen durumlar dışında özgün olduğunu, Tez Danışmanının **Doç. Dr. Hülya DURUR** danışmanlığında tarafımdan üretildiğini ve Ardahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Yönergesine göre yazıldığını beyan ederim.

Aleyna AYDIN

ÖN SÖZ

Tez çalışmam sürecinde bilgi, deneyim ve rehberlikleriyle bana yol gösteren çok kıymetli hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunmak isterim. Öncelikle, yüksek lisans sürecim boyunca her aşamada yanımda olan, sabrı, desteği ve akademik rehberliğiyle yolumu aydınlatan danışman hocam Doç. Dr. Hülya DURUR'a en derin şükranlarımı sunarım. Bilimsel bakış açımı geliştirmemde ve bu çalışmayı şekillendirmemde büyük katkılar sağlamıştır. Her zaman ulaşılabilirliği, yapıcı yaklaşımı ve desteğiyle bana güven veren, çalışmalarımda her an yanımda olduğunu hissettiren Dr. Öğr. Üyesi Arif Cem TOPUZ'a gönülden teşekkür ederim. Akademik ve kişisel gelişimimde gösterdiği ilgi ve desteği her zaman takdirle anacağım. Tez sürecinde zamanını ayırarak çevrimiçi toplantılar aracılığıyla bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, rehberliğiyle katkı sağlayan Doç. Dr. Asif YOKUŞ'a da içten teşekkürlerimi sunarım. Değerli hocalarıma bu akademik yolculukta bana kattıkları tüm değerler için minnettarım.

Eğitim hayatım boyunca bana inanan, her daim yanımda olan ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen kıymetli annem Leyla DAĞAŞAN'a ve sevgili babam Nihat DAĞAŞAN'a minnettarım. Hayatımın her anında yanımda olan, sevgisi ve sabrıyla en büyük güç kaynağım olan canım eşim Anıl AYDIN'a da sonsuz teşekkür ederim.

ÖZET

AYDIN, Aleya. *Sharma-Tasso-Olver-Burgers Denklemine Geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - Açılım Metodu ile Akışkanlar Mekaniğinin Dinamikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ardahan, 2025.

Bu tez, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ailesi olan Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemini kapsamlı bir şekilde incelemektedir. Akışkanlar mekaniğinde temel bir yere sahip olan Burgers denklemi, akışkanların ve dalgaların dinamik davranışlarını modellemek için uzun yıllardır kullanılmaktadır. Sharma-Tasso-Olver denklemi ile birleşiminden türetilen Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi, doğrusal olmayan dalga hareketlerinin daha karmaşık ve gerçekçi temsillerine olanak tanır. Bu nedenle, bu denklem yalnızca teorik açıdan değil, aynı zamanda mühendislik, plazma fiziği, fiber optik ve akışkanlar mekaniği gibi uygulamalı alanlarda da önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir.

Bu çalışmanın odak noktası, Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin hareket eden dalga çözümlerinin sistematik olarak incelenmesidir. Bu bağlamda, çözüm sürecinde son yıllarda yaygın olarak kullanılan iki yöntem kullanılmıştır: klasik $\frac{1}{G}$ - genişletme yöntemi ve geliştirilmiş versiyonu. Klasik genişletme yöntemi daha basit ve daha az hesaplama gerektiren çözümler sunarken, çözüm uzayını sınırlı bir şekilde temsil eder. Buna karşılık, geliştirilmiş genişletme yöntemi, türev terimlerini genişleterek daha parametrik, esnek ve fiziksel olarak anlamlı çözümler üretir. Böylece, yalnızca Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemini değil, aynı zamanda özel durumlarını da kapsayan birleşik bir model oluşturulmuştur.

Uygulamalar sonucunda elde edilen analitik çözümler grafiksel olarak incelenmiş ve tekil ve hiperbolik çözümler olmak üzere iki ana sınıfta değerlendirilmiştir. Bu formlar arasında farklı parametre değerlerinde dönüşüm yapılarak, çözümler doğrusal olmayan dinamiklerin zengin doğasını ortaya koymaktadır. Bu yönüyle, çalışma doğrusal olmayan sistemler için çözümler elde etmek için metodolojik olarak güçlü bir çerçeve sunmakta ve dalga etkileşimlerinin fiziksel

yönlerinin daha derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Özellikle hiperbolik tip çözümler, akışkan davranışının, optik dalga paketlerinin ve plazma salınımlarının modellenmesinde kritik bir rol oynamaktadır. Ayrıca, elde edilen çözümler bilgisayar destekli yazılımlar kullanılarak görselleştirilmiş ve üç boyutlu, kontur ve iki boyutlu grafiklerde sunulmuştur. Bu görselleştirmeler, denklemin dinamik yapısını ve dalga çözümlerinin fiziksel etkilerini daha anlaşılır ve somut hale getirmektedir. Bu bağlamda, çalışma yalnızca teorik bir analiz sunmakla kalmayıp aynı zamanda uygulamalı matematik alanında önemli bulgular da ortaya koymaktadır. Sonuç olarak, bu çalışma hem elde edilen çözümler hem de bunların grafiksel temsilleri aracılığıyla Sharma–Tasso–Olver–Burgers denkleminin matematiksel yapısını ve fiziksel yorumlarını daha anlaşılır hale getirmekte; böylece doğrusal olmayan diferansiyel denklemler literatürüne uygulamalı ve görsel açıdan zengin katkılar sunmaktadır.

Anahtar Sözcükler:

Akışkanlar mekaniği, İlerleyen dalga çözümleri, Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi, Soliton dalga, $\frac{1}{G}$ - açılım metodu, Geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - açılım metodu

ABSTRACT

AYDIN, Aleyna. *Dynamics of Fluid Mechanics with the Modified $\frac{1}{G}$ - Expansion Method of Sharma-Tasso-Olver-Burgers Equation*, Master's Thesis, Ardahan, 2025.

This thesis comprehensively examines the Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation, a family of nonlinear partial differential equations. The Burgers equation, which holds a fundamental place in fluid mechanics, has been used for many years to model the dynamic behavior of fluids and waves. Derived from its combination with the Sharma-Tasso-Olver equation, the Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation allows for more complex and realistic representations of nonlinear wave motions. Therefore, this equation has become an important research topic not only from a theoretical perspective but also in applied fields such as engineering, plasma physics, fiber optics, and fluid mechanics.

The focus of this study is the systematic investigation of traveling wave solutions to the Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation. In this context, two methods widely used in recent years are employed in the solution process: the classical $\frac{1}{G}$ - expansion method and its improved version. While the classical expansion method provides simpler and less computationally demanding solutions, it represents the solution space in a limited way. In contrast, the improved expansion method generates more parametric, flexible, and physically meaningful solutions by expanding the derivative terms. Thus, a unified model encompassing not only the Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation but also its special cases was created.

The analytical solutions obtained as a result of the applications were examined graphically and evaluated in two main classes: singular and hyperbolic solutions. By transforming between these forms at different parameter values, the solutions reveal the rich nature of nonlinear dynamics. In this respect, the study provides a methodologically robust framework for obtaining solutions for nonlinear systems and contributes to a deeper understanding of the physical aspects of wave interactions. Hyperbolic-type

solutions, in particular, play a critical role in modeling fluid behavior, optical wave packets, and plasma oscillations. Furthermore, the obtained solutions were visualized using computer-aided software and presented in three-dimensional, contour, and two-dimensional graphics. These visualizations make the dynamic structure of the equation and the physical effects of wave solutions more understandable and concrete. In this context, the study not only provides a theoretical analysis but also reveals important findings in the field of applied mathematics. In conclusion, this study makes the mathematical structure and physical interpretations of the Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation more understandable through both the obtained solutions and their graphical representations; thus, it provides practical and visually rich contributions to the literature on nonlinear differential equations.

Keywords:

Fluid mechanics, Traveling wave solutions, Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation, Soliton wave, $\frac{1}{G'}$ - expansion method, Modified $\frac{1}{G'}$ - expansion method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI.....	ii
ETİK BEYAN.....	iv
ÖN SÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
GİRİŞ	1
1. BÖLÜM.....	4
TEMEL TANIMLAR	4
1.1. TÜREV	4
1.2. DİFERANSİYEL DENKLEM.....	4
1.3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM.....	5
1.4. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM.....	6
1.5. DİFERANSİYEL DENKLEMİN MERTEBESİ.....	9
1.6. DİFERANSİYEL DENKLEMİN DERECESİ	9
1.7. GENEL VE ÖZEL ÇÖZÜM.....	10
1.8. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ VE SINIR DEĞER PROBLEMİ	10
1.9. HADAMARD KURALI.....	12
1.10. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM	13
1.11. DENKLEMİN HOMOJENLİĞİ	14
1.12. DENGELEME TERİMİ	15
2. BÖLÜM.....	16
SOLİTARY DALGALAR VE SOLİTON	16
3. BÖLÜM.....	20
SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİ	20

3.1. BURGERS DENKLEMİ	20
3.2. SHARMA-TASSO-OLVER DENKLEMİ.....	23
3.3. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİ	24
4. BÖLÜM.....	26
ÇÖZÜM METOTLARI	26
4.1. $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODU	26
4.2. GELİŞTİRİLMİŞ $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODU.....	27
5. BÖLÜM.....	29
ÇÖZÜMLER	29
5.1. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNE $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODUNUN UYGULANMASI.....	29
5.2. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNE GELİŞTİRİLMİŞ $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODUNUN UYGULANMASI	33
SONUÇ.....	38
KAYNAKÇA	42
EKLER.....	50
EK 1. ORJİNALLİK RAPORU FORMU	50
EK 2. ETİK KURUL MUAFİYET FORMU	51
ÖZ GEÇMİŞ.....	52

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$u(x, t)$	: İki değişkenli fonksiyon (x konum, t zaman)
u_t	: $u(x, t)$ fonksiyonunun t ' ye göre bir kez kısmi türevi
u_{xx}	: $u(x, t)$ fonksiyonunun x ' e göre iki kez kısmi türevi
n	: Dengeleme terimi
c_i ($i = 1, 2, \dots$)	: İntegral sabiti
k	: Frekans
v	: Hız
x	: Konum
t	: Zaman
d	: Genlik
h	: Derinlik
η	: Viskozite katsayısı
KdV	Korteweg de Vries

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Bir dalga profili.....	16
Şekil 2. İki solitary dalganın çarpışma anı ve sonrasında şekil değiştirmeyen davranışları.....	18
Şekil 3. Bir solitary dalganın hareketi.....	18
Şekil 4. Burgers denkleminin tarihsel hiyerarşisi (Bonkile ve diğerleri, 2018).....	20
Şekil 5. Zamanla şok dalgalarının oluşumu	22
Şekil 6. (5.1.6) çözümündeki $\beta_0 = 0.02, k = 0.001, \mu = 0.1, c_1 = 0.05, \beta_1 = 0.1, \lambda = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	31
Şekil 7. (5.1.8) çözümündeki $\beta_0 = 0.05, k = 0.2, \mu = 0.1, c_1 = 0.1, \beta_1 = 0.1, \lambda = 0.1, b = 1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	32
Şekil 8. (5.1.10) çözümündeki $\beta_0 = 0.05, k = 0.2, c_1 = 0.1, \beta_1 = 0.5, \lambda = 1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	32
Şekil 9. (5.1.12) çözümündeki $k = 0.2, c_1 = 0.1, \beta_1 = 0.5, \lambda = 0.05, \mu = 0.01$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	33
Şekil 10. (5.2.6) çözümündeki $\beta_0 = 0.5, k = 0.2, \mu = 0.1, c_1 = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.	35
Şekil 11. (5.2.8) çözümündeki $\beta_0 = 0.05, k = 0.2, \mu = 0.1, c_1 = 0.1, \beta_1 = 0.1, \lambda = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	36
Şekil 12. (5.2.10) çözümündeki $\beta_0 = 0.05, k = 0.2, \mu = 0.1, c_1 = 0.1, \beta_1 = 0.5$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.....	37

GİRİŞ

Matematikteki pek çok temel düşünce, fizik bilimleri bağlamında geliştirilmiş olup, matematiksel denklemler, özellikle kısmi diferansiyel denklemler, bu düşüncelerin ifade edilmesinde temel bir dil işlevi üstlenmiştir. Buna karşılık, matematik alanındaki ilerlemeler de bilimsel gelişmelere yön vermiştir. Zamanla matematikçiler ve bilim insanları söz konusu yöntemleri genişleterek bilim ve teknolojinin hemen her alanına uyarlamış, böylece matematiksel modelleme adı verilen bir paradigma ortaya çıkmıştır (Logan, 2015). Matematiksel modellemeler genellikle diferansiyel denklemlerin içerdiği fonksiyonlar ile bu diferansiyel denklemlerin türevleri arasındaki bağlantıyı açıklamaktadır (Kızıldan, 2023). Model denklemlerinin lineer yapıda olmaması çözümün hem karmaşıklığını artırmakta hem de uygulanabilirliğini zorlaştırmaktadır (Esen, 2018). Bu durum, uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan problemlerin matematiksel modellerini oluşturan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ilerleyen dalga çözümlerinin araştırılmasını daha da önemli hale getirmektedir (Kambur, 2015). Şekillerini değiştirmeden ilerleyen dalga çözümleri solitary dalga olarak adlandırılmakta ve bu dalgalar birleşme özelliği göstermemektedir (Fındık Kalkandelen, 2021). Solitary dalgalar, yapısal benzerliklerinden dolayı zaman zaman soliton dalga olarak da isimlendirilmektedir (İduğ, 2013). Ancak bu iki kavram arasında önemli bir ayrım bulunmaktadır: Solitary dalgalar, integrallenemeyen denklemlerin sınırlı çözümlerini ifade ederken; solitonlar integrallenebilen denklemlerin sınırlı çözümlerini temsil etmektedir (Yang, 2010).

Solitary ve soliton dalgalar yalnızca matematiksel açıdan değil, aynı zamanda fiziksel uygulamalar açısından da büyük öneme sahiptir. Özellikle akışkanlar mekaniği (Drazin ve Johnson, 1989), plazma fiziği (Washimi ve Taniuti, 1966), optik fiberler (Agrawal, 2013) ve biyomedikal bilimler (Scott, 2003) gibi alanlarda gözlemlenen pek çok olgunun modellenmesinde bu tür dalgaların çözümleri kritik bir rol oynamaktadır. Solitonların çarpışma sonrası şekillerini ve hızlarını koruma özelliği, onları lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin araştırılmasında ayrıcalıklı bir konuma getirmektedir (Ablowitz ve Segur, 1981). Buna karşın solitary dalgalar, daha geniş bir denklem sınıfında ortaya çıkmakta ve bu yönüyle lineer olmayan sistemlerin genel dinamik davranışlarını anlamak için önemli bir araç sunmaktadır (Remoissenet, 1999).

Bu nedenle, hem solitary hem de soliton çözümlerinin incelenmesi, matematiksel modellerin gerçek dünyadaki fiziksel süreçleri açıklama gücünü artırmaktadır (Yang, 2010).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin, oldukça karmaşık bir yapıya sahip olmaları ve gerçek yaşamda daha sık karşılaşılan problemlere karşılık gelmeleri nedeniyle, analitik çözümlerine yönelik literatürdeki çalışmalar gün geçtikçe artış göstermektedir (Esen, 2018). Bu denklemleri çözmek için kullanılan analitik metotlardan bazıları şu şekildedir; $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G'}\right)$ - açılım metodu (Duran, 2021), Lie simetri analizi metodu (Yaşar ve Yıldırım, 2018), sine-gordon genişletme metodu (Kayhan, 2019), $\frac{1}{G'}$ - açılım metodu (Durur ve Yokuş, 2019, 2021; Yokuş ve Durur, 2019, 2020), alt denklem metodu (Duran ve Kaya, 2021; Taşbozan ve Kurt, 2018), Kudryashov metodu (Akbulut ve Kaplan, 2021), Jacobi eliptik fonksiyon genişletme yöntemi (Liu, Fu, Liu ve Zhao, 2001), tanh-coth açılım metodu (Wazwaz 2007c, 2007b, 2008), $\frac{G'}{G}$ - açılım metodu (Üstündaş, 2010), hirota metodu (Wazwaz 2007b, 2008; Zhou ve Ma, 2017).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin karmaşık yapısı nedeniyle, bu tür denklemlerin klasik yöntemlerle el ile çözülmesi oldukça zaman alıcı ve çoğu zaman pratik değildir. Bu nedenle, söz konusu denklemlerin çözümünde bilgisayar destekli sembolik hesaplama yeteneklerine sahip çeşitli hazır paket programlar (örneğin, Mathematica, Maple vb.) yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür yazılımlar aracılığıyla, denklemlerin analitik çözümlerine daha hızlı ve etkin bir biçimde ulaşmak mümkün olmaktadır. Elde edilen analitik çözümler, özellikle soliton teorisi bağlamında önemli bir yer tutmakta ve bu teorinin temelini oluşturan yapıları anlamada kritik bir rol oynamaktadır (Debnath, 1997). İlk olarak akışkanlarda keşfedilen solitonlar, daha sonra karmaşık ağlar, optik sistemler, plazmalar ve kuantum alan teorisi gibi birçok modern uygulamalı bilimde önemli bir rol oynamaktadır (Hu, Miao ve Lin, 2021). Kesin soliton çözümlerinin incelenmesi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek için uygun dönüşümler gerektirmektedir. Analitik çözümün performansı, dönüşümlerde yer alan parametreler ve katsayılarla

oldukça bağlıdır; bu durum, modellerin gerçek yaşamda uygulanabilirliği açısından büyük bir önem taşımaktadır (Murad, Ismael, Sulaiman, Shah ve Chung, 2023).

