

**SHRINKAGE TAHMİN EDİCİLER SINIFI
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Şenay ÖZDEMİR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2012
ANKARA**

Şenay ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “SHRİNKAGE TAHMİN EDİCİLER SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

.....

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

.....

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Aslıhan ALHAN

.....

İstatistik, Ufuk Üniversitesi

Tarih: 09/01/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şenay ÖZDEMİR

SHRINKAGE TAHMİN EDİCİLER SINIFI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA
(Yüksek Lisans Tezi)

Şenay ÖZDEMİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2011

ÖZET

Yığına ilişkin istatistiksel bir çıkarım yapabilmek için öncelikle bu yığının parametreleri belirlenmeye çalışılır. Bu amaç doğrultusunda sapmasız tahmin ediciler yaygın olarak kullanılır. Sapmasız tahmin edicilerin büyük varyansa sahip olmaları durumunda daha küçük varyansa sahip sapmalı tahmin edicilerin kullanılması söz konusu olabilir. Bu doğrultuda shrinkage tahmin yöntemleri kullanılabilir. Shrinkage tahmin yöntemleri yardımıyla yığın parametreleri için sapmasız tahmin ediciye göre daha küçük ortalama hata kare değerine sahip sapmalı tahmin ediciler elde edilebilir. Bu çalışmada öncelikle shrinkage tahmin yöntemleri incelenmiş ve özetlenmiştir. Daha sonra normal ve üstel dağılımlarının parametreleri için shrinkage tahmin ediciler incelenmiştir. Ardından Pareto dağılımının şekil parametresi için shrinkage tahmin ediciler oluşturulmuştur. Bu sapmalı tahmin ediciler ortalama hata kareleri vasıtasıyla teorik olarak sapmasız tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. Son olarak, simülasyon çalışmaları yardımıyla sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin edicilere göre göreceli etkinlikleri hesaplanmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Sapma, Shrinkage tahmin, Ortalama hata kare, Pareto Dağılımı
Sayfa Adedi : 87
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL

A STUDY ON A CLASS OF SHRINKAGE ESTIMATORS**(M.Sc. Thesis)****Şenay ÖZDEMİR****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 2012****ABSTRACT**

Primarily parameters of the population are tried to determine in order to make a statistical deduction about any population. Unbiased estimators are widely used for this purpose. It can be mentioned that using biased estimators with smaller mean square error if the unbiased estimator has high mean square error. Accordingly shrinkage estimation methods can be used. Estimators which have smaller mean square error than that of unbiased estimators can be obtained by the help of shrinkage estimation methods. Firstly shrinkage estimation methods are researched and summarized in this study. Then shrinkage estimators for parameters of normal and exponential distribution are analyzed. After that, shrinkage estimators constituted for the shape parameter of Pareto distribution. This biased estimators theoretically compared with unbiased estimators by means of mean square error. Finally, relative efficiencies of biased estimators with regard to unbiased estimators are calculated and conclusions are commented.

Science Code : 205.1.066**Key Words : Bias, Shrinkage estimation, mean square error, Pareto Distribution****Page Number: 87****Adviser : Asist. Prof. Dr. Meral EBEGİL**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarını benden esirgemeyen Danışman Hocam, Yrd. Doç. Dr. Meral EBEGİL'e, yine kıymetli görüşlerinden faydalandığım hocam Yrd. Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR'a ve her zaman olduğu gibi bu süreçte de beni destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. ÖNERİLEN SHRINKAGE (DARALTICI) TAHMİN EDİCİLER	4
2.1. Thompson (1968) Tarafından Önerilen Tahmin Edici	4
2.2. Jani (1991) Tarafından Önerilen Tahmin Edici Sınıfı.....	5
2.3. Singh H.P. ve Saxena S. (2003) Tarafından Önerilen Tahmin Edici Sınıfı	7
3. NORMAL DAĞILIMDA KONUM VE DAĞILIŞ PARAMETRELERİ İÇİN DARALTILMIŞ (SHRUNKEN) TAHMİN EDİCİLER.....	8
3.1. Konum Parametresi μ İçin Önerilen Tahmin Edici	8
3.1.1. μ parametresi için önerilen tahmin ediciye ilişkin ortalama hata kare.	8
3.1.2. μ parametresine ait daraltılmış tahmin edicinin incelenmesi	10
3.2. Dağılış Parametresi σ^2 İçin Daraltılmış Tahmin Ediciler	13
3.2.1. σ^2 parametresi için Önerilen tahmin edici	13
3.2.2. σ^2 parametresi için önerilen tahmin edici sınıfı $\hat{\sigma}_{(p)}^2$	15
3.2.3. $\hat{\sigma}_{(p)}^2$, $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicileri ile s^2 tahmin edicisinin karşılaştırılması	20

3.2.4. σ^2 parametresi için önerilen tahmin edici sınıfı $\hat{\sigma}_{(p,q)}^2$	22
3.2.5. Tahmin edicilerin karşılaştırılması.....	27
4. ÜSTEL DAĞILIMDA DAĞILIŞ PARAMETRESİ İÇİN DARALTILMIŞ (SHRUNKEN) TAHMİN EDİCİ AİLESİ	33
4.1. Tahmin edicilerin karşılaştırılması.....	40
5. PARETO DAĞILIMINDA ŞEKİL PARAMETRESİ İÇİN DARALTILMIŞ (SHRUNKEN) TAHMİN EDİCİLER	43
5.1. β Parametresinin EÇOB Tahmin Edicisi	43
5.2. β Parametresinin Sapmasız Tahmin Edicisi.....	46
5.3. β Parametresi için Önerilen $\hat{\beta}_{ss}$ Tahmin Edicisi.....	47
5.4. β Parametresi için Önerilen $\hat{\beta}_{se}$ Tahmin Edicisi.....	51
5.5. $\hat{\beta}_{ss}$ ile $\hat{\beta}_{se}$ Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması.....	56
5.6. β Parametresi için Önerilen $\beta_{(p)}^*$ Tahmin Edici Sınıfı	58
5.7. β Parametresi için Önerilen $\beta_{(p)}^*$ Tahmin Edici Sınıfı	64
5.8. $\beta_{(p)}^*$ ile $\beta_{(p)}^*$ Tahmin Edici Sınıflarının Karşılaştırılması.....	71
6. SONUÇ	76
KAYNAKLAR	78
EKLER.....	80
EK-1: Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar	81
ÖZGEÇMİŞ	87

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. σ^2 için önerilen bazı tahmin edicilerin sapmasız tahmin edici s^2 'ye göre görelî etkinlikleri.....	21
Çizelge 4.1. Üstel dağılımın dağılış parametresi için önerilen bazı tahmin edicilerinin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri	41
Çizelge 5.1. $\beta_0/\beta = 2.5$ durumunda farklı n değerleri için EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye görelî etkinlik değerleri	57
Çizelge 5.2. Eş. 5.29'da önerilen tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri	72
Çizelge 5.3. Eş. 5.45'de önerilen tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri	73
Çizelge 5.4. Farklı n ve p değerleri için Eş. 5.29 ve Eş. 5.45 tahmin edici sınıflarının görelî sapmaları	74

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Normal dağılıma sahip bir yığının ortalaması için bazı daraltılmış tahmin ediciler.	11
Şekil 3.2. Normal dağılıma sahip bir yığının ortalaması için bazı daraltılmış tahmin ediciler.	12
Şekil 5.1. EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinlikleri.....	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

