

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

SHEHU ANALİZ DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ



YÜKSEK LİSANS

Zahide KARA

HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**SHEHU ANALİZ DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ**

**ANALYSIS OF RANDOM FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH SHEHU ANALYSIS TRANSFORMATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Zahide KARA

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**SHEHU ANALİZ DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİZİ**

**ANALYSIS OF RANDOM FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH SHEHU ANALYSIS TRANSFORMATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Zahide KARA

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Shehu Analiz Dönüşüm Yöntemi ile Rastgele Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Analizi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

13/06/2025

Zahide KARA

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli vakitlerini bana ayıran, değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN’a teşekkürlerimi borç bilirim. Benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

Zahide KARA
GÜMÜŞHANE – 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler ve sistemlerinin rastgele parametreler içeren halleri ele alınmış ve bu tür denklemlerin çözümlenmesinde Shehu analiz dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Shehu analiz dönüşüm yöntemi, diğer dönüşüm tekniklerine göre daha basit işlem adımlarına sahip olması, kısa sürede yakınsak sonuçlar elde edilmesini sağlaması açısından avantajlıdır.

Çalışmada öncelikle Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev tanımı, rastgele Bagley-Torvik tipi denklem tanımı, ters shehu dönüşüm yöntemi tanım ve özellikleri verilmiştir. Katsayılar ya da başlangıç koşulları sürekli olasılık dağılımlarından Normal, Düzgün, Üstel, Üçgensel, Beta, Erlang ve Gamma dağılımlarından seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Rastgele alınan başlangıç koşulları veya katsayılara sahip kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemler için yaklaşık analitik çözümler türetilmiş ve bu çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanmıştır. Türetilmiş çözümlerin karşılık gelen grafikleri, Matlab veya Maple yazılım paket programları kullanılarak bulunmuştur.

Elde edilen sonuçlar, Shehu analiz dönüşüm yönteminin rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerinde başarılı, hızlı ve güvenilir bir yöntem olduğunu ortaya koymuştur. Bu yönüyle çalışma, uygulamalı matematik alanında önemli bir katkı sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Analitik çözüm, Beklenen değer, Caputo-Fabrizio kesirli türev, Kesirli diferansiyel denklemler, Shehu analiz dönüşüm yöntemi

SUMMARY

This thesis examines fractional order ordinary and partial differential equations, together with their systems incorporating random parameters, utilizing the Shehu analysis transformation method for their resolution. The Shehu analysis transformation method is beneficial due to its streamlined process stages relative to other transformation approaches and its ability to yield convergent findings rapidly.

Initially, the paper presented the definition and characteristics of the Caputo-Fabrizio fractional order derivative, the formulation of the random Bagley-Torvik type equation, and the inverse Shehu transformation technique. The coefficients or beginning conditions were derived from continuous probability distributions, including Normal, Uniform, Exponential, Triangular, Beta, Erlang, and Gamma distributions, and the equations were randomized. Approximate analytical solutions for fractional-order ordinary and partial differential equations with random initial conditions or coefficients were derived and the expected values, variance, and confidence intervals of these solutions were calculated. The corresponding graphs of the derived solutions were found using Matlab or Maple software packages program.

The results indicate that the Shehu analysis transformation method is an effective, rapid, and dependable approach for analytical and approximation solutions of ordinary and partial differential equations, as well as systems of arbitrary fractional order. This paper significantly contributes to the domain of applied mathematics.

Keywords: Analytic solution, Expected value, Caputo-Fabrizio fractional derivative, Fractional differential equations, Shehu analysis transformation method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı	1
1.2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
2. BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.1. Shehu Dönüşüm Yöntemi	4
2.2. Shehu Dönüşüm Özellikleri	4
2.3. Shehu Dönüşümü ile Laplace Dönüşümü arasındaki ilişki	5
2.4. Bazı Olasılık Dağılımları	6
2.4.1. Normal Dağılım	6
2.4.2. Beta Dağılımı	6
2.4.3. Gamma Dağılımı	6
2.4.4. Üstel Dağılım	7
2.4.5. Üçgensel Dağılım	8
2.4.6. Düzgün Dağılım	8
2.4.7. Erlang Dağılımı	9
2.5. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevinin Shehu Dönüşümü	9
2.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Shehu Ayrıştırma Metodu ile Çözümü	11
2.7. Rastgele Bagley-Torvik Tipi Denklemler	13
3. UYGULAMALAR	14
3.1. Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Bagley-Torvik denkleminin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü	14
3.2. Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklemlerin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü	22

3.3.Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklem sisteminin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü.....	31
3.4.Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemlerin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü	43
4. İRDELEME.....	81
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	82
6. ÖNERİLER	83
KAYNAKÇA	84
ÖZGEÇMİŞ.....	87



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Özel değerler $a = 1, b = 3$ ve $\lambda = 2$ için beklenen değer.....	16
Şekil 2. Özel değerler $a = 1, b = 3$ ve $\lambda = 2$ için varyans.....	17
Şekil 3. Özel değerler $a = 1, b = 3$ ve $\lambda = 2$ için güven aralıkları.....	17
Şekil 4. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için beklenen değer.....	20
Şekil 5. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için varyans.....	21
Şekil 6. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için güven aralıkları.....	21
Şekil 7. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\mu = 2$ için beklenen değer.....	24
Şekil 8. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\sigma^2 = 9$ için varyans.....	25
Şekil 9. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\sigma^2 = 9$ için güven aralıkları.....	25
Şekil 10. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için beklenen değer.....	29
Şekil 11. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için varyans.....	30
Şekil 12. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için güven aralıkları.....	30
Şekil 13. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ için y_1 'in beklenen değeri.....	33
Şekil 14. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ için y_2 'nin beklenen değeri.....	33
Şekil 15. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\sigma^2 = 1$ için y_1 'in varyansı.....	34
Şekil 16. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\sigma^2 = 1$ için y_2 'nin	

varyansı.....	35
Şekil 17. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ için y_1 'in güven aralıkları.....	35
Şekil 18. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ için y_2 'nin güven aralıkları.....	36
Şekil 19. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in beklenen değeri.....	39
Şekil 20. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin beklenen değeri.....	39
Şekil 21. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in varyansı.....	41
Şekil 22. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin varyansı.....	41
Şekil 23. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in güven aralıkları.....	42
Şekil 24. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin güven aralıkları.....	42
Şekil 25. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	51
Şekil 26. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (26) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	52
Şekil 27. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	54
Şekil 28. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (26) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	55
Şekil 29. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	55
Şekil 30. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95$ için (26) denkleminin güven aralıkları.....	56
Şekil 31. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	62
Şekil 32. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (44) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	63
Şekil 33. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44)	

denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	64
Şekil 34. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (44) denkleminin varyansının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	65
Şekil 35. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	66
Şekil 36. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95$ için (44) denkleminin güven aralığının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	67
Şekil 37. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	74
Şekil 38. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (59) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	75
Şekil 39. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	77
Şekil 40. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (59) denkleminin varyansının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	78
Şekil 41. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	79
Şekil 42. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95$ için (59) denkleminin güven aralığının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı.....	80

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

CF	: Caputo-Fabrizio türev operatörü
$S\{f(t)\}$	: Shehu dönüşümü
$S^{-1}\{F(s)\}$	: Ters Shehu dönüşümü
$F(s)$	: Shehu dönüşümü alınmış fonksiyon
$E[X]$	: x değişkeninin beklenen değeri
X, Y	: Rastgele değişkenler
μ	: Beklenen değer
σ^2	: Varyans
$\Gamma(.)$	: Gamma fonksiyonu
$Var(X)$	: x değişkeninin varyansı
s	: Shehu dönüşüm değişkeni
n	: Pozitif tamsayı
Δ	: Fark operatörü
k	: Rijitlik katsayısı
c	: Sönüm katsayısı
m	: Kütle (Bagley-Torvik denkleminde)
p, q, r	: Üçgensel dağılım parametreleri
A, B	: Beta ve Gamma dağılımların parametreleri
λ	: Üstel dağılımın parametresi
D^α	: Kesirli türev
μ_1, μ_2	: Moment değerleri (1. ve 2. moment)

1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Klasik türevler ve integralleri kullanan kesirli hesaplama, son zamanlarda fizik, mühendisliğin çeşitli dalları, biyoloji, tıp ve ekonomi gibi çeşitli alanlarda başarılı bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Rastgele (stokastik) yapıların kesirli türevlerle birleştirilmesi, özellikle süreçleri içeren sistemlerin modellenmesinde, daha kapsamlı ve ayrıntılı sonuçlara izin vermiştir. Geleneksel kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, çok sayıda fiziksel süreci ve karmaşık sistem özelliklerini korumak için değerli bir araç olarak öne çıkmaktadır.

Kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan analitik ve yarı analitik yöntemler arasında dönüşüme dayalı teknikler öne çıkmaktadır. Bu tekniklerden biri olan Shehu dönüşümü, son zamanlarda kesirli ve rastgele sistemlerin çözümünde oldukça faydalı olduğu gösterilmiştir. Shehu dönüşüm yöntemi, klasik Laplace ve Sumudu dönüşümleri gibi dönüşümlere benzer yeni bir integral dönüşümüdür.

Bu tez kapsamında birinci bölüm olarak tezin amacı, kapsamı ve ilgili literatür verilmiştir. İkinci bölüm olarak tezde kullanılan başta Shehu yöntemi olmak üzere Caputo-Fabrizio kesirli türevler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca sürekli olasılık dağılımları ve karakteristik özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölüm olarak Bagley-Torvik adi diferansiyel denklem başta olmak üzere başlangıç koşulları veya katsayıları rastgele olan adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleri Shehu dönüşüm ve hibrit yöntem olan Shehu-Adomian ayrıştırma yöntemleri yardımıyla çözülerek olasılık karakteristikleri hesaplanmıştır.

Bu tezin amacı, Shehu dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrıştırma yöntemi gibi analitik yaklaşımları kullanarak rastgele etkili kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini elde ederek, çözümün olasılık karakteristiklerinden en çok kullanılan beklenen değer, varyans ve güven aralığı hesaplanarak grafiksel olarak göstermektir.

1.2. LİTERATÜR ÖZETİ

Son yıllarda, klasik türevlerin prensiplerini kullanan kesirli türev ön plana çıkmıştır. Shehu dönüşümü ilk olarak 2019'da I. Shehu ve meslektaşları tarafından tanıtılmıştır (Shehu v.d., 2019). Bu makalede Shehu dönüşümünü tanımlandı, temel özellikleri verildi ve klasik diferansiyel denklemlere uygulanabilirliğini gösterildi. Önerilen yaklaşım, öncelikle başlangıç koşullarının gelişmiş kullanımı ve çözüm türetme süreci boyunca integral ifadeleri ele alma zorunluluğunu en aza indirme kapasitesi nedeniyle dikkat çekiciydi ve aynı zamanda integraller güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Akinyemi v.d tarafından 2020 yılında (Akinyemi v.d., 2020) yapılan çalışmada fizik ve mühendislikten kaynaklanan zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemi, geriye doğru Klamogorov denklemi, Klein-Gordon denklemi, genelleştirilmiş iki boyutlu biyolojik popülasyon modeli ve iki boyutta politropik bir gazın kararsız akışını yöneten denklemini Shehu dönüşüm yöntemi ile çözmüşlerdir. Khalouta v.d tarafından 2020 yılında (Khalouta v.d., 2020) yapılan çalışmada değişken katsayılı doğrusal olmayan Caputo zamanlı kesirli dalga benzeri denklemlerin çözümünde Shehu varyasyonel-iterasyon yöntemi (SVIM) ile Shehu ayrıştırma yöntemi (SDM) karşılaştırılmıştır. Singh v.d tarafından 2020 yılında yapılan çalışmada (Singh v.d., 2020) Shehu dönüşüm yöntemi ile Adomian ayrışım yöntemini birlikte kullanarak hibrit bir yöntem oluşturarak, kesirli ve kesirsiz mertebeden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerin seri formunda çözümünün ayrıntılı analizini vermişlerdir. Alfaqeh v.d tarafından 2020 yılında yapılan çalışmada (Alfaqeh v.d., 2020), tek boyutlu Shehu dönüşümü kavramını iki boyutlu Shehu dönüşümüne yani İki boyutlu Shehu dönüşümüne genelleştirerek, yöntem ile ilgili bazı temel özellikler ve teoremleri oluşturdular.

Yakın zamanda rastgele diferansiyel denklemler ile alakalı ortaya koyulan çalışmalar; Merdan vd. 2019 yılında, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları ve parametreleri Beta dağılımı ile incelenmiştir (Merdan vd.,2019). Merdan vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada adi diferansiyel denklemlerin katsayılarının veya başlangıç koşullarının rastgele seçilmesiyle elde edilen adi diferansiyel denklemlerinin çözümleri Residual kuvvet serisi yöntemi ile incelenmiştir (Merdan vd.,2023).

Merdan vd. tarafından 2024 yılında yapılan çalışmada rastgele HIV/AIDS modelinin kesirli mertebeden yaklaşık analitik çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle incelenmiştir (Merdan vd.,2024). Şahin tarafından 2024 yılında yapılan tez çalışmasında başlangıç koşulları ve katsayıları rastgele değişken seçilerek rastgele hale getirilen kısmi diferansiyel denklemler Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir (Şahin, 2024). Yasin vd. 2025 yılında yapılan çalışmada Caputo-Fabrizio rastgele kesirli adi diferansiyel denklemleri Aboodh dönüşüm yöntemi yardımıyla çözmüşlerdir.



2. BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Shehu Dönüşüm Yöntemi

Tanım 2.1.1. Bir $f(t)$ fonksiyonunun Shehu dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır. Bir A fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t) : \exists N, \eta_1, \eta_2 > 0, |f(t)| < N e^{\left(\frac{|t|}{\eta_i}\right)}, t \in (-1)^i \times [0, \infty), i = 1, 2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Kümesinde tanımlanan bir fonksiyon için N sayısı sonlu sayıda olup η_1 ve η_2 sonlu veya sonsuz olabilir. Shehu dönüşüm S operatörü ile,

$$S[f(t)] = F(s, u) = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-st}{u}\right) f(t) dt = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q e^{\left(\frac{-st}{u}\right)} f(t) dt ; \quad s > 0, u > 0,$$

tanımlanır (Maitama ve Zhao, 2019).

Tanım 2.1.2. Ters Shehu dönüşümü ise,

$$S^{-1}[F(s, u)] = f(t); \quad t \geq 0.$$

veya

$$S^{-1}[F(s, u)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} \exp\left(\frac{st}{u}\right) F(s, u) ds.$$

Şeklinde tanımlanır (Maitama ve Zhao, 2019).

2.2. Shehu Dönüşüm Özellikleri

$$S[1] = \frac{u}{s}.$$

$$S[t] = \frac{u^2}{s^2}.$$

$$S[\sin at] = \frac{au^2}{s^2 + a^2 u^2}.$$

$$S[\cos at] = \frac{us}{s^2 + a^2 u^2}.$$

$$S\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$S[f(t) + g(t)] = S[f(t)] + S[g(t)] \text{ (doğrusallık özelliği).}$$

$$S[f(at)] = \frac{u}{a} F\left(\frac{s}{a}, u\right); \quad a \in \mathbb{R} \text{ (ölçek değiştirme özelliği).}$$

$$S\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{s}{u} F(s, u) - f(0) \text{ (} f(t) \text{ fonksiyonun 1. mertebeden türevi).}$$

$$S\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \left(\frac{s}{u}\right)^2 F(s, u) - \frac{s}{u} f(0) - f'(0) \quad (f(t) \text{ fonksiyonun 2. mertebeden türevi}).$$

$$S\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = \left(\frac{s}{u}\right)^n F(s, u) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{n-(i+1)} \frac{d^i f(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} \quad (f(t) \text{ fonksiyonun n. mertebeden türevi}).$$

$$S[e^{bt} f(t)] = \left(\frac{u}{s-bu}\right) F(s-bu, u); b \in \mathbb{R} \text{ (öteleme özelliği).}$$

Teorem 2.1.1. $S[f(t)] = F(s, u)$ ve $S[g(t)] = G(s, u)$ olsun. $(f * g)(t)$ fonksiyonunun konvolüsyon dönüşümü

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad \text{olup}$$

Konvolüsyonun Shehu dönüşümü

$$S[(f * g)(t)] = F(s, u)G(s, u)$$

şekilde tanımlanır (Belgacem ve Baleanu., 2019).

2.3. Shehu Dönüşümü ile Laplace Dönüşümü arasındaki ilişki

$f(t) \in A$ olsun. v fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L(s)$, Shehu dönüşümü $S(s, u)$ olmak üzere

$u = 1$ alınırsa,

$$S(s, 1) = L(s)$$

olduğu görülür (Bokhari ve ark, 2019).

Tanım 2.1.3. $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $n < \alpha \leq n + 1$ olsun. Liouville α mertebesinin Caputo kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}^C D_{0,t}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{(n-\alpha-1)} d\tau, t > 0.$$

Tanım 2.1.4. $f(t)$ 'nin $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}^{CF} D_{0,t}^{(\alpha)} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(\tau) \exp\left[-\alpha \frac{t-\tau}{1-\alpha}\right] d\tau, t > 0$$

burada $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur (herhangi bir düzgün pozitif fonksiyon) $M(0) = M(1) = 1$ ve $f \in H^1(a, b), b > a$.

2.4. Bazı Olasılık Dağılımları

2.4.1. Normal Dağılım

X Sürekli rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; -\infty < x < \infty, \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0 \quad (\mu, \sigma^2)$$

için $\mathcal{X}$ rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametrelili normal dağılıma sahiptir denir. Normal dağılım için $\mathcal{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ notasyonu kullanılır (Akdeniz, 2014; Feller, 1968; Khaniyev vd., 2017).

Beklenen Değer ve Varyans;

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var(X) = \sigma^2$$

2.4.2. Beta Dağılımı

ϱ ve ξ değişkenlerinin sıfırdan büyük tüm değerleri için

$$\mathcal{B}(\varrho, \xi) = \int_0^1 x^{\varrho-1} (1-x)^{\xi-1} dx$$

beta fonksiyonu olarak tanımlanır (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı;

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varrho}{\varrho + \xi}$$

$$Var(X) = \frac{\varrho\xi}{(\varrho + \xi)^2(\varrho + \xi + 1)} \quad \text{şeklindedir.}$$

2.4.3. Gamma Dağılımı

X 'in negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olduğunu varsayalım. Bu değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$f_X(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x}, & x \geq 0, \theta, \gamma > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde.} \end{cases}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlanan rastgele değişken X 'in (θ, γ) parametrelili bir gamma dağılımına sahip olduğu söylenir.

Rastgele değişken $X \sim \text{Gamma}(\theta, \gamma)$ 'in birinci momenti ve varyansı

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{\gamma}, \text{Var}[X] = \frac{\theta}{\gamma^2}$$

şeklindedir (Khaniyev vd., 2017).

2.4.4. Üstel Dağılım

X rastgele değişken ve $p > 0$ parametresine göre üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$O(x) = \begin{cases} pe^{-px} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Dağılımın moment üreten fonksiyonu, moment üreten fonksiyonun tanımından şu şekilde belirlenir:

$$M_x(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{xt} pe^{-px} dx = p \int_0^{\infty} e^{(t-p)x} dx$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{t-p} e^{(t-p)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-p)x} = 0, t < p \text{ olduğundan;}$$

$$M(t) = \frac{p}{p-t}; \quad t < p \text{ için elde edilir.}$$

Beklenen değer ve varyansı bulmak için moment çıkaran fonksiyon kullanılabilir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Buna göre beklenen değer,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} pxe^{-px} dx$$

parçalı integrasyon yardımıyla ($u = x, dv = pe^{-px}$)

$$\mathbb{E}(X) = -xe^{-px} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p}$$

olarak elde edilir. İkinci mertebeden moment aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\infty} p x^2 e^{-px} dx = \frac{2}{p^2}$$

Benzer şekilde parçalı integrali $\mathbb{E}(X^2)$ hesaplanırken de kullanılır. ($x^2 = u, dv = e^{-px} dx$)

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{p^2}.$$

2.4.5. Üçgensel Dağılım

Genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahip, bir X rastgele değişkeninin,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < p \\ \frac{2(x-p)}{(q-p)(r-p)}, & p \leq x < r \\ \frac{2}{q-p}, & x = r \\ \frac{2(q-x)}{(q-p)(q-r)}, & r < x \leq q \\ 0, & q < x \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlanır (Feller, 1968). Burada r mod değerini, q rastgele değişkenin alabileceği maksimum değeri ve p minimum değeri temsil etmektedir.

Beklenen değer ve varyans aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(p + q + r)}{3}, Var(X) = \frac{p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - qr}{18}.$$

2.4.6. Düzgün Dağılım

Rastgele değişken X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi - \delta}, & \delta \leq x \leq \xi \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ise $[\delta, \xi]$ kapalı aralığında bu rastgele değişken sürekli düzgün dağılıma sahiptir.

$X \sim U(\delta, \xi)$ düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri δ ve ξ olmak üzere,

düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{e^{\xi t} - e^{\delta t}}{(\xi - \delta)t}$$

moment çıkaran fonksiyonunu kullanarak, $X \sim U(\delta, \xi)$ rastgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı;

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\delta + \xi}{2}, \quad Var[X] = \frac{(\delta - \xi)^2}{12}$$

elde edilir (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

2.4.7. Erlang Dağılımı

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^i x^{i-1} e^{-\gamma x}}{(i-1)!}, & i = 1, 2, \dots, x \geq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyorsa X rastgele değişkeni Erlang dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Erlang(i, \gamma)$ biçiminde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

X rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \left(1 - \frac{t}{\gamma}\right)^{-i}, t < \gamma$$

şeklinde verilir. Ek olarak “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$\mathbb{E}[X] = \frac{i}{\gamma}, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{i(i+1)}{\gamma^2}, \quad Var(x) = \frac{i}{\gamma^2}$$

biçiminde tanımlanır.

2.5. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevinin Shehu Dönüşümü

Teorem 2.5.1. Eğer $n - 1 < v \leq n$, n pozitif tamsayı, $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$, ${}^{CF}D_{0,t}^{(v)} f(t) \in A$ olmak üzere bir fonksiyunun n . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Shehu dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^v f^{(n)}(t)] = \frac{s^n u^{-n+1} F(s,u) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} u^{k-n+2} f^{(k)}(0)}{s + (v-n+1)(u-s)}.$$

Tanım 2.5.1. $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Shehu dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp\left[\frac{-st}{u}\right] \int_0^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau dt.$$

Konvolüsyon teoremini yukarıdaki denklemin sağ tarafına uygulayarak,

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} S[f'(t)] S\left[\exp\left(\frac{-at}{1-\alpha}\right)\right],$$

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{s}{u} F(s,u) - f(0)\right) \frac{u}{s + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)u},$$

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^\alpha f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{s}{u} F(s,u) - f(0)\right) \frac{u(1-\alpha)}{s(1-\alpha) + \alpha u},$$

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^\alpha f(t)] = \frac{sF(s,u) - uf(0)}{s + \alpha(u-s)},$$

elde edilir. Burada $S[f(t)] = F(s,u)$ 'dır.

Benzer şekilde

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^{(\alpha+1)} f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} S[f''(t)] S\left[\exp\left(\frac{-at}{1-\alpha}\right)\right],$$

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^{(\alpha+1)} f(t)] = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{s^2}{u^2} F(s,u) - \frac{s}{u} f(0) - f'(0)\right) \frac{u(1-\alpha)}{s(1-\alpha) + \alpha u},$$

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^{(\alpha+1)} f(t)] = \frac{s^2 u^{-1} F(s,u) - sf(0) - uf'(0)}{s + \alpha(u-s)}$$

bulunur. Son olarakta

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^{(\alpha+m)} f(t)] = \frac{s^{m+1} u^{-m} F(s,u) - \sum_{k=0}^m s^{m-k} u^{k-m+1} f^{(k)}(0)}{s + \alpha(u-s)}$$

elde edilir.

$v = \alpha + m$ seçilirse, $m = n - 1 < v \leq n$ ve $\alpha = v - n + 1$, burada n pozitif tamsayı olduğundan Caputo-Fabrizio'nun Shehu Dönüşümü aşağıdaki şekilde verilir:

$$S[{}^{CF}D_{0,t}^v f(t)] = \frac{s^n u^{-n+1} F(s,u) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} u^{k-n+2} f^{(k)}(0)}{s + (v-n+1)(u-s)}.$$

2.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Shehu Ayırıştırma Metodu ile Çözümü

Bu kısımda, Shehu dönüşümü ile Adomian ayırıştırma metodunu birleştirmek suretiyle oluşturulan ve literatürde mevcut olan Shehu ayırıştırma metodundan bahsedeceğiz (Khalouta ve Kadem, 2020). Lineer olmayan $\mathfrak{H}(t) = \mathcal{G}(t)$ diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $\mathfrak{H}$, lineer olmayan diferansiyel operatörü temsil eder. Bu metot $\mathfrak{H}$ 'nin lineer kısmının $L + R$ şeklinde ayrıştırılmasıyla oluşur.

$$L\mathfrak{h}(t) + R\mathfrak{h}(t) + \mathcal{N}\mathfrak{h}(t) = \mathcal{G}(t)$$

denklemi, $\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{f}(t)$ başlangıç koşulu ile verilsin. Burada L lineer bir operatör, R lineer operatörden kalan kısım, $\mathcal{N}$ ise lineer olmayan bir operatördür. L verilen denklemin en yüksek mertebeden türevi ve $\mathcal{G}(t)$ homojen olmayan bir terim olsun. Lineer olmayan diferansiyel denklemi çözmek için aşağıdaki adımları uygulayalım.