Bu tez kapsamında, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ailesinde önemli bir yere sahip olan birleşik formdaki Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi ele alınmaktadır. Söz konusu denklem aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir (Yan ve Lou, 2020):

$$u_t + a(3u_x^2 + 3u^2u_x + 3uu_{xx} + u_{xxx}) + b(2uu_x + u_{xx}) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi, akışkanlar mekaniği ve dalga teorisi gibi alanlarda önemli bir rol oynamakta olup, özellikle karmaşık akışkanların hareketlerini, dalga oluşumlarını ve bu süreçlerin matematiksel modellerini açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Lineer olmayan yapısı nedeniyle denklem, analiz ve çözüm süreçlerinde farklı dinamikler ve güçlükler göstermektedir. (Hussain ve diğerleri, 2024). Bu bağlamda, Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin farklı yöntemlerle incelenmesi, hem teorik hem de uygulamalı bilimler açısından değerli sonuçlar ortaya koymaktadır.

Son yıllarda, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde $\frac{1}{G}$ - açılım metodu ve bu metodun geliştirilmiş versiyonu gibi analitik yöntemler sıklıkla tercih edilmektedir. Bu yöntemler, özellikle soliton ve solitary dalga çözümlerinin elde edilmesinde etkin ve sistematik bir yaklaşım sağlamaktadır. Dolayısıyla, bu tez çalışmasında Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümleri söz konusu yöntemler kullanılarak araştırılacak ve elde edilen bulguların hem matematiksel literatüre hem de uygulamalı bilimlerdeki olası yansımalarına katkı sağlanacaktır.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR

1.1. TÜREV

$y = f(x)$ fonksiyonu $(\hat{n}, \hat{m})$ aralığında tanımlı ve $x_0 \in (\hat{n}, \hat{m})$ olsun. Tek değişkenli fonksiyonlar için;

$$y' = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

limit değeri varsa, bu limit değeri f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevidir. Burada x değişkeni bağımsız değişken y değişkenine bağımlı değişken denir (Adams ve Essex, 2013).

Çok değişkenli fonksiyonlarda $(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots) \in R$ için türev aşağıda verilmiştir (Yitmez ve Yılmaz, 2022),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, y_1, y_2, \dots) - f(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, y_1, y_2, \dots) - f(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots)}{h}.$$

1.2. DİFERANSİYEL DENKLEM

Diferansiyel denklem, bir veya daha fazla bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan matematiksel bir denklemdir. Bu denklemler, doğadaki değişim süreçlerini modellemek için kullanılır ve genellikle fizik, mühendislik, ekonomi gibi alanlarda karşımıza çıkar. Örneğin, bir sistemin zamanla nasıl değiştiğini belirlemek için diferansiyel denklemler kullanılır (Vrabie, 2011). Diferansiyel denklemlerin genel formu aşağıdaki gibidir

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots) = 0.$$

Diferansiyel denklemler farklı şekillerde sınıflandırılabilir. Bağımsız değişken sayısına göre sınıflandırırsak adi diferansiyel denklem ve kısmi diferansiyel denklem olarak sınıflandırılır (Akçağıl, 2013). Adi diferansiyel denkleme örnek verilirse,

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

$$y' - 3y = 9x. \quad (y' = \frac{dy}{dx} \text{ şeklinde de gösterilebilir.})$$

Kısmi diferansiyel denklemlere örnek verilirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u(x, t) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f = f(x, y, t).$$

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları sabit ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, eğer bağımsız değişkene göre farklı değerler alıyor ise değişken katsayılı diferansiyel denklem denir (Engin ve Çengel, 2008). Örneğin:

$$y' + 3y = \sin x, \text{ sabit katsayılı diferansiyel denklem iken,}$$

$$\cosh xy''' + x^2 y' = x, \text{ değişken katsayılı diferansiyel denklem denir.}$$

1.3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM

Adi diferansiyel denklemlerin tarihi, matematiksel düşüncenin gelişimi ve doğa bilimlerindeki ilerlemelerle yakından ilişkilidir. 17. yüzyılda Newton ve Leibniz'in kalkülüsü geliştirmesiyle türev ve integral işlemleri sistematik bir yapıya kavuşmuş, bu da diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışı için temel oluşturmuştur (Burton, 1997). Newton, Principia Mathematica'da hareket yasalarını ikinci mertebeden diferansiyel denklemler aracılığıyla ifade ederek, diferansiyel denklemlerin fiziksel olaylara uygulanmasının önünü açmıştır (Newton, 1687). Günümüzde ise diferansiyel denklemler, yalnızca matematiksel açıdan değil, aynı zamanda fizik, mühendislik ve biyoloji gibi pek çok disiplinin temel aracı hâline gelmiştir (Uday ve Rajput, 2024).

Bir diferansiyel denklem yalnızca tek bir bağımsız değişken, bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin çeşitli mertebeden türevlerini içeriyorsa adi diferansiyel denklem denir (Çolak, 2021). Adi diferansiyel denklemler genellikle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0,$$

şeklinde gösterilebilir. Adi diferansiyel denklemlere örnek verilirse:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y &= x^2 e^{2x}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y &= \frac{1}{2} - e^{2x}. \end{aligned}$$

1.4. KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM

Kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımı, 18. yüzyıla kadar uzanmaktadır. Bu dönemde Euler, d'Alembert, Lagrange ve Laplace gibi önde gelen matematikçiler, mekanik sistemlerin ve fiziksel olayların matematiksel analizinde bu tür denklemleri aktif olarak kullanmışlardır. Özellikle d'Alembert, 1747 yılında gerilmiş bir ipin titreşimlerini modelleyen dalga denkleminin çözümünü ortaya koyarak bu alana önemli bir katkı sağlamıştır. Bu çalışmalar, kısmi diferansiyel denklemlerin teorik temellerinin atılmasında ve modern uygulamalı matematiğin gelişiminde temel bir rol oynamıştır. 19. yüzyılda, özellikle Riemann'ın çalışmalarıyla birlikte, kısmi diferansiyel denklemler matematiğin diğer dallarında da önemli bir araç haline gelmiştir. Poincaré'nin 1890 tarihli makalesinde belirttiği gibi, elektrik, akışkanlar mekaniği, ısı, manyetizma, optik ve elastikiyet gibi farklı alanlardaki fiziksel problemler, benzer yöntemlerle çözülebilir ve bu da kısmi diferansiyel denklemlerin matematiksel analizdeki rolünü pekiştirmiştir (Brezis ve Browder, 2006). 20. yüzyılda, kısmi diferansiyel denklemler sadece fiziksel modellerin çözümünde değil, aynı zamanda matematiğin saf alanlarında da önemli bir araç olmuştur. Örneğin, Felix Browder'ın çalışmaları, soyut teorileri kullanarak çok çeşitli hareket ve değişimle ilgili sorunları çözmeye yönelikti ve bu da kısmi diferansiyel denklemlerin önemini artırmıştır (Browder, 2016).

Kısmi diferansiyel denklemler, iki veya daha fazla bağımsız değişken, bilinmeyen bir fonksiyon (bu değişkenlere bağlı) ve bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren matematiksel bir denklemdir. Bu tür denklemler, genellikle fiziksel olayların hem zaman hem de uzay gibi çoklu değişkenler üzerinden modellenmesi gerektiğinde ortaya çıkar. Örneğin, ısı iletimi, dalga yayılımı ve akışkanlar mekaniği gibi birçok doğa olayının matematiksel modellenmesinde kısmi

diferansiyel denklemler temel araçlardır (Strauss, 2008). Kısmi diferansiyel denklemler genel olarak

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0,$$

şeklinde gösterilebilir. Kısmi diferansiyel denklemlere örnek verilirse:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad y(x, t) = 0.$$

İkinci mertebeden iki değişken içeren kısmi bir diferansiyel denklem, genel formu

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = T(x, y), \quad (1.4.1)$$

şeklindedir (Duran, 2012). Burada $A, B, C \in \mathbb{R}$ ve u bağımlı değişkeni, x ve y bağımsız değişkenleri herhangi bir fonksiyonu olarak $u(x, y)$ 'nin kısmi türevlerini bulundurmaktadır. (1.4.1) de verilen denklemde diskriminant (Δ) incelenerek eliptik, parabolik ve hiperbolik olmak üzere üç gruba ayrılır (Logan, 2015).

Eliptik denklemler, genelde “potansiyel” diye adlandırılan bir büyüklükteki bölgenin içindeki değişimi ifade etmektedir. Eliptik denklemler, potansiyel denklemler olarak da isimlendirilir. Bu denklemlerde diskriminant,

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0,$$

şeklinde olmalıdır. Eliptik denklemlere örnek verilirse Laplace denklemi aşağıdaki gibidir (Johnson, 2005);

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Laplace denklemi, fiziksel olarak zamanla değişmeyen veya dengedeki sistemleri tanımlayan temel bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklem, genellikle elektrik, manyetizma, akışkanlar mekaniği ve ısı iletimi gibi alanlarda ortaya çıkar ve çözümleri harmonik fonksiyonlar şeklindedir. Bu fonksiyonlar, bir noktadaki değer ile çevresindeki değerler arasında bir denge olduğunu gösterir; yani herhangi bir iç noktadaki değer, sınırdaki değerlerin bir ortalaması olarak belirlenir. Laplace denkleminin çözümü tamamen sınır koşullarına bağlıdır ve iç bölgedeki değerler, yalnızca sınırdaki değerler tarafından belirlenir (Morales, Diaz ve Herrera, 2015).

Parabolik denklemler, potansiyelin bir başlangıç durumundan sonra elde ettiği daimi durum değerlerini temsil eden denklemlerdir. Bu nedenle t (zaman) bağımsız değişkeni de parabolik denklemlerin bir değişkenidir. Bu denklemlerde diskriminat,

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0,$$

şeklinde olmalıdır. Parabolik denkleme örnek verilirse Isı denklemi aşağıdaki gibidir (Johnson, 2005);

$$u_t = \rho u_{xx}, \quad \rho \in R.$$

Isı denklemi, bir ortamda ısının zaman ve uzay boyunca nasıl yayıldığını tanımlayan parabolik bir kısmi diferansiyel denklemdir ve ısı iletimine ilişkin fiziksel süreçleri yansıtır. Denklem, enerjinin korunumu ilkesine dayanır: bir bölgedeki iç enerji değişimi, sınırdan giren ve çıkan ısı enerjisi ile iç kaynaklardan gelen ısı sayısını içerir; bu ilişki, sıcaklık değişiminin enerji yoğunluğu ve ısı akısı arasındaki dengenin ifadesidir (Farlow, 1982).

Hiperbolik denklemler, dalgaların nasıl yayıldığını temsil eden denklemlerdir. Bu denklemler “dalga denklemi” olarak da adlandırılmaktadır ve bağımsız değişkenlerinden biri de t (zaman) değişkenidir. Hiperbolik denklemlerde diskriminat,

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0,$$

şeklinde olmalıdır. Hiperbolik denkleme örnek verilirse Dalga denklemi aşağıdaki gibidir (Johnson, 2005);

$$u_{tt} = \kappa^2 u_{xx}, \quad \kappa \in R.$$

Dalga denklemi, bir ortamda dalgaların zaman ve uzay boyunca nasıl yayıldığını tanımlayan temel bir kısmi diferansiyel denklemdir ve genellikle ikinci mertebeden zaman ve uzay türevlerini içerir. Dalga denkleminin çözümleri, dalgaların belirli bir hızla ilerlediğini ve bu hızın ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olduğunu gösterir (Courant ve Hilbert, 1962). Bu denklemin çözümleri enerji korunumu ilkesine uyar; yani toplam enerji, zamana bağlı olarak değişmez ve yalnızca dalga boyunca farklı noktalara aktarılır (Whitham, 1999). Lineer dalga denklemleri süperpozisyon ilkesine uygundur, bu da birden fazla dalganın üst üste binmesi durumunda toplam dalga şeklinin, bireysel dalgaların toplamı olarak ifade edilebileceği anlamına gelir (Strauss, 2008). Ayrıca dalga denkleminin çözümü, başlangıç ve sınır koşullarına bağlıdır; bu koşullar dalganın yansıması, kırılması veya sönümlenmesi gibi fiziksel olayları belirler.

Çözümler genellikle sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlardır, bu da dalga hareketinin ortam boyunca kesintisiz ve düzgün olduğunu gösterir. Dalga denklemi aynı zamanda dalgaların enerji ve momentum taşıdığını ifade eder; mekanik dalgalarda potansiyel ve kinetik enerji dalganın ilerleyişi sırasında karşılıklı olarak dönüşür (Whitham, 1999). Bu özellikleriyle dalga denklemi, fizik ve mühendislikte dalga fenomenlerini anlamak ve modellemek için temel bir araçtır.

1.5. DİFERANSİYEL DENKLEMİN MERTEBESİ

Diferansiyel denklemlerin mertebesi kavramı, 17. ve 18. yüzyılda Leibniz ve Newton'un türev kavramlarını geliştirmesiyle ortaya çıkmıştır (Zill ve Cullen, 2009). Bu dönemlerde fiziksel olayları (hareket, hız, ivme) matematiksel olarak ifade etme ihtiyacı doğmuş ve denklemlerin türev derecelerine göre sınıflandırılması yapılmıştır (Boyce ve DiPrima, 2017). Mertebe, özellikle Euler, Lagrange ve d'Alembert gibi matematikçilerin mekanik ve titreşim problemlerini çözerken önemli bir sınıflandırma kriteri olmuştur. Mertebe, denklemin çözüm yöntemlerini ve denklemin davranış özelliklerini belirlemede temel bir bilgidir (Tenenbaum ve Pollard, 1985).

Bir diferansiyel denklemin türevin en yüksek değerine denklemin mertebesi denir (Gülenç, 2014). Örneğin:

$y' + 3xy = 5$, 1. mertebeden diferansiyel denklem.

$y'' - 3y' + 5xy = 3$, 2. mertebeden diferansiyel denklem.

1.6. DİFERANSİYEL DENKLEMİN DERECEİ

Diferansiyel denklemin mertebe ve derece ayrımı, 18. yüzyılda Euler ve Lagrange'ın çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır (Cajori, 1928). Euler özellikle Institutiones Calculi Integralis (1768–1770) adlı eserinde türevlerin hem mertebe hem de üssüne göre sınıflandırılması gerektiğini belirtmiştir (Euler, 1768–1770). Bu ayrım, özellikle 19. yüzyılda analitik çözüm yöntemlerinin gelişmesinde kritik rol oynamıştır (Tenenbaum ve Pollard, 1985).

Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeyi bulunduran terimin üssüne denklemin derecesi denir (Gülenç, 2014). Örneğin:

$(y'')^3 + 3(y')^5 + 2y = 5$, 2.mertebe 3.dereceden diferansiyel denklem.

Bir diferansiyel denklemin derecesi belirlenirken öncelikle denklemin mertebesi (en yüksek türev derecesi) tespit edilir. İncelenen denklemin en yüksek türevli terimi ikinci mertebeden olup, bu türev ifadesinin üssünün üç olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, söz konusu denklem ikinci mertebeden ve üçüncü dereceden bir diferansiyel denklem olarak sınıflandırılır.

1.7. GENEL VE ÖZEL ÇÖZÜM

Diferansiyel denklemler, sistemlerde değişkenler arasındaki ilişkiyi ve değişimi tanımlayan temel matematiksel araçlardır (Boyce ve DiPrima, 2017). Çözüm, sistemin tüm olası durumlarını kapsayan genel çözüm ve belirli başlangıç veya sınır koşullarını sağlayan özel çözüm olarak sınıflandırılır (Tenenbaum ve Pollard, 1985). Çözüm, fiziksel sistemi temsil eden fonksiyonlar ve parametreleri içerir; parametrelerin doğru seçimi, çözümün gerçekliği için kritik önemdedir (Zill ve Cullen, 2009). Analitik çözümün bulunamadığı durumlarda ise sayısal yöntemler ve simülasyon teknikleri kullanılır. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin çözümü, sistemin davranışını anlamak ve gerçek dünyayı modellemek açısından merkezi bir rol oynar (Boyce ve DiPrima, 2017). Örneğin:

$$y = c_1x - c_2 \frac{x^2}{3}, \quad c_1, c_2 \in R, \text{ genel çözüm iken,}$$

$$y = 2x - \frac{x^2}{3}, \text{ özel çözümdür.}$$

1.8. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ VE SINIR DEĞER PROBLEMİ

Diferansiyel denklemlerde çözüm, yalnızca denklemin kendisiyle değil, aynı zamanda sistemin koşullarıyla da belirlenir. Bu bağlamda iki temel problem türü öne çıkar: Başlangıç değer problemleri ve sınır değer problemleri. Başlangıç değer problemleri, çözümün belirli bir noktadaki başlangıç koşullarına bağlı olarak belirlendiği durumları ifade eder (Boyce ve DiPrima, 2017; Zill ve Cullen, 2009).