E

Beklenen Değer

Γ

Gamma Fonksiyonu

∂

Türev

V

Varyans

$\widehat{Var}$

Varyansın Tahmini

Kısaltmalar

Açıklama

EÇOB

En Çok Olabilirlik

ENDOST

En İyi Doğrusal Sapmasız Tahmin Edici

OHK

Ortalama Hata Kare

1. GİRİŞ

Yığın parametresinin tahmini istatistik biliminde önemli bir yer tutmaktadır. Yığına ilişkin bir çıkarım yapabilmek için öncelikle bu yığının tanımlayıcı parametrelerinin belirlenmesi gerekir. Bu amaç doğrultusunda yansız tahmin ediciler yaygın olarak kullanılır. Beklenen değeri yığın parametresine eşit olan yansız tahmin edicilerin büyük varyansa sahip olmaları durumunda daha küçük varyansa sahip olan yanlı tahmin edicilerin kullanılması söz konusu olabilir. Bu tahmin yöntemlerinden bir tanesi shrinkage tahmin yöntemidir. Tahmin yönteminde genel olarak sapmasız tahmin edici, ortalama hata kare (OHK)'yi en küçükleyecek şekilde belirlenen bir sabit ile çarpılarak sapmalı ve küçük varyanslı yeni bir tahmin edici elde edilir.

Buradan hareketle bilinmeyen yığın parametrelerinin sapmalı ama daha küçük OHK'li tahminiyle ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Thompson (1968,a) yığın ortalamasının en iyi doğrusal sapmasız tahmin edicisi (ENDOST)'nin OHK değerini daraltma faktörü yardımıyla küçülterek daha iyi bir tahmin ediciye ulaşmaya çalışmıştır [1, 2]. Metha ve Srinivasan(1971) önsel bilgi mevcutken yığın ortalamasının tahmini üzerine bir çalışma yapmışlardır [3]. Govindarajulu ve Sahai (1972), Das (1975), Rao ve Singh(1982), Singh ve Katyar (1988) normal dağılımda değişim katsayısının bilindiği varsayımıyla ortalamanın karesinin tahmin problemi üzerinde çalışmışlar ve önerilmiş birkaç tahmin edici ile ilgili özellikleri ortaya koymuşlardır [4, 5, 6, 8]. Değişim katsayısının bilinmediği durumlarda, bunun yerine Das (1975), Srivastava ve diğerleri (1980), Bhatnagar (1986) ve Singh(1990) tarafından önerilen uygun tahminleri kullanılmıştır [5, 7, 9, 10, 11]. Bununla birlikte bilinmeyen bir yığın parametresinin tahmininde, ilgilenilen parametre hakkında daha iyi bir tahmin edici elde etmede yararlı olabilecek bazı önsel bilgiler mevcuttur. Shrinkage (daraltıcı) tahmin yöntemi; parametre hakkındaki önsel bilginin, örnek için önsel nokta tahmininden veya parametreyi içeren aralıktan elde edildiği yöntemlerden biridir (Thompson (1968a,b), Mehta ve Srinivasan (1971), Jani (1991), Kourouklis (1994)). Yığın varyansı σ^2 'nin tahmin değeri veya önsel değeri σ_0^2 yardımı ile tahmin edilmesi problemi Singh ve Singh (1997) tarafından tartışılmıştır. Singh ve Singh(1997) normal dağılımlı bir yığının varyansı için bir shrinkage

(daraltıcı) tahmin sınıfı olan $\hat{\sigma}_{(p)}^2$ 'yi önermiştir [14]. Singh ve Shukla (2003) yığın varyansı σ^2 'nin bir tahmin değeri veya önsel tahmini σ_0^2 mevcut iken normal dağılımda yığın ortalamasının karesi μ^2 'nin tahmin problemi üzerinde çalışmış, μ^2 ve OHK'nin formülü için bir shrinkage tahmin edici sınıfı olan $T_{(p)}^*$ 'yi önermiştir [15]. Singh ve Saxena (2003), yine yığın varyansı σ^2 'nin bir tahmin değeri veya önsel tahmini σ_0^2 mevcut iken ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılımdan gelen tüm örneklerin dağılış parametresi σ^2 için bir shrinkage tahmin edici sınıfı olan $\hat{\sigma}_{(p,q)}^2$ 'yi önermiştir [16].

Pareto dağılımı ilk olarak Pareto (1897) tarafından gelir dağılımı üzerine yapılan çalışmada kullanılmıştır [17]. Rytgaard (1990) çalışmasında Pareto dağılımının şekil parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi (EÇOB) ve Moment Tahmin edicileri üzerinde çalışmıştır. Elde ettiği EÇOB tahmin edicisini kullanarak şekil parametresi için en küçük varyanslı sapmasız bir tahmin edici önermiştir [18]. Singh ve arkadaşları (1996) yaptıkları çalışmada Pareto dağılımının dağılış (scale) parametresinin EÇOB ve yansız tahmin edicileri için shrinkage tahmin yöntemini kullanarak yeni bir tahmin edici sınıfı önermiş ve önerilen bu tahmin edici sınıfının bazı durumlarda diğer tahmin edicilerden üstün olduğunu OHK'lerini karşılaştırarak göstermiştir [19]. Prakash ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada Pareto dağılımının şekil parametresinin önsel bilgisi mevcutken dağılış parametresi için bazı test tahmin edicileri önermiş ve önerilen tahmin ediciler ile yansız tahmin edicilerin karşılaştırılmasında hata kare kayıp fonksiyonunu (squared error loss function) kullanmıştır [20]. Prakash (2009) çalışmasında Pareto dağılımının şekil parametresi için bazı daraltıcı test tahmin edicileri ile Bayes tahmin edicileri ve özellikleri üzerinde çalışmış ve bu tahmin edicileri göreceli etkinlikleri yardımıyla karşılaştırmıştır [21].

Bu çalışmada, başlangıçta shrinkage tahmin yöntemleri tanıtılmaya çalışılmıştır. Daha sonra normal dağılımın konum ve dağılış parametreleri ile üstel dağılımın dağılış parametresine ilişkin farklı shrinkage tahmin ediciler hem teorik hem de yapılan uygulama çalışmaları yardımıyla incelenmiştir.

Bu bilgilerin ışığı altında Pareto dağılımının şekil parametresi için farklı shrinkage tahmin ediciler oluşturulmuştur. Oluşturulan bu sapmalı tahmin ediciler ile geleneksel tahmin edicilere ilişkin sapma ve görelî etkinlik değerleri hem teorik olarak hem yapılan simülasyon ve uygulama çalışmaları yardımıyla karşılaştırmış ve gerekli yorumlar yapılmıştır.

2. ÖNERİLEN SHRINKAGE (DARALTICI) TAHMİN EDİCİLER

2.1. Thompson (1968) Tarafından Önerilen Tahmin Edici

Thompson (1968) tarafından bir “önsel bilgi” doğrultusunda ENDOST, daraltma faktörü olan c ile çarpılarak elde edilen daraltılmış bir tahmin edici ele alınmıştır. c , $0 < c \leq 1$ aralığında bir sabit, $\hat{\theta}$ değeri, θ parametresinin tahmin edicisi ve θ_0 değeri, θ parametresinin önsel değeri olmak üzere θ parametresi için,

$$\hat{\theta}_s = \hat{c}(\hat{\theta}) + (1 - \hat{c})\theta_0 \quad (2.1)$$

şeklinde yeni bir tahmin edici önerilmiştir [1]. Bu tahmin edici genel olarak bir shrinkage tahmin edicisi olarak adlandırılır. Eş. 2.1’deki ifade düzenlendiğinde,

$$\hat{\theta}_s = \hat{c}(\hat{\theta} - \theta_0) + \theta_0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir .

Thompson (1968) tarafından Eş. 2.2’de önerilen tahmin edicideki daraltma faktörü olan c parametresi, $E[c(\hat{\theta} - \theta_0) - (\theta - \theta_0)]^2$ ifadesini, yani önerilen tahmin ediciye ilişkin OHK’yi en küçükleyecek şekilde seçilmiştir [1]. Buradan hareketle $\hat{\theta}_s$ tahmin edicisine ait OHK,

$$\begin{aligned} E[c(\hat{\theta} - \theta_0) - (\theta - \theta_0)]^2 &= E \left[c^2(\hat{\theta} - \theta_0)^2 - 2c(\hat{\theta} - \theta_0)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2 \right] \\ &= c^2 E \left[(\hat{\theta} - \theta_0)^2 \right] - 2c(\theta - \theta_0) E[(\hat{\theta} - \theta_0)] + (\theta - \theta_0)^2 \\ &= c^2 \left[V(\hat{\theta}) + \{E(\hat{\theta} - \theta_0)\}^2 \right] - 2c(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadenin c ’ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E[c(\hat{\theta} - \theta_0) - (\theta - \theta_0)]^2}{\partial c} &= 2c[V(\hat{\theta}) + (\theta - \theta_0)^2] - 2(\theta - \theta_0)^2 \\
2c[V(\hat{\theta}) + (\theta - \theta_0)^2] - 2(\theta - \theta_0)^2 &= 0 \\
c &= \frac{(\theta - \theta_0)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta - \theta_0)^2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ifadesine ulaşılır.

c daraltma faktörünün $\hat{c} = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{(\hat{\theta} - \theta_0)^2 + \widehat{Var}(\hat{\theta})}$ şeklinde oluşturulan tahmin değeri Eş. 2.2’de yerine yazıldığında shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}_s = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{(\hat{\theta} - \theta_0)^2 + \widehat{Var}(\hat{\theta})} (\hat{\theta} - \theta_0) + \theta_0 \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Buradan hareketle normal dağılıma sahip bir yığının ortalaması μ parametresine ilişkin önerilen tahmin edici,

$$\hat{\mu} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{(\bar{x} - \mu_0)^2 + s^2/n} (\bar{x} - \mu_0) + \mu_0 \tag{2.5}$$

şeklinde oluşturulabilir.

2.2. Jani (1991) Tarafından Önerilen Tahmin edici sınıfı

Jani (1991) üstel dağılımlı bir yığının dağılış parametresinin tahmininde kullanılmak üzere bir tahmin ediciler sınıfını önermiştir [12]. Bu tahmin ediciler sınıfı;

$$\tilde{\theta}_{(p)} = \theta_0 \left[1 + w \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}} \right)^p \right] \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada θ_0 ; θ parametresinin bir önsel değeri, p ; sıfır olmayan bir reel sayı ve w ; $\tilde{\theta}_{(p)}$ 'nin OHK'sini en küçükleyen bir sabittir.

Bu tahmin edici sınıfı; w parametresi ile θ 'nın en küçük varyanslı sapmasız tahmin edicisinin çarpılmasıyla daha küçük OHK'ye sahip tahmin ediciler elde edilmesi düşüncesiyle oluşturulmuştur.

Benzer şekilde H.P.Singh ve R.Singh (1997) aynı tahmin edici sınıfını normal dağılıma sahip bir yığının varyansını tahmin etmek amacıyla kullanmışlardır. Yığın varyansı için önerilen tahmin edici sınıfı $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$ ile gösterilmekle birlikte, s^2 ; σ^2 için yansız tahmin edici, σ_0^2 ; σ^2 için önsel değeri, p sıfırdan farklı bir reel sayı ve w ; $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edici sınıfının OHK'sini en küçükleyecek bir sabit olmak üzere,

$$\tilde{\sigma}_{(p)}^2 = \sigma_0^2 \left[1 + w \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p \right] \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır [14]. $OHK(\hat{\sigma}_{(p)}^2)$ değerini en küçükleyecek w değeri bulunarak, izleyen bölümlerde gösterilen işlemler yardımıyla daraltılmış bir tahmin edici sınıfı üretilmiştir, yani;

$$\lambda = \sigma_0^2 / \sigma^2 \text{ ve } w_{(p)} = K_{1(p)} / K_{2(p)} \text{ iken;}$$

$$Sapma(\hat{\sigma}_{(p)}^2) = \sigma^2(\lambda - 1)(1 - w_{(p)})$$

ve

$$OHK(\hat{\sigma}_{(p)}^2) = \sigma_0^2 \left[(\lambda - 1)^2 (1 - w_{(p)})^2 + \frac{2w_{(p)}^2}{n-1} \right]$$

olmak üzere Eş. (2.7) ile verilen tahmin edici sınıfı;

$$\hat{\sigma}_{(p)}^2 = \sigma_0^2 + w_{(p)}(s^2 - \sigma_0^2) \quad (2.8)$$

olarak ifade edilmiştir.

2.3. Singh H.P. ve Saxena S. (2003) Tarafından Önerilen Tahmin edici sınıfı

Singh H.P. ve Saxena S. (2003) normal dağılımın dağılış parametresi σ^2 için önerilen; s^2 'ye ek olarak s^2 'nin tersini ve bu tersin kuvveti olacak bir başka sabiti içeren ve Jani (1991) tarafından önerilen tahmin ediciyi de kapsayan geliştirilmiş bir tahmin edici sınıfı önermiştir [16]. Bu tahmin edici sınıfı,

$$\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2 = \sigma_0^2 \left[1 + w_1 \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p + w_2 \left(\frac{\sigma_0^2}{s^2} \right)^q \right] \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada p ve q ; $p + q \neq 0$ olacak şekilde sıfır olmayan reel sayılardır, w_1 ve w_2 ise $OHK(\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değerini en küçükleyecek şekilde seçilen sabitler ve σ_0^2 ; σ^2 parametresinin bir önsel değeridir. σ_0^2 değeri geçmişteki benzer çalışmalardan veya yapılan deneylerden elde edilen tahmin değeri olabilir.

3. NORMAL DAĞILIMDA KONUM PARAMETRESİ μ VE DAĞILIŞ PARAMETRESİ σ^2 İÇİN DARALTILMIŞ TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde normal dağılımın yığın parametreleri için daraltılmış tahmin ediciler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

3.1. Normal Dağılımda Konum Parametresi μ İçin Daraltılmış Tahmin Edici

X ; ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip bir rassal değişken olsun. Burada X rassal değişkenine ait yığın ortalaması μ parametresinin tahmin problemi ele alınsın. Bilindiği gibi, μ parametresi için $\bar{x}$ yani örnek ortalaması ENDOST'dir.

Burada $0 < c \leq 1$ olmak üzere μ parametresinin farklı bir tahmin edicisi $\hat{\mu} = c\bar{x}$ olarak ele alınmıştır. Bu tür bir daraltma (shrinkage) önsel bilgi $\mu_0 = 0$ olduğu durum için geçerlidir. Bu durumda (yani $\mu_0 = 0$ iken) risk fonksiyonu olarak kullanılan OHK'yi en küçükleyecek c değeri Eş. 2.5 yardımıyla;

$$c = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Buradan yığın ortalaması μ parametresi için yeni tahmin edici;

$$\hat{\mu} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \bar{x} \quad (3.2)$$

olarak elde edilir.