- i. Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanır.
- ii. Ters Shehu dönüşümü alınır.
- iii. Elde edilen denklem sonsuz seri şeklinde olduğu düşünülür.
- iv. Lineer olmayan terim için Adomian polinomları kullanılarak hesaplama yapılır.
- v. Böylece yaklaşık çözüme ulaşırız. Bu yaklaşık çözüm yakınsak ise analitik çözüm, aksi halde seri çözüm olarak kalır.

i. Adım: L birinci mertebeden bir operatör ise Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\left(\frac{S}{u}\right) S[\mathfrak{h}(t)] - \mathfrak{h}(0) + S[R\mathfrak{h}(t)] + S[\mathcal{N}\mathfrak{h}(t)] = S[\mathcal{G}(t)]$$

$$\left(\frac{S}{u}\right) S[\mathfrak{h}(t)] = \mathfrak{h}(0) + S[\mathcal{G}(t)] - S[R\mathfrak{h}(t)] - S[\mathcal{N}\mathfrak{h}(t)]$$

$$S[\mathfrak{h}(t)] = \left(\frac{u}{S}\right) \mathfrak{f}(t) + \left(\frac{u}{S}\right) S[\mathcal{G}(t)] - \left(\frac{u}{S}\right) S[R\mathfrak{h}(t)] - \left(\frac{u}{S}\right) S[\mathcal{N}\mathfrak{h}(t)]$$

ifadesi elde edilir.

ii. Adım: Ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\mathfrak{h}(t) = S^{-1} \left[\left(\frac{u}{S}\right) \mathfrak{f}(t) \right] + S^{-1} \left[\left(\frac{u}{S}\right) S[\mathcal{G}(t)] \right] - S^{-1} \left[\left(\frac{u}{S}\right) S[R\mathfrak{h}(t)] \right] - S^{-1} \left[\left(\frac{u}{S}\right) S[\mathcal{N}\mathfrak{h}(t)] \right]$$

$$\mathfrak{h}(t) = G(t) - S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S [R\mathfrak{h}(t) + \mathcal{N}\mathfrak{h}(t)] \right]$$

Burada $G(t)$ kaynak terimidir.

iii. Adım: Verilen denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde kabul edilirse;

$$\mathfrak{h}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{h}_i(t)$$

iv. Adım: Lineer olmayan terim için (A_i : Adomian polinomları (Wazwaz, 1997))

$$\mathcal{N}(\mathfrak{h}) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[\mathcal{N} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{h}_i \right) \right]; i \geq 0$$

$$A_0 = \mathcal{N}(\mathfrak{h}_0),$$

$$A_1 = \mathfrak{h}_1 \mathcal{N}'(\mathfrak{h}_0),$$

$$A_2 = \mathfrak{h}_2 \mathcal{N}'(\mathfrak{h}_0) + \frac{1}{2!} \mathfrak{h}_1^2 \mathcal{N}''(\mathfrak{h}_0),$$

$$A_3 = \mathfrak{h}_3 \mathcal{N}'(\mathfrak{h}_0) + \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \mathcal{N}''(\mathfrak{h}_0) + \frac{1}{3!} \mathfrak{h}_1^3 \mathcal{N}'''(\mathfrak{h}_0),$$

$$A_4 = \mathfrak{h}_4 \mathcal{N}'(\mathfrak{h}_0) + \left(\frac{1}{2!} \mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_3 \right) \mathcal{N}''(\mathfrak{h}_0) + \left(\frac{1}{2!} \mathfrak{h}_1^2 \mathfrak{h}_2 \mathcal{N}'''(\mathfrak{h}_0) \right) + \left(\frac{1}{4!} \mathfrak{h}_1^4 \mathcal{N}^{(iv)}(\mathfrak{h}_0) \right),$$

⋮

formu kullanarak kolayca hesaplanır.

v. Adım: Genel olarak;

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{h}_i(t) = G(t) - S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S \left[R \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{h}_i(t) + \mathcal{N} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \right] \right]$$

$$\mathfrak{h}_0(t) = G(t),$$

$$\mathfrak{h}_1(t) = -S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S[R\mathfrak{h}_0(t) + \mathcal{N}A_0(t)] \right],$$

$$\mathfrak{h}_2(t) = -S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S[R\mathfrak{h}_1(t) + \mathcal{N}A_1(t)] \right],$$

$$\mathfrak{h}_3(t) = -S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S[R\mathfrak{h}_2(t) + \mathcal{N}A_2(t)] \right],$$

⋮

$$\mathfrak{h}_{i+1}(t) = -S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) S[R\mathfrak{h}_i(t) + \mathcal{N}A_i(t)] \right] ; i \geq 0$$

verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümüne ulaşmış oluruz.

2.7. Rastgele Bagley-Torvik Tipi Denklemler

Bagley–Torvik denklemi, özellikle viskoelastik sistemlerin modellenmesinde kullanılan bir diferansiyel denklemdir. Temelde, viskoelastik materyallerin zaman içindeki davranışlarını ve dinamik özelliklerini anlamak için kullanılır. Literatürdeki diferansiyel denklemlerden farklı olarak, Bagley-Torvik denklemi kesirli türevler içerir ve bu nedenle çözümü özel analitik yöntemlerle bulunur.

Kesirli mertebeden rastgele Bagley-Torvik denklemlerinin çözümlerini bu bölümde ele alacağız. (Bagley ve Torvik. 1984). Burada kullanılan türev Caputo kesirli türevidir.

Genel olarak Bagley-Torvik denklemi aşağıdaki gibi düşünülebilir:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u(\mathfrak{x})}{d\mathfrak{x}^2} + c D^\sigma u(\mathfrak{x}) + ku(\mathfrak{x}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \\ u(0) = \delta_0, \frac{du(\mathfrak{x})}{d\mathfrak{x}} \Big|_{\mathfrak{x}=0} = \delta_1 \end{cases} \quad \sigma = \frac{1}{2} \text{ ya da } \sigma = \frac{3}{2}$$

Burada m kütleyi, c sönümü, k rijitlik katsayılarını, $f(x)$ dış kuvveti ve $u(x)$ yer değişimi fonksiyonunu belirtir. $\frac{d^\sigma x}{dx^\sigma}$, $\sigma \in (0,2)$ mertebesindeki kesirli türevdir. Burada reel sabitler δ_0 ve δ_1 dir.

3. Uygulamalar

3.1. Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Bagley-Torvik denkleminin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü

Bu bölümde başlangıç veya katsayıları rastgele değişken olan Bagley-Torvik adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Shehu Dönüşüm yöntemi kullanılarak iki adet örnek çözülmüştür.

Örnek 3.1.1

$$y''(t) + D^{\frac{3}{2}}y(t) + 2y(t) = 2A + 2B \quad (1)$$

$$y(0) = B, y'(0) = A$$

başlangıç koşulları $A \sim U(a = 1, b = 3)$, $B \sim Exp(\lambda = 2)$ sırasıyla düzgün ve üstel dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere, verilen Bagley-Torvik denkleminin çözümünü Shehu dönüşümü yardımı ile elde ederek olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

(1) denkleminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\frac{s^2}{u^2}Y(s, u) - \frac{s}{u}y(0) - y'(0) + \frac{s^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}}Y(s, u) - \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}}y(0) - \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{u^{-\frac{1}{2}}}y'(0) + 2Y(s, u) = 2B\frac{u}{s} + 2A\frac{u^2}{s^2}$$

$$Y(s, u) \left[\frac{s^2}{u^2} + \frac{s^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} + 2 \right] = B\frac{s}{u} + A + B\frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{u^{-\frac{1}{2}}}A + 2B\frac{u}{s} + 2A\frac{u^2}{s^2}$$

$$Y(s, u) \left[\frac{s^2}{u^2} + \frac{s^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} + 2 \right] = \frac{u}{s} \left(2B + B\frac{s^2}{u^2} + B\frac{s^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{u^2}{s^2} \left(2a + A\frac{s^2}{u^2} + A\frac{s^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$Y(s, u) \left[\frac{s^2}{u^2} + \frac{\frac{3}{s^2}}{\frac{3}{u^2}} + 2 \right] = \left(B \frac{u}{s} + A \frac{u^2}{s^2} \right) \left(\frac{s^2}{u^2} + \frac{\frac{3}{s^2}}{\frac{3}{u^2}} + 2 \right)$$

$$Y(s, u) = S[y(t)] = B \frac{u}{s} + A \frac{u^2}{s^2} \quad (2)$$

(2) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$y(t) = S^{-1}[Y(s, u)] = S^{-1} \left[B \frac{u}{s} \right] + S^{-1} \left[A \frac{u^2}{s^2} \right] = B + At \quad (3)$$

genel çözümü elde edilir.

$A \sim U(a, b)$ olarak tanımlanan düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı şu şekildedir:

$$E[A] = \frac{a + b}{2},$$

$$Var[A] = \frac{(a - b)^2}{12}$$

Üstel dağılımlı rastgele değişken $B \sim Exp(\lambda)$ 'nin beklenen değeri ve varyansı şu şekildedir:

$$E[B] = \frac{1}{\lambda},$$

$$Var[A] = \frac{1}{\lambda^2}$$

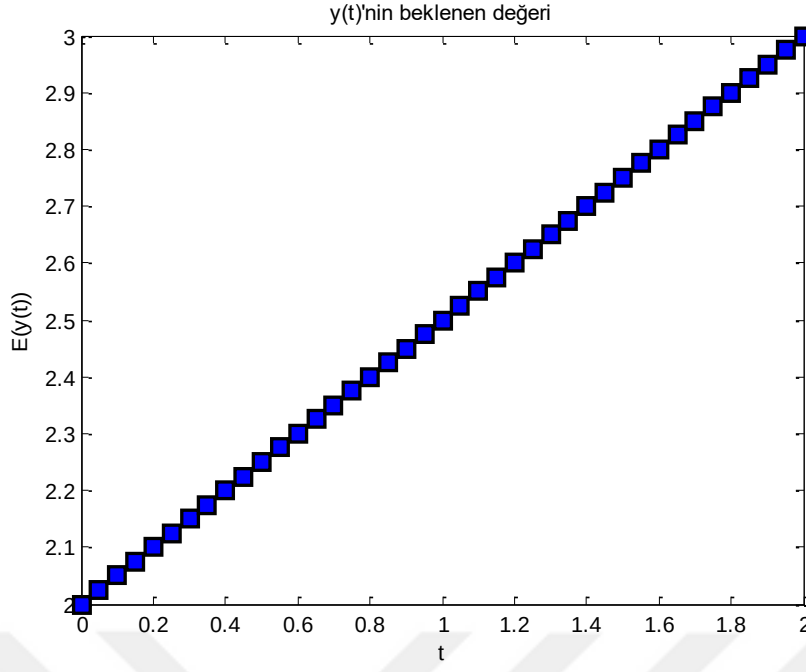
Bağımsız rastgele değişkenler X ve Y 'nin beklenen değerleri, bu momentlerden yararlanılarak aşağıdaki şekilde belirlenebilir: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

$$E[y(t)] = E[B + At] = E[B] + tE[A] = \frac{a + b}{2} + \frac{t}{\lambda}$$

Özel değerler $a = 1, b = 3$ ve $\lambda = 2$ için beklenen değer,

$$E[y(t)] = 2 + \frac{t}{2},$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 1. Özel değerler $a = 1$, $b = 3$ ve $\lambda = 2$ için beklenen değer,

$$Var[y(t)] = Var[B + At],$$

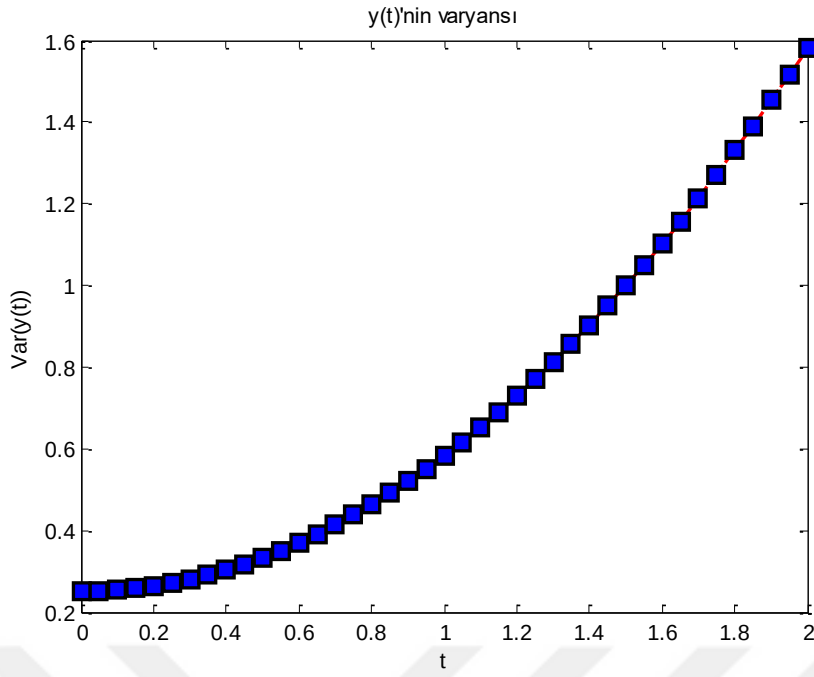
$$Var[y(t)] = Var[B] + Var[A]t^2,$$

$$Var[y(t)] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{(a-b)^2 t^2}{12}.$$

Özel değerler $a = 1$, $b = 3$ ve $\lambda = 2$ için varyans,

$$Var[y(t)] = \frac{1}{4} + \frac{t^2}{3}$$

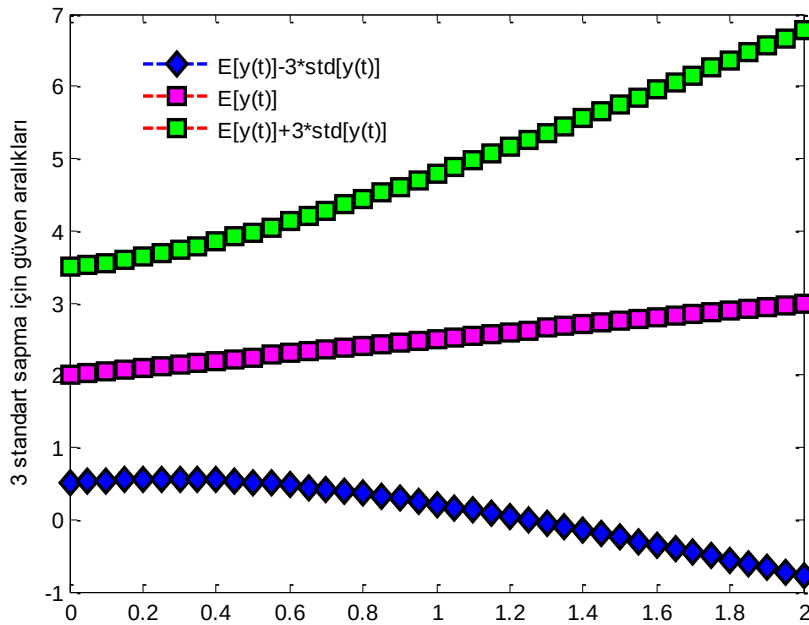
şeklinde hesaplanır.



Şekil 2. Özel değerler $a = 1$, $b = 3$ ve $\lambda = 2$ için varyans,

Güven aralıkları

$$[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$$



Şekil 3. Özel değerler $a = 1$, $b = 3$ ve $\lambda = 2$ için güven aralıkları

Örnek 3.1.2

$$y''(t) + D^{\frac{1}{2}}y(t) + y(t) = \frac{15}{4}At^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}Bt^{-\frac{1}{2}} + \frac{15A}{16}\sqrt{\pi}t^2 + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4}t + At^{\frac{5}{2}} + Bt^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

başlangıç koşulları olmak üzere, $A \sim \text{Beta}(u = 2, v = 4)$, $B \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \beta = 5)$ sırasıyla beta ve gamma dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere, verilen Bagley-Torvik denkleminin çözümünü Shehu dönüşümü yardımı ile elde ederek olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

(4) denkleminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{s^2}{u^2}Y(s, u) - \frac{s}{u}y(0) - y'(0) + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}}Y(s, u) - \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{u^{-\frac{1}{2}}}y(0) + Y(s, u) \\ &= \frac{15A}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3B}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{15A}{16}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{s}\right)^3\Gamma(3) + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^2\Gamma(2) \\ & \quad + A\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{7}{2}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) + B\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= Y(s, u)\left(\frac{s^2}{u^2} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + 1\right) = \frac{15A}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{3B}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} + \frac{15A}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{s}\right)^3 + \frac{3B}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \\ & \quad A\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{15}{8}\sqrt{\pi} + B\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ &= \frac{15A}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{7}{2}}\left(1 + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{s^2}{u^2}\right) + \frac{3B}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{s^2}{u^2}\right) \\ & Y(s, u)\left(\frac{s^2}{u^2} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + 1\right) = \left(1 + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{s^2}{u^2}\right)\left(\frac{15A\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{5}{2}}\right) \\ & Y(s, u) = \frac{15A\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (5) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

(5) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$y(t) = S^{-1}[Y(s, u)]$$

$$S^{-1}[Y(s, u)] = \frac{15A}{8} \sqrt{\pi} S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^{\frac{7}{2}} \right] + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4} S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$S^{-1}[Y(s, u)] = \frac{15A}{8} \sqrt{\pi} \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} + \frac{3B\sqrt{\pi}}{4} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}$$

$$S^{-1}[Y(s, u)] = \frac{15A}{8} \sqrt{\pi} \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} + \frac{3B}{4} \sqrt{\pi} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}$$

$$y(t) = At^{\frac{5}{2}} + Bt^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

genel çözümü elde edilir.

$A \sim Beta(u, v)$ beta dağılımına sahip rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

$$E[A] = \frac{u}{u+v}, Var[A] = \frac{uv}{(u+v)^2(u+v+1)}$$

Gamma dağılımına sahip rastgele değişken X 'in parametreleri $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ olarak gösterilir. Gamma dağılımının moment üreten fonksiyonunu kullanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha$$

ifadesi bulunur. Rastgele değişken $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$ için birinci moment ve varyans;

$$E[B] = \frac{\alpha}{\beta}, Var[B] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

şeklindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

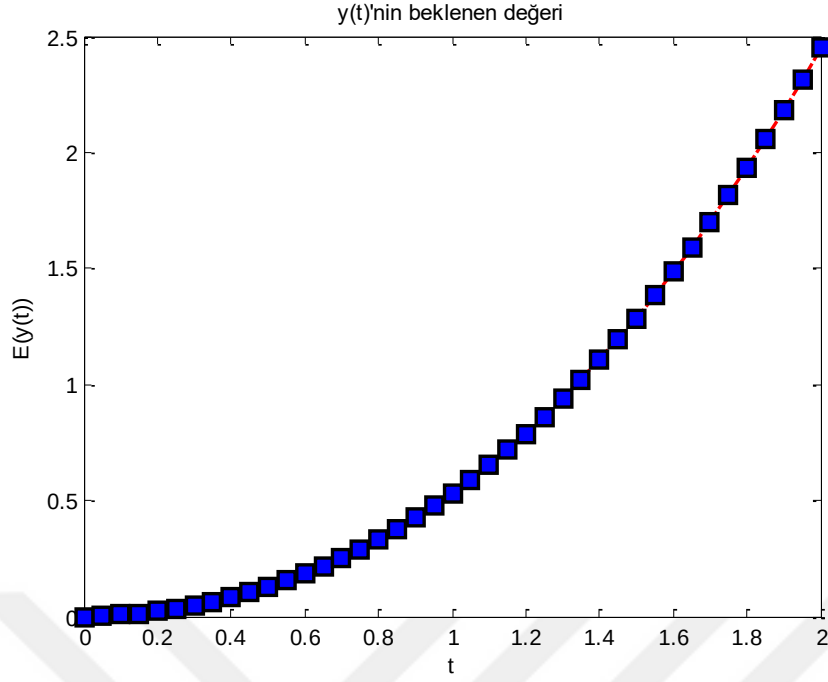
Bağımsız rastgele değişkenler X ve Y 'nin beklenen değerleri, bu momentlerden yararlanılarak aşağıdaki şekilde belirlenebilir: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

$$E[y(t)] = E \left[At^{\frac{5}{2}} + Bt^{\frac{3}{2}} \right] = E[B]t^{\frac{3}{2}} + E[A]t^{\frac{5}{2}} = \frac{\alpha}{\beta} t^{\frac{3}{2}} + \frac{u}{u+v} t^{\frac{5}{2}}$$

$u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[y(t)] = \frac{1}{5} t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} t^{\frac{5}{2}}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 4. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için beklenen değer

$$Var[y(t)] = Var \left[At^{\frac{5}{2}} + Bt^{\frac{3}{2}} \right]$$

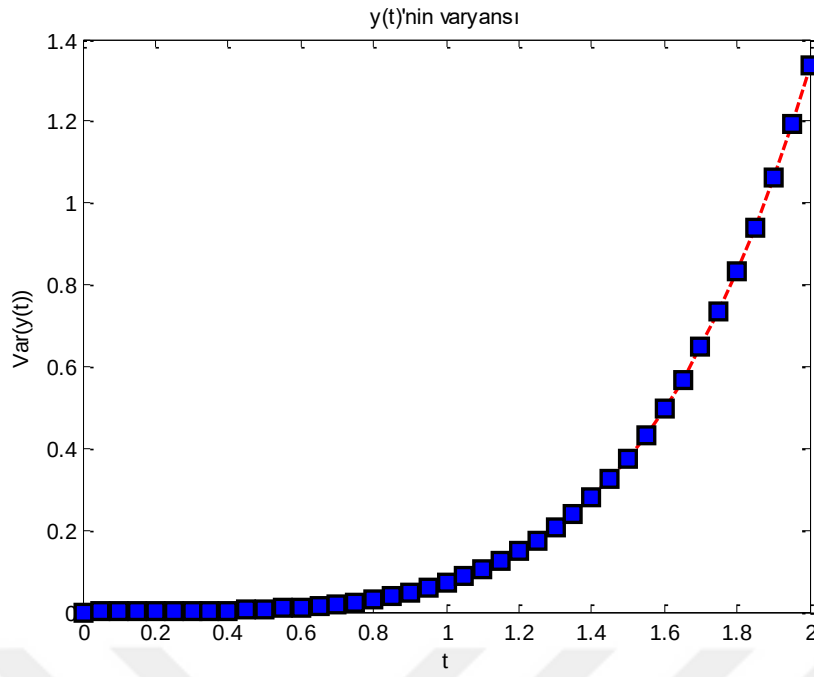
$$Var[y(t)] = Var[B]t^3 + Var[A]t^5$$

$$Var[y(t)] = \frac{\alpha}{\beta^2} t^3 + \frac{uv}{(u+v)^2(u+v+1)} t^5$$

$u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ özel değerleri için varyans,

$$Var[y(t)] = \frac{1}{25} t^3 + \frac{2}{63} t^5$$

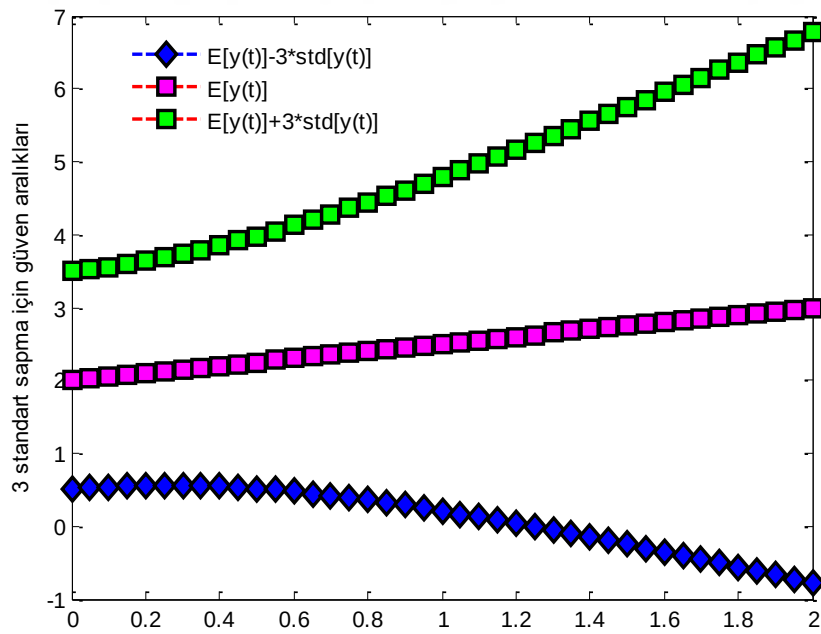
şeklinde hesaplanır.



Şekil 5. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için varyans

Güven aralıkları

$$[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$$



Şekil 6. Özel değerler $u = 2, v = 4, \alpha = 1$ ve $\beta = 5$ için güven aralıkları

3.2. Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklemlerin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü

Bu bölümde başlangıç veya katsayıları rastgele değişken olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Shehu Dönüşüm yöntemi kullanılarak iki adet örnek çözülmüştür.

Örnek 3.2.1

$${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 4y(t) + 3 \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = A \quad (7)$$

$A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 9)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Shehu dönüşüm yaklaşımını kullanarak Caputo-Fabrizio kesirli rasgele adi diferansiyel denklemini çözerek, elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerini türetiniz.

Çözüm:

Denklem (7)'nin her iki tarafına Shehu dönüşüm yöntemi uygulanırsa;

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y(t)] = 4S[y(t)] + 3S[1]$$

$$\frac{sY(s,u) - uy(0)}{s + \alpha(u-s)} = 4Y(s,u) + 3\frac{u}{s}$$

$$sY(s,u) - 4(s + \alpha(u-s))Y(s,u) = Au + 3\frac{u}{s}(s + \alpha(u-s))$$

$$Y(s,u)[s - 4s - 4\alpha(u-s)] = \frac{Aus + 3u(s + \alpha(u-s))}{s}$$

$$Y(s,u) = \frac{Aus + 3u(s + \alpha(u-s))}{s(-3s - 4\alpha(u-s))}$$

$$Y(s,u) = \frac{Au}{-3s - 4\alpha(u-s)} + \frac{3u}{-3s - 4\alpha(u-s)} + \frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s - 4\alpha(u-s))} \quad (8)$$

ifadesi elde edilir.

(8) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınır:

$$y(t) = S^{-1} \left[\frac{Au}{-3s - 4\alpha u + 4\alpha s} \right] + S^{-1} \left[\frac{3u}{-3s - 4\alpha u + 4\alpha s} \right] + S^{-1} \left[\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s - 4\alpha(u-s))} \right]$$

$$y(t) = AS^{-1} \left[\frac{u}{s(4\alpha-3)-4\alpha u} \right] + 3S^{-1} \left[\frac{u}{s(4\alpha-3)-4\alpha u} \right]$$

$$y(t) = \frac{A}{4\alpha-3} S^{-1} \left[\frac{u}{s-\frac{4\alpha}{4\alpha-3}u} \right] + \frac{3}{4\alpha-3} S^{-1} \left[\frac{u}{s-\frac{4\alpha}{4\alpha-3}u} \right]$$

$$y(t) = \frac{A}{4\alpha-3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} + \frac{3}{4\alpha-3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t}$$

$$\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s-4\alpha(u-s))} = -\frac{3}{4} \frac{u}{s} + \frac{6u\alpha-\frac{9u}{4}}{-3s-4\alpha(u-s)} \quad (9)$$

ifadesi elde edilir.