Buna karşılık, sınır değer problemleri, diferansiyel denklemin çözümünün farklı noktalar için belirlenen sınır koşullarını sağlaması gerektiği durumları ifade eder. Bu tür problemler özellikle mühendislik ve fizik alanlarında, örneğin bir kirişin iki ucundaki konumların sabit olduğu elastik problemlerde ortaya çıkar. Bu durumda çözüm, yalnızca

bir başlangıç noktasına değil, tüm sınırları karşılayacak şekilde belirlenir (Boyce ve DiPrima, 2017; Tenenbaum ve Pollard, 1985).

Diferansiyel denklemlerde başlangıç koşulları, çözümün varlığı ve tekliği açısından kritik bir rol oynar. Her başlangıç şartı için çözümün varlığı garanti değildir; çözümün varlığı ve tekliği, denklemin türüne ve ilgili fonksiyonların sürekliliğine bağlıdır. Örneğin, birinci mertebe diferansiyel denklemler için Picard-Lindelöf teoremi, $f(x, y)$ ve $\partial f / \partial y$ fonksiyonları belirli bir bölgede süreklilik gösteriyorsa, başlangıç noktası x_0 için tek ve var olan bir çözüm olacağını garanti eder (Tenenbaum ve Pollard, 1985).

Başlangıç şartı, çözümün belirli bir noktadaki değerini tanımlayan bir sabit olarak verilmelidir: $y(x_0) = y_0$. Bu koşul, çözümün özgünlüğünü sağlar ve çözümün fiziksel olarak anlamlı olmasını garantiler. Başlangıç koşulunun değeri, çözümdeki sabit parametreyi belirler ve dolayısıyla özel çözümü oluşturur. Farklı başlangıç koşulları uygulandığında, aynı diferansiyel denkleme ait farklı özel çözümler elde edilir. Örneğin:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y, \quad y(0) = 1 \Rightarrow y = e^x, \\ \frac{dy}{dx} &= y, \quad y(0) = 2 \Rightarrow y = 2e^x. \end{aligned}$$

Bu örnek, başlangıç şartının çözüme doğrudan etkisini ve özel çözümün fiziksel yorumunu göstermektedir (Boyce ve DiPrima, 2017; Zill ve Cullen, 2009).

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlara başlangıç şartları, bu şartlar altında çözülmesi gereken probleme ise başlangıç değer problemi denir. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlara sınır şartları, bu şartlar altında çözülmesi gereken probleme ise sınır değer problemi denir (Kayhan, 2019). Örneğin:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + y - 2xe^{-4x} &= 0, \quad \text{Başlangıç değer problemi ve başlangıç şartları.} \\ y(2) &= 5, y'(2) = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + y - 2xe^{-4x} &= 0, \quad \text{Sınır değer problemi ve sınır şartları.} \\ y(2) &= 5, y'(8) = -2. \end{aligned}$$

1.9. HADAMARD KURALI

Jacques Hadamard (1865–1963), Fransız matematikçi olarak analiz, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz alanlarında önemli katkılarda bulunmuştur. Hadamard'ın özellikle matematiksel modelleme ve fiziksel sistemlerin çözümü üzerindeki etkisi, “iyi pozlu problem” kavramı ile öne çıkar. Matematiksel problemlerin yalnızca çözümünü bulmak yeterli değildir; çözümün var olması, tek olması ve veri değişikliklerine karşı kararlı olması gerekir. İşte Hadamard bu üç kriteri tanımlayarak, matematiksel ve fiziksel problemlerde güvenilirlik ölçütünü ortaya koymuştur (Ellwood, Rodnianski, Staffilani ve Wunsch, 2008; Hadamard, 1923; Kızıldan, 2023).

Bu kuralın ortaya çıkışındaki temel ihtiyaç, fiziksel sistemlerin gerçek dünyadaki davranışlarını doğru şekilde modelleyebilmektir. Hadamard, bazı diferansiyel denklemlerin teoride çözülebilir olsa da, başlangıç veya sınır koşullarında yapılan küçük değişikliklerin çözümde büyük farklılıklar ortaya çıkardığını fark etmiştir. Bu da modelin fiziksel gerçekliği temsil etmesini zorlaştırmaktadır. Bu tür problemler “kötü pozlu (ill-posed)” olarak adlandırılır ve matematiksel olarak güvenilmezdir. Hadamard, çözümün hem var olması hem tek olması hem de kararlı olması gerektiğini belirleyerek, matematiksel modellerin fiziksel uygulanabilirliğini garanti altına almak amacıyla bu kriterleri geliştirmiştir.

Araştırılan denklemin ve denklemin çözümlerinin birbirleriyle ilişkisinin iyi konumlandırılmış olup olmadığı incelenen kuraldır. İlk kez Fransız matematikçi Jacques Hadamard “iyi konum” kavramını ileri sürmüştür (Ellwood ve diğerleri, 2008; Kızıldan, 2023). Hadamard'a göre iyi konumlandırılmış olması için aşağıdaki üç şartı sağlamalıdır;

- Varlık: En az bir çözüm mevcuttur.
- Teklik: En çok bir çözüm mevcuttur.
- Kararlılık: Denklemdaki küçük bir farklılık, çözümde de küçük bir farklılığa neden olmaktadır.

Bu üç şartı sağlayan denklem iyi konumlandırılmıştır, şartlardan birini dahi sağlamaz ise kötü konumlandırılmıştır (Guenther ve Lee, 1988).

Bir boyutlu ısı denklemini ele alıp varlığını inceleyelim (Johnson, 2005);

$$u_t = \wp u_{xx}, \quad \wp \in \mathbb{R}, x \in (0, L), t > 0. \quad (1.9.1)$$

Burada başlangıç sınır değerleri aşağıdaki gibi olsun.

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (1.9.2)$$

Denklemin çözümünün Fourier serisi ile araştıralım.

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m e^{-\rho \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (1.9.3)$$

Burada φ_m Fourier katsayılarıdır; üstteki üstel azalma çok hızlı olduğu için bu seri düzgün yakınsar dolayısıyla çözüm vardır.

Denklemin çözümünün tekliğini inceleyelim. İki çözümü olduğunu varsayalım;

$u_1(x, t)$ ve $u_2(x, t)$ olsun. Aralarındaki farkı tanıyalım;

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t). \quad (1.9.4)$$

O zaman $w(x, t)$ şu denklemi sağlar;

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad w(x, 0) = 0. \quad (1.9.5)$$

Enerji fonksiyonu;

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w^2(x, t) dx \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\rho \int_0^L (w_x)^2 dx \leq 0. \quad (1.9.6)$$

$E(0) = 0$, bu nedenle $E(t) = 0 \Rightarrow w = 0$, olur. Bu da çözümün tekliğini gösterir.

Çözümün kararlılığını araştıralım. İki farklı başlangıç noktası olduğunu varsayalım; $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ olsun. Bunların çözümleri; $u_1(x, t)$ ve $u_2(x, t)$ ve farkları $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ olsun.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w^2(x, t) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (f_1(x) - f_2(x))^2 dx. \quad (1.9.7)$$

Sonuç olarak başlangıçtaki küçük bir değişiklik sonuçta küçük bir değişikliğe neden olduğu görülmektedir. Dolayısıyla çözüm kararlıdır. Isı denklemi varlık, teklik ve kararlılık testlerini sağladığından iyi konumlanmış bir denklemdir.

1.10. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM

Diferansiyel denklemler, matematiksel özelliklerine göre lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki temel kategoriye ayrılmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklem, aşağıdaki kriterlerin tamamını sağladığında lineer olarak nitelendirilir:

- Denklemden yer alan bağımlı değişkenin ve tüm kısmi türevlerin üssü bir olmalıdır.
- Bağımlı değişkenin katsayıları ile her bir kısmi türevin katsayıları ya sabit olmalı ya da yalnızca bağımsız değişkenlere bağlı olmalıdır.

Bu koşullardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda, söz konusu denklem lineer olmayan olarak sınıflandırılır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, genellikle karmaşık davranışlar sergiler ve analitik çözümü lineer denklemlere kıyasla daha zor ve kapsamlı teknikler gerektirir (Wazwaz, 2016). Örneğin:

$xy'' - 5y' + 3xy + 4 = 0$ denklemi lineer diferansiyel denklem iken,

$(y')^2 + xy^3 - 3 = 0$ denklemi lineer olmayan diferansiyel denklemdir.

1.11. DENKLEMİN HOMOJENLİĞİ

Homojenlik açısından kısmi diferansiyel denklemler ikiye ayrılır: homojen ve homojen olmayan. Tüm terimleri yalnızca bağımlı değişken u veya u 'nin türevlerini içeren kısmi diferansiyel denklemler homojen olarak adlandırılır. Denklemden u veya u 'nin türevleri dışında bağımsız değişkenler ya da sabit ifadeler bulunuyorsa, bu denklemler homojen olmayan olarak sınıflandırılır (Wazwaz, 2016). Fiziksel açıdan bakıldığında homojenlik, sistem üzerinde herhangi bir dış kuvvetin ya da kaynağın bulunmadığını ifade eder. Homojen diferansiyel denklemler, yalnızca sistemin iç dinamiklerine karşılık gelir. Örneğin, sönümsüz ve zorlanmasız bir yay-sarkaç sistemi homojen denklemlerle modellenir. Buna karşılık, dış kuvvetin etkisi altındaki sistemler homojen olmayan diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Bu bağlamda homojen çözümler sistemin doğal davranışını, homojen olmayan çözümler ise zorlanmış davranışını ifade etmektedir (Krantz, 2016). Homojen denklemlerin genel formatı aşağıdaki gibidir (Moharg, 1947);

$$y^{(j)} + P_1(x)y^{(j-1)} + P_2(x)y^{(j-2)} + \dots + P_j(x)y = 0.$$

Homojen denklemlere örnek verilirse:

$$y'' - 3y' - 4y = 0,$$

$$x^3y'' - 4e^x y' + 5xy = 0.$$

Homojen olmayan denklemlere örnek verilirse:

$$y'' - 4xy = e^x,$$

$$y'' + 3y' = 4.$$

Örnek;

$y' + y = 0$, $y' + y = 1$ denklemlerinin başlangıç şartı $y(0) = 0$ olacak şekilde araştırırsak;

$y' + y = 0$, birinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemdir. Denkleme başlangıç koşulunu uygulayalım;

$$y(0) = Ce^0 = C = 0.$$

Denklemini elde ederiz. Sonuç olarak;

$$y(x) = 0,$$

olur. Bu çözüm tek çözümdür ve başlangıç koşulunu sağlar. Ayrıca, lineer homojen diferansiyel denklem olduğundan, $y(x) = 0$ çözümü beklenen ve geçerli bir çözümdür.

$y' + y = 1$, bu bir birinci mertebeden lineer olmayan ve homojen olmayan diferansiyel denklemdir. Denkleme başlangıç şartını uygulayalım;

$$y(0) = 1 + Ce^0 = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1.$$

Sonuç olarak;

$$y(x) = 1 - e^{-x},$$

şeklinde sunulan çözüm hem diferansiyel denklemi sağlar, hem de başlangıç şartını karşılamaktadır.

1.12. DENGELEME TERİMİ

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden

lineer olan bir terim $\frac{\partial^q u}{\partial \xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan bir terim $u^p \left(\frac{\partial^r u}{\partial \xi^r} \right)^s$

verilsin. Burada n dengeleme terimi olmak üzere $n + q = np + s(n + r)$ yazılabilir (Yokuş, 2011). Örneğin:

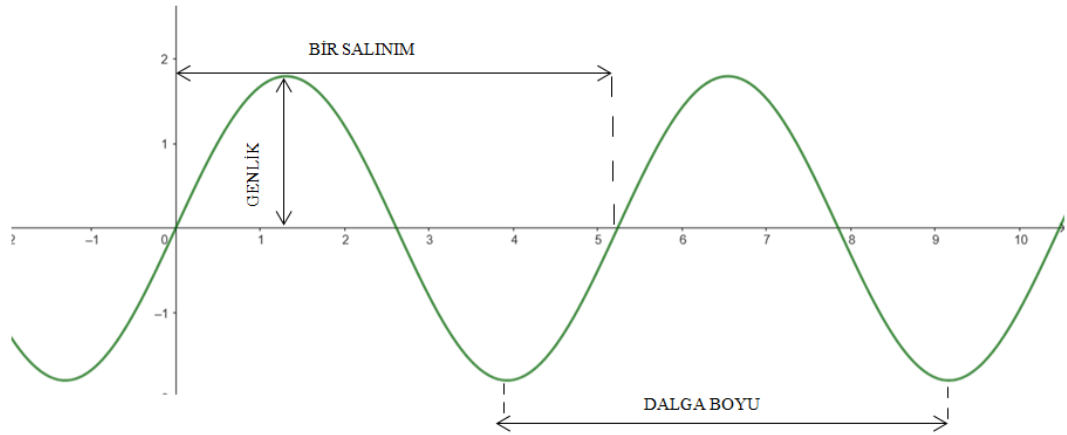
$$U'' + U + U^3 = 0,$$

denkleminde lineer olan U'' ile lineer olmayan U^3 göz önüne alındığında dengeleme terimi $n = 1$ elde edilir.

2. BÖLÜM

SOLİTARY DALGALAR VE SOLİTON

Uzayda veya maddede yayılan, çoğunlukla enerjinin aktarımında oluşan titreşime *dalga* denir (Yılmaz, 2012). Televizyon, cep telefonu, radyo gibi hayatımızı kolaylaştıran elektromanyetik dalgalar, iletişim kurmak için ses dalgaları, deprem dalgaları, okyanuslarda meydana gelen su dalgaları, gerilmiş yaydaki hareketler olarak karşımıza çıkmaktadır (Yokuş, 2011). Tüm bu olaylar diferansiyel denklemler ile modellenenmektedir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri ise bu olayların fiziksel özellikleri hakkında araştırmacılara bilgi verir. Dolayısıyla diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilginin artmasıyla beraber bu denklemleri çözmek için birçok metot geliştirilmiştir ve günümüzde de geliştirilmeye devam etmektedir. Çözüm metodlarının bir kısmı ile analitik çözümler elde edilirken bir kısmı ile de sayısal çözümler elde edilmektedir (Yokuş, 2011).



Şekil 1. Bir dalga profili

Mekanik dalgalar; titreşim dalgaları, ses dalgaları, su dalgaları gibi dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama gerek duyarlar. Fakat elektromanyetik dalgaların yayılması için ortama gerek yoktur, boşlukta da yayılabilirler (İduğ, 2013; Keskin, 2010). Elektromanyetik dalgalara televizyon dalgaları, x-ışınları, radyo dalgaları, ışık örnek verilebilir (Yılmaz, 2012).

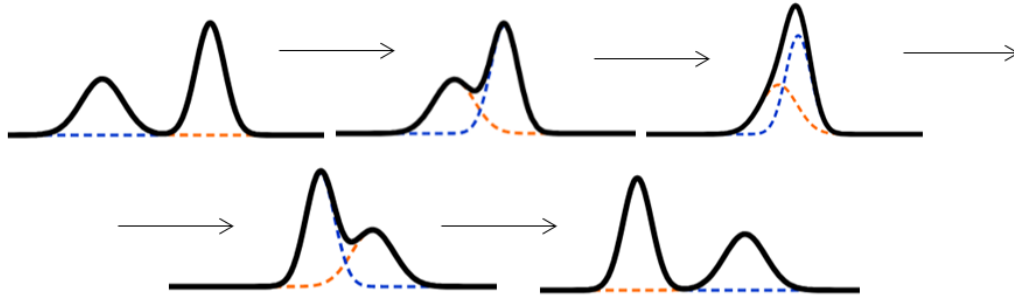
Dalgalar, duran dalgalar ve ilerleyen dalgalar olarak gruplandırılabilir. Pozisyonu hareketsiz olan dalgalar duran dalgalardır (Davarcı Yalçın, 2021). Dalganın bulunduğu

bir ortamda dalganın hareket ettiği yönün tersi yönünde hareketlendiğinde veya hareketsiz bir ortamda birbirlerinin tersi yönünde ilerlemesi ile oluşur. Bir noktadan diğer bir noktaya madde aktarma durumu olmaksızın enerjinin yayılması halinde oluşan dalgalar ise ilerleyen dalgalardır (Davarcı Yalçın, 2021).