3.1.1. μ parametresi için önerilen tahmin ediciye ilişkin ortalama hata kare

Burada μ parametresine ait daraltılmış tahmin edicinin OHK'sinin, μ parametresinin ENDOST'si olan $\bar{x}$ 'nin OHK'sinden daha küçük olduğu gösterilmiştir. Daraltılmış tahmin edicinin OHK'si

$$OHK(c\bar{x}) = E(c\bar{x} - \mu)^2 \quad (3.3)$$

olarak ifade edilir. c değeri OHK fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
OHK(c\bar{x}) &= E(c\bar{x} - \mu)^2 \\
&= E \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \bar{x} - \mu \right]^2 \\
&= E \left[\left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \right)^2 \bar{x}^2 - 2\bar{x} \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \right) \mu + \mu^2 \right] \\
&= \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \right)^2 E(\bar{x}^2) - 2 \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \right) \mu \widehat{E(\bar{x})} + \mu^2 \\
&= \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \right)^2 \left[(E(\bar{x}))^2 + V(\bar{x}) \right] - 2 \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \right) \mu \cdot \mu + \mu^2 \\
&= \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \right)^2 (\mu^2 + \sigma^2/n) - 2 \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \right) \mu^2 + \mu^2 \\
&= \frac{\mu^4}{(\mu^2 + \sigma^2/n)^2} (\mu^2 + \sigma^2/n) - \frac{2\mu^4}{\mu^2 + \sigma^2/n} + \frac{\mu^4 + \mu^2 \sigma^2/n}{\mu^2 + \sigma^2/n} \\
&= \frac{\mu^4 - 2\mu^4 + \mu^4 + \mu^2 \sigma^2/n}{\mu^2 + \sigma^2/n} \\
&= \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \sigma^2/n
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $OHK(\bar{x}) = Var(\bar{x}) = \sigma^2/n$ olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle, $OHK(c\bar{x}) \leq OHK(\bar{x})$ eşitsizliği yazılabilir.

Ancak $c\bar{x}$ değerine ulaşmak μ parametre değerine ulaşmaktan daha zordur, çünkü c daraltma faktörü hem μ parametresinin hem de σ^2 parametresinin bir fonksiyonudur. Ama hem μ hem de σ^2 yerine tahmin edicileri kullanılabilir. μ parametresi yerine örnek ortalaması istatistiği $\bar{x}$ ve σ^2 parametresi yerine örnek varyansı istatistiği $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ kullanarak c için bir tahmin elde edilebilir. Böylece

$$\hat{\mu}_s = \hat{c}\bar{x} = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + s^2/n} \bar{x}$$

ifadesine ulaşılır.

3.1.2. Normal dağılımda μ 'ye ait daraltılmış tahmin edicinin incelenmesi

Daraltma işlemi, parametrenin önsel değere yakın olmadığı bazı durumlarda artan OHK'ye neden olabilir. Yapılan daraltma işleminin mantıklı olup olmadığına karar vermek için parametreye ait önsel dağılım üzerinde bazı çalışmalar yapmak uygun olabilir. Veya $OHK(\hat{\theta}_s)/OHK(\hat{\theta})$ 'nin θ (veya $\theta/\sqrt{Var(\hat{\theta})}$) ya göre oluşturulan eğrileri yardımıyla incelenmesi daha yararlı olabilir. Bu bölümde $OHK(\hat{c}\bar{x})/OHK(\bar{x})$ 'nin $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ 'ye göre grafikleri üzerinde çalışılmıştır.

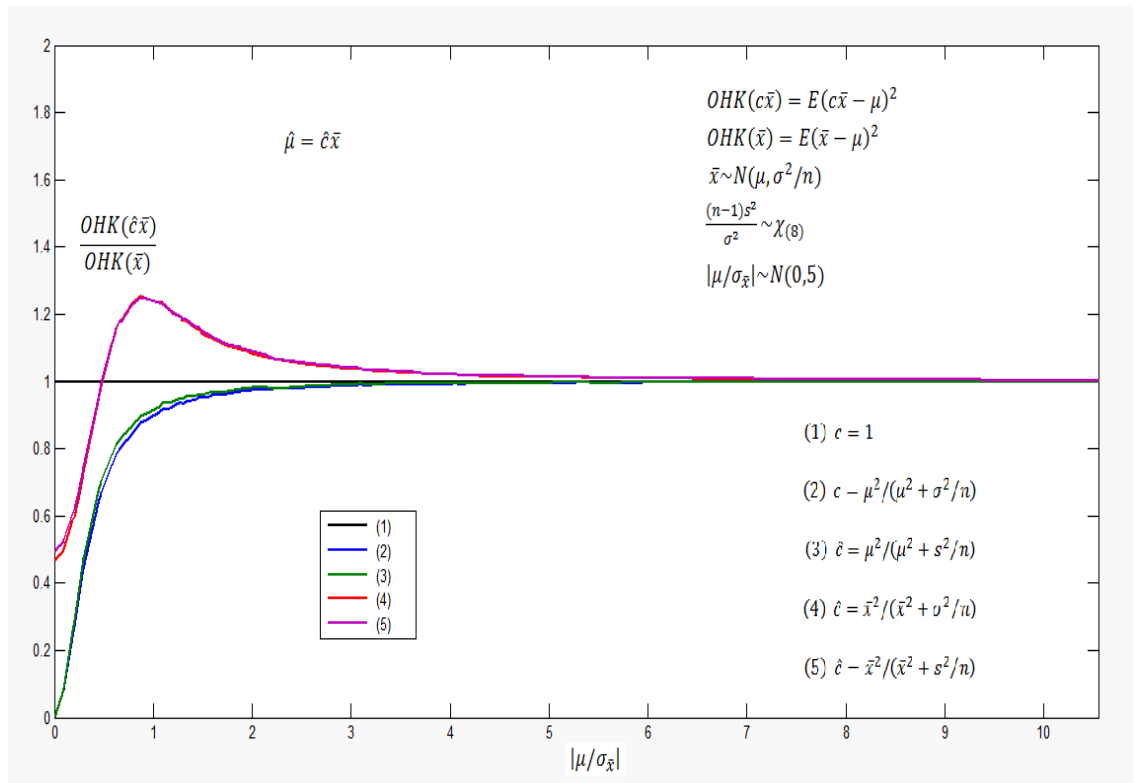
Bu çalışmada Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de; $OHK(\hat{c}\bar{x})$ ve $OHK(\bar{x})$ değerleri, $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ oranının 0 ortalamalı, 5 standart sapmalı normal dağılımdan rassal olarak üretildiği 100000 denemeye sahip Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilmiştir.

Şekil 3.1'de $n=9$ için $OHK(\hat{c}\bar{x})/OHK(\bar{x})$ 'nin $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ 'e karşısındaki eğrileri incelenmektedir. Ortalaması 0 ve standart sapması 5 olan Birikimli Normal dağılım ile ilgili olan yatay eksen kullanılmıştır. Şekil 1'de aşağıdaki daraltıcı (shrinking) faktörler incelenmiştir:

- (1) $c = 1$
- (2) $c = \mu^2/(\mu^2 + \sigma^2/n)$
- (3) $\hat{c} = \mu^2/(\mu^2 + s^2/n)$
- (4) $\hat{c} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + \sigma^2/n)$
- (5) $\hat{c} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + s^2/n)$

Daha önce teorik olarak gösterildiği gibi (2) eşitliği, (1) eşitliğinden daha düşük OHK değerleri verir. (3) eşitliği, (2) eşitliğine göre sadece çok az miktarda daha büyük OHK değerine sahiptir. Buna ek olarak, (4)'e ait OHK hemen hemen (5) 'e ait OHK ile aynıdır. Bu yüzden c 'nin hesaplanmasında μ parametresinin bilgisi, σ^2 parametresinin bilgisinden daha değerlidir yorumu yapılabilir.