(9) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınır ;

$$S^{-1} \left[\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s-4\alpha(u-s))} \right] = -\frac{3}{4} S^{-1} \left[\frac{u}{s} \right] + S^{-1} \left[\frac{6u\alpha-\frac{9u}{4}}{s(4\alpha-3)-4\alpha u} \right]$$

$$S^{-1} \left[\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s-4\alpha(u-s))} \right] = -\frac{3}{4} + S^{-1} \left[\frac{6u\alpha}{s(4\alpha-3)-4\alpha u} \right] - \frac{9}{4} S^{-1} \left[\frac{u}{s(4\alpha-3)-4\alpha u} \right]$$

$$S^{-1} \left[\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s-4\alpha(u-s))} \right] = -\frac{3}{4} + \frac{6\alpha}{4\alpha-3} S^{-1} \left[\frac{u}{s-\frac{4\alpha}{4\alpha-3}u} \right] - \frac{9}{4(4\alpha-3)} S^{-1} \left[\frac{u}{s-\frac{4\alpha}{4\alpha-3}u} \right]$$

$$S^{-1} \left[\frac{3u\alpha(u-s)}{s(-3s-4\alpha(u-s))} \right] = -\frac{3}{4} + \frac{6\alpha}{4\alpha-3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{9}{4(4\alpha-3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t}$$

$$y(t) = \frac{A+3}{4\alpha-3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha-9)}{4(4\alpha-3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} \quad (10)$$

genel çözümü elde edilir.

Normal dağılıma sahip olan $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ olarak tanımlanan rastgele bir değişkenin beklenen değeri ve varyansı

$$E[A] = \mu ,$$

$$Var[A] = \sigma^2$$

Bu momentleri kullanarak X ve Y bağımsız rastgele değişkeninin $E[XY] = E[X]E[Y]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

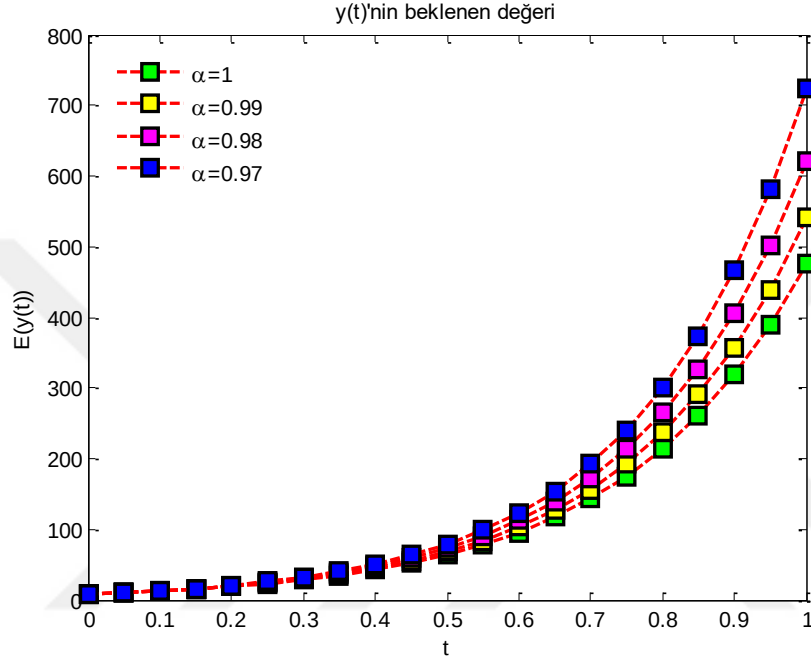
$$E[y(t)] = E \left[\frac{A+3}{4\alpha-3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha-9)}{4(4\alpha-3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} \right]$$

$$E[y(t)] = \frac{E(A) + 3}{4\alpha - 3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha - 9)}{4(4\alpha - 3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t}$$

$$E[y(t)] = \frac{\mu + 3}{4\alpha - 3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha - 9)}{4(4\alpha - 3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t}$$

$\mu = 2$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[y(t)] = \frac{5}{4\alpha - 3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha - 9)}{4(4\alpha - 3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$



Şekil 7. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\mu = 2$ için beklenen değer

$$Var[y(t)] = Var \left[\frac{A + 3}{4\alpha - 3} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} - \frac{3}{4} + \frac{(24\alpha - 9)}{4(4\alpha - 3)} e^{\frac{4\alpha}{4\alpha-3}t} \right]$$

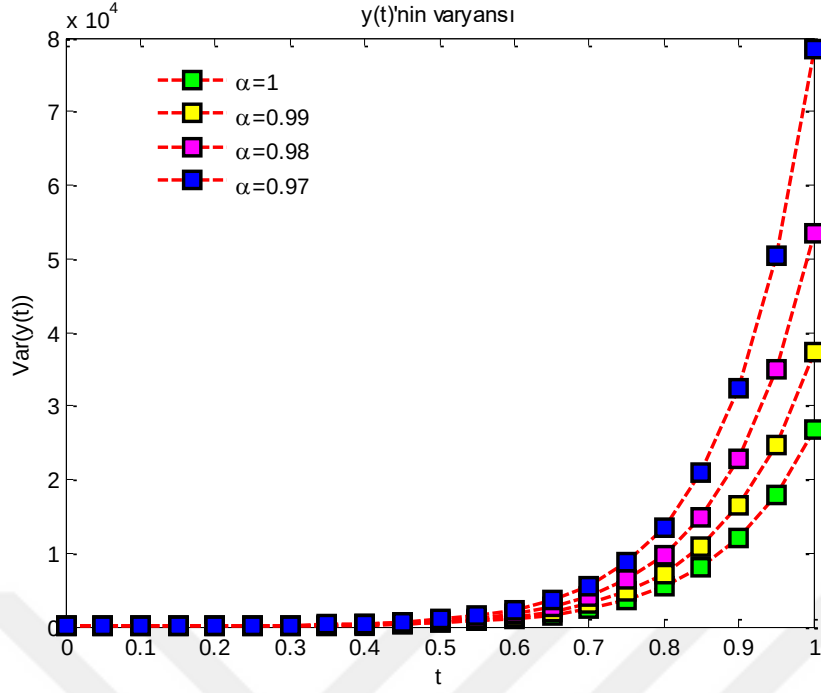
$$Var[y(t)] = \frac{e^{\frac{8\alpha}{4\alpha-3}t}}{(4\alpha - 3)^2} Var[A]$$

$$Var[y(t)] = \frac{e^{\frac{8\alpha}{4\alpha-3}t} \sigma^2}{(4\alpha - 3)^2}$$

$\sigma^2 = 9$ özel değerleri için varyans,

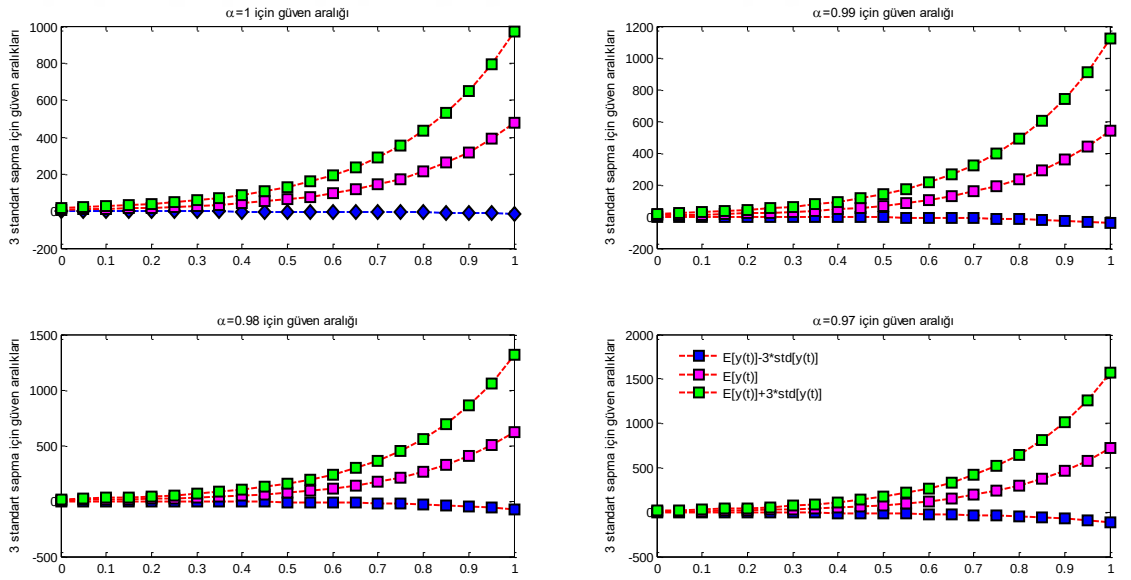
$$Var[y(x)] = \frac{9e^{\frac{8\alpha}{4\alpha-3}t}}{(4\alpha - 3)^2}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 8. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\sigma^2 = 9$ için varyans

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 9. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $\mu = 2$, $\sigma^2 = 9$ için güven aralıkları

Örnek 3.2.2

$${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = A(1 - y)^3 \quad (11)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $y(0) = 0$ $A \sim \text{Üçgensel}(\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4)$ üçgensel dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Shehu dönüşüm yaklaşımını kullanarak Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden rasgele adi diferansiyel denkleminin çözümünü bularak analiz ediniz.

Çözüm:

(11) denklemin her iki tarafının Shehu dönüşümü alınırsa ,

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y(t)] = S[A(1 - y)^3]$$

$$\frac{sY(s,u) - uy(0)}{s + \alpha(u-s)} = AS[N(y(t))]$$

$$Y(s,u) = \frac{1}{s} [(s + \alpha(u-s)AS[N(y(t))])] \quad (12)$$

ifadesi elde edilir. (12) ifadesinde $S[N(y(t))]$ nonlineer terim.

(12) denklemin Ters Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$y(t) = S^{-1} \left[\frac{1}{s} [(s + \alpha(u-s)AS[N(y(t))])] \right]$$

Adomian polinomlarından faydalanarak, seri bileşenleri aşağıdaki gibi oluşturulursa;

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) = S^{-1} \left[\frac{1}{s} \left[s + \alpha(u-s)A S \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \right] \right] \right], \quad y_0 = 0 ,$$

$$y_n = S^{-1} \left[\frac{1}{s} (s + \alpha(u-s))A S[A_{n-1}(t)] \right] \quad n = 1,2,3, \dots$$

$$Y_1 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} [(s + \alpha(u-s))A S[A_0]] \right] \quad f(y) = (1 - y)^3$$

$$Y_1 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} [(s + \alpha(u-s))A S[1]] \right] \quad A_0 = f(y_0) , A_0 = 1$$

$$Y_1 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} [(s + \alpha(u-s))A \frac{u}{s}] \right]$$

$$Y_1 = AS^{-1} \left[\frac{u}{s^2} (s + \alpha(u-s)) \right]$$

$$Y_1 = AS^{-1} \left[\frac{u}{s} + \alpha \frac{(u-s)}{s^2} \right]$$

$$Y_1 = AS^{-1} \left[\frac{u}{s} - \frac{\alpha u}{s} + \frac{\alpha u^2}{s^2} \right]$$

$$Y_1 = AS^{-1} \left[\frac{(1-\alpha)u}{s} - \frac{\alpha u^2}{s^2} \right]$$

$$Y_1 = A((1-\alpha) + \alpha_t)$$

$$Y_2 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} \left[(s + \alpha(u-s)) A S[A_1] \right] \right]$$

$$Y_2 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} \left[(s + \alpha(u-s)) A S[-3A(1-\alpha + \alpha + 1)] \right] \right]$$

$$Y_2 = S^{-1} \left[\frac{1}{s} \left[(s + \alpha(u-s)) A (-3A) \left((1-\alpha) \frac{u}{s} + \alpha \frac{u^2}{s^2} \right) \right] \right]$$

$$Y_2 = -3A^2 S^{-1} \left[\frac{1}{s} (s + \alpha(u-s)) \left((1-\alpha) \frac{u}{s} + \frac{\alpha u^2}{s^2} \right) \right]$$

$$Y_2 = -3A^2 S^{-1} \left[(1-\alpha) \frac{u}{s} + \alpha \frac{u^2}{s^2} + \alpha \frac{(1-\alpha)(u^2-us)}{s^2} + \alpha^2 \frac{(u^3-u^2s)}{s^3} \right]$$

$$Y_2 = -3A^2 \left((1-\alpha) + \alpha t + \alpha(1-\alpha)t - \alpha(1-\alpha) + \alpha^2 \frac{t^2}{2} - \alpha^2 t \right)$$

$$Y_2 = -3A^2 \left[1 - \alpha - \alpha + \alpha^2 + \alpha T + \alpha T - \alpha^2 T + \alpha^2 \frac{t^2}{2} - \alpha^2 t \right]$$

$$Y_2 = -3A^2 \left[(1 - 2\alpha + \alpha^2) + 2(\alpha - \alpha^2)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]$$

$$y(t) = Y_0(t) + Y_1(t) + Y_2(t) + \dots$$

$$y(t) = A((1-\alpha) + \alpha t) - 3A^2 \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \quad (13)$$

genel çözümü elde edilir.

$X \sim \text{Üçgensel}(a, b, c)$ üçgensel dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Üçgensel dağılıma ait moment üreten fonksiyon şu şekildedir;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

yardımla beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi bulunabilir.

Rastgele değişken $A \sim \text{Üçgensel}(a, b, c)$ üçgensel dağılıma sahip olmak üzere,

Sırasıyla beklenen değeri ve varyans aşığıdaki gibi elde edilir;

$$E(A) = \frac{(a + b + c)}{3},$$

$$E(A^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{6},$$

$$E(A^4) = \frac{1}{15} (b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + a^2cb + ab^2c + ac^2b + c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3)$$

$$Var(A) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18},$$

$$\begin{aligned} Var(A^2) &= E(A^4) - E(A^2)^2 \\ &= \frac{1}{15} (b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + a^2cb + ab^2c + ac^2b + c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3) \\ &\quad - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{6} \right)^2 \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Bağımsız rastgele değişkenler X ve Y 'nin beklenen değerleri, bu momentlerden yararlanılarak aşığıdaki şekilde belirlenebilir: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

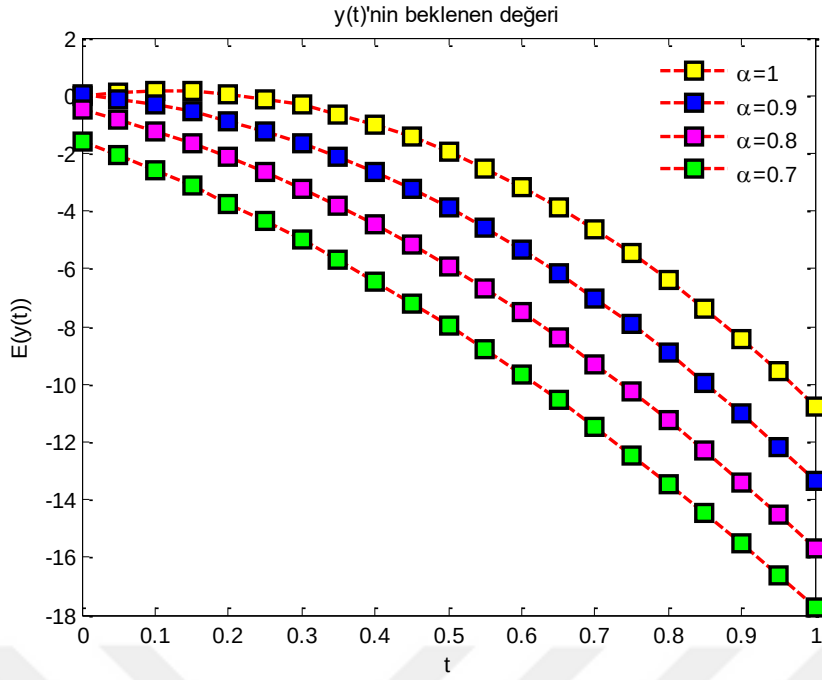
$$E[y(t)] = E \left[A((1 - \alpha) + \alpha t) - 3A^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right]$$

$$E[y(t)] = ((1 - \alpha) + \alpha t)E(A) - 3 \left((1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) E(A^2)$$

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= ((1 - \alpha) + \alpha t) \left(\frac{a + b + c}{3} \right) \\ &\quad - 3 \left((1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{6} \right) \end{aligned}$$

Özel değerler $a = 2$, $b = 3$ ve $c = 4$ için beklenen değer,

$$E[y(t)] = 3((1 - \alpha) + \alpha t) - \frac{55}{2} \left((1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) \text{ şeklinde hesaplanır.}$$



Şekil 10. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için beklenen değer

$$Var[y(t)] = Var \left[A((1 - \alpha) + \alpha t) - 3A^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right]$$

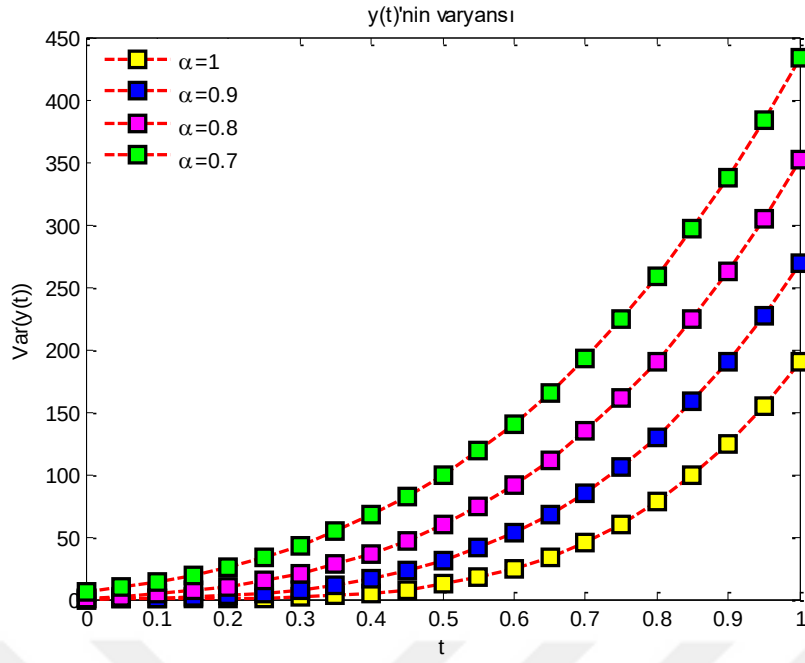
$$Var[y(t)] = ((1 - \alpha) + \alpha t)^2 Var[A] + 9 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2 Var[A^2]$$

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = & ((1 - \alpha) + \alpha t)^2 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right) \\ & + 9 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2 \left(\frac{1}{15} (b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 \right. \\ & + a^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + a^2cb + ab^2c + ac^2b + c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3) \\ & \left. - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{6} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Özel değerler $a = 2, b = 3$ ve $c = 4$ için varyans,

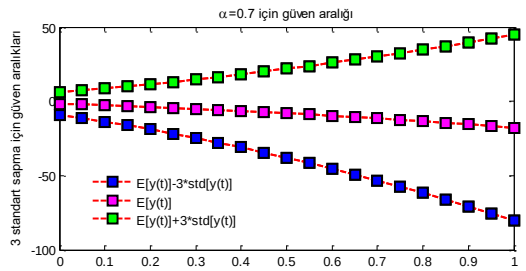
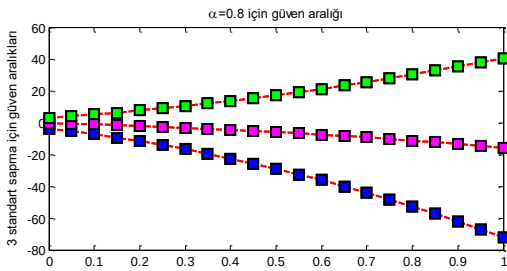
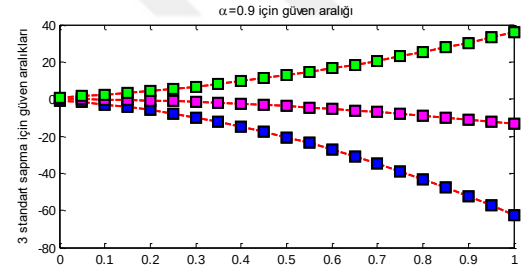
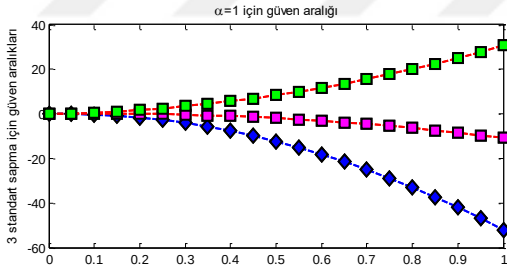
$$Var[y(t)] = \frac{1}{6} ((1 - \alpha) + \alpha t)^2 + 760.1833 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 11. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için varyans

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 12. Özel değerler $\alpha = 1, 0.99, 0.98, 0.97$ ve $a = 2, b = 3, c = 4$ için güven aralıkları

3.3.Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklem sisteminin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü

Bu bölümde başlangıç veya katsayıları rastgele değişken olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için Shehu Dönüşüm yöntemi kullanılarak iki adet örnek çözülmüştür.

Örnek 3.3.1

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha y_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ {}^{CF}D_t^\alpha y_2(t) = -y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \quad (14)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $y_1(0) = 0, y_2(0) = A$, $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ Normal dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Kesirli mertebeden rastgele adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünü Shehu dönüşüm yöntemi ile bularak analiz ediniz.

Çözüm:

(14) denklem sisteminin her iki tarafının Shehu dönüşümü alınırsa ,

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y_1(t)] = S\{y_1(t)\} + S\{y_2(t)\}$$

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y_2(t)] = -S\{y_1(t)\} + S\{y_2(t)\}.$$

$$\frac{sY_1(s, u) - uy_1(0)}{s + \alpha(u - s)} = Y_1(s, u) + Y_2(s, u)$$

$$\frac{sY_2(s, u) - uy_2(0)}{s + \alpha(u - s)} = -Y_1(s, u) + Y_2(s, u)$$

Başlangıç koşulları yerine konulup gerekli düzenleme yapılırsa,

$$Y_1(s, u) = \frac{Au(s + \alpha(u - s))}{(s + \alpha(u - s))^2 + \alpha^2(u - s)^2} \quad (15)$$

$$Y_2(s, u) = \frac{Au(\alpha(s - u))}{(s + \alpha(u - s))^2 + \alpha^2(u - s)^2} \quad (16)$$

(15) ve (16) denklemlerine Ters Shehu dönüşümü uygulanırsa ;

$$y_1(t) = S^{-1} \left[\frac{Au(s + \alpha(u - s))}{(s + \alpha(u - s))^2 + \alpha^2(u - s)^2} \right] = Ae^{at} \sin(at) \quad (17)$$

$$y_2(t) = S^{-1} \left[\frac{Au(\alpha(s - u))}{(s + \alpha(u - s))^2 + \alpha^2(u - s)^2} \right] = Ae^{at} \cos(at) \quad (18)$$

genel çözümleri elde edilir.

Burada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, parametreleri ile verilen normal dağılıma sahip X rasgele değişkenidir. Normal dağılımın moment üreten fonksiyonu

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$$

olan rasgele değişken $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ için birinci ve ikinci momentler aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$E[A] = \mu, \quad E[A^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

ve varyansı,

$$Var[A] = \sigma^2$$

bulunur (Khaniyev vd., 2017).