Solitary dalgalar, ilerleme veya çarpışma anında herhangi bir şekilde fiziksel özelliklerinde değişiklik göstermeyen dalgalardır (Yokuş, 2011). 1834 yılında solitary dalgalar ilk kez İskoç mühendis John Scott Russell (1808-1882) tarafından gözlenmiştir (Wazwaz, 2016). Russell at sırtında, Edinburg-Glasgow kanalı boyunca dalganın yapısında hiçbir değişiklik söz konusu olmaksızın yavaş olarak hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. Su çıkışı olayını “Harika dalga aktarımı” şeklinde açıklayan Russell gözlemlerini şu şekilde anlattı: “Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütlelerinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütlesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış su kütlelerinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtmaya şansım oldu” (Yokuş, 2011). Bu keşif sayesinde Russell solitary dalgalar hakkında daha kapsamlı bilgiler elde etmek için fiziksel laboratuvar deneylerine yönelerek uygulama alanında büyük bir adım atmıştır. 1844 yılında laboratuvarında oluşturduğu su tanklarının ucuna ağırlık koyarak solitary dalgaları elde etmek için deneyler yapmıştır (Keskin, 2010). Yaptığı deneyler sonucunda solitary dalgalar hakkında önemli bilgiler elde etmiştir (İduğ, 2013):

- Solitary dalgalar “ $h \operatorname{sech}^2(k(x-vt))$ ” şeklindedir. Burada h dalganın genliğini, k dalga sayısını ve v dalga hızını temsil etmektedir.
- İki veya daha çok bağımsız solitary dalga üretmek için yeterli miktarda su kütlesi gereklidir.
- Solitary dalgalar normal dalgaların tersine hiçbir şekilde birleşmezler. Bu sebeple büyük genliğe sahip solitary dalga ile küçük genliğe sahip solitary dalga çarpıştıktan sonra birbirlerinden ayrılarak yapılarında herhangi bir değişiklik olmadan yollarında ilerlerler. Normal dalgalar çarpıştıklarında ya dikleşerek

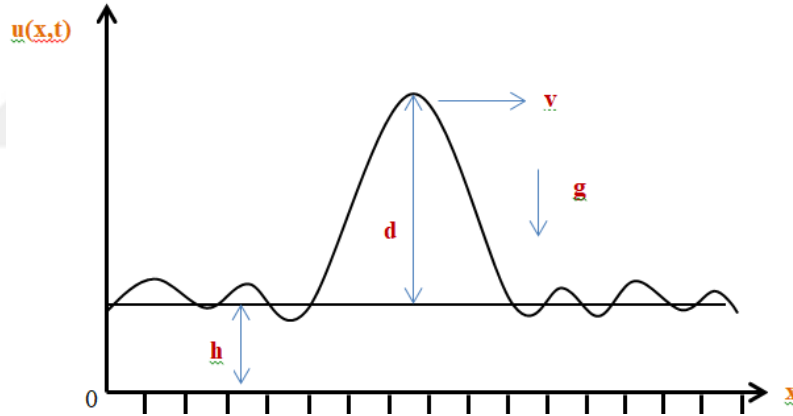
sönecek şekilde hareket ederler ya da düzleşme meydana gelir. Solitary dalgalar ise kararlıdır ve uzun mesafe ilerleyebilirler.



Şekil 2. İki solitary dalganın çarpışma anı ve sonrasında şekil değiştirmeyen davranışları

- g yerçekimi ivmesi olmak üzere d genliğinde, v dalga hızında ve h derinliğindeki bir kanalda solitary dalga Şekil 3’de gösterilmektedir ve aşağıdaki denkleme ulaşılmaktadır

$$v^2 = g(d + h). \quad (2.1)$$



Şekil 3. Bir solitary dalganın hareketi

John Scott Russell 1844 yılında yaptığı deneylerden elde ettiği bilgileri detaylı bir şekilde rapor etmesiyle solitary dalgaların tarihini başlatmıştır. Bu raporların bazı çelişkiler taşıdığı iddia edilse de 1870 yılında Boussinesq ve Rayleigh yaptıkları teorik çalışma ile 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries yayınladıkları makale ile John Scott Russell’ ın çalışmalarını doğru olduğunu sunmuşlardır (Yokuş, 2011). Korteweg de Vries (KdV), sıg su yüzeyinin seviyesini modellemek için lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini ortaya atmışlardır. KdV denklemini olarak bilinen bu denklemin en sade formu (Yokuş, 2011)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada u_{xxx} terimi lineer dağılımı temsil ederken uu_x terimi non-lineerliği (lineer olmayan) ifade etmektedir. KdV denkleminin solitary dalga çözümleri

$$u(x, t) = d \operatorname{sech}^2(\delta(x - vt)), \quad v = 2d = 4\delta^2, \quad (2.3)$$

şeklinde formüle edilir. Burada d dalğanın genliğini, v dalga hızını ve δ dalga sayısını göstermektedir. KdV denklemi dışındaki soliter dalga çözümleri $\arctan(e^{ax})$ veya sech formunda da olabilir (Aydemir, 2016).

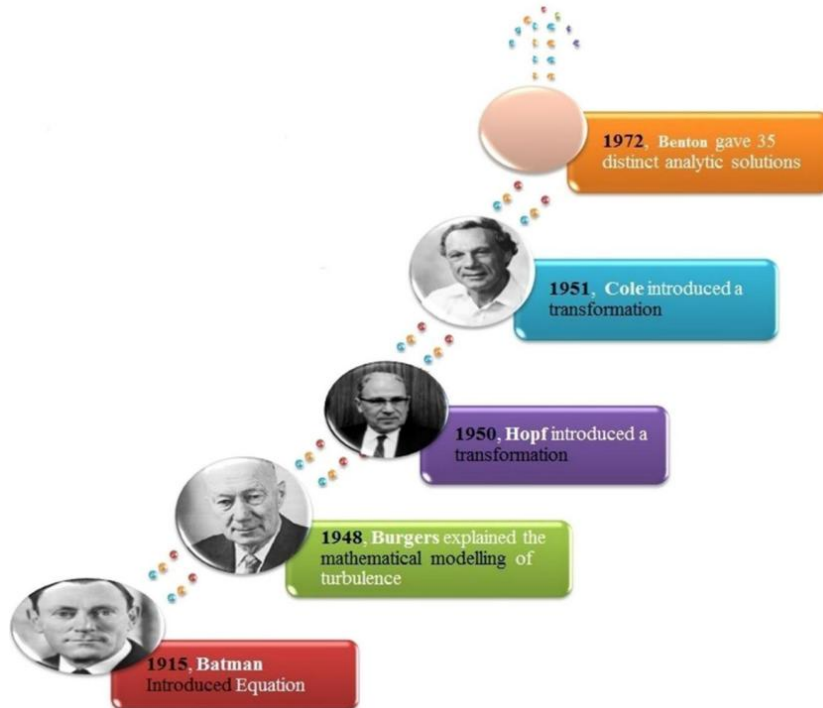
Zabusky ve Kruskal 1965 yılında KdV denkleminin çözümlerini sonlu farklar metodu ile araştırma yaparken solitary dalgaların çarpışma sonrasında yapılarını ve genliklerini değiştirmediklerini ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini keşfetmişlerdir (Yılmaz, 2012; Zabusky ve Kruskal, 1965). Bu sayede solitary dalgaların özelliklerini parçalarına aktarabilmesi özelliğinden bu şekildeki dalgalara *soliton* adını vermişlerdir. Greene, Gardner, Miura ve Kruskal 1967 yılında KdV denkleminin soliton çözümlerini ters saçılma dönüşüm (TSD) metodunu geliştirerek analitik olarak sunmuşlardır. Bu çalışmalar soliton teorisi tarihine damga vurmuştur (Zabusky ve Kruskal, 1965).

3. BÖLÜM

SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİ

3.1. BURGERS DENKLEMİ

Burgers denklemini ilk olarak 1915’de İngiliz matematikçi Hary Bateman, kısmi diferansiyel denklemler hakkında yaptığı bir çalışma ile ortaya koymuştur (Bateman, 1915). Daha sonra 1948’de Hollandalı fizikçi Johannes Martinus Burgers, kanaldaki türbülanslı akışkanın zıt etkilerinin etkileşimini açıklamış ve Burgers denklemini akışkanlar mekaniğine tanıtmıştır (Bonkile, Awasthi, Lakshmi, Mukundan ve Aswin, 2018; Wazwaz, 2007c). Eberhard Hopf 1950’de ve Julian David Cole 1951’de birbirlerinden bağımsız olarak Burgers denklemini lineer bir denklem haline getirmek için ısı denklemi dönüşümü yaparak denklemin analitik çözümlerini bulmuşlardır (Bonkile ve diğerleri, 2018; Gao ve Zou, 2017). Bu nedenle Burgers denkleminin çözümlerinin araştırılmasında Hopf-Cole dönüşümü yaygın olarak kullanılan bir dönüşümdür (Wazwaz, 2007c). Benton ise 1972’de önceki sonuçlara dayanarak 35 farklı analitik çözüm elde etmiştir (Gao ve Zou, 2017).



Şekil 4. Burgers denkleminin tarihsel hiyerarşisi (Bonkile ve diğerleri, 2018)

J.M.Burges yaptığı kapsamlı çalışmalar çalışmalarla aşağıdaki denklemi literatüre kazandırmıştır ve bu denklem herkes tarafında Burgers denklemi olarak bilinmektedir (Dhawan, Kapoor, Kumar ve Rawat, 2012);

$$u_t + uu_x = \eta u_{xx}, \quad \eta > 0. \quad (3.1.1)$$

Burada;

- $u = u(x, t)$, çözüm fonksiyonu,
- $\eta > 0$, viskozite katsayısı,
- u_t , $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'ye göre bir kez kısmi türevi,
- u_x , $u(x, t)$ fonksiyonunun x 'e göre bir kez kısmi türevi,
- u_{xx} , $u(x, t)$ fonksiyonunun x 'e göre iki kez kısmi türevi.

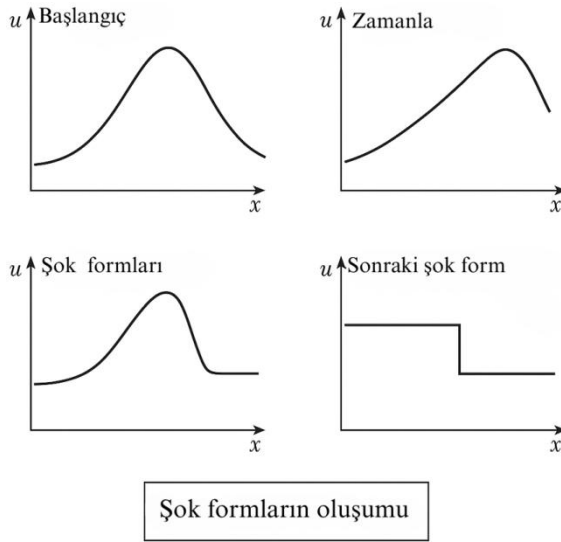
Burgers denkleminin fiziksel anlamına bakarsak;

- $u_t + uu_x$, Taşınım (Konveksiyon) Terimi; dalgaların hareketi ve kendini taşımasını ifade etmektedir.
- ηu_{xx} , Yayılma (Difüzyon) Terimi; akışkanların yayılmasını ifade etmektedir.

Bu denklem taşınım ve yayılma etkilerini birlikte modellemektedir. Denklemin çözümünde, zamana bağlı olarak şoklar yumuşayarak düzgünleşip yayılacaktır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemini çözmek için Cole Hopf dönüşümü uygulanmaktadır (Yokus ve Kaya, 2017).

$$u_t + uu_x = 0, \quad \eta = 0. \quad (3.1.2)$$

Denklem (3.1.2) de $\eta = 0$ alındığında viskozite etkisi yoktur. Bu nedenden dolayı çözümde zamanla şok dalgaları oluşmaktadır.



Şekil 5. Zamanla şok dalgalarının oluşumu

Lineer olmayan diferansiyel denklemler ailesinden Burgers hiyerarşisi aşağıdaki şekildedir (Kudryashov ve Sinelshchikov, 2009)

$$u_t + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + u \right)^\zeta u = 0, \quad \zeta = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.1.3)$$

Denklem (3.1.3) de $\zeta = 1$ durumunda Burgers denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmektedir (Kudryashov ve Sinelshchikov, 2009)

$$u_t + 2\alpha u u_x + \alpha u_{xx} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.1.4)$$

Denklem (3.1.3) de $\zeta = 2$ durumunda ise Sharma-Tasso-Olver denklemine aşağıdaki formda ulaşılmaktadır (Hirota, 2004; Kudryashov ve Sinelshchikov, 2009)

$$u_t + \alpha u_{xxx} + 3\alpha u_x^2 + 3\alpha u u_{xx} + 3\alpha u^2 u_x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.1.5)$$

Burgers denklemi, akışkanlar mekaniğinin en temel denklemlerinden biridir ve borular içindeki akışkanların davranışlarını anlamak açısından büyük öneme sahiptir (Wazwaz, 2007a). Bu önem, sanayi, mühendislik sistemleri ve günlük yaşam uygulamalarında Burgers denkleminin yaygın kullanımından kaynaklanmaktadır (Bonkile ve diğerleri, 2018). İnsan vücudu buna iyi bir örnek teşkil etmektedir; kan, damarlar ve atardamarlar boyunca kesintisiz bir şekilde akmakta ve bu durum akışkan taşınımının doğal bir örneğini sunmaktadır. Burgers denklemi yalnızca biyolojik sistemlerde değil, aynı zamanda trafik akışları, gaz dinamiği, ısı iletimi ve şok dalgaları gibi pek çok farklı alanda da ortaya çıkmaktadır. Bu yönüyle, lineer olmayan kısmi

diferansiyel denklemler arasında özel bir öneme sahiptir (Gao ve Zou, 2017; Jiwari, 2015). Denklem, ısı iletim denklemi ile birinci dereceden dalga denkleminin özelliklerini birleştirerek konveksiyon ve difüzyon arasındaki ilişkiyi açıklamak için kullanılmaktadır (Gao ve Zou, 2017). Ayrıca, Burgers denklemi, viskozite katsayılı difüzyon terimi ve konveksiyon teriminin varlığı nedeniyle Navier-Stokes denklemlerinin basitleştirilmiş bir modeli olarak düşünülebilir (Jiwari, 2015).

3.2. SHARMA-TASSO-OLVER DENKLEMİ

Sharma-Tasso-Olver denklemi bilimsel uygulamalarda yer alması nedeniyle son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir (Shang, Qin, Huang ve Yuan, 2008). Denklemi ilk kez Tasso tarafından Burgers hiyerarşisinin tek üyeleri örneği olarak elde edilmiştir (Tasso, 1976). Ayrıca, sonsuz sayıda simetriye sahip bir evrim denklemi olarak da ortaya çıkmaktadır (Wazwaz, 2015; Sheikh, Taher, Hossain ve Akter, 2023). Olver, bu denklemin sonsuz sayıda simetriye sahip olan evrim denklemlerinden biri olduğunu göstermiştir (Olver, 1977). Wang ve diğerleri solitonun fisyon- füzyon olaylarını Hirota'nın çift lineer metodu, Bäcklund dönüşüm metodu ve standart kesik Painlevé analizini kullanarak detaylı açıkladılar (Wazwaz, 2015). Soliton fisyon bir solitonun bölünmesiyle iki veya daha çok soliton oluşması iken soliton füzyon iki veya daha çok solitonun birleşerek tek bir solitonun oluşmasıdır (Wang, Tang ve Lou, 2004).

Genelleşmiş Sharma-Tasso-Olver denkleminin soliter dalga çözümlerine ulaşmak için aşağıdaki Sharma-Tasso-Olver denklemi ele alınmıştır (Sheikh ve diğerleri, 2023)

$$u_t + 3\alpha u_x^2 + 3\alpha u^2 u_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad \alpha \in R. \quad (3.2.1)$$

Lineer olmayan dağılımlı dalgaların homojen olmayan ortamlarda yayılımını tanımlayan bir model denklem olarak bilinen Sharma-Tasso-Olver denklemi aşağıdaki gibidir (Sharma ve Tasso, 1970)

$$u_t + \alpha (u^3)_x + \frac{3}{2} \alpha (u^2)_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0, \quad \alpha \in R. \quad (3.2.2)$$

(1+1) boyutlu Sharma-Tasso-Olver denklemine u_{yy} teriminin eklenerek (2+1) boyutlu Sharma-Tasso-Olver denklemin rasyonel çözümlerini elde etmek için (Ren ve Ma, 2019)

$$\left(u_t + \alpha u_x^3 + \frac{3}{2} \alpha u_{xx}^2 + \alpha u_{xxx} \right)_x + \beta u_{yy} = 0, \quad \alpha, \beta \in R, \quad (3.2.3)$$

denklemini kullanılmıştır.