Şekil 3.1'de beş tane daraltıcı faktör incelenmesine rağmen, genellikle uygulamada (1) ve (5) daraltıcı faktörleri kullanılır. $\sigma_{\bar{x}}$ ile μ karşılaştırıldığında μ 'nün küçük olduğu durumda, yani $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ küçük iken, $\hat{\mu}_s = (\bar{x}^2/(\bar{x}^2 + s^2/n))\bar{x}$ tahmin edicisinin OHK değeri $\bar{x}$ tahmin edicisinin OHK değerinden küçük olacağından $\bar{x}$ yerine $\hat{\mu}_s$ 'nin kullanılması avantajlı olacaktır. $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ büyüdükçe (1) eşitliğine ait OHK ile (5) eşitliğine ait OHK değerleri birbirlerine yakınsadığından $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ 'nin büyük olduğu durumda bile (5) daraltıcı faktörünün kullanımı dezavantaj olmayacaktır.

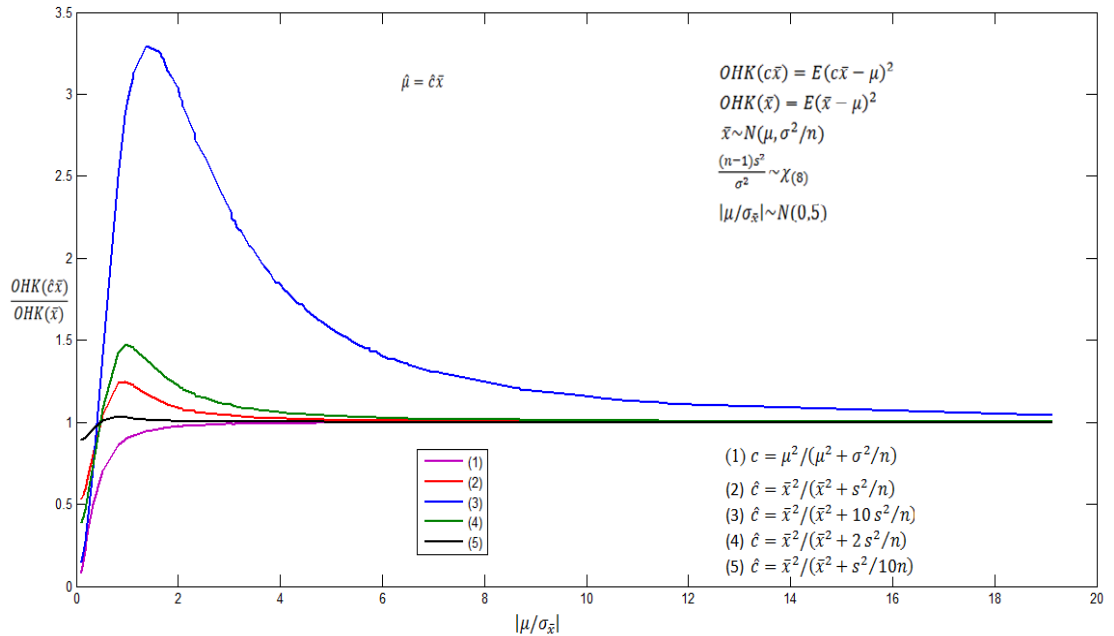


Şekil 3.1: Normal dağılıma sahip bir yığının ortalaması için bazı daraltılmış tahmin ediciler

$\hat{c} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + s^2/n)$ şeklinde verilen daraltıcı faktör (2), (3) ve (4)'te verilen daraltıcı faktörlere göre parametre değeri içermediği için uygulamada daha çok kullanılır. Ama $\hat{c} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + s^2/n)$ değeri tek uygun daraltıcı faktör değildir. Özellikle s^2/n , $k \geq 0$ olan bir k parametresiyle çarpılırsa daha esnek bir daraltıcı faktör elde edilir.

Şekil 3.2'de μ parametresinin bir tahmin edicisi olarak $\hat{\mu}_{sk} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + ks^2/n)$ 'nin kullanımının etkisi incelenmiştir. Genel olarak; k sabiti içeren daraltıcı faktör, orta büyüklükte $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ değerleri için artan OHK değerlerine sahip olmasına rağmen, küçük $|\mu/\sigma_{\bar{x}}|$ değerleri için (2) ve (5) olarak verilen daraltıcı faktörlere göre OHK'si daha düşük değerli olabilir.

Şekil 3.2'de $|\mu/\sigma_{\bar{x}}| = 0$ 'da $OHK(\hat{\mu}_{sk})/OHK(\bar{x})$ değeri kontrol edildiğinde k sabiti ile genişletilmiş s^2/n değeri içeren daraltıcı faktörlerin $\hat{c} = \bar{x}^2/(\bar{x}^2 + s^2/n)$ daraltıcı faktörüne göre daha küçük OHK değerine sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 3.2: Normal dağılıma sahip bir yığının ortalaması için bazı daraltılmış tahmin ediciler

3.2. σ^2 Parametresi İçin Daraltılmış (Shrunken) Tahmin Ediciler

Bu bölümde normal dağılımın yığın varyansı için önerilen üç farklı daraltılmış tahmin ediciler sınıfı üzerinde durulmuştur.

3.2.1. σ^2 parametresi için önerilen tahmin edici

Thompson (1968,a) tarafından önerilen

$$\hat{\theta}_s = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{(\hat{\theta} - \theta_0)^2 + \widehat{Var}(\hat{\theta})} (\hat{\theta} - \theta_0) + \theta_0$$

şeklinde verilen tahmin edici kullanılarak yığın varyansı için $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisi s^2 ; σ^2 için yansız tahmin edici, σ_0^2 ; σ^2 için önsel değeri ve $Var(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ olmak üzere;

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{(s^2 - \sigma_0^2)^3}{(s^2 - \sigma_0^2)^2 + \frac{2s^4}{n-1}} + \sigma_0^2 \quad (3.4)$$

olarak elde edilir [1].

σ^2 Parametresi İçin Önerilen Tahmin Ediciye İlişkin Ortalama Hata Kare

Bu bölümde Eş. 3.4'te verilen tahmin ediciye ait OHK değeri hesaplanışı ele alınmıştır. $u = s^2 - \sigma_0^2$ ve $\lambda = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} OHK(\hat{\sigma}_s^2) &= E(\hat{\sigma}_s^2 - \sigma^2)^2 \\ &= E\left(\frac{(s^2 - \sigma_0^2)^3}{(s^2 - \sigma_0^2)^2 + \frac{2s^4}{n-1}} + \sigma_0^2 - \sigma^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left(\frac{u^3}{u^2 + \frac{2s^4}{n-1}} + \sigma_0^2 - \sigma^2 \right)^2 \\
&= E \left[\frac{u^6}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)^2} + \frac{2u^3}{u^2 + \frac{2s^4}{n-1}} (\sigma_0^2 - \sigma^2) + \sigma_0^4 + \sigma^4 - 2\sigma_0^2\sigma^2 \right] \\
&= \sigma_0^4 + \sigma^4 - 2\sigma_0^2\sigma^2 + 2(\sigma_0^2 - \sigma^2) E \left[\frac{2u^3}{u^2 + \frac{2s^4}{n-1}} \right] + E \left[\frac{u^6}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)^2} \right] \\
&= \sigma^4 \left(\frac{\sigma_0^4}{\sigma^4} + 1 - 2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) + 2\sigma^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right) E \left[\frac{2u^3}{u^2 + \frac{2s^4}{n-1}} \right] + E \left[\frac{u^6}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)^2} \right] \\
&= \sigma^4(\lambda - 1)^2 + 2\sigma^2(\lambda - 1) E \left[\frac{2u^3}{u^2 + \frac{2s^4}{n-1}} \right] + E \left[\frac{u^6}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)^2} \right] \\
&= \sigma^4(\lambda - 1)^2 + 2\sigma^2(\lambda - 1) \int_0^\infty \frac{2u^3}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)} f(s^2) ds^2 \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{u^6}{\left(u^2 + \frac{2s^4}{n-1}\right)^2} f(s^2) ds^2
\end{aligned}$$