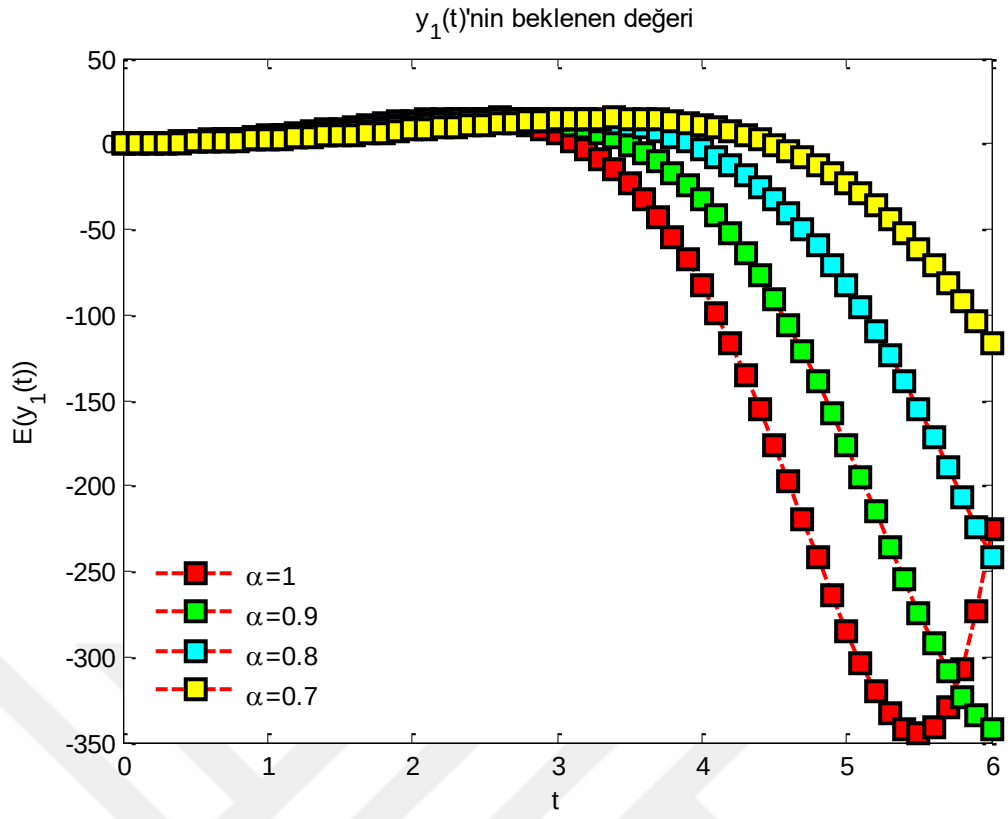
Bağımsız rastgele değişkenler X ve Y'nin beklenen değerleri, bu momentlerden yararlanılarak aşağıdaki şekilde belirlenebilir: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

$$E[y_1(t)] = E[Ae^{at} \sin(\alpha t)] = e^{at} \sin(\alpha t) E[A] = \mu e^{at} \sin(\alpha t)$$

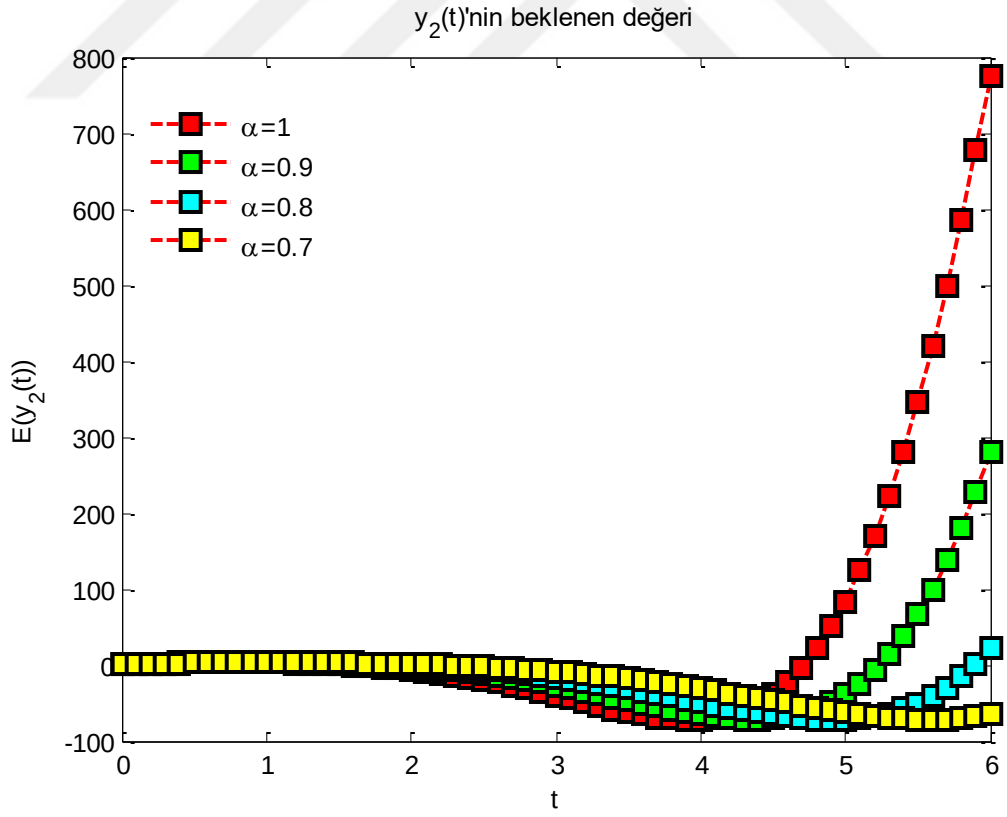
$$E[y_2(t)] = E[Ae^{at} \cos(\alpha t)] = e^{at} \cos(\alpha t) E[A] = \mu e^{at} \cos(\alpha t)$$

$\mu = 2$ özel değeri için beklenen değer,

$$E[y_1(t)] = 2e^{at} \sin(\alpha t) \text{ ve } E[y_2(t)] = 2e^{at} \cos(\alpha t) \text{ şeklinde hesaplanır.}$$



Şekil 13. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ için y_1 'in beklenen değeri



Şekil 14. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ için y_2 'nin beklenen değeri

$$\text{Var}[y_1(t)] = \text{Var}[Ae^{\alpha t} \sin(\alpha t)] = (e^{\alpha t} \sin(\alpha t))^2 \text{Var}[A] = (e^{\alpha t} \sin(\alpha t))^2 \sigma^2$$

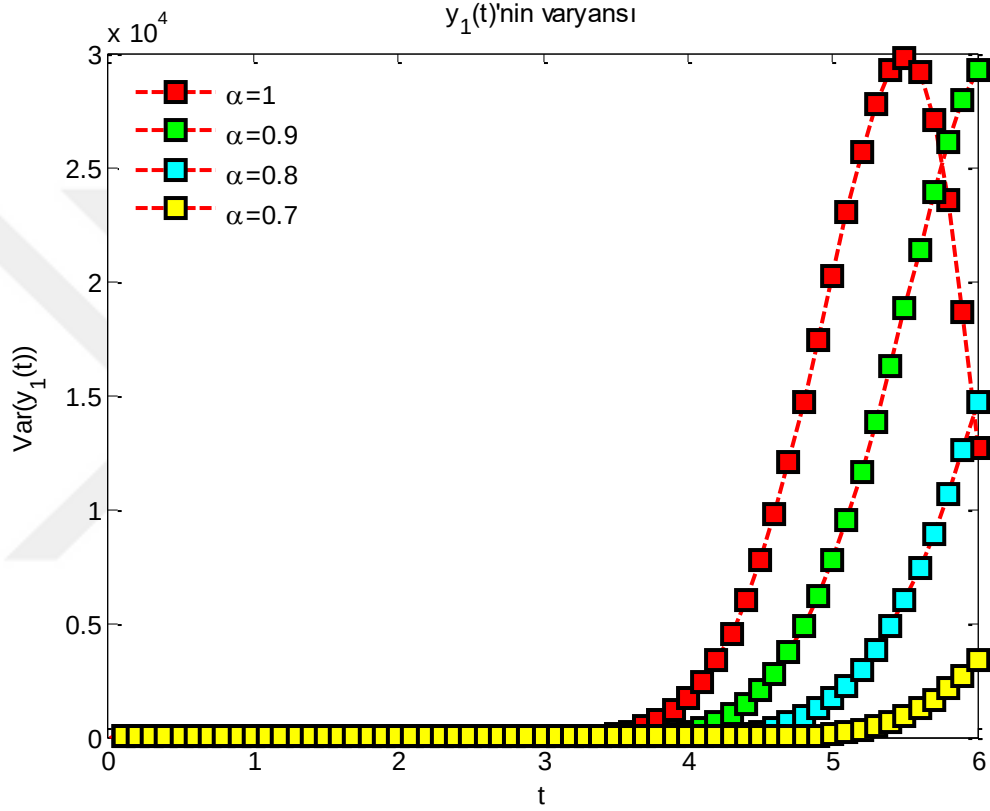
$$\text{Var}[y_2(t)] = \text{Var}[Ae^{\alpha t} \cos(\alpha t)] = (e^{\alpha t} \cos(\alpha t))^2 \text{Var}[A] = (e^{\alpha t} \cos(\alpha t))^2 \sigma^2$$

$\sigma^2 = 1$ özel değeri için varyans,

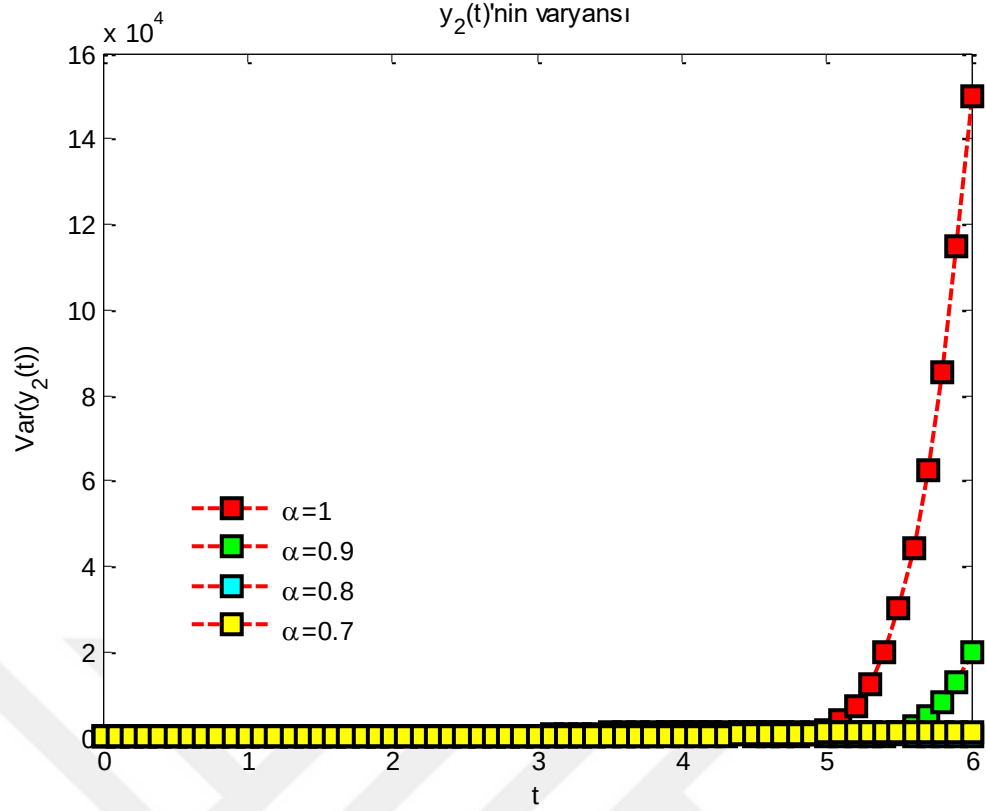
$$\text{Var}[y_1(t)] = (e^{\alpha t} \sin(\alpha t))^2$$

$$\text{Var}[y_2(t)] = (e^{\alpha t} \cos(\alpha t))^2$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 15. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\sigma^2 = 1$ için y_1 'in varyansı

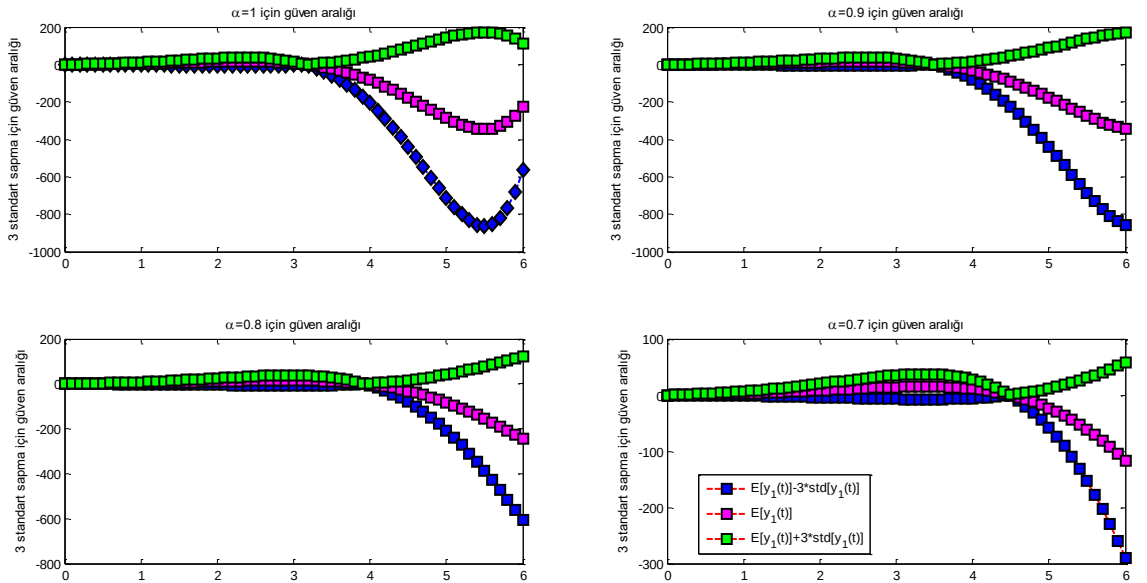


Şekil 16. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\sigma^2 = 1$ için y_2 'nin varyansı

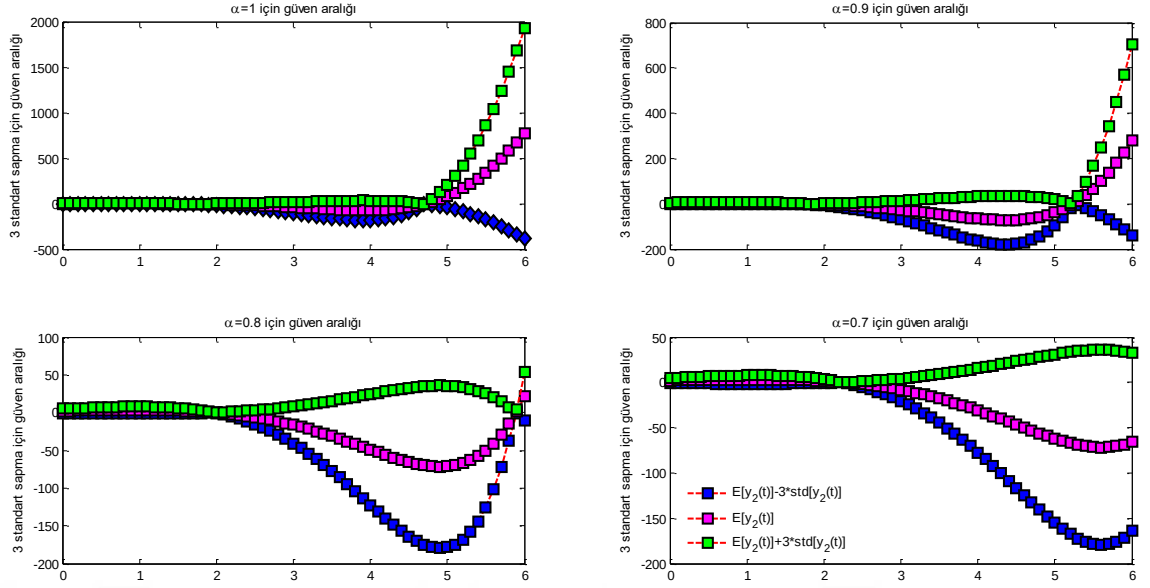
Güven aralıkları

$$[E(y_1(t)) - 3stdsapma(y_1(t)), E(y_1(t)) + 3stdsapma(y_1(t))],$$

$$[E(y_2(t)) - 3stdsapma(y_2(t)), E(y_2(t)) + 3stdsapma(y_2(t))].$$



Şekil 17. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ için y_1 'in güven aralıkları



Şekil 18. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ için y_2 'nin güven aralıkları

Örnek 3.3.2

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha y_1(t) = Ay_1(t) - y_2(t) \\ {}^{CF}D_t^\alpha y_2(t) = -y_1(t) + Ay_2(t) \end{cases} \quad (19)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $A \sim \text{Üstel}(\xi = 3)$ Üstel dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Kesirli mertebeden rastgele adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünü Shehu dönüşüm yöntemi ile bularak analiz ediniz.

Çözüm:

(19) denklem sisteminin her iki tarafının Shehu dönüşümü alınırsa,

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y_1(t)] = S\{Ay_1(t)\} - S\{y_2(t)\}$$

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha y_2(t)] = -S\{y_1(t)\} + S\{Ay_2(t)\}.$$

$$\frac{sY_1(s, u) - uy_1(0)}{s + \alpha(u - s)} = AY_1(s, u) - Y_2(s, u)$$

$$\frac{sY_2(s, u) - uy_2(0)}{s + \alpha(u - s)} = -Y_1(s, u) + AY_2(s, u)$$

Başlangıç koşulları yerine konulup gerekli düzenleme yapılırsa,

$$Y_1(s, u) = \frac{u(s-A(s+\alpha(u-s))+u(s+\alpha(u-s)))}{(s-A(s+\alpha(u-s)))^2-(s+\alpha(u-s))^2} \quad (20)$$

$$Y_2(s, u) = \frac{-u(s-A(s+\alpha(u-s))-u(s+\alpha(u-s)))}{(s-A(s+\alpha(u-s)))^2-(s+\alpha(u-s))^2} \quad (21)$$

yukarıdaki denklemlere ters Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$y_1(t) = S^{-1} \left[\frac{u(s-A(s+\alpha(u-s))+u(s+\alpha(u-s)))}{(s-A(s+\alpha(u-s)))^2-(s+\alpha(u-s))^2} \right]$$

$$y_1(t) = S^{-1} \left[\frac{u}{s-(A+1)(s+\alpha(u-s))} \right] = e^{\alpha(A+1)t} \quad (22)$$

$$y_2(t) = S^{-1} \left[\frac{u(s-A(s+\alpha(u-s))+u(s+\alpha(u-s)))}{(s-A(s+\alpha(u-s)))^2-(s+\alpha(u-s))^2} \right]$$

$$y_2(t) = -S^{-1} \left[\frac{u}{s-(A+1)(s+\alpha(u-s))} \right] = -e^{\alpha(A+1)t} \quad (23)$$

(22) ve (23) denklemlerinin $t = 0$ civarında Taylor serisi açılımı yapılsa;

$$y_1(t) = \left[1 + (A+1)\alpha t + \frac{1}{2}(A+1)^2\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(A+1)^3\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(A+1)^4\alpha^4 t^4 + O(t^5) \right] \quad (24)$$

$$y_2(t) = - \left[1 + (A+1)\alpha t + \frac{1}{2}(A+1)^2\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(A+1)^3\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(A+1)^4\alpha^4 t^4 + O(t^5) \right] \quad (25)$$

şeklinde bulunur. X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{\xi}{\lambda - t}; t < \xi$$

$$E[A] = \frac{1}{\xi}, E[A^2] = \frac{2}{\xi^2}, E[A^3] = \frac{6}{\xi^3}, E[A^4] = \frac{24}{\xi^4}, E[A^5] = \frac{120}{\xi^5}, E[A^6] = \frac{720}{\xi^6}, E[A^7] = \frac{5040}{\xi^7}, E[A^8] = \frac{40320}{\xi^8}$$

olarak hesaplanır.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ eşitliğinden;}$$

$$Var[A] = \frac{1}{\xi^2}, Var[A^2] = \frac{20}{\xi^4}, Var[A^3] = \frac{684}{\xi^6}, Var[A^4] = \frac{39744}{\xi^8}$$

olarak bulunur (Khaniyev vd., 2017).

Bağımsız rastgele değişkenler X ve Y 'nin beklenen değerleri, bu momentlerden yararlanılarak aşağıdaki şekilde belirlenebilir: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

$$E[y_1(t)] = E \left[1 + (A + 1)\alpha t + \frac{1}{2}(A + 1)^2\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(A + 1)^3\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(A + 1)^4\alpha^4 t^4 \right]$$

$$E[y_1(t)] = 1 + (E[A] + 1)\alpha t + \frac{1}{2}(E[A^2] + 2E[A] + 1)\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(E[A^3] + 3E[A^2] + 3E[A] + 1)\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(E[A^4] + 4E[A^3] + 6E[A^2] + 4E[A] + 1)\alpha^4 t^4$$

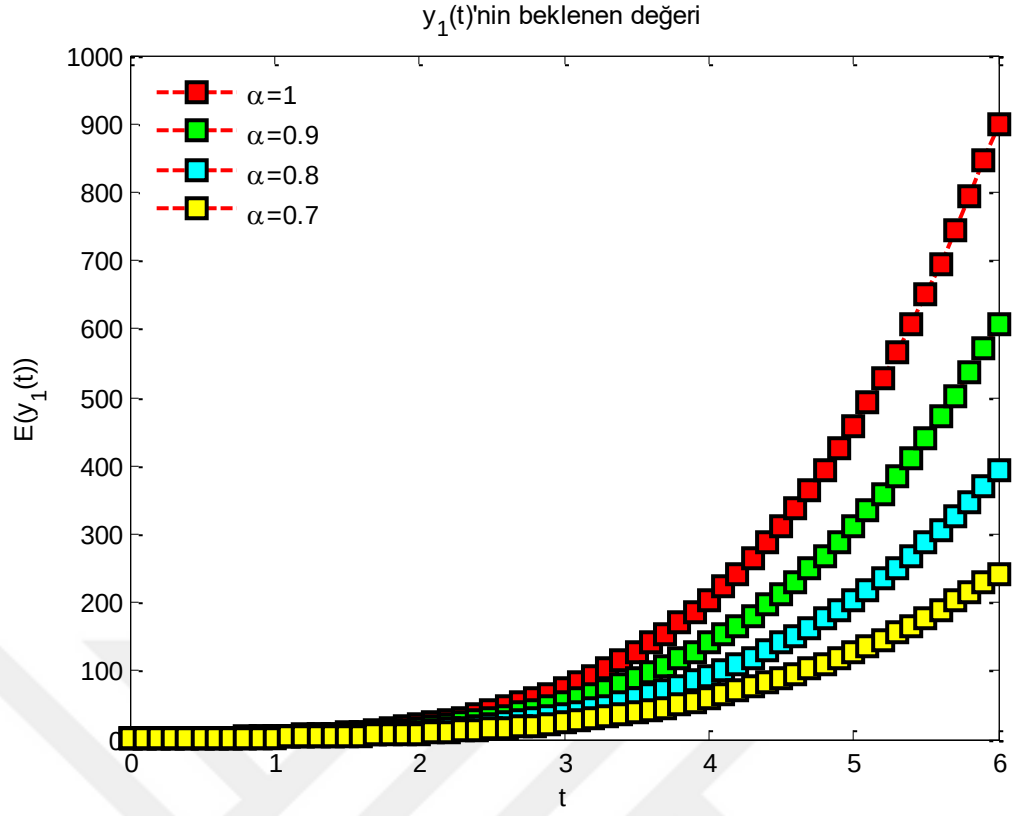
$$E[y_1(t)] = 1 + \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)\alpha t + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} + 1\right)\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{684}{\xi^6} + \frac{6}{\xi^2} + \frac{3}{\xi} + 1\right)\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{39744}{\xi^8} + \frac{2736}{\xi^6} + \frac{12}{\xi^2} + \frac{4}{\xi} + 1\right)\alpha^4 t^4$$

$\xi = 3$ özel değeri için beklenen değer,

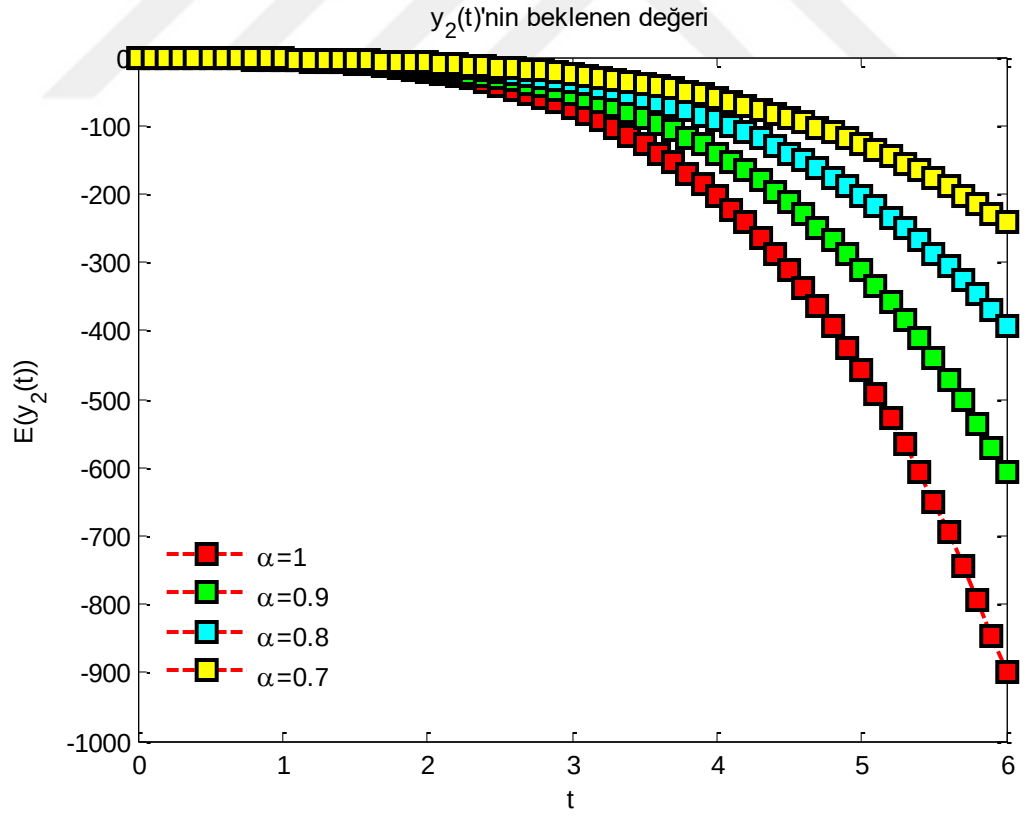
$$E[y_1(t)] = 1 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)\alpha t + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3} + 1\right)\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{684}{3^6} + \frac{6}{3^2} + \frac{3}{3} + 1\right)\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{39744}{3^8} + \frac{2736}{3^6} + \frac{12}{3^2} + \frac{4}{3} + 1\right)\alpha^4 t^4$$

$$E[y_2(t)] = - \left(1 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)\alpha t + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3} + 1\right)\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{684}{3^6} + \frac{6}{3^2} + \frac{3}{3} + 1\right)\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{39744}{3^8} + \frac{2736}{3^6} + \frac{12}{3^2} + \frac{4}{3} + 1\right)\alpha^4 t^4 \right)$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 19. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in beklenen değeri



Şekil 20. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin beklenen değeri

$$Var[y_1(t)] = Var \left[1 + (A+1)\alpha t + \frac{1}{2}(A+1)^2\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(A+1)^3\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(A+1)^4\alpha^4 t^4 \right]$$

$$Var[y_1(t)] = \alpha^2 t^2 Var[A] + \frac{\alpha^4 t^4}{4} (Var[A^2] + 4Var[A]) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} (Var[A^3] + 9Var[A^2] + 9Var[A]) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} (Var[A^4] + 16Var[A^3] + 36Var[A^2] + 16Var[A])$$

$$Var[y_1(t)] = \frac{\alpha^2 t^2}{\xi^2} + \frac{\alpha^4 t^4}{4} \left(\frac{20}{\xi^4} + \frac{4}{\xi^2} \right) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} \left(\frac{684}{\xi^6} + \frac{180}{\xi^4} + \frac{9}{\xi^2} \right) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} \left(\frac{39744}{\xi^8} + \frac{10944}{\xi^6} + \frac{720}{\xi^4} + \frac{16}{\xi^2} \right)$$

$$Var[y_2(t)] = Var \left[- \left(1 + (A+1)\alpha t + \frac{1}{2}(A+1)^2\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}(A+1)^3\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}(A+1)^4\alpha^4 t^4 \right) \right]$$

$$Var[y_2(t)] = \alpha^2 t^2 Var[A] + \frac{\alpha^4 t^4}{4} (Var[A^2] + 4Var[A]) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} (Var[A^3] + 9Var[A^2] + 9Var[A]) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} (Var[A^4] + 16Var[A^3] + 36Var[A^2] + 16Var[A])$$