Sharma-Tasso-Olver denkleminin çözümlerini araştırmak için bazı metotlar kullanılmıştır. Bu metotlar; Hirota'nın doğrudan metodu ve Bäcklund dönüşümü aracılığıyla (Wang ve diğerleri, 2004), değiştirilmiş basit denklem metodu (Zayed, 2011), oto-Bäcklund dönüşüm metodu ve sonlu ileri farklar metodu (Kaya, Yokuş ve Demiroğlu, 2020), genişletilmiş homojen denge metodu (Zhou, Yang ve Liu, 2011), geliştirilmiş değiştirilmiş basit denklem metodu (Sheikh ve diğerleri, 2023), genişletilmiş homoklinik test fonksiyonu metodu (Yu, Ren ve Wang, 2022), homojen denge metodu (Shang, Huang ve Yuan, 2011), geliştirilmiş $\frac{G'}{G}$ - açılım metodu (He, Li ve Long, 2013; Khan, Koppelaar, Akbar ve Mohyud-Din, 2022), $\frac{1}{G'}$ - açılım metodu ve değiştirilmiş Kudryashov (Ali ve diğerleri, 2018), geliştirilmiş Bernoulli alt denklemi fonksiyon metodu (Sulaiman, Yokuş, Güllüoğlu ve Başkonuş, 2018).

3.3. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİ

Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi, Burgers hiyerarşisinden türetilen Burgers denklemi ve Sharma-Tasso-Olver denkleminin birleşimi ile elde edilmektedir. Bu denklem giriş bölümünde verilen (1) denklemdir (Yan ve Lou, 2020)

$$u_t + a(3u_x^2 + 3u^2u_x + 3uu_{xx} + u_{xxx}) + b(2uu_x + u_{xx}) = 0, \quad a, b \in R. \quad (1)$$

Denklemden $a = 0$ olduğunda Burgers denklemine indirgenirken $b = 0$ olduğunda ise Sharma-Tasso-Olver denklemine indirgenmektedir (Miao, Hu ve Chen, 2021).

Rezonans, matematikte patlamalara yol açabilen önemli bir doğal fenomendir ve çeşitli yeni uyarılma türleri çoğunlukla solitonların rezonanslarından kaynaklanmaktadır (Qu, Hu, Miao, Shen ve Wang, 2021). Solitonlara farklı rezonans kısıtlamalarının uygulanması, kompleks yapılar, anlık/haydut dalgalar, nefes alan dalgalar ve soliton fisyon-füzyonları gibi birçok olgunun ortaya çıkmasına neden olabilmektedir (Hu ve diğerleri, 2021; Qu ve diğerleri, 2021). Bu bağlamda, solitonların özel bir türü olan soliton molekülleri, moleküllere benzer davranışlar göstermeleri nedeniyle dikkat çekici

bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Hem teorik hem de deneysel çalışmalarda geniş ilgi gören soliton molekülleri, birleşik sistemlerde de önemli bir tartışma alanı oluşturmuş ve bilim camiasında yoğun şekilde incelenmiştir (Hu ve diğerleri, 2021; Yan ve Lou, 2020).

Fisyon-füzyon olaylarını açıklayan Sharma-Tasso-Olver denklemi ile akışkanlar mekaniğinin önemli denklemlerinden Burgers denkleminin birleşimi olan Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin analitik çözümlerine ulaşmak araştırılmaya değer görülmüştür. Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi hakkında literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Bu denklem ile ilgili Yan ve Lou denklemin kink moleküllerini, yarı periyodik kink moleküllerini ve nefes alan soliton moleküllerini üretmişlerdir (Yan ve Lou, 2020), Z. Miao ve arkadaşları çeşitli yığın etkileşim çözümlerinin varlığını araştırmışlardır (Miao ve diğerleri, 2021), Younas ve arkadaşları denklemin lineer olmayan dalga yayılımını incelemişlerdir (Younas, Sulaiman, Ismael, Ren ve Yusuf, 2024), Zhou ve arkadaşları denklemde Bäcklund dönüşümleri yoluyla hibrit çözümler elde etmiştir (Zhou, Tian, Chen, Wei ve Chen, 2021), Hussain ve arkadaşları denklemi genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ - açılım metodu ile araştırarak hiperbolik, rasyonel ve trigonometrik çözümler elde etmişlerdir (Hussain ve diğerleri, 2024), Yu ve arkadaşları denklemi Lie noktası simetri metodu ve tutarlı tanh genişletme metodu ile hipergeometrik dalga çözümler elde etmişlerdir (Yu ve diğerleri, 2022).

4. BÖLÜM

ÇÖZÜM METOTLARI

4.1. $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODU

$\frac{1}{G'}$ - açılım metodu Yokuş'un 2011 yılında doktora tezinde $\frac{G'}{G}$ - açılım metodundan esinlenerek geliştirdiği yeni bir metottur. $\frac{1}{G'}$ - açılım metodu, $\frac{G'}{G}$ - açılım metoduna göre daha kolay ve karmaşık olmayan bir metot olduğundan işlem yoğunluğu bakımından daha avantajlı ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmada etkili bir metottur (Yokuş, 2011).

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ailesinin genel formu aşağıdaki şekildedir

$$H\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0. \quad (4.1.1)$$

$U(\xi) = u(x, t) = U$, $\xi = kx - vt$, $v \neq 0$, burada v dalga hızıdır ve k frekanstır. $U(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüştürülmektedir;

$$J(U, U', U'', U''', \dots) = 0. \quad (4.1.2)$$

(4.1.2) denkleminin çözümü;

$$U(\xi) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{1}{G'}\right)^i. \quad (4.1.3)$$

Burada β_i , $i = (1, 2, 3, \dots, n)$ hesaplanması gereken bir sabit sayıdır, $G = G(\xi)$ aşağıda sunulan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin çözümüdür.

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0, \quad (4.1.4)$$

burada λ ve μ sabitlerdir. (4.1.3) denklemindeki çekirdeğin yapısı aşağıdaki şekildedir

$$\frac{1}{G'(\xi)} = \frac{\lambda}{-\mu + c_1 \lambda [\cosh(\xi \lambda) - \sinh(\xi \lambda)]}, \quad c_1 \in R. \quad (4.1.5)$$

Üstel form yazılımındaki (4.1.5) denklemi aşağıdaki şekildedir

$$\frac{1}{G'(\xi)} = \frac{1}{-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 e^{-\xi\lambda}}. \quad (4.1.6)$$

Burada c_1 integral sabitidir. (4.1.3) denkleminin istenen türevleri hesaplanarak ve (4.1.2) denkleminde yerine yazılarak bazı matematiksel operasyonlardan sonra $\frac{1}{G'}$ terimine bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayılarını sıfıra eşitleyerek cebirsel bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemini çözmek için Mathematica hazır paket programı kullanılabilir. Elde edilen çözüm sonucu varsayılan (4.1.2) denklemi çözüm fonksiyonundaki yerine konulur. Son olarak uygulanan dönüşüm tersine işletilerek (4.1.1) denkleminin çözümleri elde edilir (Yokus, Durur, Ahmad ve Yao, 2020).

4.2. GELİŞTİRİLMİŞ $\frac{1}{G'}$ - AÇILIM METODU

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ailesinin genel formu (4.1.1) denkleminde verilmektedir. Bu denklem $U(\xi) = u(x, t) = U$, $\xi = kx - vt$, klasik dalga dönüşümü yapılarak (4.1.2) denkleminde verilen adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Geliştirilmiş $\frac{1}{G'}$ - açılım metodu ile (4.1.2) denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$U(\xi) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \left(\beta_i \left(\frac{1}{G'(\xi)} \right)^i + \beta_{-i} \left(\frac{1}{G'(\xi)} \right)^{-i} \right), \quad (4.2.1)$$

burada $\beta_i, \beta_{-i}, i = \{1, 2, \dots, n\}$ daha sonra belirlenecek bilinmeyen sabitleri temsil eder ve n homojen denge ilkesine göre hesaplanacak bir sayıdır. Ayrıca $G = G(\xi)$, (4.1.4) denkleminde sunulan temel denklemin çözümüdür.

Çözümün denklemi sağlaması ilkesi göz önüne alınırsa (4.2.1) denklemi (4.1.2) denkleminin yerine yazılır. Sonrasında bazı matematiksel operasyonlardan sonra $\frac{1}{G'}$ ve G' terimlerine bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayılarını sıfıra

eşitleyerek cebirsel bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemini çözmek için Mathematica hazır paket programı kullanılabilir. Elde edilen çözüm sonucu varsayılan (4.1.2) denklemi çözüm fonksiyonundaki yerine konulur. Son olarak uygulanan dönüşüm tersine işletilerek (4.1.1) denkleminin çözümleri elde edilir (Yokuş, Duran ve Durur, 2022).

Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinde kullanılan açılım yöntemleri, elde edilecek çözüm ailesinin çeşitliliğini doğrudan etkilemektedir. Bu bağlamda, literatürde yer alan klasik $\frac{1}{G'}$ - açılım metodu ve bunun genişletilmiş versiyonu ile arasındaki temel farklılıklar şu şekilde özetlenebilir:

Klasik $\frac{1}{G'}$ - açılım metodunun çözüm fonksiyonu: (4.1.3) şeklinde ifade edilmektedir. Bu yaklaşımda yalnızca pozitif kuvvetler dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla çözüm fonksiyonu, $G'(\xi)$ 'nin ters kuvvetlerinin pozitif üstel formlarına indirgenmiş olup, çözüm uzayını sınırlı bir biçimde temsil etmektedir. Buna karşılık, geliştirilmiş yöntemin çözüm fonksiyonu, (4.2.1) şeklinde tanımlanmakta ve hem pozitif hem de negatif kuvvetleri içermektedir. Bu durum, çözüm uzayının daha geniş kapsamda temsil edilmesini sağlamakta, lineer olmayan diferansiyel denklemlerde daha zengin fonksiyonel çözümlere ulaşılmasına olanak vermektedir. Özellikle negatif kuvvetlerin dahil edilmesi, soliton benzeri hiperbolik çözümlerin elde edilmesinde avantaj sağlamaktadır.

5. BÖLÜM

ÇÖZÜMLER

5.1. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNE $\frac{1}{G}$ - AÇILIM METODUNUN UYGULANMASI

Bu bölümde, $\frac{1}{G}$ -açılım yöntemi, Sharma–Tasso–Olver–Burgers denklemine uygulanmaktadır. Denklem (1) ile sunulan Sharma–Tasso–Olver–Burgers denklemi açılım yöntemlerinin genel yaklaşımı doğrultusunda, uygun bir ilerleyen eden dalga dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denkleme indirgenmektedir. Bu amaçla, aşağıdaki ilerleyen eden dalga dönüşümü kullanılmaktadır.

$$U(\xi) = u(x, t) = U, \quad \xi = kx - vt. \quad (5.1.1)$$

Burada $v \neq 0$, burada v dalga hızıdır ve k frekanstır. Denklem (5.1.1) şeklinde tanımlanan bir ilişki, orijinal denklemin sabit profilli çözümleri araştırmaya elverişli hale getirilmesine olanak tanır. Dönüşüm sonucunda elde edilen adi diferansiyel denklem, açılım yöntemi kullanılarak analiz edilmekte ve olası analitik çözümler elde edilmektedir. Açılım metotları, karmaşık sistemlerin davranışını anlamak ve çözmek için kullanılan etkili araçlardır. Bu metotların genel işleyişinde, kısmi diferansiyel denklemler genellikle adi diferansiyel denklemlere dönüştürülerek daha basit bir forma indirgenir. Bu dönüşüm, denklemin çözüm alanının boyutunu azaltarak analitik ya da sayısal çözümleme işlemlerini kolaylaştırır. Örneğin, belirli bir parametre veya değişken üzerindeki etkilerin izole edilmesiyle, sistemin genel davranışını temsil eden daha yönetilebilir bir model elde edilir. Böylece, karmaşık problemler daha anlaşılır hale gelir ve çözüm süreçleri hızlandırılmış olur. Bu yaklaşım, mühendislik, fizik ve matematik gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde (5.1.1) ile sunulan ilerleyen eden dalga dönüşümü denklem (1)'e uygulanır ve bir kez integral alınırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklemi elde edilir.

$$c - vU + bU^2 + aU^3 + k^2(b + 3U)U' + k^3U'' = 0, \quad (5.1.2)$$

burada c integral sabitidir. (5.1.2) denklemindeki U'' ve U^3 terimlerinden dengeleme prensibi gereği $n=1$ elde edilir. Elde edilen dengeleme terimi (4.1.3) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa, (5.1.2) ile sunulan denklemin aşağıdaki gibi çözümü inşa edilir:

$$U(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{G'} \right), \quad (5.1.3)$$

burada β_0, β_1 hesaplanması gereken sabitlerdir. (5.1.3)'de sunulan çözüm denklem (5.1.2) denklemini sağlar. Bu bilimsel gerçeklikte denklem (5.1.3) çözümü denklem (5.1.2)'de yerlerine yazılır ve bazı matematiksel operasyonlardan sonra $\left(\frac{1}{G'} \right)^i, (i=0,1,2,3)$ polinomu denklemleri elde edilir. Sıfır polinomun özelliği dikkatte alınarak $\left(\frac{1}{G'} \right)^i, (i=0,1,2,3)$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'} \right)^0 : c - v\beta_0 + bk\beta_0^2 + ak\beta_0^3 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^1 : -v\beta_1 + bk^2\lambda\beta_1 + k^3\lambda^2\beta_1 + 2bk\beta_0\beta_1 + 3k^2\lambda\beta_0\beta_1 + 3ak\beta_0^2\beta_1 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^2 : bk^2\mu\beta_1 + 3k^3\lambda\mu\beta_1 + 3k^2\mu\beta_0\beta_1 + bk\beta_1^2 + 3k^2\lambda\beta_1^2 + 3ak\beta_0\beta_1^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^3 : 2k^3\mu^2\beta_1 + 3k^2\mu\beta_1^2 + ak\beta_1^3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

(5.1.4) ile belirtilen denklem sistemlerinin bilgisayar paket programları ile çözülmesiyle;

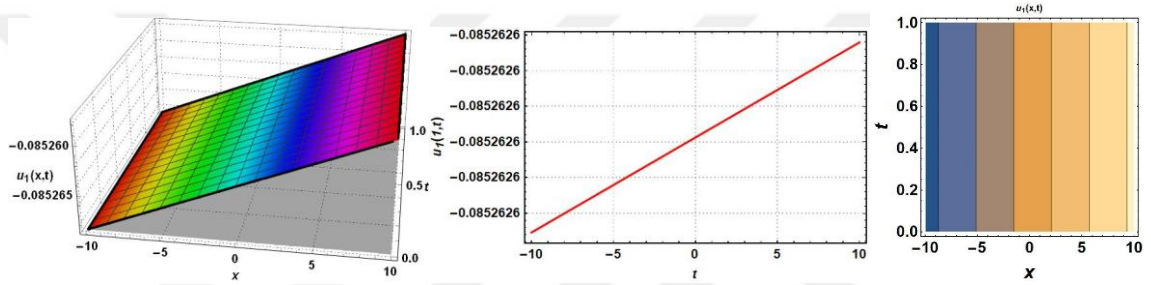
Durum 1:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{k^2(6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad b = -\frac{3(-2k\mu\beta_0 + k\lambda\beta_1)}{\beta_1}, \\ a &= \frac{-2k^2\mu^2 - 3k\mu\beta_1}{\beta_1^2}, \quad c = -\frac{2k^3\beta_0(\mu\beta_0 - \lambda\beta_1)(2\mu\beta_0 - \lambda\beta_1)}{\beta_1^2}, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'de yerine yazılırsa denklem (1) için analitik çözüm

$$u_1(x,t) = \beta_0 + \beta_1 / \left(-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh \left[\lambda \left(kx + \frac{1}{\beta_1^2} k^2 t (6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2) \right) \right] \right) - c_1 \sinh \left[\lambda \left(kx + \frac{1}{\beta_1^2} k^2 t (6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2) \right) \right]. \quad (5.1.6)$$

elde edilir. İlerleyen eden dalga dönüşümü ve açılım yöntemi uygulanarak elde edilen Sharma–Tasso–Olver–Burgers denkleminin analitik çözümü denklem (5.1.6) ile sunulmaktadır. Sabit parametreler, çözümün genlik, hız ve profil yapısını doğrudan etkilediğinden, uygun seçimleri çözümün fiziksel geçerliliği açısından kritik öneme sahiptir. Grafikteki profil, belirli parametre değerleri altında sistemin karakteristik davranışını aşağıdaki grafik yansıtmaktadır.