Burada $f(s^2)$ yani s^2 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve s^2 istatistiği sırasıyla $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n-1}\right)$ parametrelili Gamma dağılımına sahip olduğu için,

$$f(s^2) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{2\sigma^4}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{4}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right\} (s^2)^{\frac{n-1}{2}-1}, & 0 < s^2 < \infty \\ 0 & , \quad d.h \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Singh ve Singh (1997) çalışmalarında $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisine ilişkin OHK hesaplamada 10-nokta Gauss-Laguerre Karelemesini kullanmıştır [14]. Bu

sayede farklı n ve λ değerleri için OHK değerleri hesaplamış ve $0.125 \leq \lambda \leq 1.50$ iken $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisinin s^2 tahmin edicisinden daha küçük OHK değerlerine sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada ise $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisinin OHK değerleri, ortalaması 0 ve standart sapması 5 olan normal dağılımdan rassal olarak üretilen örnekler kullanılarak yapılan 100000 denemeye sahip Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilmiştir. Bulunan bu sonuçlar Singh ve Singh (1997) çalışmalarındaki sonuçlarla benzerdir [14]. Elde edilen bu değerler Bölüm 3.2.4'te yer alan Çizelge 3.1'de verilmiştir.

3.2.2. σ^2 parametresi için önerilen tahmin edici sınıfı $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$

Eş. 2.7'de tanımlanan ve $\tilde{\sigma}_{(p)}^2 = \sigma_0^2 \left[1 + w \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p \right]$ formundan elde edilen tahmin edici sınıfının OHK değerini en küçükleyecek w değeri aşağıdaki gibi bulunur. Bunun için öncelikle $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin ediciler sınıfına ait OHK değeri hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned}
 OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2) &= E[\tilde{\sigma}_{(p)}^2 - \sigma^2]^2 \\
 &= E \left[\sigma_0^2 \left(1 + w \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p \right) - \sigma^2 \right]^2 \\
 &= E \left[\sigma_0^2 + \sigma_0^2 w \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p - \sigma^2 \right]^2 = E[(\sigma_0^2 - \sigma^2) + w(\sigma_0^2)^{-(p-1)}(s^2)^p]^2 \\
 &= E[(\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w^2(\sigma_0^2)^{-2(p-1)}(s^2)^{2p} + 2w(\sigma_0^2 \\
 &\quad - \sigma^2)(\sigma_0^2)^{-(p-1)}(s^2)^p] \\
 &= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w^2(\sigma_0^2)^{-2(p-1)}E\{(s^2)^{2p}\} + 2w(\sigma_0^2 \\
 &\quad - \sigma^2)(\sigma_0^2)^{-(p-1)}E\{(s^2)^p\}
 \end{aligned}$$

Buradaki $E\{(s^2)^{2p}\}$ ve $E\{(s^2)^p\}$ değerlerinin hesaplanması için

$$E\{(s^2)^{jp}\} = K_{(jp)}(\sigma^2)^{jp}, \quad (j = 1, 2)$$

$$K_{(jp)} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{jp} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n+2jp-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right\}$$

fonksiyonları kullanılmıştır.

$E\{(s^2)^{jp}\}$ ve $K_{(jp)}$ 'nin elde edilişi:

Daha önce belirtildiği gibi $s^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n-1}\right)$ dir. Parametreleri (α, β) olan bir Gamma Dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$ şeklindedir. Dolayısıyla X^i 'ye ait beklenen değerler; $M_X(t)$ fonksiyonunun i-nci dereceden t'ye göre kısmi türevinin t=0 noktasında elde edilir. Bu bilgi yardımıyla,

$$E(X^1) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t^1} = -\alpha(1 - \beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)|_{t=0} = \alpha\beta$$

$$E(X^2) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t^2} = \alpha(\alpha + 1)(1 - \beta t)^{-\alpha-2}\beta^2|_{t=0} = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$$

$$E(X^3) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t^3} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(1 - \beta t)^{-\alpha-3}\beta^3|_{t=0} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^3$$

$$\begin{aligned} E(X^4) &= \frac{\partial M_X(t)}{\partial t^4} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(1 - \beta t)^{-\alpha-4}\beta^4|_{t=0} \\ &= \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)\beta^4 \end{aligned}$$

⋮

$$E(X^i) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t^i} = \frac{(\alpha - 1 + i)!}{(\alpha - 1)!} \beta^i$$

$(\alpha - 1)! = \Gamma(\alpha)$ ve $(\alpha - 1 + i)! = \Gamma(\alpha + i)$ yazıldığında beklenen değerler

$$E(X^i) = \frac{\Gamma(\alpha + i)}{\Gamma(\alpha)} \beta^i$$

şeklinde elde edilir. $\alpha = \frac{n-1}{2}, \beta = \frac{2\sigma^2}{n-1}$ ve $i=jp$ olarak alındığında s^2 'ye ait beklenen değer fonksiyonu,

$$\begin{aligned} E((s^2)^{jp}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + jp\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{jp} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+2jp-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{2}{n-1}\right)^{jp} (\sigma^2)^{jp} \end{aligned}$$

olarak genellenebilir. Böylece beklenen değer fonksiyonu

$$K_{(jp)} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{jp} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n+2jp-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right\}$$

alınarak $E\{(s^2)^{jp}\} = K_{(jp)}(\sigma^2)^{jp}$ şeklinde yazılabilir. Buradan hareketle $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$ 'ye ait OHK değeri

$$\begin{aligned} OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2) &= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w^2 (\sigma_0^2)^{-2(p-1)} K_{(2p)}(\sigma^2)^{2p} \\ &\quad + 2w(\sigma_0^2 - \sigma^2)(\sigma_0^2)^{-(p-1)} K_{(p)}(\sigma^2)^p \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifade $\lambda = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$ alınarak düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2) &= \sigma^4 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right)^2 + w^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^{-2(p-1)} (\sigma^2)^{-2(p-1)} K_{(2p)}(\sigma^2)^{2p} \\ &\quad + 2w\sigma^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^{-(p-1)} (\sigma^2)^{-(p-1)} K_{(p)}(\sigma^2)^p \\ &= \sigma^4 (\lambda - 1)^2 + w^2 \lambda^{-2(p-1)} (\sigma^2)^2 K_{(2p)} + 2w\sigma^2 (\lambda - 1) (\lambda)^{-(p-1)} \sigma^2 K_{(p)} \end{aligned}$$

$$OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2) = \sigma^4 [(\lambda - 1)^2 + w^2 \lambda^{-2(p-1)} K_{(2p)} + 2w(\lambda - 1) (\lambda)^{-(p-1)} K_{(p)}]$$