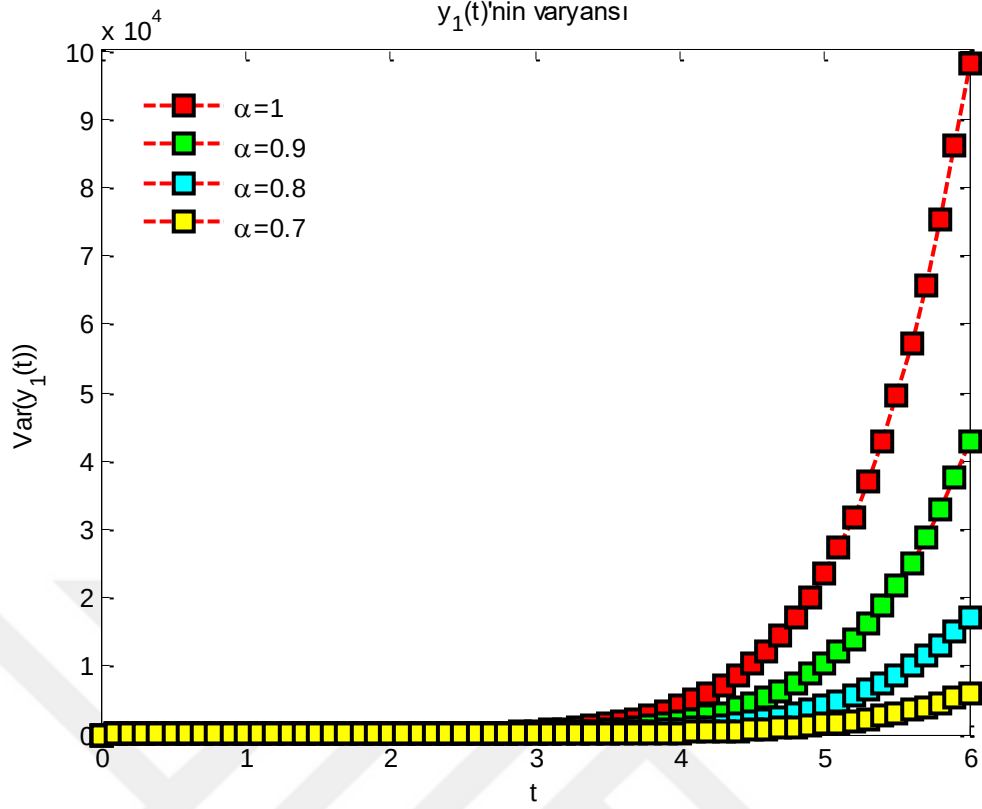
$$Var[y_2(t)] = \frac{\alpha^2 t^2}{\xi^2} + \frac{\alpha^4 t^4}{4} \left(\frac{20}{\xi^4} + \frac{4}{\xi^2} \right) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} \left(\frac{684}{\xi^6} + \frac{180}{\xi^4} + \frac{9}{\xi^2} \right) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} \left(\frac{39744}{\xi^8} + \frac{10944}{\xi^6} + \frac{720}{\xi^4} + \frac{16}{\xi^2} \right)$$

$\xi = 3$ özel değeri için varyans,

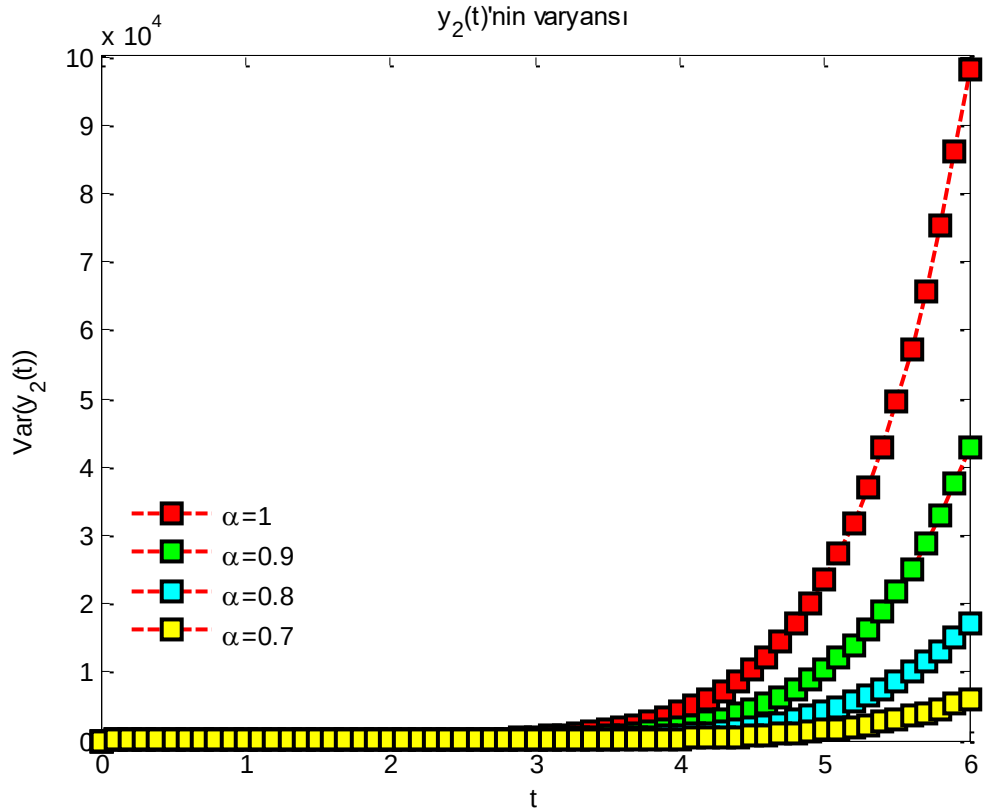
$$Var[y_1(t)] = \frac{\alpha^2 t^2}{3^2} + \frac{\alpha^4 t^4}{4} \left(\frac{20}{3^4} + \frac{4}{3^2} \right) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} \left(\frac{684}{3^6} + \frac{180}{3^4} + \frac{9}{3^2} \right) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} \left(\frac{39744}{3^8} + \frac{10944}{3^6} + \frac{720}{3^4} + \frac{16}{3^2} \right)$$

$$Var[y_2(t)] = \frac{\alpha^2 t^2}{3^2} + \frac{\alpha^4 t^4}{4} \left(\frac{20}{3^4} + \frac{4}{3^2} \right) + \frac{\alpha^6 t^6}{36} \left(\frac{684}{3^6} + \frac{180}{3^4} + \frac{9}{3^2} \right) + \frac{\alpha^8 t^8}{576} \left(\frac{39744}{3^8} + \frac{10944}{3^6} + \frac{720}{3^4} + \frac{16}{3^2} \right)$$

şeklinde hesaplanır.



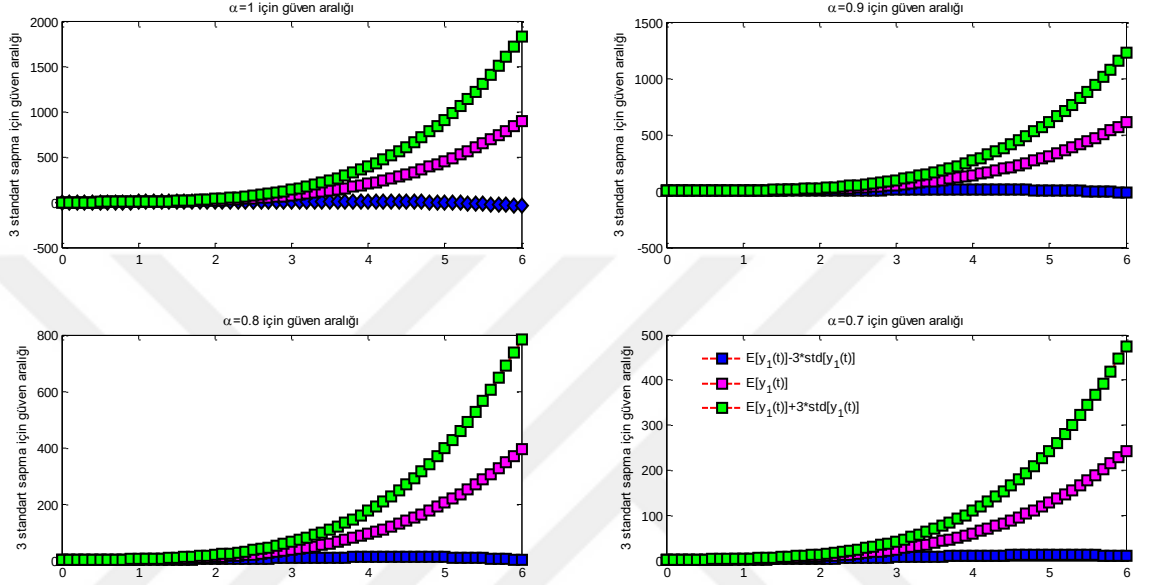
Şekil 21. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in varyansı



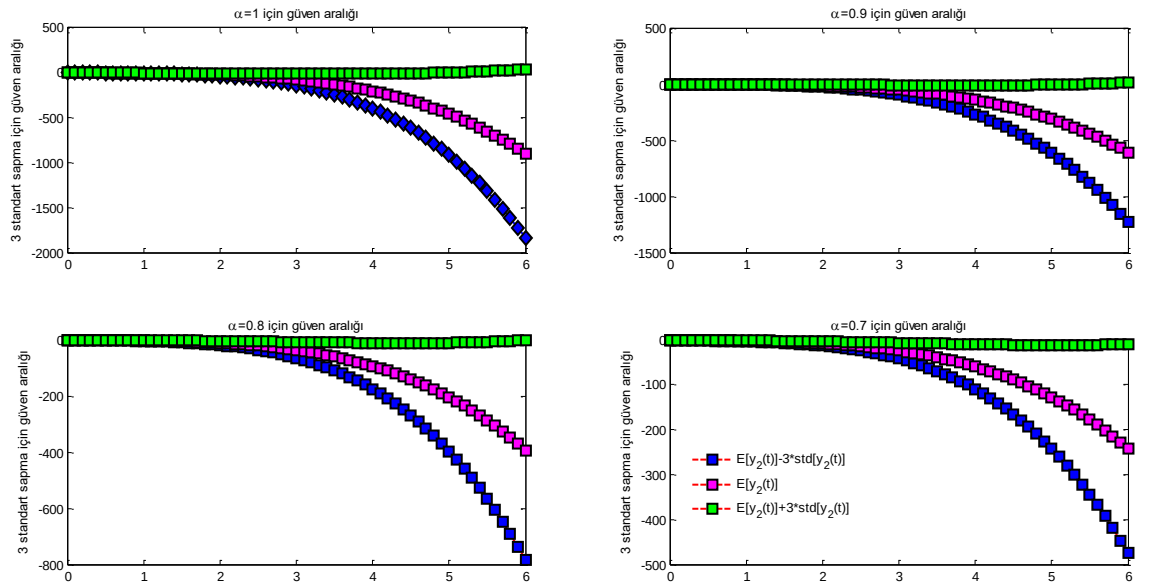
Şekil 22. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y_1(t)) - 3stdsapma(y_1(t)), E(y_1(t)) + 3stdsapma(y_1(t))], [E(y_2(t)) - 3stdsapma(y_2(t)), E(y_2(t)) + 3stdsapma(y_2(t))]$$



Şekil 23. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_1 'in güven aralıkları



Şekil 24. Özel değerler $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\xi = 3$ için y_2 'nin güven aralıkları,

3.4.Başlangıç veya katsayıları rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemlerin Shehu dönüşümü yardımı ile çözümü

Bu bölümde başlangıç veya katsayıları rastgele değişken olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Shehu Dönüşüm yöntemi kullanılarak üç adet örnek çözülmüştür.

Örnek 3.4.1

$${}^{CF}D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 + u \quad (26)$$

$$u(x, 0) = Ae^x$$

$A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Shehu dönüşüm yöntemi yardımı ile başlangıç koşulu rastgele olan Caputo-Fabrizio kesirli türevli KDD’i çözerek olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

Yukarıdaki denklem (26)’ya Shehu Dönüşüm uygulayalım.

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha u(x, t)] = S[u_{xx}] - S[u_x] + S\left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - S[u^2] + S[u]$$

$$= \frac{su(x, s, u) - uu(x, 0)}{s + \alpha(u - s)} = S[u_{xx}] - S[u_x] + S\left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - S[u^2] + S[u]$$

$$= su(x, s, u) - Ae^x u = s + \alpha(u - s) \left[S[u_{xx}] - S[u_x] + S\left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - S[u^2] + S[u] \right]$$

$$u(x, s, u) = \frac{1}{s} \left[[Ae^x u + s + \alpha(u - s)] \left[S[u_{xx}] - S[u_x] + S\left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - S[u^2] + S[u] \right] \right]$$

(27) ifadesi elde edilir. (27) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınırsa:

$$u(x, t) = S^{-1} \left[[Ae^x u + s + \alpha(u - s)] \left[S[u_{xx}] - S[u_x] + S\left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - S[u^2] + S[u] \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & Ae^x + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_{xx}] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_x] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u^2] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & Ae^x + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_{xx}] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_x] \right] + \\
& S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[N_1 u] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[N_2 u] \right] + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u] \right]
\end{aligned} \tag{28}$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) = & Ae^x + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i(x, t) \right] \right] \\
& - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_i(x, t) \right] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} B_i \right] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) \right] \right]
\end{aligned}$$

İteratif formül $u_0(x, t) = Ae^x$

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{n-1}(x, t) \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{n-1}(x, t) \right] \right] + \\
& S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_{n-1}] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[B_{n-1}] \right] + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_{n-1}(x, t)] \right]
\end{aligned} \tag{29}$$

(29) denkleminde $n = 1$ için :

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right] \right] + \\
& S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[A_0] \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[B_0] \right] + S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[u_0(x, t)] \right]
\end{aligned}
\tag{30}$$

ifadesi elde edilir.

$$u_0(x, t) = Ae^x$$

$$A_0(u_0) = N_1(u_0) = u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

$$A_0 = A^2 e^{2x} \tag{31}$$

$$B_0 = N_2(u_0) = (u_0)^2$$

$$B_0 = A^2 e^{2x} \tag{32}$$

Bulunan (31) ve (32) değerleri (30) denkleminde yerine koyulursa:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} Ae^x \left(\frac{u}{s} \right) \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} Ae^x \left(\frac{u}{s} \right) \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} A^2 e^{2x} \left(\frac{u}{s} \right) \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} A^2 e^{2x} \left(\frac{u}{s} \right) \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} Ae^x \left(\frac{u}{s} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = Ae^x S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} \left(\frac{u}{s} \right) \right]$$

$$u_1(x, t) = Ae^x S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \alpha \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \alpha \left(\frac{u}{s} \right) \right]$$

$$u_1(x, t) = Ae^x [(1 - \alpha) + \alpha t] \tag{33}$$

ifadesi elde edilir.

(29) denkleminde $n = 2$ için:

$$u_2(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t) \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} u_1(x, t) \right] \right] + S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[A_1] \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[B_1] \right] + S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[u_1(x, t)] \right] \quad (34)$$

ifadesi elde edilir. Adomian polinomları aşağıdaki gibi hesaplanabilir(Şahin, 2024);

$$A_1(u_0, u_1) = N_1'(u_0)u_1$$

$$B_1(u_0, u_1) = N_2'(u_0)u_1 = 2u_0u_1$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} (N_1(u_0 + \lambda u_1))|_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + \lambda u_1) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left(u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \left(u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2\lambda u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 + u_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0$$

$$A_1 = Ae^x (Ae^x [(1-\alpha) + \alpha t] + Ae^x [(1-\alpha) + \alpha t]) Ae^x$$

$$A_1 = 2A^2 e^{2x} (1-\alpha + \alpha t) \quad (35)$$

$$B_1 = 2u_0u_1 = 2Ae^x Ae^x [(1-\alpha) + \alpha t]$$

$$B_1 = 2A^2 e^{2x} (1-\alpha + \alpha t) \quad (36)$$

Bulunan (35) ve (36) değerleri (34) denkleminde yerine koyulursa:

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^x [(1 - \alpha) + \alpha t] \right] \right] \\
& - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} A e^x [(1 - \alpha) + \alpha t] \right] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [2A^2 e^{2x} (1 - \alpha + \alpha t)] \right] \\
& - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [2A^2 e^{2x} (1 - \alpha + \alpha t)] \right] \\
& + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [A e^x [(1 - \alpha) + \alpha t]] \right]
\end{aligned}$$

$$u_2(x, t) = A e^x S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} \left((1 - \alpha) \frac{u}{s} + \frac{\alpha u^2}{s^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & A e^x S^{-1} \left[(1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right) + \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right) + \frac{\alpha u^2}{s^2} + \frac{\alpha^2 u^3}{s^3} \right. \\
& \left. - \frac{\alpha^2 u^2}{s^2} \right]
\end{aligned}$$

$$u_2(x, t) = A e^x \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]$$

(37)

ifadesi elde edilir.

(29) denkleminde $n = 3$ için:

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} u_2(x, t) \right] \right] + \\
& S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [A_2] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [B_2] \right] + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S [u_2(x, t)] \right]
\end{aligned}$$

(38)

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (N_1(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2))|_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda^2 u_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda^3 u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \left(u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)$$

$$A_2 = \left[(Ae^x[(1-\alpha) + \alpha t])^2 + Ae^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] Ae^x \right]$$

$$A_2 = A^2 e^{2x} \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \alpha^2 t^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]$$

$$A_2 = A^2 e^{2x} \left[2(1-\alpha)^2 + 4\alpha(1-\alpha)t + \frac{3}{2}\alpha^2 t^2 \right] \quad (39)$$

$$B_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (N_2(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2))|_{\lambda=0}$$

$$B_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2 |_{\lambda=0}$$

$$B_2 = 2u_0 u_2 + u_1^2$$

$$B_2 = 2Ae^x \left[Ae^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] + (Ae^x[(1-\alpha) + \alpha t])^2 \right]$$

$$B_2 = A^2 e^{2x} [3(1-\alpha)^2 + 6\alpha(1-\alpha)t + 2\alpha^2 t^2] \quad (40)$$

Bulunan (39) ve (40) değerleri (38) denkleminde yerine koyulursa:

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = & S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} Ae^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] - \\ & S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[\frac{\partial}{\partial x} Ae^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] + \\ & S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[A^2 e^{2x} \left[2(1-\alpha)^2 + 4\alpha(1-\alpha)t + \frac{3}{2}\alpha^2 t^2 \right] \right] \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[A^2 e^{2x} [3(1-\alpha)^2 + 6\alpha(1-\alpha)t + 2\alpha^2 t^2] \right] \right] + \\
& S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[A e^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] \\
u_3(x, t) &= -S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[A^2 e^{2x} \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] \\
&+ S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[A e^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] \\
u_3(x, t) &= (A e^x - A^2 e^{2x}) S^{-1} \left[\left((1-\alpha) + \alpha \frac{u}{s} \right) \left((1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) \right] \\
u_3(x, t) &= (A e^x - A^2 e^{2x}) S^{-1} \left[(1-\alpha)^3 + 2\alpha(1-\alpha)^2 t + (1-\alpha) \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + (1-\alpha)^2 \frac{\alpha u}{s} + 2\alpha \frac{\alpha u}{s} t (1-\alpha) + \frac{\alpha u \alpha^2 t^2}{s \cdot 2} \right] \\
u_3(x, t) &= A e^x (1 - A e^x) \left[(1-\alpha)^3 + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \quad (41)
\end{aligned}$$

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n u_j(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= A e^x + A e^x [(1-\alpha) + \alpha t] + A e^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] + \\
&A e^x (1 - A e^x) \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + (1-\alpha)^3 \right] \quad (42)
\end{aligned}$$

(42) ifadesinde $\alpha = 1$ için,

$$u(x, t) = A e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = A e^{x+t} \quad (43)$$

elde edilir.

X rastgele değişkeni normal dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}; t < \lambda$$

1. ve 2. momentleri ve varyansı;

$$E[A] = \mu ,$$

$$E[A^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

olarak hesaplanır.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ eşitliğinden;}$$

$$Var[A] = \sigma^2 ,$$

$$Var[A] = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2$$

olarak hesaplanır.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(x, t)] = \left[Ae^x + Ae^x[(1 - \alpha) + \alpha t] + Ae^x \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ \left. + Ae^x(1 - Ae^x) \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right]$$

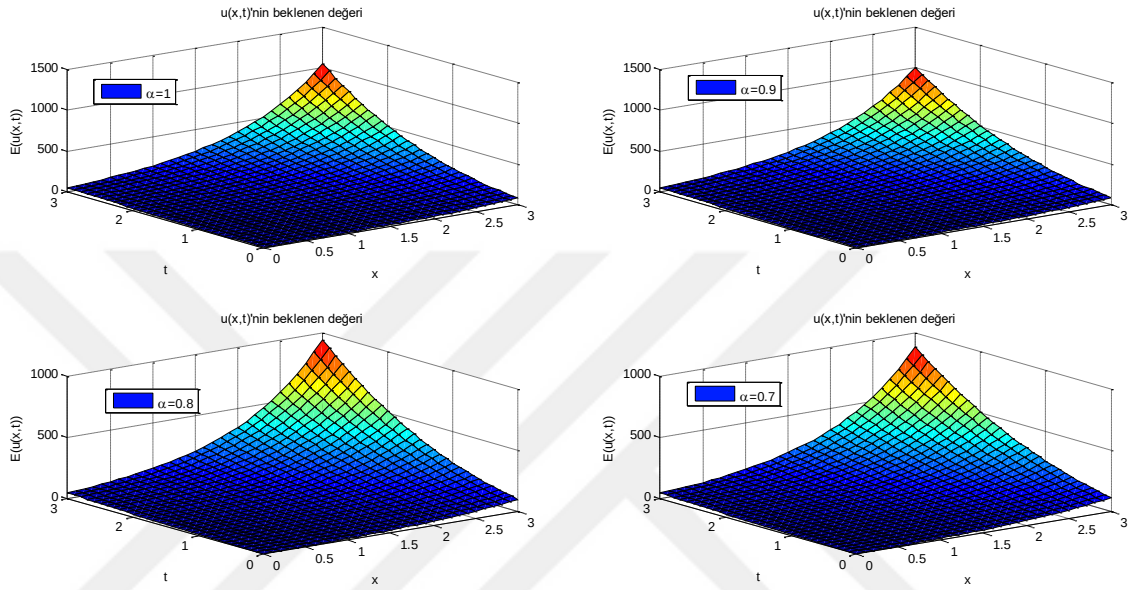
$$E[u(x, t)] = E(A) \left[e^x + e^x[(1 - \alpha) + \alpha t] + e^x \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ \left. + e^x \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right] \\ - e^{2x} E(A^2) \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right]$$

$$E[u(x, t)] = \mu \left[e^x + e^x[(1 - \alpha) + \alpha t] + e^x \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ \left. + e^x \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right] \\ - e^{2x} (\mu^2 + \sigma^2) \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right]$$

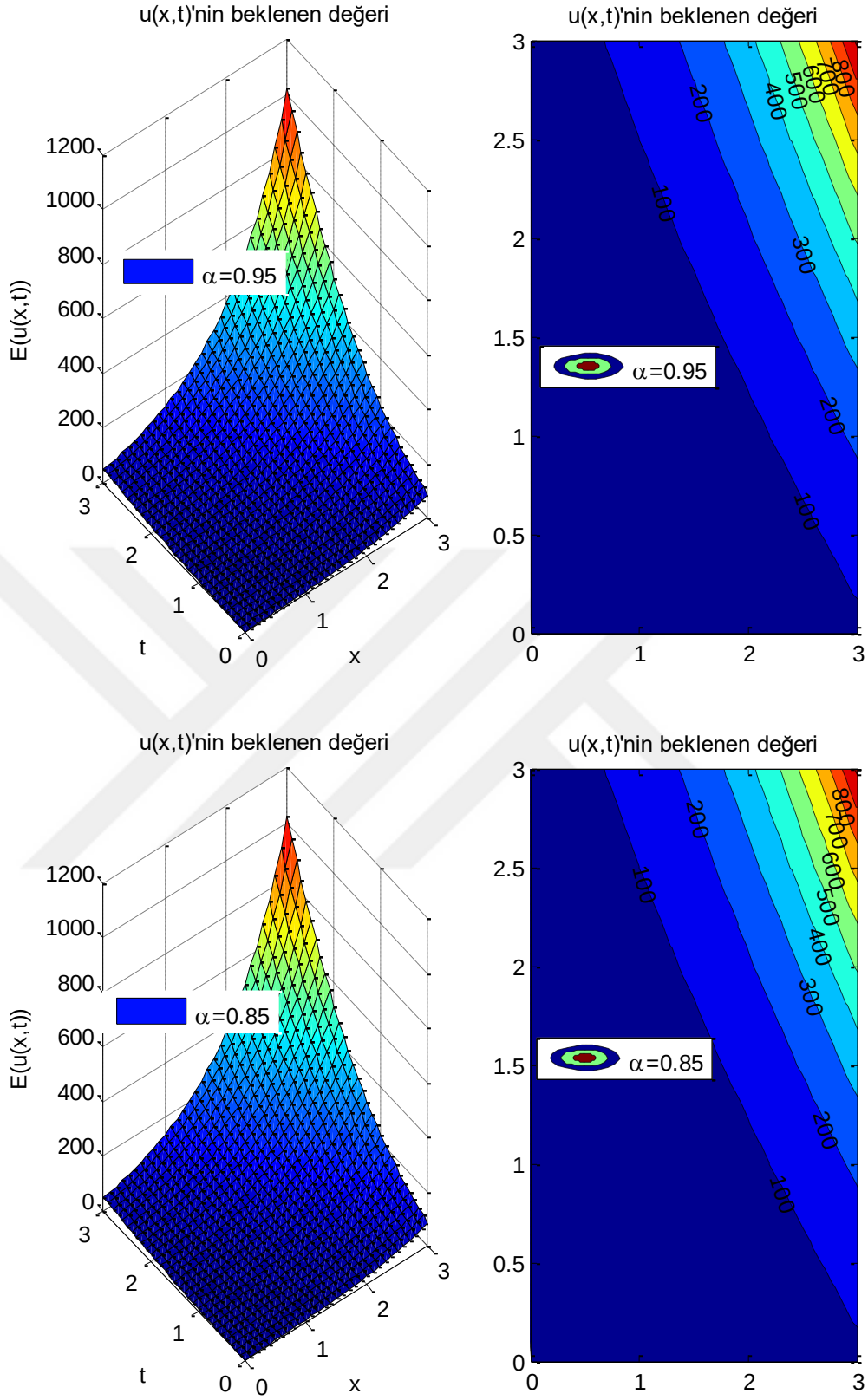
şeklinde hesaplanır.