Şekil 6. (5.1.6) çözümündeki $\beta_0 = 0.02$, $k = 0.001$, $\mu = 0.1$, $c_1 = 0.05$, $\beta_1 = 0.1$, $\lambda = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Şekil 6 ile sunulan grafik hem analitik çözümün geçerliliğini görselleştirmek hem de sabit parametrelerin çözüm üzerindeki belirleyici rolünü vurgulamak amacıyla sunulmuştur.

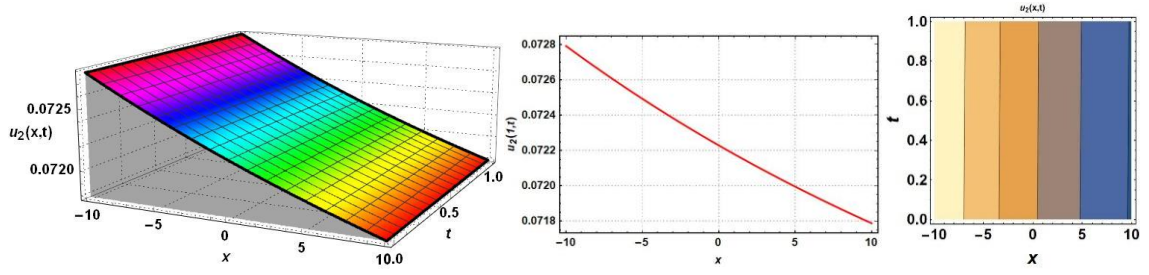
Durum 2:

$$\beta_1 = -k\mu, \quad v = k(bk\lambda + k^2\lambda^2 + 2b\beta_0 + 3k\lambda\beta_0 + 3\beta_0^2), \quad a = 1, \quad c = k\beta_0(k\lambda + \beta_0)(b + k\lambda + 2\beta_0), \quad (5.1.7)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)'de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin analitik çözümü

$$u_2(x,t) = -((k\mu) / \left(-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh \left[\lambda \left(kx - kt(bk\lambda + k^2\lambda^2 + 2b\beta_0 + 3k\lambda\beta_0 + 3\beta_0^2) \right) \right] \right) - c_1 \sinh \left[\lambda \left(kx - kt(bk\lambda + k^2\lambda^2 + 2b\beta_0 + 3k\lambda\beta_0 + 3\beta_0^2) \right) \right]) + \beta_0, \quad (5.1.8)$$

elde edilir.



Şekil 7. (5.1.8) çözümündeki $\beta_0 = 0.05$, $k = 0.2$, $\mu = 0.1$, $c_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $b = 1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Analitik çözümün güvenilirliğine dair bir fikir vermesi ve sabit parametrelerin etkisini öne çıkarması amacıyla oluşturulan grafik, Şekil 7’de yer almaktadır.

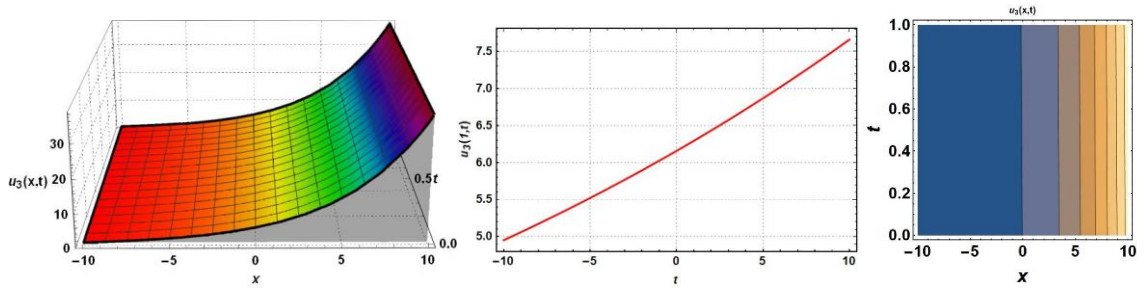
Durum 3:

$$v = -2k^3\lambda^2 - 3k^2\lambda\beta_0, \quad b = -3k\lambda, \quad a = 0, \quad \mu = 0, \quad c = -2k^3\lambda^2\beta_0, \quad (5.1.9)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)’de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin analitik çözümü

$$u_3(x, t) = \beta_0 + \beta_1 / \left(c_1 \cosh \left[\lambda \left(kx - t \left(-2k^3\lambda^2 - 3k^2\lambda\beta_0 \right) \right) \right] - c_1 \sinh \left[\lambda \left(kx - t \left(-2k^3\lambda^2 - 3k^2\lambda\beta_0 \right) \right) \right] \right), \quad (5.1.10)$$

elde edilir.



Şekil 8. (5.1.10) çözümündeki $\beta_0 = 0.05$, $k = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.5$, $\lambda = 1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Şekil 8’de verilen grafik, analitik çözümün doğruluğunu ortaya koymak ve sabit parametrelerin çözüm üzerindeki etkisini ön plana çıkarmak için hazırlanmıştır.

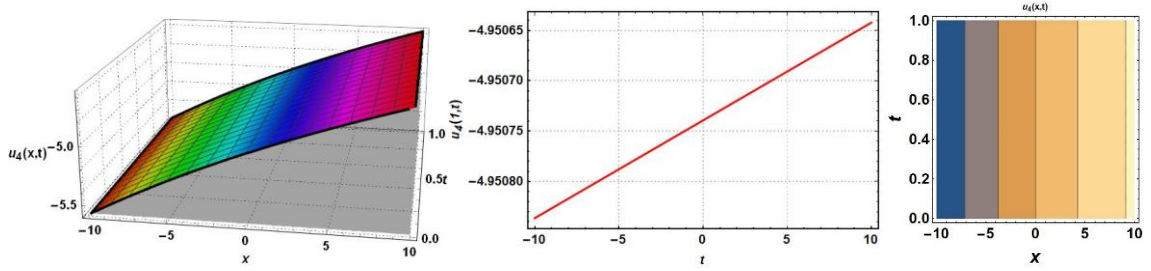
Durum 4:

$$\beta_0 = 0, \quad v = -2k^3\lambda^2, \quad b = -3k\lambda, \quad a = \frac{-2k^2\mu^2 - 3k\mu\beta_1}{\beta_1^2}, \quad c = 0, \quad (5.1.11)$$

elde edilen çözümler (5.1.3)’de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin hiperbolik çözümü

$$u_4(x,t) = \frac{\beta_1}{-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh[\lambda(kx + 2k^3t\lambda^2)] - c_1 \sinh[\lambda(kx + 2k^3t\lambda^2)]}, \quad (5.1.12)$$

elde edilir.



Şekil 9. (5.1.12) çözümündeki $k = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.5$, $\lambda = 0.05$, $\mu = 0.01$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.

Şekil 9’da yer alan grafik, analitik çözümün geçerliliğini kanıtlamak ve sabit parametrelerin çözümdeki rolünü öne çıkarmak amacıyla verilmiştir

5.2. SHARMA-TASSO-OLVER-BURGERS DENKLEMİNE GELİŞTİRİLMİŞ

$\frac{1}{G}$ - AÇILIM METODUNUN UYGULANMASI

Bu bölümde geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - açılım metodu, Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemine uygulandı. (1) ile verilen Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemini düşünelim. Eğer

$$U(\xi) = u(x,t) = U, \quad \xi = kx - vt, \quad (5.2.1)$$

dalga dönüşümünü uygularsak

$$c - vU + bkU^2 + akU^3 + k^2(b + 3U)U' + k^3U'' = 0, \quad (5.2.2)$$

denklemini elde ederiz. Burada c integral sabitidir.

(5.2.2) denklemindeki U'' ve U^3 terimlerinden dengeleme prensibi gereği $n = 1$ elde edilir. (1) denkleminin (4.2.3) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{G} \right) + \beta_2(G'), \quad (5.2.3)$$

yazılabilir. (5.2.3)'de verilen çözüm (5.2.2)'de verilen denklemde dikkate alınarak gerekli türevler alınır ve $(G')^i$, $\left(\frac{1}{G'}\right)^i$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{G'}\right)^0 : c - v\beta_0 + bk\beta_0^2 + ak\beta_0^3 - bk^2\mu\beta_2 + k^3\lambda\mu\beta_2 - 3k^2\mu\beta_0\beta_2 + 2bk\beta_1\beta_2 + 6ak\beta_0\beta_1\beta_2 &= 0, \\
 \left(\frac{1}{G'}\right)^1 : -v\beta_1 + bk^2\lambda\beta_1 + k^3\lambda^2\beta_1 + 2bk\beta_0\beta_1 + 3k^2\lambda\beta_0\beta_1 + 3ak\beta_0^2\beta_1 + 3ak\beta_1^2\beta_2 &= 0, \\
 \left(\frac{1}{G'}\right)^2 : bk^2\mu\beta_1 + 3k^3\lambda\mu\beta_1 + 3k^2\mu\beta_0\beta_1 + bk\beta_1^2 + 3k^2\lambda\beta_1^2 + 3ak\beta_0\beta_1^2 &= 0, \\
 \left(\frac{1}{G'}\right)^3 : 2k^3\mu^2\beta_1 + 3k^2\mu\beta_1^2 + ak\beta_1^3 &= 0, \\
 (G')^1 : -v\beta_2 - bk^2\lambda\beta_2 + k^3\lambda^2\beta_2 + 2bk\beta_0\beta_2 - 3k^2\lambda\beta_0\beta_2 + 3ak\beta_0^2\beta_2 - 3k^2\mu\beta_2^2 + 3ak\beta_1\beta_2^2 &= 0, \\
 (G')^2 : bk\beta_2^2 - 3k^2\lambda\beta_2^2 + 3ak\beta_0\beta_2^2 &= 0, \\
 (G')^3 : ak\beta_2^3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.2.4) ile belirtilen denklem sistemlerinin bilgisayar paket programları ile çözülmesiyle;

Durum 1:

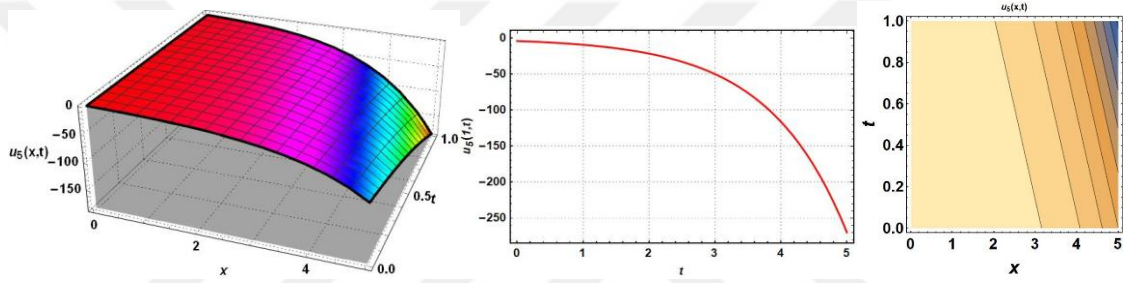
$$\beta_1 = -\frac{2k\mu}{3}, \beta_2 = -\frac{3\beta_0^2}{2k\mu}, v = -\frac{9}{2}k\beta_0^2, b = -\frac{9\beta_0}{2}, a = 0, \lambda = -\frac{3\beta_0}{2k}, c = 9k\beta_0^3, \tag{5.2.5}$$

elde edilen çözümler (5.2.3)'de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin analitik çözümü

$$\begin{aligned}
 u_5(x, t) = & -\frac{2k\mu}{3} \left(c_1 \cosh \left[\frac{3\beta_0 \left(kx + \frac{9}{2}kt\beta_0^2 \right)}{2k} \right] + c_1 \sinh \left[\frac{3\beta_0 \left(kx + \frac{9}{2}kt\beta_0^2 \right)}{2k} \right] + \frac{2k\mu}{3\beta_0} \right) \\
 & + \beta_0 - \frac{3\beta_0^2}{2k\mu} \left(c_1 \cosh \left[\frac{3\beta_0 \left(kx + \frac{9}{2}kt\beta_0^2 \right)}{2k} \right] + c_1 \sinh \left[\frac{3\beta_0 \left(kx + \frac{9}{2}kt\beta_0^2 \right)}{2k} \right] + \frac{2k\mu}{3\beta_0} \right),
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

elde edilir. $a = 0$ durumunda Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin özel bir hali olan klasik Burgers denklemini ifade etmektedir. Bu özel durum, lineer olmayan difüzyon ve konveksiyon etkilerinin birlikte incelenmesine olanak sağlayarak, denklemin fiziksel sistemlerdeki davranışını daha anlaşılır kılmaktadır. Sharma-Tasso-

Olver–Burgers denkleminin analitik çözümleri, seyahat eden dalga dönüşümü ve genişletilmiş açılım yöntemleri uygulanarak elde edilmiştir ve söz konusu çözüm, denklem (5.2.6) ile ifade edilmektedir. Analitik çözüm sürecinde sabit parametrelerin seçimi, çözümün genliği, dalga hızı ve profil yapısı üzerinde doğrudan belirleyici bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, parametrelerin uygun şekilde belirlenmesi, elde edilen çözümün fiziksel olarak anlamlı ve geçerli olmasını sağlamak açısından kritik öneme sahiptir. Ayrıca, çözümün grafiksel temsili, belirli parametre değerleri altında sistemin karakteristik davranışını açık bir şekilde ortaya koymakta ve dalga yapısının evrimini görselleştirmektedir. Böylelikle, analitik çözüm ve grafiksel analiz, denklemin fiziksel ve matematiksel özelliklerini detaylı olarak inceleme imkânı sunmaktadır.



Şekil 10. (5.2.6) çözümündeki $\beta_0 = 0.5, k = 0.2, \mu = 0.1, c_1 = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri.

Şekil 10’da yer alan grafik, analitik çözümün geçerliliğini kanıtlamak ve sabit parametrelerin çözümdeki rolünü öne çıkarmak amacıyla verilmiştir

Durum 2:

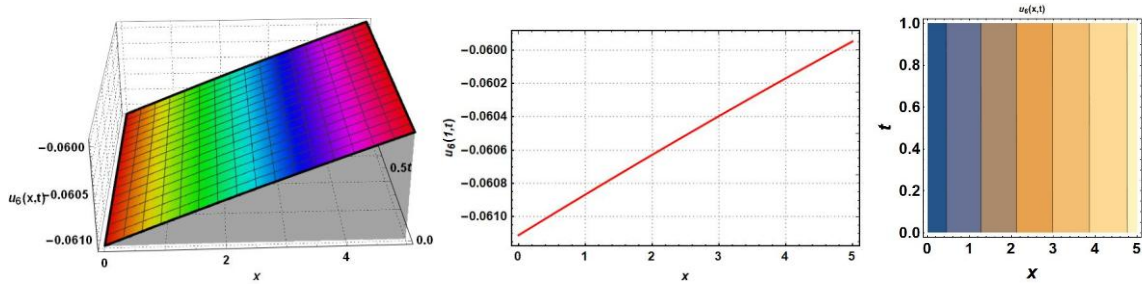
$$\beta_2 = 0, \quad v = -\frac{k^2(6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2)}{\beta_1^2}, \quad b = -\frac{3(-2k\mu\beta_0 + k\lambda\beta_1)}{\beta_1}, \quad (5.2.7)$$

$$a = \frac{-2k^2\mu^2 - 3k\mu\beta_1}{\beta_1^2}, \quad c = -\frac{2k^3\beta_0(-2\mu\beta_0 + \lambda\beta_1)(-\mu\beta_0 + \lambda\beta_1)}{\beta_1^2},$$

elde edilen çözümler (5.2.3)’de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin analitik çözümü

$$u_6(x, t) = \beta_0 + \beta_1 / \left(-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 \cosh \left[\lambda \left(kx + \frac{1}{\beta_1^2} k^2 t (6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2) \right) \right] \right) - c_1 \sinh \left[\lambda \left(kx + \frac{1}{\beta_1^2} k^2 t (6k\mu^2\beta_0^2 - 6k\lambda\mu\beta_0\beta_1 - 3\mu\beta_0^2\beta_1 + 2k\lambda^2\beta_1^2 + 3\lambda\beta_0\beta_1^2) \right) \right], \quad (5.2.8)$$

elde edilir.



Şekil 11. (5.2.8) çözümündeki $\beta_0 = 0.05$, $k = 0.2$, $\mu = 0.1$, $c_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$, $\lambda = 0.1$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Analitik çözümün doğruluğunu görselleştirmek ve sabit parametrelerin çözüm üzerindeki önemini belirtmek için Şekil 6’da ilgili grafik sunulmuştur.