ifadesine ulaşılır. $OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2)$ 'yi en küçükleyecek w değeri,

$$\frac{\partial OHK(\tilde{\sigma}_{(p)}^2)}{\partial w} = \sigma^4 [2w\lambda^{-2(p-1)}K_{(2p)} + 2(\lambda - 1)(\lambda)^{-(p-1)}K_{(p)}]$$

ifadesinin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$2w\lambda^{-2(p-1)}K_{(2p)} + 2(\lambda - 1)(\lambda)^{-(p-1)}K_{(p)} = 0$$

$$\begin{aligned} w &= -\frac{(\lambda - 1)(\lambda)^{-(p-1)}K_{(p)}}{\lambda^{-2(p-1)}K_{(2p)}} \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda)^{(p-1)}(K_{(p)}/K_{(2p)}) \\ &= -\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)(\lambda)^p(K_{(p)}/K_{(2p)}) \\ &= \left(\frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^p \left(\frac{n-1}{2}\right)^p \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+2p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+4p-1}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Uygulamada σ^2 parametresi bilinmediğinden yerine en küçük varyanslı sapmasız tahmin edicisi s^2 yazılarak w için bir tahmin değeri olan,

$$\hat{w} = \left(\frac{s^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\left(\frac{\sigma_0^2}{s^2}\right)^p \left(\frac{n-1}{2}\right)^p \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+2p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+4p-1}{2}\right)}\right)$$

elde edilir.

$$w_{(p)} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^p \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+2p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+4p-1}{2}\right)}\right)$$

olmak üzere Eş. 2.7'de verilen $\tilde{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edici sınıfı

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{(p)}^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_0^2 \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p \left(\frac{s^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \right) \left(\frac{\sigma_0^2}{s^2} \right)^p w_{(p)} \\
&= \sigma_0^2 + (s^2 - \sigma_0^2) w_{(p)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde oluşturulabilir [14].

Eş. 3.5'te tanımlanan $\hat{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edicisine ait sapma,

$$\begin{aligned}
Sapma(\hat{\sigma}_{(p)}^2) &= E(\hat{\sigma}_{(p)}^2) - \sigma^2 \\
&= E(\sigma_0^2 + (s^2 - \sigma_0^2)w_{(p)}) - \sigma^2 \\
&= \sigma_0^2 + (\sigma^2 - \sigma_0^2)w_{(p)} - \sigma^2 \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2) - w_{(p)}(\sigma_0^2 - \sigma^2) \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)(1 - w_{(p)}) \\
&= \sigma^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right) (1 - w_{(p)}) \\
&= \sigma^2(\lambda - 1)(1 - w_{(p)})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\sigma}_{(p)}^2$ Tahmin edici sınıfına İlişkin Ortalama Hata Kare

Eş. 3.5'te tanımlanan $\hat{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edicisine ait OHK;

$$\begin{aligned}
OHK(\hat{\sigma}_{(p)}^2) &= E[\hat{\sigma}_{(p)}^2 - \sigma^2]^2 \\
&= E[\sigma_0^2 + (s^2 - \sigma_0^2)w_{(p)} - \sigma^2]^2 \\
&= E[(\sigma_0^2 - \sigma^2) + (s^2 - \sigma_0^2)w_{(p)}]^2 \\
&= E[(\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + 2(\sigma_0^2 - \sigma^2)(s^2 - \sigma_0^2)w_{(p)} + (s^2 - \sigma_0^2)^2 w_{(p)}^2] \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + 2(\sigma_0^2 - \sigma^2)w_{(p)}E(s^2 - \sigma_0^2) + w_{(p)}^2 E[(s^2 - \sigma_0^2)^2] \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + 2(\sigma_0^2 - \sigma^2)w_{(p)}(\sigma^2 - \sigma_0^2) + w_{(p)}^2 E[(s^2)^2 - 2s^2\sigma_0^2 + \sigma_0^4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 - 2w_{(p)}(\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w_{(p)}^2 E[(s^2)^2] - 2w_{(p)}^2 \sigma_0^2 E[s^2] \\
&\quad + w_{(p)}^2 \sigma_0^4 \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 - 2w_{(p)}(\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w_{(p)}^2 [Var(s^2) + (E[s^2])^2] \\
&\quad - 2w_{(p)}^2 \sigma_0^2 E[s^2] + w_{(p)}^2 \sigma_0^4 \\
&= (\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 - 2w_{(p)}(\sigma_0^2 - \sigma^2)^2 + w_{(p)}^2 \left[\frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4 \right] - 2w_{(p)}^2 \sigma_0^2 \sigma^2 \\
&\quad + w_{(p)}^2 \sigma_0^4 \\
&= \sigma^4 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right)^2 - 2w_{(p)} \sigma^4 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right)^2 + w_{(p)}^2 \sigma^4 \left[\frac{2}{n-1} + 1 \right] \\
&\quad - 2w_{(p)}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \sigma^4 + w_{(p)}^2 \frac{\sigma_0^4}{\sigma^4} \sigma^4 \\
&= \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 - 2w_{(p)}(\lambda - 1)^2 + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 + w_{(p)}^2 - 2w_{(p)}^2 \lambda \right. \\
&\quad \left. + w_{(p)}^2 \lambda^2 \right] \\
&= \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 - 2w_{(p)}(\lambda - 1)^2 + w_{(p)}^2 (1 - 2\lambda + \lambda^2) + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 \right] \\
&= \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 - 2w_{(p)}(\lambda - 1)^2 + w_{(p)}^2 (\lambda - 1)^2 + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 \right] \\
&= \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 (1 - 2w_{(p)} + w_{(p)}^2) + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 \right] \\
&= \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 (1 - w_{(p)})^2 + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 \right] \tag{3.6}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.3. $\hat{\sigma}_{(p)}^2$, $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicileri ile s^2 tahmin edicisinin karşılaştırılması

Çizelge 3.1’de farklı λ, n, p değerleri için s^2 tahmin edicisinin OHK’sinin yani varyansının Eş. 3.6 ifadesine oranlanmasıyla hesaplanan $Var(s^2)/OHK(\hat{\sigma}_{(p)}^2)$ değerleri ile Bölüm 3.2.1’de sözü geçen simülasyon çalışması yardımıyla elde edilen $Var(s^2)/OHK(\hat{\sigma}_s^2)$ değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.1. σ^2 için önerilen bazı tahmin edicilerin sapmasız tahmin edici s^2 'ye göre göreceli etkinlikleri