Özel değer $\mu = 4$ ve $\sigma^2 = 2$ için beklenen değer

$$\begin{aligned}
E[u(x,t)] = & 4 \left[e^x + e^x[(1-\alpha) + \alpha t] + e^x \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\
& + e^x \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + (1-\alpha)^3 \right] \left. \right] \\
& - 6e^{2x} \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + (1-\alpha)^3 \right]
\end{aligned}$$



Şekil 25. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı



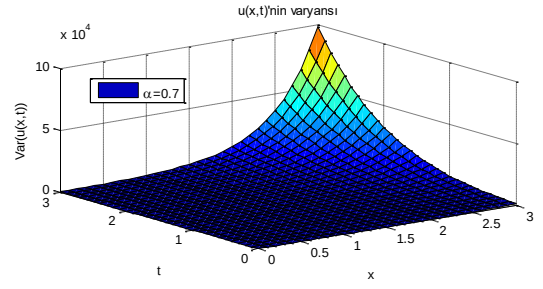
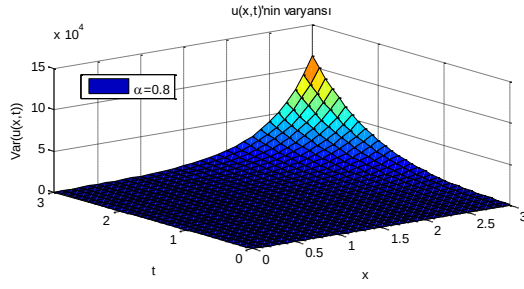
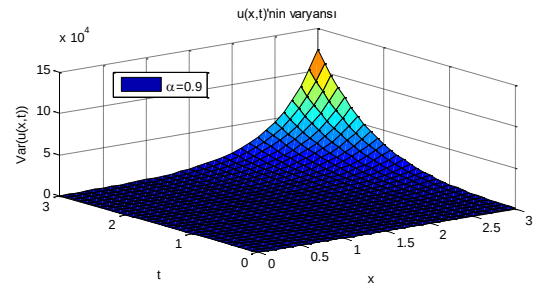
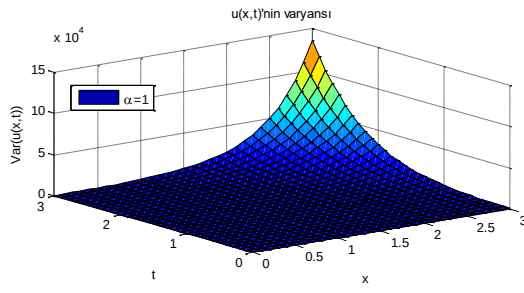
Şekil 26. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (26) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin varyansı;

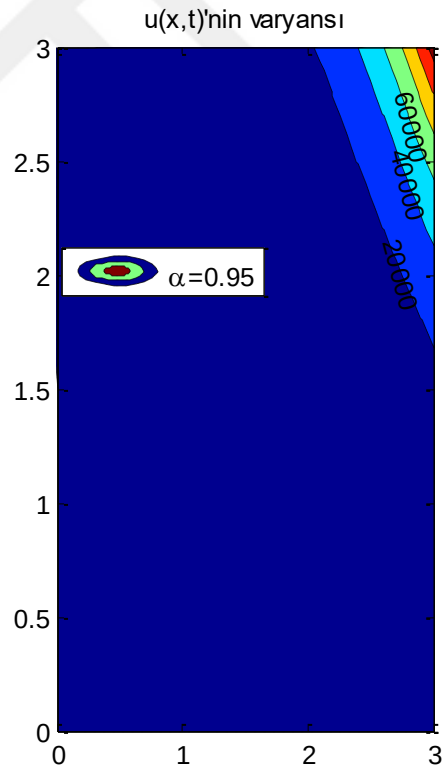
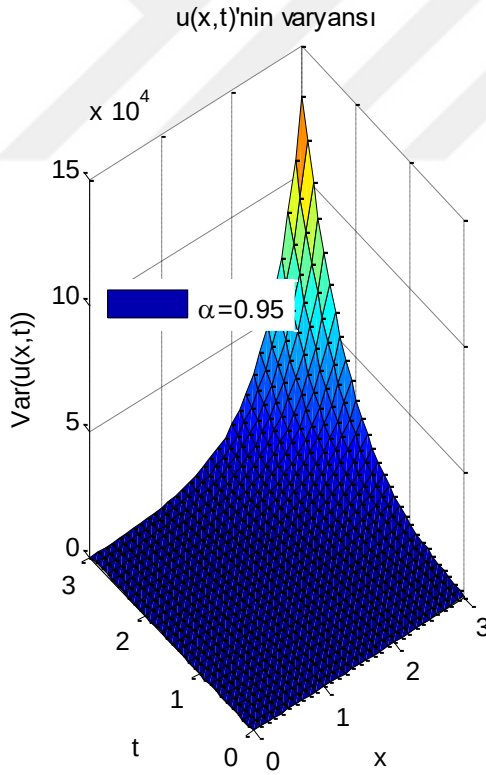
$$\begin{aligned}
Var[u(x, t)] &= Var \left[Ae^x + Ae^x[(1 - \alpha) + \alpha t] \right. \\
&\quad + Ae^x \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \\
&\quad \left. + Ae^x(1 - Ae^x) \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right] \\
Var[u(x, t)] &= Var(A)e^{2x} \left[1 + [(1 - \alpha) + \alpha t] + \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right]^2 \\
&\quad + Var(A^2)e^{4x} \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right]^2 \\
Var[u(x, t)] &= \sigma^2 e^{2x} \left[1 + [(1 - \alpha) + \alpha t] + \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right]^2 \\
&\quad + (2\sigma^4 \\
&\quad + 4\sigma^2 \mu^2) e^{4x} \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right]^2
\end{aligned}$$

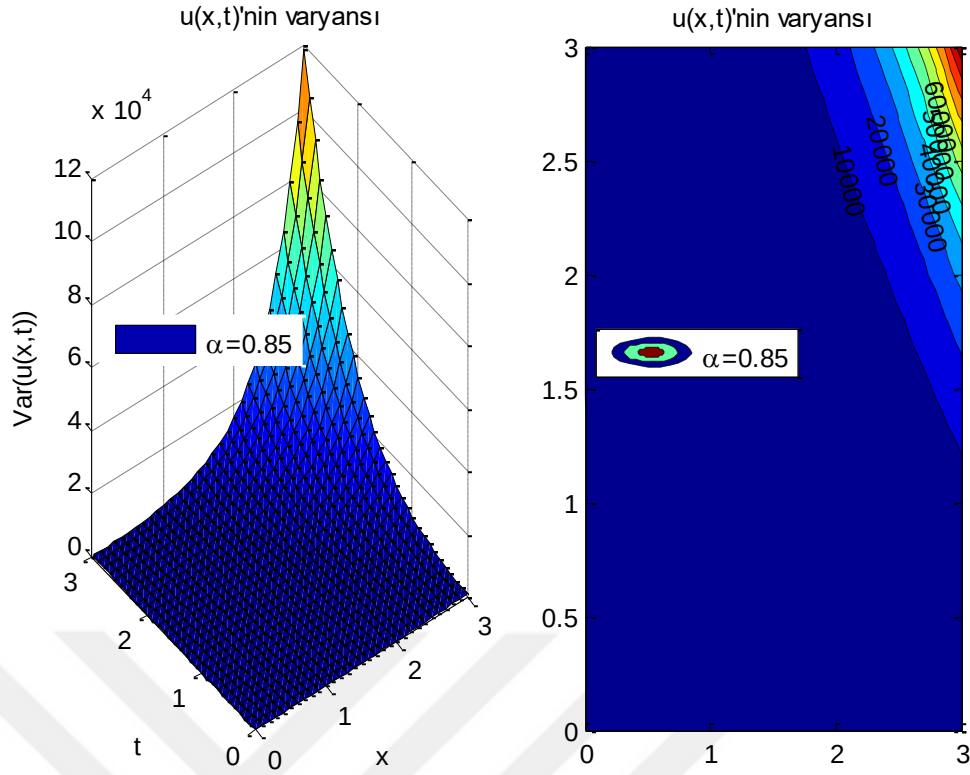
$\mu = 4, \sigma^2 = 2$ özel değeri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u(x, t)] &= 2e^{2x} \left[1 + [(1 - \alpha) + \alpha t] + \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right] \right]^2 \\
&\quad + 136e^{4x} \left[\frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right]^2
\end{aligned}$$



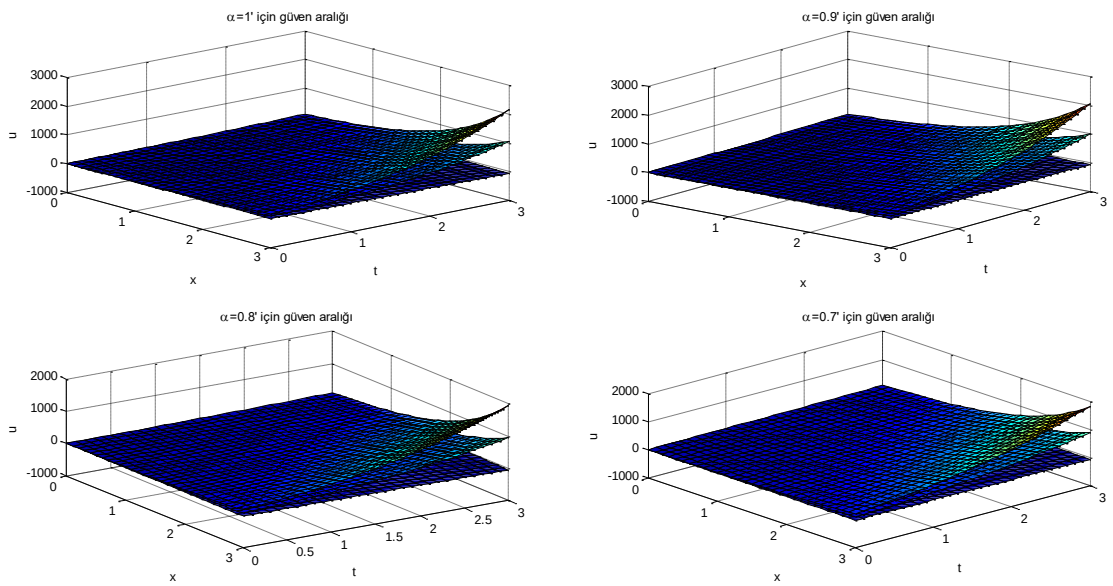
Şekil 27. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26) denkleminin varyansının çözüm davranışı





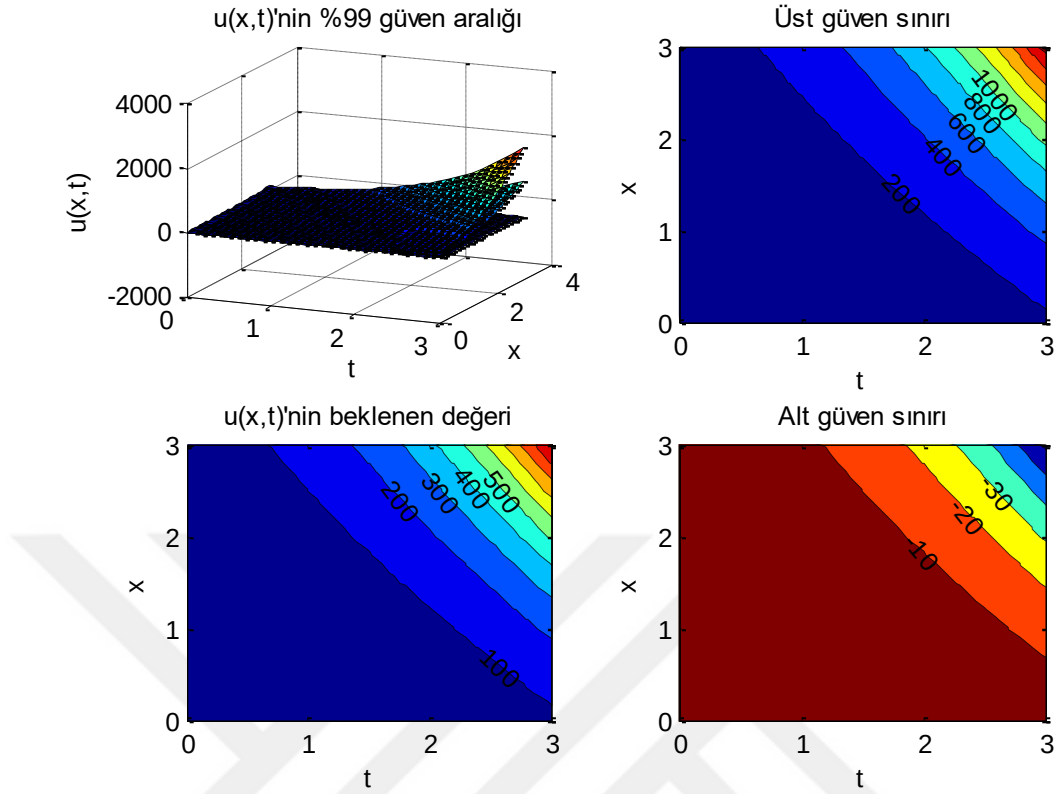
Şekil 28. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (26) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için Contour plot çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x, t)) - 3stdsapma(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3stdsapma(u(x, t))]$



Şekil 29. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (26)

denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 30. Özel değerler $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ ve $\alpha = 0.95$ için (26) denkleminin güven aralığının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

Örnek 3.4.2

$${}^{CF}D_t^\alpha u(x, t) = u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u \quad (44)$$

$$u(x, 0) = Ax^2$$

$A \sim \text{Beta}(\rho = 1, \zeta = 3)$ beta dağılıma sahip rastgele değişken olsun. KDD'i Shehu dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

(44) denklemin her iki tarafına Shehu Dönüşüm uygulayalım.

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha u(x, t)] = S\left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right] - S[u]$$

$$\frac{su(x, s, u) - uu(x, 0)}{s + \alpha(u - s)} = S\left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right] - S[u]$$

$$\begin{aligned}
su(x, s, u) - Ax^2u &= s + \alpha(u - s) \left[S \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] - S[u] \right] \\
u(x, s, u) &= \frac{1}{s} \left[Ax^2u + (s + \alpha(u - s)) \left[S \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] - S[u] \right] \right]
\end{aligned} \tag{45}$$

(45) ifadesinin Ters Shehu dönüşümü alınırsa:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= S^{-1} \left[\frac{Ax^2u}{s} + \frac{(s + \alpha(u - s))}{s} \left[S \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] - S[u] \right] \right] \\
u(x, t) &= Ax^2 + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u] \right] \\
u(x, t) &= Ax^2 + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[N_1 u] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u] \right]
\end{aligned} \tag{46}$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) &= Ax^2 + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right] \right] \\
&\quad - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) \right] \right]
\end{aligned}$$

İteratif formül $u_0(x, t) = Ax^2$

$$u_n(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_{n-1}] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_{n-1}(x, t)] \right] \tag{47}$$

(47) denkleminde $n = 1$ için:

$$u_1(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_0] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_0(x, t)] \right] \tag{48}$$

$$u_0(x, t) = Ax^2$$

$$A_0(u_0) = N_1(u_0) = u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$$

$$A_0 = 0 \quad (49)$$

Bulunan (49) değeri (48) denkleminde yerine yazılırsa:

$$u_1(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[0] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} Ax^2 \left(\frac{u}{s} \right) \right]$$

$$u_1(x, t) = -Ax^2 S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} \left(\frac{u}{s} \right) \right]$$

$$u_1(x, t) = -Ax^2 S^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \alpha \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \alpha \left(\frac{u}{s} \right) \right]$$

$$u_1(x, t) = -Ax^2 [(1 - \alpha) + \alpha t] \quad (50)$$

ifadesi elde edilir.

(47) denkleminde $n = 2$ için:

$$u_2(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_1] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_1(x, t)] \right] \quad (51)$$

ifadesi elde edilir.

$$A_1(u_0, u_1) = N'_1(u_0)u_1$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} (N_1(u_0 + \lambda u_1))|_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u_0 + \lambda u_1) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left(u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \lambda u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \left(u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 2\lambda u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) |_{\lambda=0}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$$

$$A_1 = Ax^2 \cdot 0 - Ax^2[(1 - \alpha) + \alpha t] \cdot 0$$

$$A_1 = 0 \quad (52)$$

Bulunan (52) değeri (51) denkleminde yerine yazılırsa:

$$u_2(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[0] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[-Ax^2[(1 - \alpha) + \alpha t]] \right]$$

$$u_2(x, t) = Ax^2 S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} \left((1 - \alpha) \frac{u}{s} + \frac{\alpha u^2}{s^2} \right) \right]$$

$$u_2(x, t) = Ax^2 S^{-1} \left[(1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right) + \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{u}{s} \right) + \frac{\alpha u^2}{s^2} + \frac{\alpha^2 u^3}{s^3} - \frac{\alpha^2 u^2}{s^2} \right]$$

$$u_2(x, t) = Ax^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \quad (53)$$

elde edilir.

(47) denkleminde $n = 3$ için :

$$u_3(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_2] \right] - S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[u_2(x, t)] \right] \quad (54)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (N_1(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2))|_{\lambda=0} \\
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) \right) |_{\lambda=0} \\
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \lambda^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) \right) |_{\lambda=0} \\
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \lambda^2 u_0 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \lambda u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \lambda^3 u_1 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) |_{\lambda=0} \\
A_2 &= 2 \left(u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) \\
A_2 &= 2 \left(u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) \\
A_2 &= 2(-Ax^2[(1-\alpha) + \alpha t].0 + Ax^2.0) \\
A_2 &= 0
\end{aligned} \tag{55}$$

Bulunan (55) değeri (54) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S[0] \right] - S^{-1} \left[\frac{s+\alpha(u-s)}{s} S \left[Ax^2 \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right] \right] \\
u_3(x, t) &= -Ax^2 S^{-1} \left[\left((1-\alpha) + \alpha \frac{u}{s} \right) \left((1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) \right] \\
u_3(x, t) &= -Ax^2 S^{-1} \left[(1-\alpha)^3 + 2\alpha(1-\alpha)^2 t + (1-\alpha) \frac{\alpha^2 t^2}{2} + (1-\alpha)^2 \frac{\alpha u}{s} \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha \frac{\alpha u}{s} t(1-\alpha) + \frac{\alpha u}{s} \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \\
u_3(x, t) &= -Ax^2 \left[(1-\alpha)^3 + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right]
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n u_j(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \\
u(x, t) &= Ax^2 - Ax^2[(1-\alpha) + \alpha t] + Ax^2 \left[(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] - \\
&\quad Ax^2 \left[(1-\alpha)^3 + 3\alpha(1-\alpha)^2 t + 3\alpha^2(1-\alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right]
\end{aligned} \tag{57}$$

(57) denkleminde $\alpha = 1$ için :

$$u(x, t) = Ax^2 \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = Ax^2 e^{-t} \quad (58)$$

elde edilir.

$A \sim Beta(\varrho, \varsigma)$ beta dağılımına sahip rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

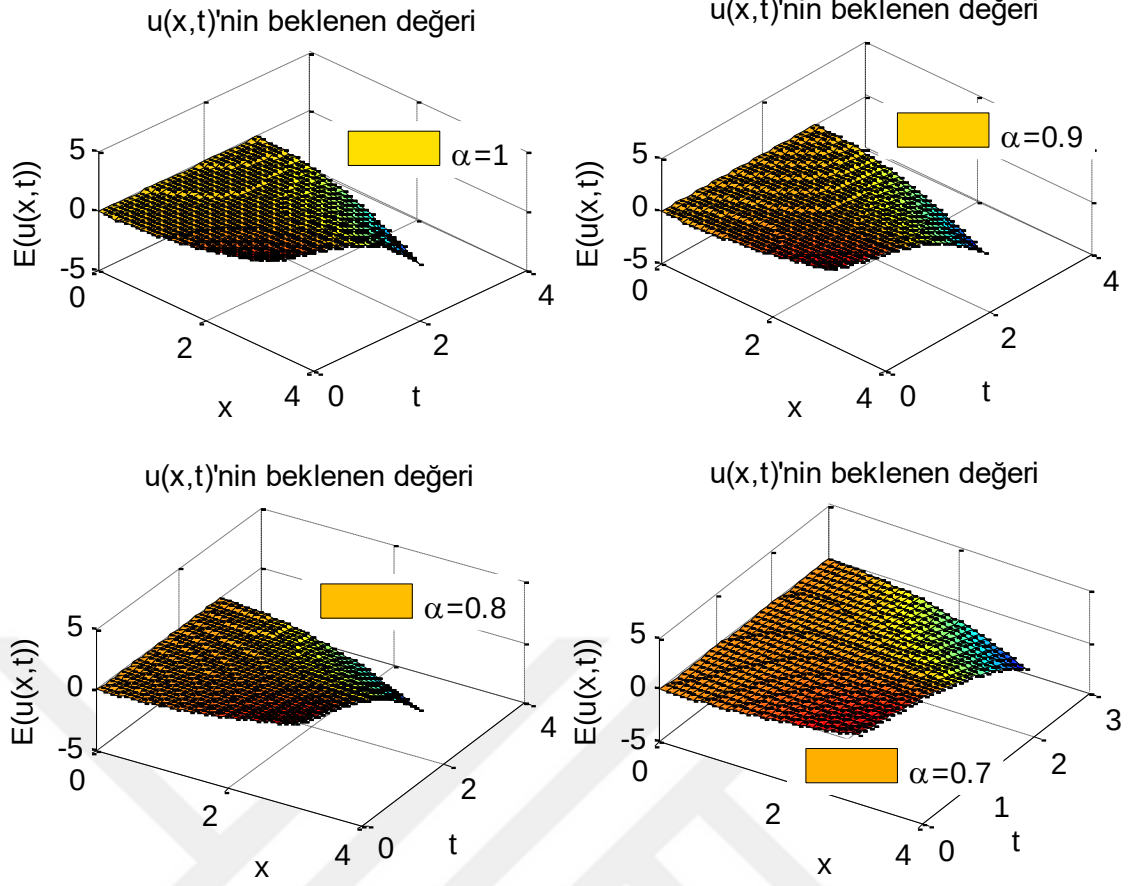
$$E[A] = \frac{\varrho}{\varrho + \varsigma}, Var[A] = \frac{\varrho\varsigma}{(\varrho + \varsigma)^2(\varrho + \varsigma + 1)}$$

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

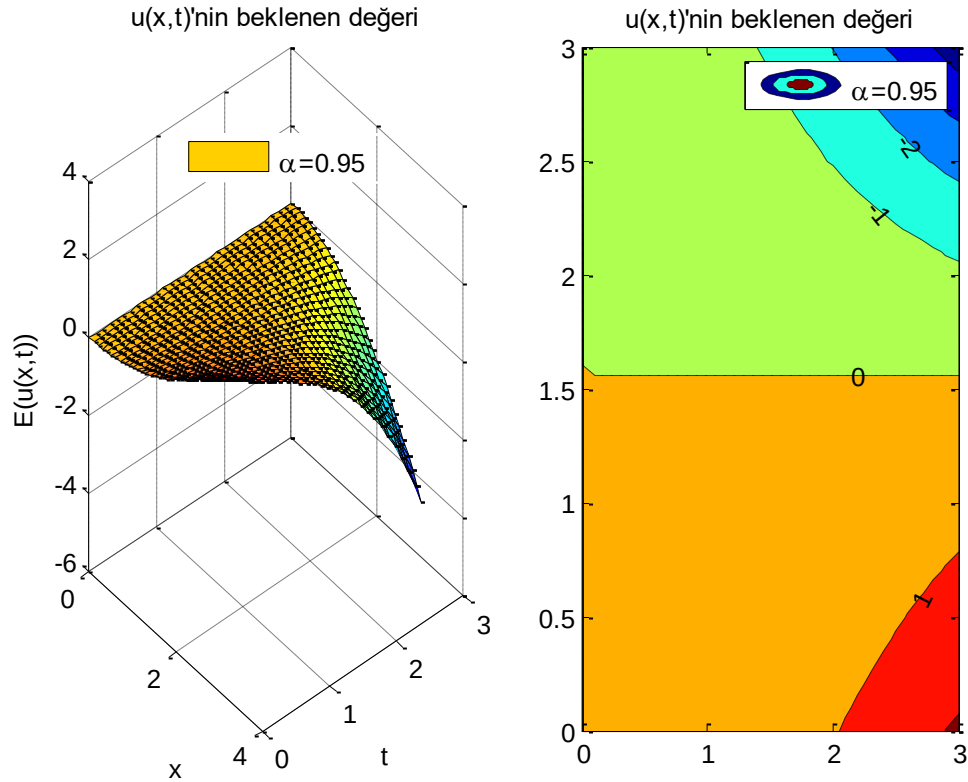
$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= \left[Ax^2 - Ax^2[(1 - \alpha) + \alpha t] + Ax^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - Ax^2 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \right] \\ &= E(A) \left[x^2 - x^2[(1 - \alpha) + \alpha t] + x^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - x^2 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \right] \\ E[u(x, t)] &= \frac{\varrho}{\varrho + \varsigma} \left[x^2 - x^2[(1 - \alpha) + \alpha t] + x^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - x^2 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \right] \end{aligned}$$

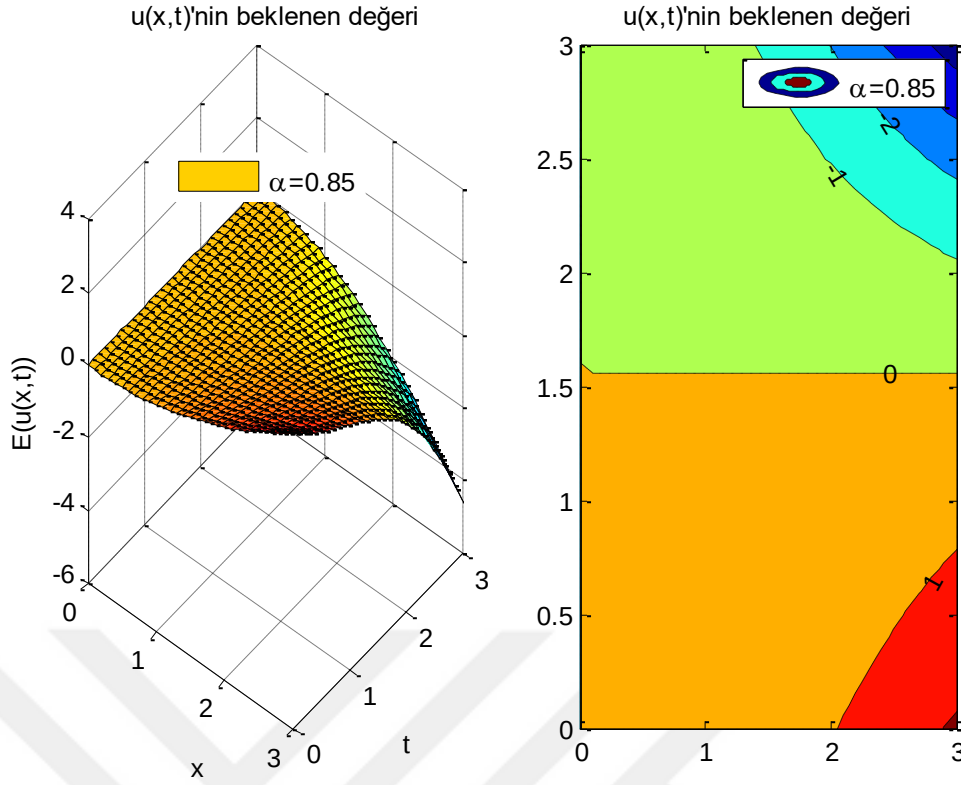
şeklinde hesaplanır. $\varrho = 1, \varsigma = 3$ özel değeri için beklenen değer

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= \frac{1}{4} \left[x^2 - x^2[(1 - \alpha) + \alpha t] + x^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - x^2 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \right] \end{aligned}$$



Şekil 31. Özel değerler $A \sim \text{Beta}(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı





Şekil 32. Özel değerler $A \sim \text{Beta}(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (44) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