Durum 3:

$$\beta_2 = 0, v = -\frac{k^2 \mu \beta_0^2 (2k\mu + 3\beta_1)}{\beta_1^2}, b = 0, \lambda = \frac{2\mu\beta_0}{\beta_1}, a = \frac{-2k^2 \mu^2 - 3k\mu\beta_1}{\beta_1^2}, \quad (5.2.9)$$

elde edilen çözümler (5.2.3)’de yerine yazılırsa (1) ile verilen denklemin analitik çözümü

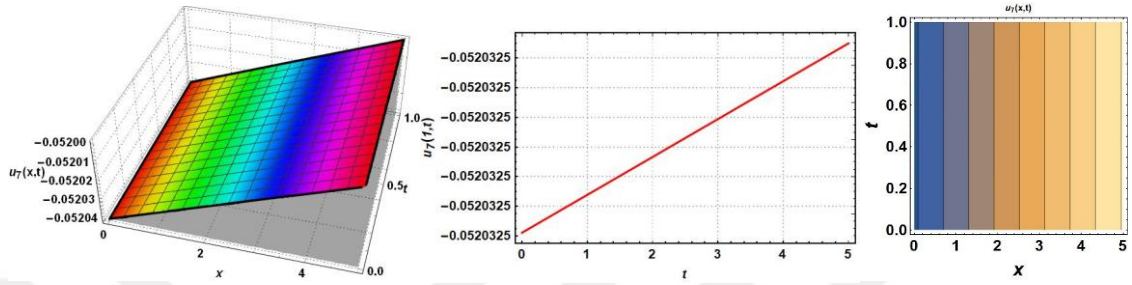
$$u_7(x, t) = \beta_0 + \beta_1 / \left(c_1 \cosh \left[\frac{2\mu\beta_0 \left(kx + \frac{k^2 t \mu \beta_0^2 (2k\mu + 3\beta_1)}{\beta_1^2} \right)}{\beta_1} \right] - c_1 \sinh \left[\frac{2\mu\beta_0 \left(kx + \frac{k^2 t \mu \beta_0^2 (2k\mu + 3\beta_1)}{\beta_1^2} \right)}{\beta_1} \right] - \frac{\beta_1}{2\beta_0} \right), \quad (5.2.10)$$

elde edilir. Denklemin sade hali

$$u_8(x, t) = \beta_0 \left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{2k\mu\beta_0(x\beta_1^2 + kt\mu\beta_0^2(2k\mu + 3\beta_1))}{\beta_1^3}}}{\beta_1} c_1 \beta_0} \right), \quad (5.2.11)$$

şeklindedir. Denklemin analitik çözümü yukarıda sunulmuştur ve elde edilen çözüm, genel formu ile Sharma-Tasso-Olver denklemini temsil etmektedir. Bu özel durum, denklemin lineer olmayan ve difüzyon terimlerini bir arada içerdiği karmaşık yapısını ortaya koymakta ve çözümün matematiksel özelliklerini detaylı olarak incelemeye olanak sağlamaktadır. Sharma–Tasso–Olver denklemi, farklı parametre değerleri altında

çeşitli dalga davranışlarını modelleyebilmekte olup, fiziksel sistemlerdeki gerçekçi akış ve difüzyon süreçlerini açıklamada önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Böylece, denklemin analitik çözümü yalnızca matematiksel bir ifade olmaktan öte, sistemin dinamik özelliklerini anlamak ve karakteristik davranışlarını öngörmek açısından kritik bir öneme sahiptir.



Şekil 12. (5.2.10) çözümündeki $\beta_0 = 0.05$, $k = 0.2$, $\mu = 0.1$, $c_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.5$ sabitleri için (1) denkleminin 3 boyutlu, 2 boyutlu ve kontur grafikleri

Şekil 12'deki grafik, analitik çözümün geçerliliğini göstermek ve sabit parametrelerin çözüm üzerindeki etkisini vurgulamak amacıyla sunulmuştur.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında, akışkanlar mekaniği alanında önemli bir yere sahip olan Sharma-Tasso-Olver-Burgers denkleminin analitik çözümleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Denklemin çözümlerini elde edebilmek amacıyla literatürde yaygın olarak kullanılan iki yöntem olan $\frac{1}{G}$ - açılım metodu ve bu metodun geliştirilmiş bir versiyonu olan geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - açılım metodu uygulanmıştır. Bu yöntemler sonucunda elde edilen çözüm fonksiyonları incelendiğinde, özellikle $\sinh$ ve $\cosh$ gibi hiperbolik fonksiyonlar içeren terimlerin bulunduğu görülmüştür. Bu durum, elde edilen çözümlerin hiperbolik tipte ilerleyen dalga çözümleri olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Uygulanan yöntemlerin ortak özelliği, yalnızca hiperbolik tipte çözümler üretmesidir. Bu da, diğer analitik yöntemlerle karşılaştırıldığında, daha sınırlı bir çözüm yelpazesi sunduklarını göstermektedir. Dolayısıyla bu iki metot, Sharma-Tasso-Olver-Burgers denklemi için tek tipte, yani yalnızca hiperbolik dalga çözümleri sağlayan teknikler olarak değerlendirilmiştir.

Açılım yöntemleri, kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmada yaygın olarak tercih edilen teknikler arasında yer almaktadır. Bu bağlamda, klasik açılım metodu ve geliştirilmiş açılım metodu, çözüm yapılarının farklı modellenmesi bakımından önemli farklılıklar göstermektedir. Klasik açılım metodu, denklem (5.1.3) kapsamında uygulanmış olup, çözüm fonksiyonunu yalnızca yardımcı fonksiyonun türevinin tersine bağlı olarak ifade etmektedir. Bu yöntem, cebirsel açıdan daha az karmaşık bir yapı sunsa da, lineer olmayan bileşenlerin ayrıntılı biçimde temsil edilmesinde belirli kısıtlamalar barındırmaktadır. Dolayısıyla, nispeten basit yapılı problemlerde hızlı ve yeterli sonuçlar sağlayabilen bu yaklaşım, daha karmaşık sistemlerde çözüm çeşitliliği ve işlem yoğunluğu oluşturabilir. Öte yandan, geliştirilmiş açılım yöntemi denklem (5.2.3) kapsamında uygulanmış; çözüm ise hem türev terimini hem de onun tersini içerecek şekilde genişletilmiştir. Bu genelleştirilmiş yapı, çözüm uzayının esnekliğini artırmakta ve lineer olmayan dinamiklerin daha etkin biçimde modellenmesini mümkün kılmaktadır. Ancak bu avantaj, beraberinde artan cebirsel karmaşıklık ve işlem maliyetini getirmektedir. Sonuç olarak, klasik açılım metodu

düşük işlem yükü ve uygulama kolaylığı sunarken, geliştirilmiş açılım metodu daha kapsamlı ve yüksek doğruluklu çözümler elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Çözüm metodunun seçimi, ele alınan problemin doğası ve istenen çözüm hassasiyeti dikkate alınarak yapılmalıdır.

Denklem (5.2.4) ile sunulan denklem sistemi, geliştirilmiş açılım metodu kullanılarak elde edilmiştir. Buna karşılık, denklem (5.1.4) ile sunulan sistem, klasik açılım metodu temel alınarak türetilmiştir. Her iki yöntem de Sharma–Tasso–Olver–Burgers türü diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmak amacıyla kullanılmakla birlikte, ortaya çıkan denklem sistemlerinin yapısal ve işlem yükü açısından belirgin farklılıklar gösterdiği gözlemlenmektedir. Geliştirilmiş açılım metoduyla elde edilen denklem sisteminde, klasik yönteme kıyasla daha fazla terim ve parametre yer almakta olup, bu durum çözüm sürecinin işlem yoğunluğunu artırmakta, ancak aynı zamanda çözümün esneklik ve doğruluğunu da önemli ölçüde geliştirmektedir. Özellikle lineer olmayan terimlerin daha hassas temsil edilmesi ve genelleştirilmiş fonksiyon formlarının dâhil edilmesi sayesinde, sistemin fiziksel gerçekliğe uygunluğu artmaktadır. Sonuç olarak, Denklem (5.2.4) ile elde edilen sistem daha karmaşık bir yapıya sahip olsa da, sağladığı çözüm kalitesi bakımından Denklem (5.1.4) ile elde edilen klasik yaklaşıma göre daha avantajlıdır. Ancak bu kazanım, hesaplama süresi ve cebirsel operasyon gereksinimi açısından daha yüksek bir işlem maliyeti ile elde edilmektedir.

Sharma–Tasso–Olver–Burgers tipi diferansiyel denklemin analitik çözümlerine ulaşmak amacıyla uygulanan klasik ve geliştirilmiş açılım metodlarının sonuçları karşılaştırılabilir. Klasik açılım metodunun uygulanmasıyla elde edilen denklem (5.1.6), sade yapılu bir çözüm fonksiyonu önerirken; geliştirilmiş açılım metoduyla elde edilen denklem (5.2.6) ise daha kapsamlı ve parametrik açıdan zengin bir çözüm sunmaktadır.

Klasik açılım metodunda, çözüm fonksiyonu daha az sayıda terim içerdiğinden dolayı elde edilen denklem yapısı daha basit ve işlem açısından daha az yoğundur. Ancak bu yöntem, lineer olmayan yapıları sınırlı şekilde temsil edebilmekte, dolayısıyla çözüm uzayı daha dar kalmaktadır. Bu durum, özellikle karmaşık dalga profillerinin modellenmesinde yöntemin yeterliliğini sınırlandırmaktadır. Geliştirilmiş açılım metodu ise, klasik yapının ötesine geçerek çözüm fonksiyonuna ek terimler dahil eder. Bu yaklaşım, denklem (5.2.6)'da da görüldüğü gibi, çözümün daha fazla parametreye bağlı

hale gelmesini sağlar. Böylece elde edilen çözümler hem daha esnek hem de farklı fiziksel durumlara uyum sağlayabilecek çeşitlilikte olur. Geliştirilmiş yöntem, cebirsel olarak daha karmaşık bir işlem süreci gerektirse de, çözümün fiziksel anlamını güçlendirmesi bakımından önemli avantajlar sunar. Her iki denklem sistemi karşılaştırıldığında, klasik açılım metodu ile elde edilen çözüm yapısı daha sade olmakla birlikte sınırlı çözüm profilleri sunarken; geliştirilmiş açılım metodu daha genel, esnek ve fiziksel olarak daha anlamlı çözümler üretmektedir. Bu bağlamda, çözüm kalitesi ve kapsamı dikkate alındığında geliştirilmiş açılım metodunun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünde daha etkili bir yöntem olduğu söylenebilir.

Geliştirilmiş açılım metodunun uygulandığı denklem (5.2.5) kapsamında, belirli sabitlere uygun şekilde verilen özel parametre değerleri ile Sharma–Tasso–Olver denkleminin klasik formu elde edilmiştir. Bu durum, türetilen çözüm ailesinin yalnızca genel bir diferansiyel denklemi değil, aynı zamanda literatürde fiziksel anlamı iyi tanımlanmış alt denklemleri de içerdiğini göstermektedir. Benzer biçimde, denklem (5.2.10) incelendiğinde, sabitlerin alternatif değerlerle atanması durumunda bu denklemin Burgers denklemiyle özdeşleştiği gözlemlenmiştir. Dolayısıyla elde edilen genel yapı, farklı sabit konfigürasyonları aracılığıyla hem Sharma–Tasso–Olver denklemini hem de Burgers denklemini özel durum olarak bünyesinde barındırmaktadır.

Bu bulgular, elde edilen denklemin parametrik anlamda esnek ve çok yönlü bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Başka bir deyişle, geliştirilen sistem yalnızca tekil bir fiziksel modeli değil, çeşitli fiziksel süreçleri temsil eden önemli diferansiyel denklemleri de kapsayan bir birleşik denklem formu sunmaktadır. Böyle bir birleşik yapı, hem analitik çözüm yöntemlerinin geçerlilik alanını genişletmekte hem de fiziksel olayların ortak matematiksel temeller üzerinden modellenenebilmesine olanak tanımaktadır. Bu yönüyle denklem (5.2.5) ve denklem (5.2.10), lineer olmayan dalga hareketlerinin, viskoz akışların ve difüzyon tipi süreçlerin tek bir çatı altında ele alınmasına imkân sağlayan güçlü bir çerçeve sunabilir.

Elde edilen analitik çözümler, grafiksel temsilleri üzerinden ayrıntılı olarak incelenmiş ve gösterdikleri yapısal özelliklere göre sınıflandırılmıştır. Çözüm fonksiyonlarının karakteristik davranışları, hem analitik ifadeleri hem de bu ifadelere karşılık gelen grafiksel profiller doğrultusunda değerlendirilmiştir. Analizler sonucunda

çözümler temel olarak iki ana sınıfa ayrılmıştır: tekil çözümler ve hiperbolik formda çözümler. Tekil çözümler, belirli noktalarda çözüm fonksiyonunun ani değişim gösterdiği veya asimptotik davranışlar sergilediği yapılardır. Bu tür çözümler, fiziksel sistemlerde darbe etkileri, şok dalgaları ya da keskin geçiş bölgeleri gibi olguları modellemek için kullanıma uygundur. Hiperbolik formda çözümler ise başlangıç ve denge düzeyleri arasında düzgün, sürekli ve yumuşak geçişler sunan yapılardır. Bu tip çözümler genellikle sinüs hiperbolik ($\sinh$) veya kosinüs hiperbolik ($\cosh$) fonksiyonları içeren matematiksel formlarla tanımlanmakta olup, sistemlerin zamanla dengeye yaklaşan davranışlarını temsil etmektedir. Hiperbolik yapılar, özellikle viskoz akış, ısı yayılımı ve dalga geçiş süreçleri gibi çeşitli fiziksel sistemlerin modellenmesinde önemli bir yer tutmaktadır. Söz konusu sınıflandırma, yalnızca çözüm ifadelerinin yapısal biçimlerine değil, aynı zamanda parametrelerin çözüm üzerindeki etkilerine de dayanmaktadır. Parametrelerin uygun şekilde değiştirilmesi ile çözüm profili tekil yapıdan hiperbolik geçiş formuna dönüşebilmekte, bu da çözüm ailesinin parametrik olarak ne denli esnek olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, analitik çözümlerin grafiksel analizi, yalnızca çözüm biçimlerinin tanımlanması açısından değil, aynı zamanda bu çözümlerin fiziksel anlamlarının ortaya konulması bakımından da kritik bir rol oynamaktadır. Bu kapsamda yapılan incelemeler, elde edilen çözümlerin fiziksel sistemlerin farklı rejimlerine uygunluk taşıdığını ve çeşitli uygulamalarda kullanılabilecek güçlü modeller sunduğunu göstermektedir.

KAYNAKÇA

- Ablowitz, M. J., ve Segur, H. (1981). *Solitons and the inverse scattering transform*. SIAM.
- Adams, R. A., ve Essex, C. (2013). *Calculus: A Complete Course* (8. baskı). Pearson.
- Agrawal, G. P. (2013). *Nonlinear fiber optics* (5. baskı). Academic Press.
- Akbulut, A., ve Kaplan, M. (2021). Conformable diferensiyel denklemlerin genelleştirilmiş Kudryashov yöntemiyle tam çözümleri. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 25(1):142–48.
- Akçağıl, Ş. (2013). *Lineer olmayan Sobolev türü kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tanh- coth yöntemi ile çözümü*. Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya.
- Ali, M. N., Husnine, S. M., Saha, A., Bhowmik, S. K., Dhawan, S., ve Ak, T. (2018). Exact solutions, conservation laws, bifurcation of nonlinear and supernonlinear traveling waves for Sharma–Tasso–Olver equation. *Nonlinear Dynamics*, 94:1791–1801.
- Aydemir, T. (2016). *Tanh-yöntemi ile (G' / G) -açılım yönteminin karşılaştırması ve birleştirilmiş yöntemin geliştirilmesi*. Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya.
- Bateman, H. B. (1915). Some recent researches on the motion of fluids. *Monthly Weather Review*, 43, 163–170.
- Bonkile, M. P., Awasthi, A., Lakshmi, C., Mukundan, V., ve Aswin, V. S. (2018). A systematic literature review of Burgers equation with recent advances. *Pramana - Journal of Physics*, 90,1-21.
- Boyce, W. E., ve DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11. baskı). Wiley.
- Brezis, H., ve Browder, F. E. (2006). *Partial Differential Equations in the 20th Century*. George Mason University.
- Browder, F. (2016). *Remembering Felix Browder, a Nonlinear Genius in a Nonlinear World*. The New Yorker.
- Burton, D. M. (1997). *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill.
- Cajori, F. (1928). *The Early History of Partial Differential Equations and of Partial Differentiation and Integration*. The American Mathematical Monthly, 35(9), 459–467.