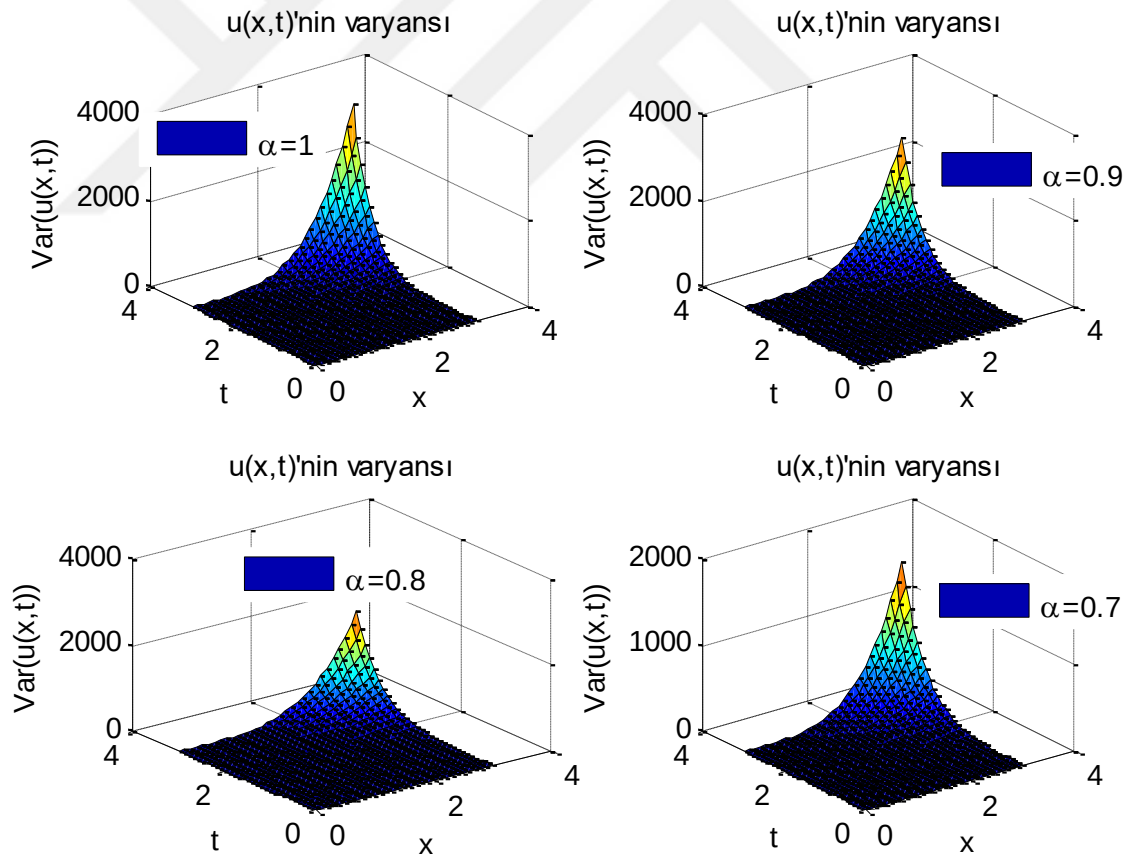
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin varyansı;

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var} \left[Ax^2 - Ax^2[(1 - \alpha) + \alpha t] \right. \\
 &\quad + Ax^2 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] \\
 &\quad \left. - Ax^2 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right] \right] \\
 \text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var}(A) \left[x^4 + x^4[(1 - \alpha) + \alpha t]^2 \right. \\
 &\quad + x^4 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2 \\
 &\quad \left. + x^4 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right]^2 \right]
 \end{aligned}$$

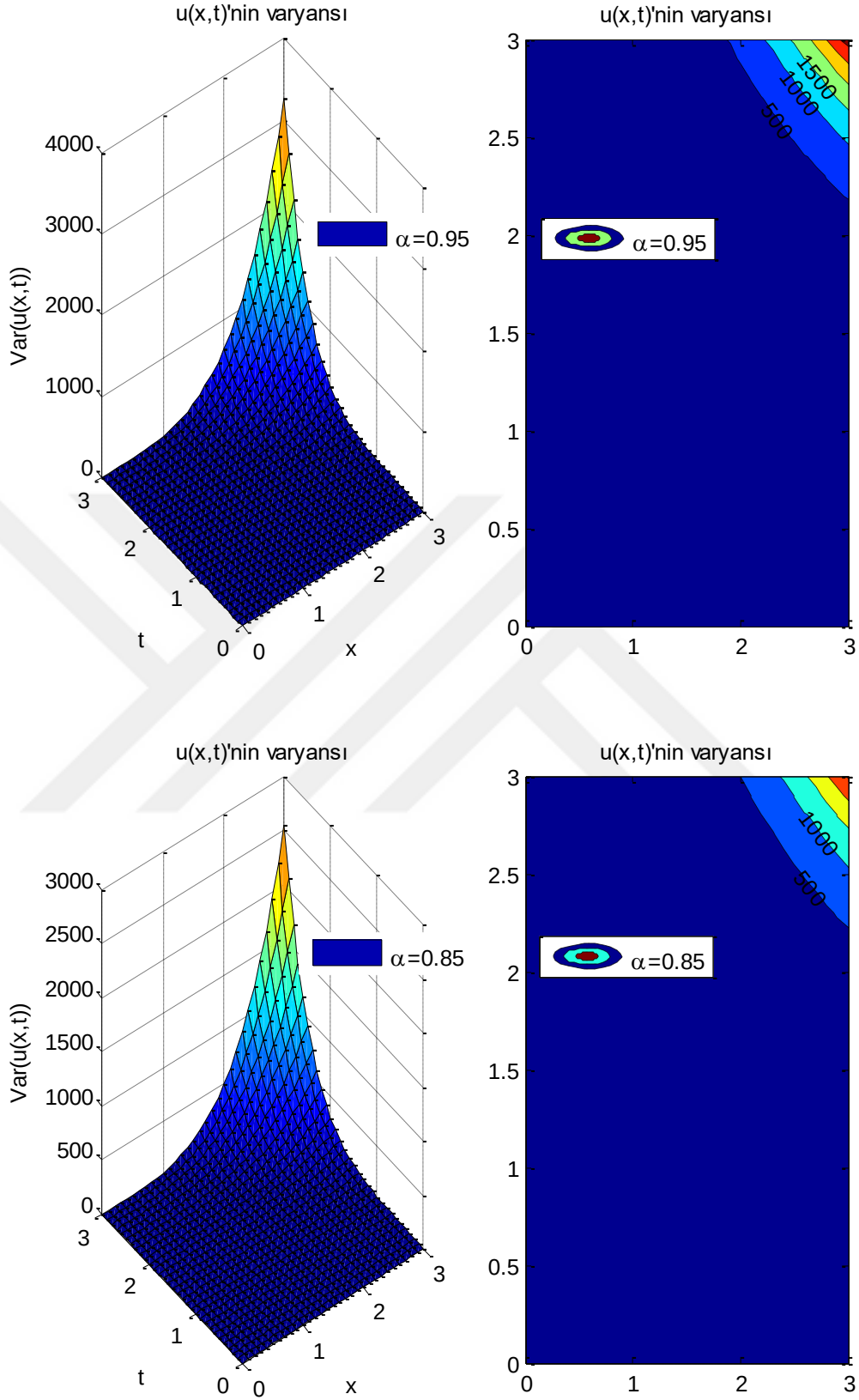
$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] &= \frac{\varrho\varsigma}{(\varrho + \varsigma)^2(\varrho + \varsigma + 1)} \left[x^4 + x^4[(1 - \alpha) + \alpha t]^2 \right. \\
&\quad + x^4 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2 \\
&\quad \left. + x^4 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right]^2 \right]
\end{aligned}$$

$\varrho = 1, \varsigma = 3$, özel değeri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] &= \frac{3}{80} \left[x^4 + x^4[(1 - \alpha) + \alpha t]^2 + x^4 \left[(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + x^4 \left[(1 - \alpha)^3 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \right]^2 \right]
\end{aligned}$$



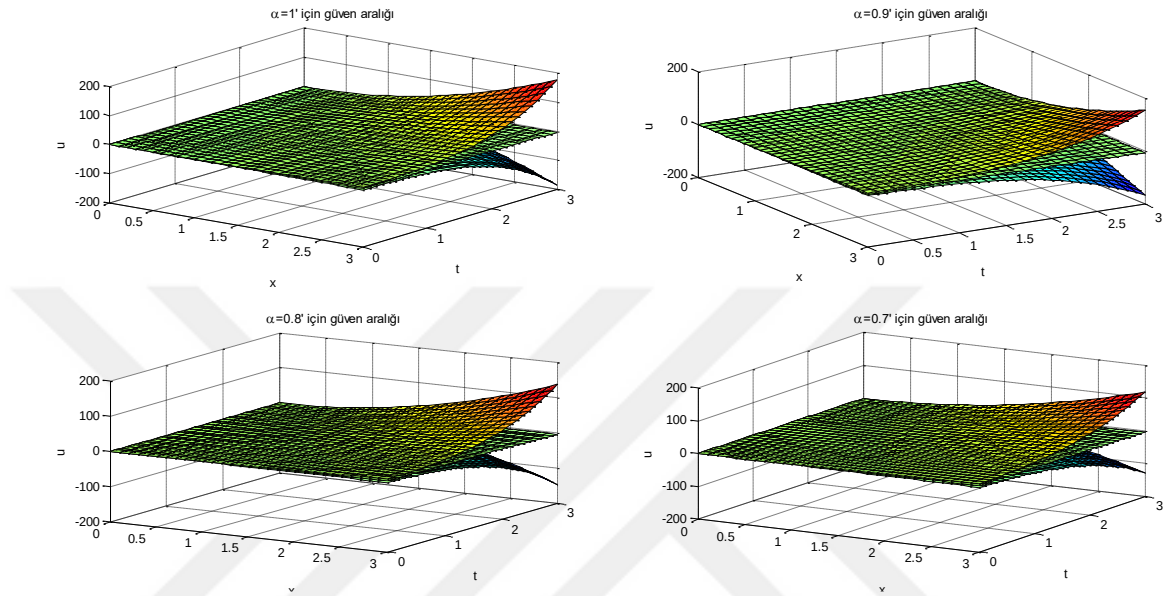
Şekil 33. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44) denkleminin varyansının çözüm davranışı



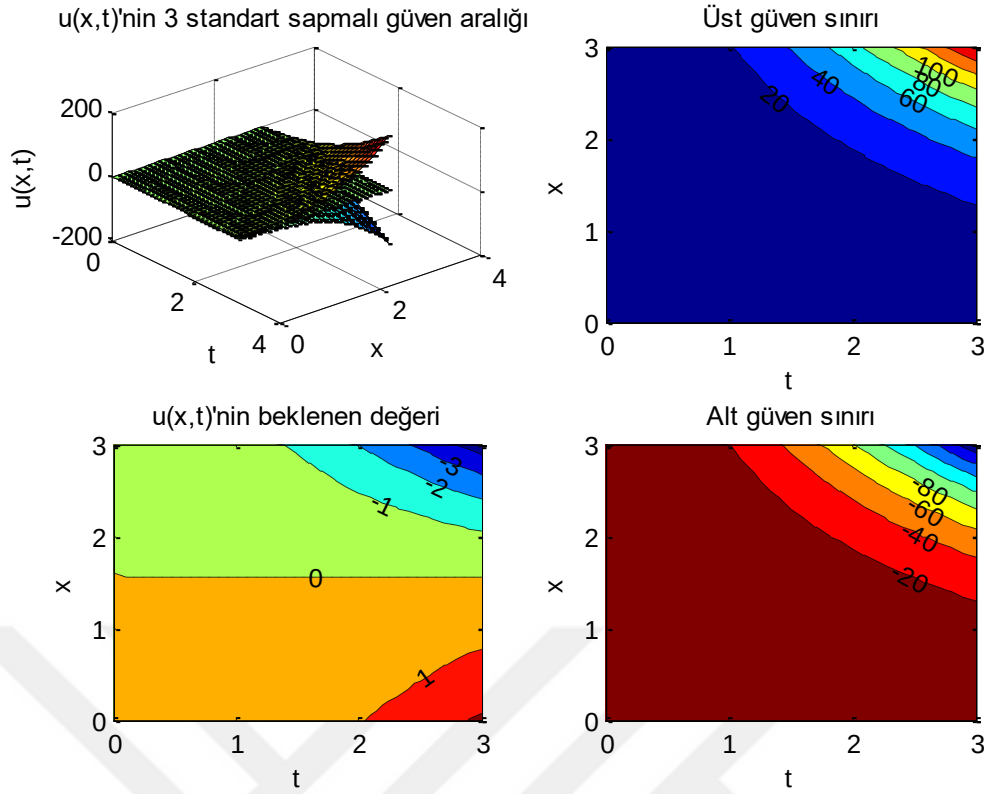
Şekil 34. Özel değerler $A \sim \text{Beta}(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (44) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için Contour plot çözüm

davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x,t)) - 3stdsapma(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$



Şekil 35. Özel değerler $A \sim Beta(\varrho = 1, \varsigma = 3)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (44) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 36. Özel değerler $A \sim \text{Beta}(\rho = 1, \varsigma = 3)$ ve $\alpha = 0.95$ için (44) denkleminin güven aralığının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

Örnek 3.4.3

$${}^{CF}D_t^\alpha u(x, t) = -u \frac{\partial u}{\partial x} + 2Ax^2t + 2A^2x^3t^4 \quad (59)$$

$$u(x, 0) = 0$$

$A \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2)$ Erlang dağılıma sahip rastgele değişken olsun. KDD'i Shehu dönüşüm yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

(59) denklemin her iki tarafına Shehu Dönüşüm uygulayalım.

$$S[{}^{CF}D_t^\alpha u(x, t)] = -S\left[u \frac{\partial u}{\partial x}\right] + S[2Ax^2t + 2A^2x^3t^4]$$

$$\frac{su(x, s, u) - uu(x, 0)}{s + \alpha(u - s)} = -S\left[u \frac{\partial u}{\partial x}\right] + 2Ax^2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 48A^2x^3\left(\frac{u}{s}\right)^5$$

$$su(x, s, u) - 0 = s + \alpha(u - s) \left[-S\left[u \frac{\partial u}{\partial x}\right] + 2Ax^2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 48A^2x^3\left(\frac{u}{s}\right)^5 \right]$$

$$u(x, s, u) = \frac{1}{s} \left[(s + \alpha(u - s)) \left[-S \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + 2Ax^2 \left(\frac{u}{s} \right)^2 + 48A^2x^3 \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right] \right] \quad (60)$$

(60) denkleminin Ters Shehu dönüşümü alınırsa,

$$u(x, t) = S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} \left[-S \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + 2Ax^2 \left(\frac{u}{s} \right)^2 + 48A^2x^3 \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right] \right]$$

$$u(x, t) = S^{-1} \left[-\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right] + S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} \left(2Ax^2 \left(\frac{u}{s} \right)^2 + 48A^2x^3 \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right) \right]$$

$$u(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[N_1 u] \right] + 2Ax^2 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \quad (61)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right] \right]$$

$$\text{İteratif formül } u_0(x, t) = 2Ax^2 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right)$$

$$u_n(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_{n-1}] \right] \quad (62)$$

(62) denkleminde $n = 1$ için :

$$u_1(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S[A_0] \right] \quad (63)$$

elde edilir.

$$u_0(x, t) = 2Ax^2 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \quad (64)$$

$$A_0(u_0) = N_1(u_0) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_0 = \left[2Ax^2 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right] \left[4Ax \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 144A^2x^2 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right] \quad (65)$$

Bulunan (65) değeri (63) denkleminde yerine koyulursa :

$$u_1(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[8A^2x^3 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right)^2 + 480A^3x^4 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) + 6912A^4x^5 \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right)^2 \right] \right]$$

$$u_1(x, t) = -S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u - s)}{s} S \left[8A^2x^3 \left((1 - \alpha)^2t^2 + (1 - \alpha)\alpha t^3 + \frac{\alpha^2t^4}{4} \right) + 480A^3x^4 \left(\frac{(1 - \alpha)^2t^5}{24} + \frac{7(1 - \alpha)\alpha t^6}{240} + \frac{\alpha^2t^7}{240} \right) + 6912A^4x^5 \left(\frac{(1 - \alpha)^2t^8}{576} + \frac{2(1 - \alpha)\alpha t^9}{2880} + \frac{\alpha^2t^{10}}{14400} \right) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & -8A^2x^3S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u-s)}{s} \left(2(1-\alpha)^2 \left(\frac{u}{s} \right)^3 + 6(1-\alpha)\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + 6\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right) \right] \\
& - 480A^3x^4S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u-s)}{s} \left(5(1-\alpha)^2 \left(\frac{u}{s} \right)^6 + 21(1-\alpha)\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^7 \right. \right. \\
& \left. \left. + 21\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^8 \right) \right] \\
& - 6912A^4x^5S^{-1} \left[\frac{s + \alpha(u-s)}{s} \left(70(1-\alpha)^2 \left(\frac{u}{s} \right)^9 \right. \right. \\
& \left. \left. + 252(1-\alpha)\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^{10} + 252\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^{11} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & -8A^2x^3S^{-1} \left[\left(2(1-\alpha)^3 \left(\frac{u}{s} \right)^3 + 6(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^4 + 6(1-\alpha)\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right) \right. \\
& \left. + \left(2(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^4 + 6(1-\alpha)\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^5 + 6\alpha^3 \left(\frac{u}{s} \right)^6 \right) \right] \\
& - 480A^3x^4S^{-1} \left[\left(5(1-\alpha)^3 \left(\frac{u}{s} \right)^6 + 21(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^7 \right. \right. \\
& \left. \left. + 21\alpha^2(1-\alpha) \left(\frac{u}{s} \right)^8 \right) \right. \\
& \left. + \left(5(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^7 + 21(1-\alpha)\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^8 + 21\alpha^3 \left(\frac{u}{s} \right)^9 \right) \right] \\
& - 6912A^4x^5S^{-1} \left[\left(70(1-\alpha)^3 \left(\frac{u}{s} \right)^9 + 252(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^{10} \right. \right. \\
& \left. \left. + 252(1-\alpha)\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^{11} \right) \right. \\
& \left. + \left(70(1-\alpha)^2\alpha \left(\frac{u}{s} \right)^{10} + 252(1-\alpha)\alpha^2 \left(\frac{u}{s} \right)^{11} + 252\alpha^3 \left(\frac{u}{s} \right)^{12} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & -8A^2x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2\alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha)\alpha^2t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3t^5}{5!} \right] - \\
& 480A^3x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2\alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} + \frac{21\alpha^3t^8}{8!} \right] - 6912A^4x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3t^8}{8!} + \right. \\
& \left. \frac{322(1-\alpha)^2\alpha t^9}{9!} + \frac{504(1-\alpha)\alpha^2t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3t^{11}}{11!} \right]
\end{aligned} \tag{66}$$

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n u_j(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \dots$$

$$u(x, t) = 2Ax^2 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) - 8A^2x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha)\alpha^2 t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right] - 480A^3x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2 \alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right] - 6912A^4x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3 t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2 \alpha t^9}{9!} + \frac{504(1-\alpha)\alpha^2 t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right] \quad (67)$$

(67) denkleminde $\alpha = 1$ için :

$$u(x, t) = Ax^2t^2 - \frac{960A^3x^4t^8}{8!} - \frac{174132A^4x^5t^{11}}{11!} + \dots \quad (68)$$

elde edilir.

Erlang dağılımına sahip rastgele değişken X 'in parametreleri $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ 'dir. Rastgele değişken $A \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ 'nin momentleri Erlang dağılımının moment üreten fonksiyonu

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}, \quad t < \lambda$$

kullanılarak belirlenebilir,

$$E[A] = \frac{n}{\lambda}, \quad E[A^2] = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}, \quad E[A^3] = \frac{n^3+3n^2+2n}{\lambda^3} \quad \text{ve} \quad E[A^4] = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{\lambda^4}$$

varyansları

$$\text{Var}[A] = \frac{n}{\lambda^2}, \quad \text{Var}[A^2] = \frac{2n(2n^2+5n+3)}{\lambda^4},$$

$$\text{Var}[A^3] = \frac{3n(3n^4+24n^3+71n^2+90n+40)}{\lambda^6},$$

$$\text{Var}[A^4] = \frac{8n(2n^6+33n^5+227n^4+822n^3+1625n^2+1629n+630)}{\lambda^8}$$

bulunur (Khaniyev vd., 2017).

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ çözümünün beklenen değeri;

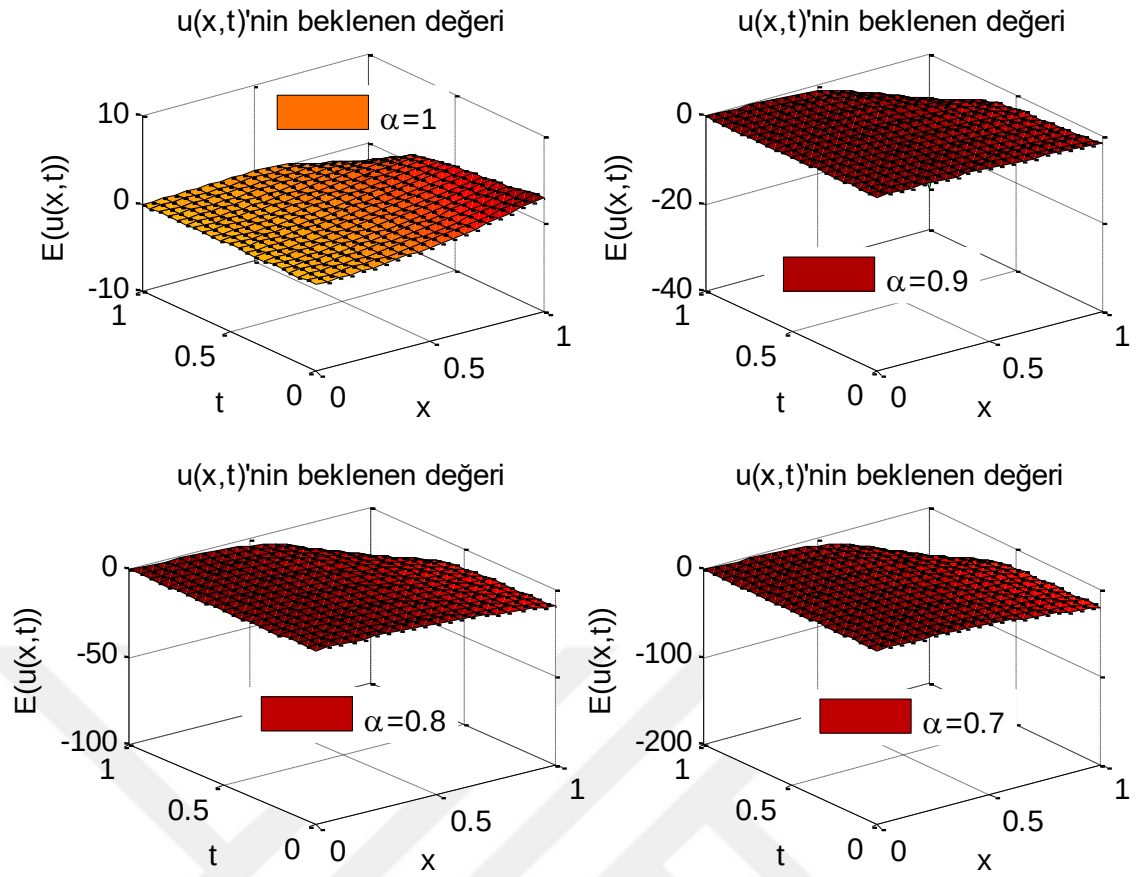
$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] = & \left[2Ax^2 \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right. \\
& - 8A^2x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2\alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha)\alpha^2t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3t^5}{5!} \right] \\
& - 480A^3x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2\alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{21\alpha^3t^8}{8!} \right] \right. \\
& \left. - 6912A^4x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2\alpha t^9}{9!} + \frac{504(1-\alpha)\alpha^2t^{10}}{10!} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{252\alpha^3t^{11}}{11!} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] = & \left[2E(A)x^2 \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48E(A^2)x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right. \\
& - 8E(A^2)x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2\alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha)\alpha^2t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3t^5}{5!} \right] \\
& - 480E(A^3)x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2\alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{21\alpha^3t^8}{8!} \right] \right. \\
& - 6912E(A^4)x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2\alpha t^9}{9!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{504(1-\alpha)\alpha^2t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3t^{11}}{11!} \right] \right]
\end{aligned}$$

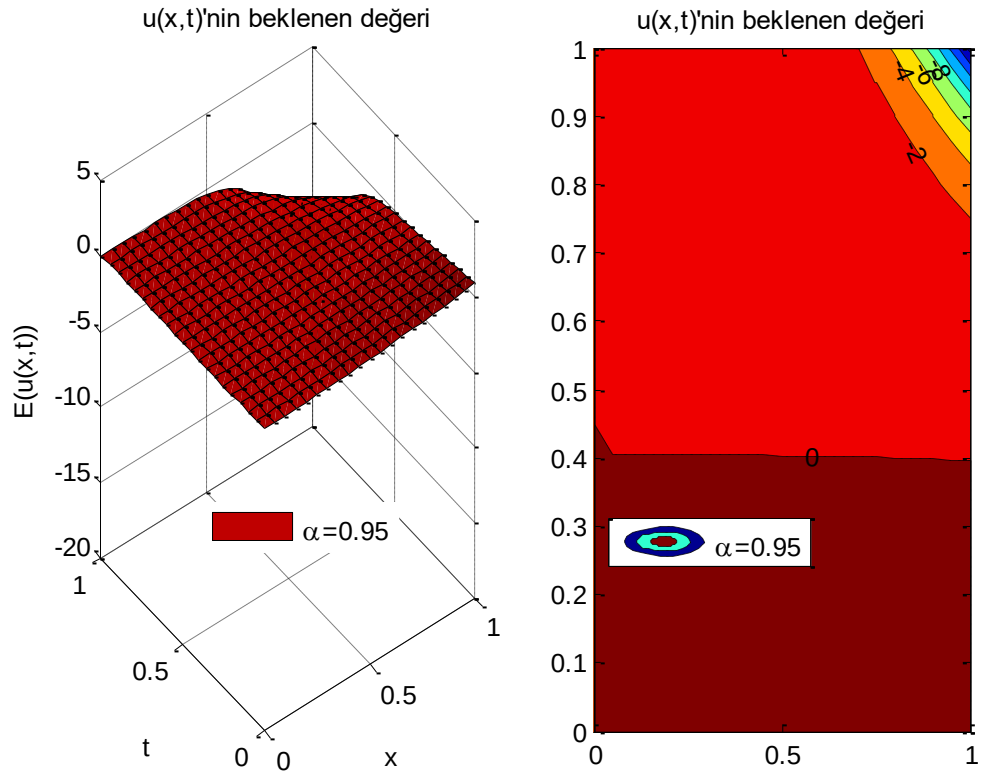
$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] = & \left[\frac{2nx^2}{\lambda} \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + \frac{48n(n+1)x^3}{\lambda^2} \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right. \\
& - \frac{8n(n+1)x^3}{\lambda^2} \left[\frac{2(1-\alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha) \alpha^2 t^4}{4!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right] \right. \\
& - \frac{480(n^3 + 3n^2 + 2n)x^4}{\lambda^3} \left[\frac{5(1-\alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2 \alpha t^6}{6!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right] \right. \\
& - \frac{6912(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)x^5}{\lambda^4} \left[\frac{70(1-\alpha)^3 t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2 \alpha t^9}{9!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{504(1-\alpha) \alpha^2 t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right] \right]
\end{aligned}$$

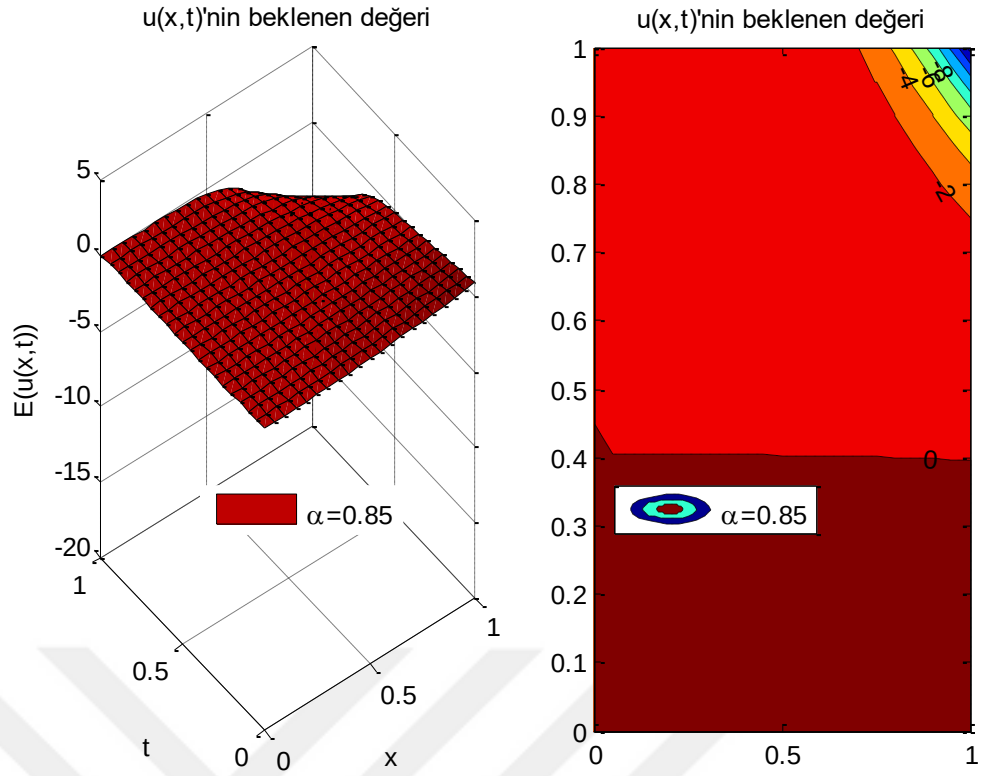
şeklinde hesaplanır. $n = 3, \lambda = 2$ özel değeri için beklenen değer

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] = & \left[3x^2 \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 144x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right. \\
& - 24x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha) \alpha^2 t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right] \\
& - 3600x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2 \alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right] \right. \\
& - 155520x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3 t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2 \alpha t^9}{9!} + \frac{504(1-\alpha) \alpha^2 t^{10}}{10!} \right. \\
& \left. \left. + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right] \right]
\end{aligned}$$



Şekil 37. Özel değerler $A \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı





Şekil 38. Özel değerler $A \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (59) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin varyansı;

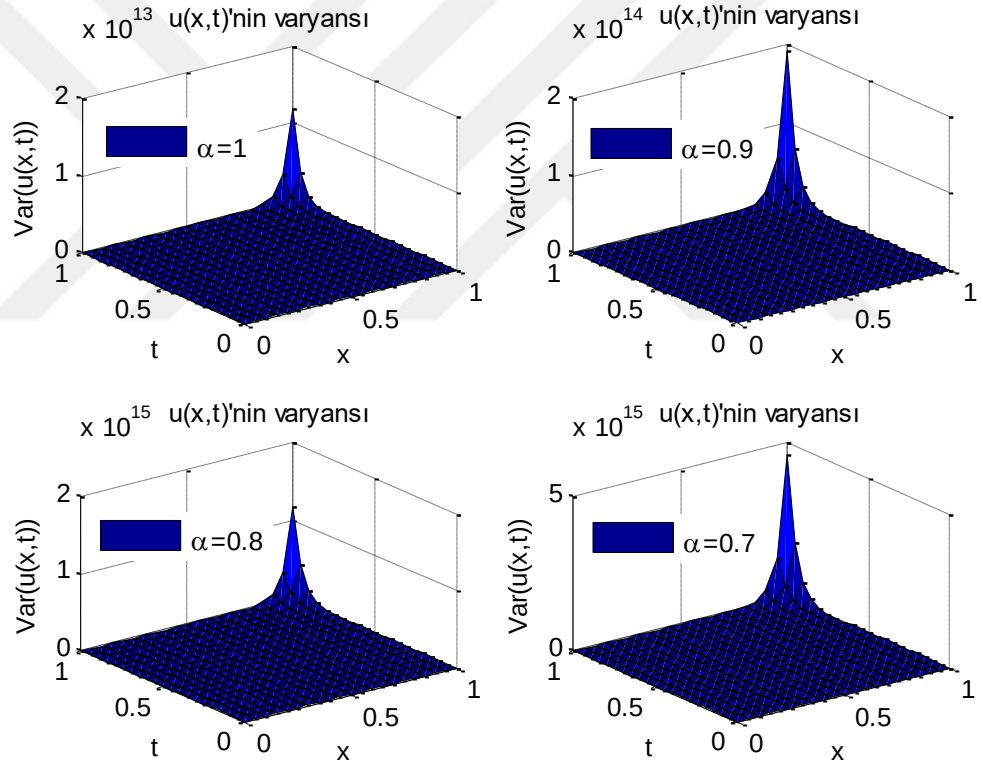
$$\begin{aligned}
 \text{Var}[u(x, t)] = & \text{Var} \left[2Ax^2 \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right) + 48A^2x^3 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right) \right. \\
 & - 8A^2x^3 \left[\frac{2(1-\alpha)^3t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2\alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha)\alpha^2t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3t^5}{5!} \right] \\
 & - 480A^3x^4 \left[\frac{5(1-\alpha)^3t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2\alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{21\alpha^3t^8}{8!} \right] \right. \\
 & - 6912A^4x^5 \left[\frac{70(1-\alpha)^3t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2\alpha t^9}{9!} + \frac{504(1-\alpha)\alpha^2t^{10}}{10!} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{252\alpha^3t^{11}}{11!} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u(x, t)] &= Var(A)4x^4 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right)^2 + Var(A^2)48^2 x^6 \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right)^2 \\
&\quad + Var(A^2)64x^6 \left[\frac{2(1 - \alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1 - \alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1 - \alpha)\alpha^2 t^4}{4!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right]^2 \\
&\quad + Var(A^3)480^2 x^8 \left[\frac{5(1 - \alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1 - \alpha)^2 \alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1 - \alpha)t^7}{7!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right]^2 \\
&\quad + Var(A^4)6912^2 x^{10} \left[\frac{70(1 - \alpha)^3 t^8}{8!} + \frac{322(1 - \alpha)^2 \alpha t^9}{9!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{504(1 - \alpha)\alpha^2 t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right]^2
\end{aligned}$$

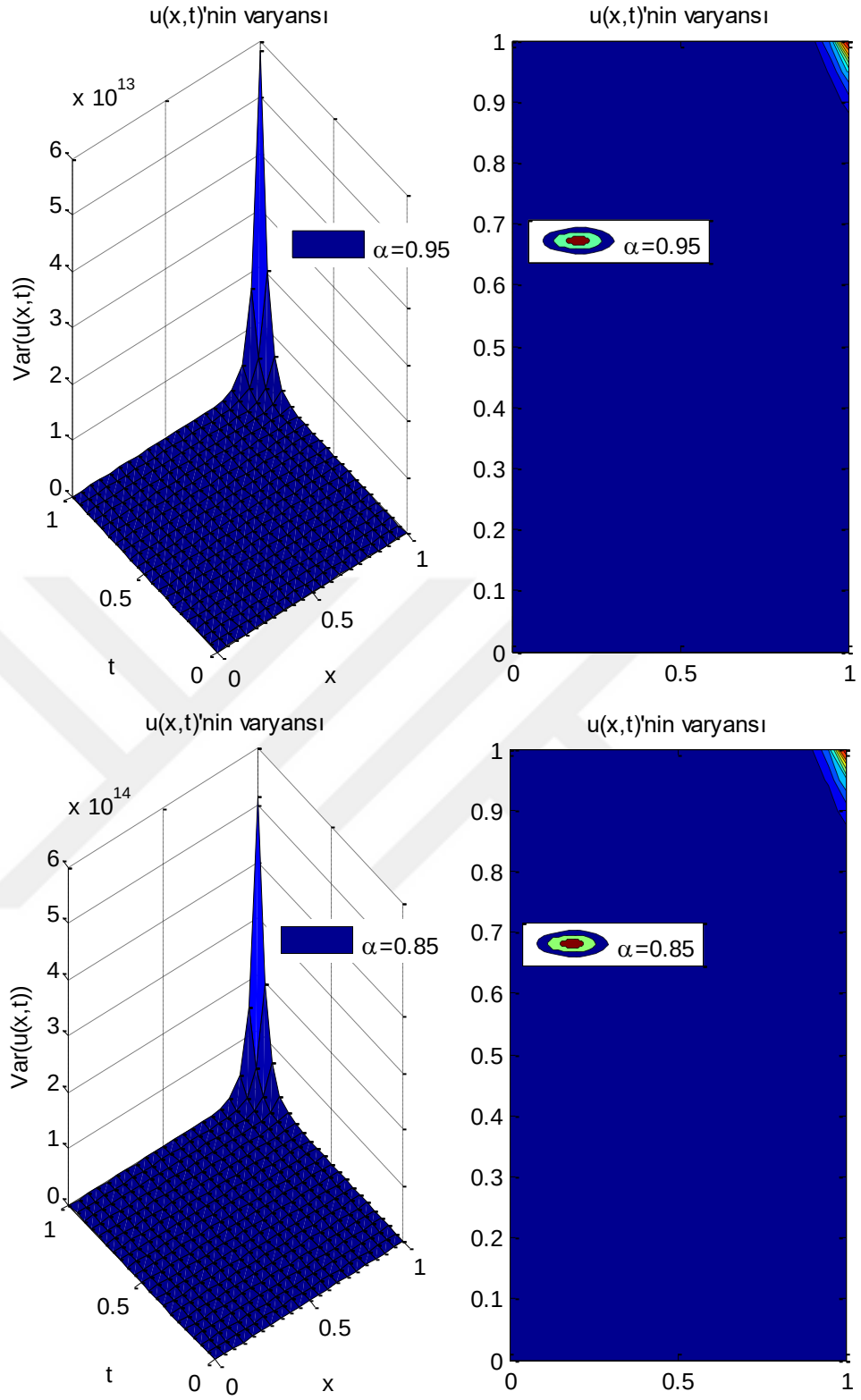
$$\begin{aligned}
&Var[u(x, t)] \\
&= \left(\frac{n}{\lambda^2} \right) 4x^4 \left((1 - \alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right)^2 + \left(\frac{2n(2n^2 + 5n + 3)}{\lambda^4} \right) 48^2 x^6 \left(\frac{(1 - \alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2n(2n^2 + 5n + 3)}{\lambda^4} \right) 64x^6 \left[\frac{2(1 - \alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1 - \alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1 - \alpha)\alpha^2 t^4}{4!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right]^2 \\
&\quad + \left(\frac{3n(3n^4 + 24n^3 + 71n^2 + 90n + 40)}{\lambda^6} \right) 480^2 x^8 \left[\frac{5(1 - \alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1 - \alpha)^2 \alpha t^6}{6!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{42\alpha^2(1 - \alpha)t^7}{7!} + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right]^2 \\
&\quad + \left(\frac{8n(2n^6 + 33n^5 + 227n^4 + 822n^3 + 1625n^2 + 1629n + 630)}{\lambda^8} \right) 6912^2 x^{10} \left[\frac{70(1 - \alpha)^3 t^8}{8!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{322(1 - \alpha)^2 \alpha t^9}{9!} + \frac{504(1 - \alpha)\alpha^2 t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right]^2
\end{aligned}$$

$n = 3, \lambda = 2$ özel değerler için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] = & 3x^4 \left((1-\alpha)t + \frac{\alpha t^2}{2!} \right)^2 + 31104x^6 \left(\frac{(1-\alpha)t^4}{4!} + \frac{\alpha t^5}{5!} \right)^2 \\
& + 864x^6 \left[\frac{2(1-\alpha)^3 t^2}{2!} + \frac{8(1-\alpha)^2 \alpha t^3}{3!} + \frac{12(1-\alpha) \alpha^2 t^4}{4!} + \frac{6\alpha^3 t^5}{5!} \right]^2 \\
& + 59616000x^8 \left[\frac{5(1-\alpha)^3 t^5}{5!} + \frac{26(1-\alpha)^2 \alpha t^6}{6!} + \frac{42\alpha^2(1-\alpha)t^7}{7!} \right. \\
& \left. + \frac{21\alpha^3 t^8}{8!} \right]^2 \\
& + 314426503987x^{10} \left[\frac{70(1-\alpha)^3 t^8}{8!} + \frac{322(1-\alpha)^2 \alpha t^9}{9!} \right. \\
& \left. + \frac{504(1-\alpha) \alpha^2 t^{10}}{10!} + \frac{252\alpha^3 t^{11}}{11!} \right]^2
\end{aligned}$$

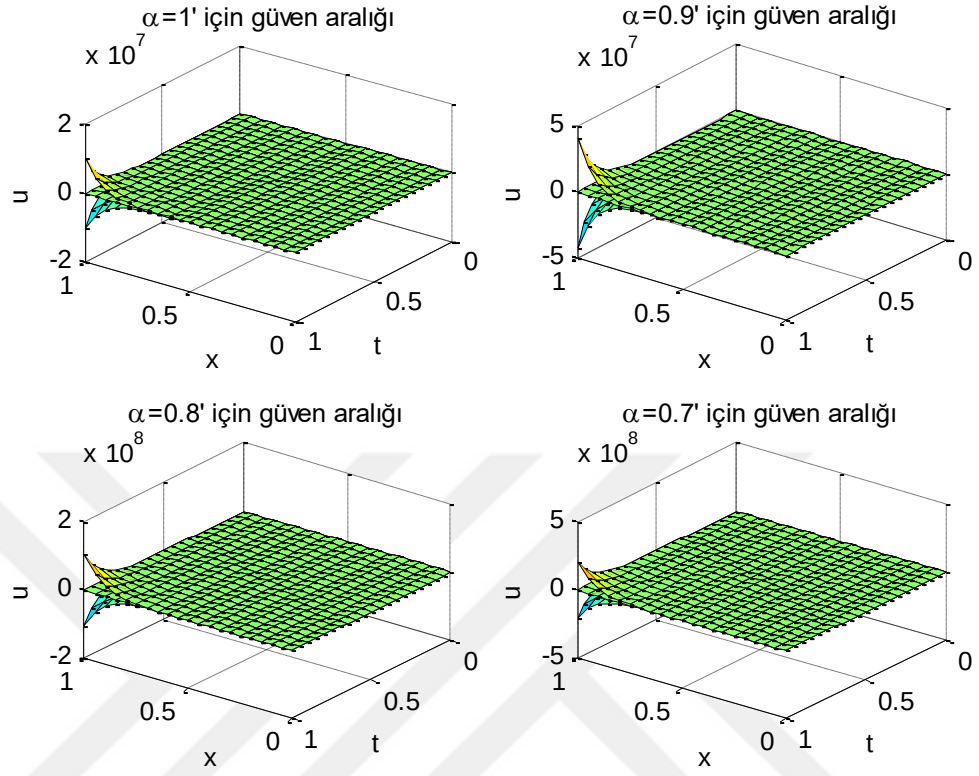


Şekil 39. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ile $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin varyansının çözüm davranışı

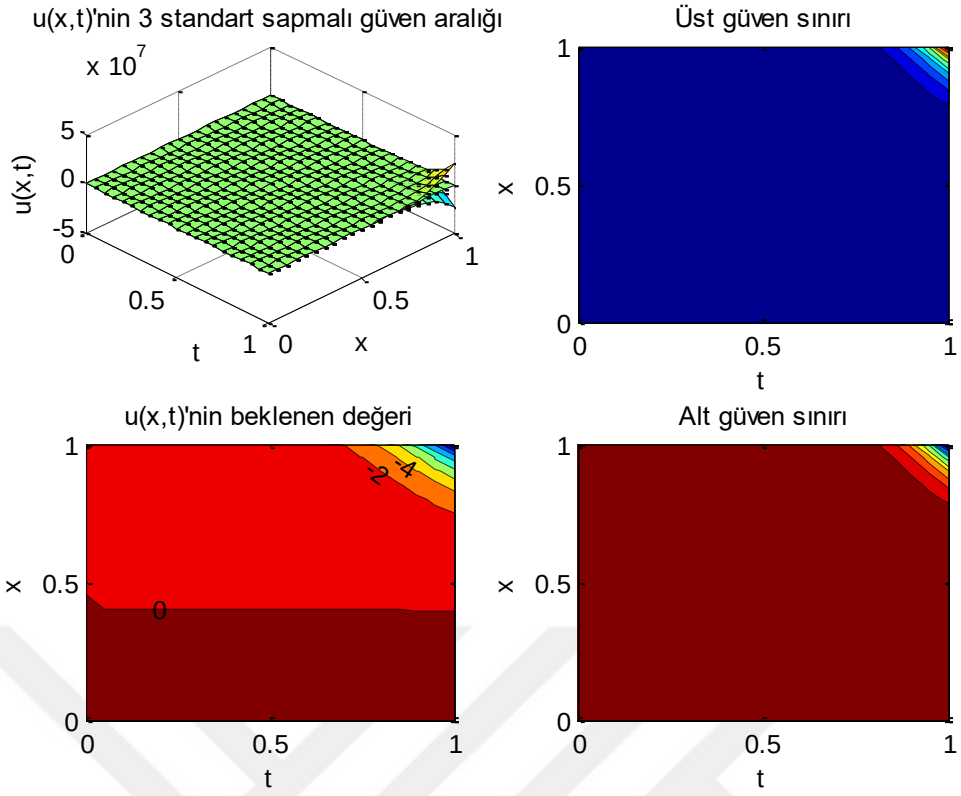


Şekil 40. Özel değerler $A \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ için (59) denkleminin varyansının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x,t)) - 3stdsapma(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$



Şekil 41. Özel değerler $A \sim Erlang(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ için (59) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 42. Özel değerler $A \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95$ için (59) denkleminin güven aralığının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için Contour plot çözüm davranışı

4. İRDELEME

Bu tezin sonuçlarının da gösterdiği gibi, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin başlangıç koşulları veya katsayıları, denklemleri rastgele forma dönüştürmek için rastgele seçildi. Sürekli dağılımlardan, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerini rastgele etkiler altında araştırmak için Düzgün, Normal, Gamma, Üstel, Üçgen, Erlang ve Beta dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri seçildi. Bu rastgele Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri Shehu dönüşüm yöntemi ve Shehu ayrıştırma yöntemi kullanılarak elde edildi. Elde edilen çözümlerin literatürde en çok kullanılan olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları hesap edilerek Matlab paket programı aracılığıyla grafiksel olarak gösterilmiştir. Yapılan literatür taramasında, Shehu dönüşümü ve Shehu ayrıştırma yönteminin adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması ile ilgili çalışmalar mevcut olup rastgele adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerine uygulaması yapılmamıştır. Yapılacak olan bu tez çalışması ile bu boşluk bir nebze de olsa doldurulup, alana katkıda bulunacaktır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, Düzgün, Normal, Gamma, Üstel, Üçgensel, Erlang ve Beta olmak üzere bir veya daha fazla sürekli olasılık dağılımını kullanarak Caputo-Fabrizio kesirli mertebeli adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin katsayıları veya başlangıç koşulları rastgele seçilerek denklemler rastgele hale dönüştürüldü. Beklenen değer, varyans, varyasyon katsayısı ve güven aralıkları gibi olasılıksal karakteristikleri, bu rastgele hale dönüştürülen denklemler için hesaplandı. Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözmek için Shehu dönüşüm metodu ve Shehu ayrıştırma yönteminden kullanılmıştır. Bulunan çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları Matlab ve Maple paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

6. ÖNERİLER

Bu çalışmada, Shehu dönüşümü ve Shehu ayrıştırma yöntemi ile ilgili literatür özeti verilmiş olup yöntemin özellikleri ve diferansiyel denklemlere uygulandığı açıklanmıştır. Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak Matlab ve Maple paket programları kullanılarak incelenmiştir. Shehu dönüşümü ve Shehu ayrıştırma yönteminin, rastgele integral denklemlerine ve rastgele gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulaması yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Akdeniz, F. (2014). Olasılık Teorisi Ve İstatistiksel Dağılımlar. Nobel Yayıncılık.
- Akinyemi, L. ve Iyiola, O. S. (2020). Exact and approximate solutions of time-fractional models arising from physics via Shehu transform, *Mathematical Methods In The Applied Sciences*, 43(12), 7442-7464.
- Alfaqeih, S. ve Mısırlı, E., (2020), On double Shehu transform and its properties with applications, *International Journal Of Analysis And Applications*, 18(3), 381–395.
- Alkaleeli, S. R. (2021). Application of Triple Shehu Transformation for solving Volterra Integro-Partial Differential Equation, *Journal Of Pure & Applied Sciences*, 20(4), 132–136.
- Alkaleeli, S. R., Mtawal, A. A. H. ve Hmad, M. S. (2021). Triple Shehu transform and its properties with applications, *African Journal Of Mathematics And Computer Science Research*, 14(1), 4–12.
- Andualem, M. ve Asfaw, A. (2022). Application of Shehu transform to Mechanics, Newton's Law of Cooling and Electric circuit problems, *International Research Journal Of Natural Sciences*, 10(1), 54–65.
- Benattia, M. E. ve Belghaba, K. (2021). Shehu Conformable Fractional Transform, Theories and Applications, *Journal of Science and Engineering*, 18(1), 024-032.
- Belgacem, R., Baleanu, D. ve Bokhari, A. (2019). Shehu Transform And Applications To Caputo-Fractional Differential Equations, *International Journal Of Analysis And Applications*, 17(6), 917–927.
- Bokhari, A., Baleanu, D. ve Belgacem, R. (2019). Application of Shehu Transform To Atangana-Baleanu Derivatives, *Journal Of Mathematics And Computer Science*, 20(2), 101–107.
- Bribesh, F. A. M. (2023). On Shehu Transform with Application of Solutions of Fractional Differential Equations, *Journal Of Pure & Applied Sciences*, 22(3), 28–30.
- Çetinkaya, S. ve Demir, A. (2024). On Applications Shehu Variational Iteration Method to Time Fractional Initial Boundary Value Problems, *Konuralp Journal of Mathematics*, 12(1), 13–20.
- Erol, A. S., Anaç, H. ve Olgun, A. (2023). Oransal Gecikmeli Uyumlu Zaman-Kesirli Swift Hohenberg Denkleminin Yeni Yöntemlerle Sayısal Çözümleri, *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik Ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 5(1), 1-24.

- Feller, W. (1968). An Introduction To Probability Theory And Its Applications (Vol. 1). Wiley.
- Higazy, M., Aggarwal, S. ve Hamed, Y. S. (2020). Determination of Number of Infected Cells and Concentration of Viral Particles in Plasma during HIV-1 Infections Using Shehu Transformation, *Journal Of Mathematics*, 1–13.
- Issa, A. ve Mensah, Y. (2020). Shehu Transform: Extension to Distributions and Measures, *Journal Of Nonlinear Modeling And Analysis*, 2(4), 541–549.
- Khalouta, A. ve Kadem, A. (2019). A New Method to Solve Fractional Differential Equations: Inverse Fractional Shehu Transform Method, *Applications and Applied Mathematics : An International Journal (AAM)*, 14(2), 926– 941.
- Khalouta, A. ve Kadem, A., (2020), A Comparative Study of Shehu Variational İteration Method and Shehu Decomposition Method for Solving Nonlinear Caputo Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients, *Applications And Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 15(1), 1–24.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., & Kesemen, T. (2017). *Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler*. Nobel Akademik.
- Maitama, S. ve Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(2), 167-190.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z., ve Kesemen, T. (2019). Solving of Some Random Partial Differential Equations by Using Differential Transformation Method and Laplace- Padé Method. *Güfbed/Gustij*, (2019) 9 (1), 108-118.
- Merdan, M., ve Atasoy, N. (2023). On the solutions of fractional random ordinary differential equations with the Residual power series method. *Alexandria Engineering Journal*, 70, 169-177.
- Merdan, M., ve Öktem, S. (2024). On solutions of time fractional order random HIV/AIDS modelling. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 42(6), 1899-1906.
- Şahin, Y. (2024). *Aboodh-Adomian Yöntemi İle Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). Gümüşhane Üniversitesi.
- Şahin, Y., ve Merdan, M. (2025). The Solutions of Caputo-Fabrizio Random Fractional Ordinary Differential Equations by Aboodh Transform Method. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 18(1), 149-170.

- Singh A. ve Pippal S. (2023). Solving Nonlinear Fractional Differential Equations by Using Shehu Transform and Adomian Polynomials, *Contemporary Mathematics*, 5(1), 797–816.
- Singh, A. ve Pippal, S. (2023). Solution of nonlinear fractional partial differential equations by Shehu transform and Adomian decomposition method (STADM), *International Journal of Mathematics for Industry*, 16(1), 18.
- Wiwatwanich, A. ve Poltem, D. (2022). Fractional Shehu Transform for Solving Fractional Differential Equations without Singular Kernel, *International Journal Of Mathematics And Computer Science*, 17(3), 1341–1350.



ÖZGEÇMİŞ

Zahide KARA, ilk ve ortaokulu Konya-Ereğli Toros İlköğretim Okulu'nda okudu. Lise öğrenimini Konya-Ereğli Atatürk Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği'nden mezun oldu. 2023 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başlamıştır. Evli ve iki çocuk annesidir.