- Courant, R., ve Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*. New York: Interscience Publishers.
- Çolak, S. (2021). *Adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin özellikleri*. Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.
- Davarcı Yalçın, M. (2021). *Genişletilmiş deneme denklemler metodu ile bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması*. Yüksek lisans tezi, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye.
- Debnath, L. (1997). *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers* (1. baskı). Birkhäuser.
- Dhawan, S., Kapoor, S., Kumar, S., ve Rawat, S. (2012). Contemporary review of techniques for the solution of nonlinear Burgers equation. *Journal of Computational Science*, 3(5):405–19.
- Drazin, P. G., ve Johnson, R. S. (1989). *Solitons: An introduction*. Cambridge University Press.
- Duran, S., ve Kaya, D. (2021). Applications of the sub equation method for the high dimensional nonlinear evolution equation. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 14(3):898–906.
- Duran, S. (2012). *Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga dönüşümleri ve bu çözümlerin analizleri*. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- Duran, S. (2021). Extractions of travelling wave solutions of $(2 + 1)$ -dimensional Boiti–Leon–Pempinelli system via $(G' / G, 1/G')$ -expansion method. 53(6):1–12.
- Durur, H., ve Yokuş, A. (2019). Hyperbolic traveling wave solutions for Sawada–Kotera equation using $(1/G')$ -expansion method. 19(3):615–19.
- Durur, H., ve Yokuş, A. (2021). Exact solutions of the Benney – Luke equation via $(1/G')$ - Expansion Method. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 8(1):56–64.
- Ellwood, D., Rodnianski, I., Staffilani, G., ve Wunsch, J. (Der.) (2013). *Evolution Equations* (Clay Mathematics Proceedings, Cilt 17). American Mathematical Society; Clay Mathematics Institute.
- Engin, T., ve Çengel, Y. A. (2008). *Mühendisler için diferansiyel denklemler*. Nobel yayıncılık.

- Esen, R. K. (2018). *Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin beş farklı teknikle tam çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Niğde Ömer Halis Demir Üniversitesi, Niğde.
- Euler, L. (1768–1770). *Institutiones calculi integralis*. Imperial Academy of Sciences.
- Farlow, S. J. (1982). *Partial differential equations for scientists and engineers*. John Wiley ve Sons.
- Fındık Kalkandelen, G. (2021). *Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine*. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi, İzmir.
- Gao, Q., ve Zou, M. Y. (2017). An analytical solution for two and three dimensional nonlinear Burgers equation. *Applied Mathematical Modelling*, 45:255–70.
- Guenther, R. B., ve Lee, J. W. (1988). *Partial differential equations of mathematical physics and integral equation*. Prentice-Hall.
- Gülenç, E. (2014). *Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Bahçeşehir Üniversitesi, İstanbul.
- Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press.
- He, Y., Li, S., ve Long, Y. (2013). Exact solutions to the Sharma-Tasso-Olver equation by uusing improved (G' / G) -expansion method. *Journal of Applied Mathematics*, 2013:6.
- Hirota, R. (2004). *The direct method in soliton theory* (A. Nagai, J. Nimmo ve C. Gilson, Eds.) (Cambridge Tracts in Mathematics, No. 155; xi + 200 s.). Cambridge University Press.
- Hu, X., Miao, Z., ve Lin, S. (2021). Solitons molecules, lump and interaction solutions to a (2+1)-dimensional Sharma–Tasso–Olver–Burgers equation. *Chinese Journal of Physics*, 74:175–83.
- Hussain, E., Mutlib, A., Li, Z., E.Ragab, A., Shah, S. A.A., Az-Zo'bi, E. A., ve Raees, N. (2024). Theoretical examination of solitary waves for Sharma–Tasso–Olver Burger equation by stability and sensitivity analysis. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*, 75(3),96.
- İduğ, O. (2013). Solitary wave and soliton solutions of the RLW and KdV equations. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Jiwari, R. (2015). A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers'

- Equation. *Computer Physics Communications*, 188:59–67.
- Johnson, R. S. (2005). *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press.
- Kambur, L. G. (2015). *Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri için yeni yaklaşımlar*. Yüksek lisans tezi, Bozok Üniversitesi, Yozgat.
- Kaya, D., Yokuş, A., ve Demiroğlu, U. (2020). Comparison of exact and numerical solutions for the Sharma–Tasso–Olver equation. *Numerical Solutions of Realistic Nonlinear Phenomena*, 31:53–65.
- Kayhan, M. (2019). *Geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon metodu ve sine gordon açılım metodu yardımı ile kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin incelenmesi*. Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- Keskin, P. (2010). *Solitary dalga çözümlerine sahip bazı KTD'lere sonlu farklar yöntemlerinin uygulanması*. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Khan, K., Koppelaar, H., Akbar, M. A., ve Mohyud-Din, S. T. (2022). Analysis of travelling wave solutions of double dispersive Sharma-Tasso-Olver equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 9(5), 461-474.
- Kızıldan, I. (2023). *Lineer olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine*. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi, İzmir.
- Krantz, S. G. (2016). *Differential equations: A modern approach with wavelets*. Chapman ve Hall/CRC Press.
- Kudryashov, N.A., ve Sinelshchikov, D. I. (2009). Exact solutions of equations for the Burgers hierarchy. *Applied Mathematics and Computation*, 215(3):1293–1300.
- Liu, S., Fu, Z., Liu, S., ve Zhao, Q. (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 289(1–2):69–74.
- Logan, J. D. (2015). *Applied Partial Differential Equations* (Vol. 79). Springer.
- Miao, Z., Hu, X., ve Chen, Y. (2021). Interaction phenomenon to (1+1)-dimensional Sharma–Tasso–Olver–Burgers equation. *Applied Mathematics Letters* 112:106722.
- Moharg, E. A. (1947). A differential equation. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-22(2), 83–85.

- Morales, M., Diaz, R. A., ve Herrera, W. J. (2015). Solutions of Laplace's equation with simple boundary conditions, and their applications for capacitors with multiple symmetries. *Journal of electrostatics*, 78, 31-45.
- Murad, M. A., Ismael, H. F., Sulaiman, T. A., Shah, N. A., ve Chung, J. D. (2023). Higher-Order Time-Fractional Sasa–Satsuma Equation: Various Optical Soliton Solutions in Optical Fiber. *Results in Physics*.
- Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London.
- Olver, P. J. (1977). Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 18(6), 1212–1215.
- Qu, G., Hu, X., Miao, Z., Shen, S., ve Wang, M. (2021). Soliton molecules and abundant interaction solutions of a general high-order Burgers equation. *Results in Physics*, 23:104052.
- Remoissenet, M. (1999). *Waves called solitons: Concepts and experiments* (3. baskı). Springer.
- Ren, B., ve Ma, W. X. (2019). Rational solutions of a (2+1)-dimensional Sharma-Tasso-Olver Equation. *Chinese Journal of Physics* 60(March):153–57.
- Scott, A. C. (2003). *Nonlinear science: Emergence and dynamics of coherent structures* (2. baskı). Oxford University Press.
- Shang, Y., Huang, Y., ve Yuan, W. (2011). Bäcklund transformations and abundant exact explicit solutions of the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(17):7172–83.
- Shang, Y., Qin, J., Huang, Y., ve Yuan, W. (2008). Abundant exact and explicit solitary wave and periodic wave solutions to the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 202(2):532–38.
- Sharma, A. S., ve Tasso, H. (1970). *Connection between wave envelope and explicit solution of a nonlinear dispersive equation* (Report No. IPP 6/158, pp. 1–10). Max-Planck-Institut für Plasmaphysik.
- Sheikh, M. A. N., Taher, M. A., Hossain, M. M., ve Akter, S. (2023). Variable coefficient exact solution of Sharma–Tasso–Olver Model by enhanced modified simple equation method. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics* 7(May):100527.
- Strauss, W. A. (2008). *Partial Differential Equations: An Introduction* (2. baskı).

- Hoboken, NJ: Wiley.
- Sulaiman, T. A., Yokuş, A., Güllüoğlu, N., ve Başkonuş, H. M. (2018). Regarding the numerical solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation. P. 01036 in *ITM Web of Conferences*. Vol. 22.
- Tasso, H. (1976). *Cole's ansatz and extension of Burgers equation* (Report No. IPP 6/142). Max-Planck-Institut für Plasmaphysik.
- Taşbozan, O., ve Kurt, A. (2018). New travelling wave solutions for time-space fractional liouville and Sine-Gordon equations. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(4):295–303.
- Tenenbaum, M., ve Pollard, H. (1985). *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. Dover Publications.
- Uday, V., ve Rajput, G. K. (2024). Differential Equations: The Mathematical Framework for Modelling Dynamic Systems. *IJCRT Research Journal| UGC Approved and UGC Care Journal| Scopus Indexed Journal Norms*, 14(4), 50246-50249.
- Üstündaş, İ. (2010). *Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin üstel fonksiyon ve (G' / G) - açılım metodları ile çözümleri*. Niğde Üniversitesi, Niğde.
- Vrabie, I. I. (2011). *Differential Equations: An Introduction to Basic Concepts, Results, and Applications* (2. baskı). World Scientific Publishing Company.
- Wang, S., Tang, X., ve Lou, S. Y. (2004). Soliton fission and fusion: Burgers equation and Sharma-Tasso-Olver Equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 21(1):231–39.
- Washimi, H., ve Taniuti, T. (1966). Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. *Physical Review Letters*, 17(19), 996–998.
- Wazwaz, A. M. (2007a). The tanh-coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 188(2):1467–75.
- Wazwaz, A. M. (2007b). Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota's bilinear method and by the tanh-coth method. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1):633–40.
- Wazwaz, A. M. (2007c). Multiple-front solutions for the Burgers equation and the coupled Burgers equations. *Applied Mathematics and Computation*, 190(2):1198–

1206.

- Wazwaz, A. M. (2008). The Hirota's bilinear method and the tanh-coth method for multiple-soliton solutions of the Sawada-Kotera-Kadomtsev-Petviashvili equation. *Applied Mathematics and Computation*, 200(1):160–66.
- Wazwaz, A. M. (2015). New (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations with Burgers and Sharma-Tasso-Olver equations constituting the main parts. *Proceedings of the Romanian Academy Series A - Mathematics Physics Technical Sciences Information Science*, 16(1):32–40.
- Wazwaz, A. M. (2016). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer.
- Whitham, G. B. (1999). *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley.
- Yan, Z., ve Lou, S. (2020). Soliton molecules in Sharma–Tasso–Olver–Burgers equation. *Applied Mathematics Letters*, 104:106271.
- Yang, J. (2010). *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*. edited by S. for I. and A. M. (SIAM). Philadelphia, PA: SIAM.
- Yaşar, E., ve Yıldırım, Y. (2018). On the lie Symmetry analysis and traveling wave solutions of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. *Karaelmas Science and Engineering Journal*, 8(2):411–16.
- Yitmez, B. G., ve Yılmaz, S. (2022). İlköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin kısmi türev konusundaki kavram yanlışlarının incelenmesi. *Journal of Research in Education and Teaching*, 11:40–55.
- Yılmaz, E. (2012). *Solitary dalga çözümlerine sahip bazı KTD'lere sonlu elemanlar yöntemlerinin uygulanması*. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Yokuş, A., Duran, S., ve Durur, H. (2022). Analysis of wave structures for the coupled Higgs equation modelling in the nuclear structure of an atom. *European Physical Journal Plus*, 137(9):1–17.
- Yokuş, A., Durur, H., Ahmad, H., ve Yao, S. W. (2020). Construction of different types analytic solutions for the Zhiber-Shabat equation. *Mathematics*, 8(6):1–16.
- Yokuş, A., ve Durur, H. (2019). Complex hyperbolic traveling wave solutions of Kuramoto-Sivashinsky equation using $(1/G')$ -expansion method for nonlinear dynamic theory. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(2), 590-599.

- Yokuş, A., ve Durur, H. (2020). $(1/G')$ -expansion method for exact solutions of (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation. 10(4):2907–14.
- Yokus, A., ve Kaya, D. (2017). Numerical and exact solutions for time fractional Burgers' equation.
- Yokuş, A. (2011). *Solutions of some nonlinear partial differential equations and comparison of their solutions*. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- Younas, U., Sulaiman, T. A., Ismael, H. F., Ren, J., ve Yusuf, A. (2024). The study of nonlinear dispersive wave propagation pattern to Sharma–Tasso–Olver–Burgers equation. *International Journal of Modern Physics B*, 38(08), 2450112.
- Yu, J., Ren, B., ve Wang, W. L. (2022). Symmetry reductions, cte method and interaction solutions for Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation. *Symmetry*, 14(8):1–10.
- Zabusky, N. J.M., ve Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6), 240.
- Zayed, E. M. E. (2011). A note on the modified simple equation method applied to Sharma–Tasso–Olver equation. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7):3962–64.
- Zhou, T. Y., Tian, B., Chen, S. S., Wei, C. C., ve Chen, Y. Q. (2021). Bäcklund transformations, lax pair and solutions of a Sharma-Tasso-Olver-Burgers equation for the nonlinear dispersive waves. *Modern Physics Letters B*, 35(35), 2150421.
- Zhou, Y., ve Ma, W. X. (2017). Complexiton solutions to soliton equations by the Hirota method. *Journal of Mathematical Physics*, 58(10).
- Zhou, Y., Yang, F., ve Liu, Q. (2011). Reduction of the Sharma-Tasso-Olver equation and series solutions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(2):641–46.
- Zill, D. G., ve Cullen, M. R. (2009). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (7. baskı). Brooks Cole.

EKLER

EK 1. ORJİNALLİK RAPORU FORMU



ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ İLERİ TEKNOLOJİLER ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Tarih: 12/09/2025

Tez Başlığı: Sharma-Tasso-Olver-Burgers Denkleminin Geliştirilmiş $\frac{1}{G'}$ - Açılım Metodu ile

Akışkanlar Mekaniğinin Dinamikleri

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 67 sayfalık kısmına ilişkin, 12/09/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda işaretlenmiş filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- ☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç
- 2- ☒ Kaynakça hariç
- 3- ☒ Alıntılar hariç/dâhil
- 4- ☒ 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Ardaahan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nde belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

12/09/2025

Adı Soyadı: Aleyna AYDIN
Öğrenci No: 22408700017
Ana Bilim Dalı: İleri Teknolojiler
Programı: İleri Teknolojiler
Statüsü: ☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora

DANIŞMAN GÖRÜŞÜ VE ONAYI

Doç. Dr. Hülya DURUR

Detaylı Bilgi: <https://www.ardahan.edu.tr/birim.aspx?id=1002003>

Telefon: 0-4782117522

Faks: 0-4782117523

E-posta: sbe@ardahan.edu.tr

EK 2. ETİK KURUL MUAFİYET FORMU

ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ÇALIŞMASI ETİK KOMİSYON MUAFİYETİ FORMU

ARDAHAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İLERİ TEKNOLOJİLER ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞINA

Tarih: 12/09/2025

Tez Başlığı: Sharma-Tasso-Olver-Burgers Denkleminin Geliştirilmiş $\frac{1}{G}$ - Açılım Metodu ile

Akışkanlar Mekaniğinin Dinamikleri

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmam:

1. İnsan ve hayvan üzerinde deney niteliği taşımamaktadır,
2. Biyolojik materyal (kan, idrar vb. biyolojik sıvılar ve numuneler) kullanılmasını gerektirmemektedir.
3. Beden bütünlüğüne müdahale içermemektedir.
4. Gözlemsel ve betimsel araştırma (anket, mülakat, ölçek/skala çalışmaları, dosya taramaları, veri kaynakları taraması, sistem-model geliştirme çalışmaları) niteliğinde değildir.

Tez çalışmamın yürütülebilmesi için herhangi bir Etik Kurul/Komisyon'dan izin alınmasına gerek olmadığını; aksi durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

12/09/2025

Adı Soyadı: Aleyna AYDIN
 Öğrenci No: 22408700017
 Ana Bilim Dalı: İleri Teknolojiler
 Programı: İleri Teknolojiler
 Statüsü: ☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora

DANIŞMAN GÖRÜŞÜ VE ONAYI

Doç. Dr. Hülya DURUR

Detaylı Bilgi: <https://www.ardahan.edu.tr/birim.aspx?id=1002003>

Telefon: 0-4782117522

Faks: 0-4782117523

E-posta: sbe@ardahan.edu.tr

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Aleyna AYDIN

Doğum Yeri ve Tarihi :

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Atatürk Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi : Ardahan Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetleri : Durur, H., Aydın, A., ve Arslantürk, R. (2023). Investigation of Hyperbolic Type Solutions of the Fitzhugh-Nagumo Model in Neuroscience. *İleri Teknolojilerde Çalışmalar Dergisi*, 1(1), 11-16.

Durur, H., Arslantürk, R., ve Aydın, A. (2024). Mathematical analysis of electric signal transmission in semiconductor materials. *Modern Physics Letters B*, 38(17), 2450132.

İş Deneyimi

Stajlar : -

Projeler : TÜBİTAK 2204-b, TÜBİTAK 4006 Bilim Fuarı

Çalıştığı Kurumlar : Ardahan Şehit Er İnan Akçam Ortaokulu

Ardahan Bilim ve Sanat Merkezi

İletişim

E-Posta Adresi :

Tarih

Jüri Tarihi : 12.09.2025