		Örnek Çapı n			
λ	Tahmin Edici	3	5	7	11
0.125	$\hat{\sigma}_{(-1)}^2$	-	-	0.8834	1.0283
	$\hat{\sigma}_{(-1/2)}^2$	-	1.6498	1.4021	1.2204
	$\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$	1.2574	1.1247	1.0820	1.0486
	$\hat{\sigma}_{(1)}^2$	2.2655	1.6271	1.4163	1.2488
	$\hat{\sigma}_{(3/2)}^2$	1.9492	1.3887	1.2202	1.1016
	$\hat{\sigma}_{(2)}^2$	1.5378	0.9804	0.8227	0.7287
	$\hat{\sigma}_{(5/2)}^2$	1.3801	0.7858	0.6099	0.4945
	$\hat{\sigma}_s^2$	2.0226	1.4783	1.2861	1.1586
0.50	$\hat{\sigma}_{(-1)}^2$	-	-	2.2500	1.7857
	$\hat{\sigma}_{(-1/2)}^2$	-	2.1627	1.5883	1.2924
	$\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$	1.2680	1.1295	1.0850	1.0503
	$\hat{\sigma}_{(1)}^2$	3.2000	2.0000	1.6410	1.3714
	$\hat{\sigma}_{(3/2)}^2$	4.9855	2.9548	2.2808	1.7511
	$\hat{\sigma}_{(2)}^2$	4.6080	2.7778	2.1858	1.7172
	$\hat{\sigma}_{(5/2)}^2$	4.2174	2.3745	1.8082	1.3961
	$\hat{\sigma}_s^2$	3.3851	2.1709	1.7374	1.3643
1.00	$\hat{\sigma}_{(-1)}^2$	-	-	9.0000	2.7800
	$\hat{\sigma}_{(-1/2)}^2$	-	2.5500	1.7000	1.3300
	$\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$	1.3000	1.1300	1.0900	1.0500
	$\hat{\sigma}_{(1)}^2$	4.0000	2.2500	1.7800	1.4400
	$\hat{\sigma}_{(3/2)}^2$	20.370	6.5200	3.9400	2.5600
	$\hat{\sigma}_{(2)}^2$	144.00	25.000	11.111	5.0200
	$\hat{\sigma}_{(5/2)}^2$	1303.8	119.74	38.200	12.030
	$\hat{\sigma}_s^2$	4.5822	3.1971	2.8120	2.5382
1.50	$\hat{\sigma}_{(-1)}^2$	-	-	0.3214	1.7857
	$\hat{\sigma}_{(-1/2)}^2$	-	2.1627	1.0483	1.2924
	$\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$	1.2680	1.1295	1.0735	1.0503
	$\hat{\sigma}_{(1)}^2$	3.2000	2.0000	1.0159	1.3714
	$\hat{\sigma}_{(3/2)}^2$	4.9855	2.9548	0.5218	1.7511
	$\hat{\sigma}_{(2)}^2$	4.6080	2.7778	0.2943	1.7172
	$\hat{\sigma}_{(5/2)}^2$	4.2174	2.3745	0.2098	1.3961
	$\hat{\sigma}_s^2$	2.8561	1.9333	1.5726	1.2449
2.50	$\hat{\sigma}_{(-1)}^2$	-	-	0.3214	0.4630
	$\hat{\sigma}_{(-1/2)}^2$	-	0.9805	1.0483	1.0518
	$\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$	1.2277	1.1114	1.0735	1.0437
	$\hat{\sigma}_{(1)}^2$	1.2308	1.0588	1.0159	0.9931
	$\hat{\sigma}_{(3/2)}^2$	0.7080	0.5498	0.5218	0.5328
	$\hat{\sigma}_{(2)}^2$	0.5270	0.3425	0.2943	0.2742
	$\hat{\sigma}_{(5/2)}^2$	0.4700	0.2686	0.2098	0.1730
	$\hat{\sigma}_s^2$	1.1166	0.7660	0.6687	0.6245

Çizelge 3.1'e göre n 'nin küçük ve λ 'nın 1 civarındaki değerleri için $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisi s^2 tahmin edicisinden daha küçük OHK değerlerine sahiptir. Ancak ele alınan farklı n ve λ değerleri için $\hat{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edici sınıfının s^2 tahmin edicisine üstün olduğu durumların $\hat{\sigma}_s^2$ tahmin edicisine göre daha fazla olduğu gözlemlenmektedir. Çizelge 3.1'e bakıldığında $0.50 \leq \lambda \leq 1.50$ iken ele alınan tüm p değerleri için $\hat{\sigma}_{(p)}^2$ tahmin edicileri s^2 tahmin edicisinden daha küçük OHK değerlerine sahip olduğu görülmektedir. $\hat{\sigma}_{(1/2)}^2$ ve $\hat{\sigma}_{(1)}^2$ tahmin edicileri göz önünde bulundurulan tüm λ değerleri için s^2 tahmin edicisinden üstündür. Bununla birlikte hesaplanan etkinlik değerleri arasında en büyüğü $\lambda = 1$, yani σ_0^2 değeri σ^2 parametresine eşit iken $p=5/2$ ve $n=3$ olduğunda gözlemlenmektedir.

3.2.4. σ^2 parametresi için önerilen tahmin edici sınıfı $\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2$

Bu bölümde Singh H.P. ve Saxena S (2003) tarafından normal dağılımın dağılış parametresi σ^2 için önerilen; s^2 'ye ek olarak s^2 'nin tersini ve bu tersin kuvveti olacak bir başka sabiti de içeren geliştirilmiş bir shrinkage tahmin edici sınıfı üzerinde çalışılmıştır. $\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2$ şeklinde ifade edilen tahmin ediciler sınıfı p ve q ; $p + q \neq 0$ olacak şekilde sıfır olmayan reel sayılar, w_1 ve w_2 ise $OHK(\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değerini en küçükleyecek şekilde seçilen sabitler ve σ_0^2 ; σ^2 parametresinin bir önsel değeri olmak üzere;

$$\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2 = \sigma_0^2 \left[1 + w_1 \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2} \right)^p + w_2 \left(\frac{\sigma_0^2}{s^2} \right)^q \right] \quad (3.7)$$

olarak tanımlanmıştır.

$\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2$ Tahmin Edici Sınıfına İlişkin Ortalama Hata Kare

Bu bölümde $\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2$ tahmin ediciler sınıfına ilişkin OHK'nin elde edilişi üzerinde durulmuştur.

$$K_{j(k)} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{jk} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2jk-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

ve $j=1,2$; $k = p,q$ olabildiği gibi p 'nin ve/veya q 'nun herhangi bir fonksiyonu olmak üzere $E\{(s^2)^{jk}\} = K_{j(k)}(\sigma^2)^{jk}$ fonksiyonunu kullanarak $OHK(\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2)$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} OHK(\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2) = & \sigma^4 [r^2 + w_1^2(r+1)^{2(1-p)}K_{2(p)} + w_2^2(r+1)^{2(1-q)}K_{2(-q)} \\ & + 2rw_1(r+1)^{(1-p)}K_{1(p)} + 2w_1w_2(r+1)^{2-p+q}K_{1(p-q)} \\ & + 2rw_2(r+1)^{(1+q)}K_{1(-q)}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada,

$$r = \lambda - 1 \text{ dir.} \quad (3.9)$$

w_1 ve w_2 ; Eş. 3.8'i en küçükleyecek şekilde,

$$w_1 = -r(r+1)^{(p-1)} \frac{K_{1(p)}K_{2(-q)} - K_{1(-q)}K_{1(p-q)}}{K_{2(p)}K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}^2} \quad (3.11)$$

ve

$$w_2 = -r(r+1)^{(-q-1)} \frac{K_{2(p)}K_{1(-q)} - K_{1(p)}K_{1(p-q)}}{K_{2(p)}K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}^2} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir.

Bilinmeyen σ^2 parametresi yerine en küçük varyanslı sapmasız tahmin edicisi s^2 kullanılarak Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 ifadelerinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$C_1(p, q) = \frac{K_{1(p)}K_{2(-q)} - K_{1(-q)}K_{1(p-q)}}{K_{2(p)}K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}^2} \quad (3.13)$$

olmak üzere

$$\hat{w}_1 = -\left(\frac{\sigma_0^2}{s^2} - 1\right)\left(\frac{\sigma_0^2}{s^2}\right)^{(p-1)} C_1(p, q) \quad (3.14)$$

olarak ve

$$C_2(p, q) = \frac{K_{2(p)}K_{1(-q)} - K_{1(p)}K_{1(p-q)}}{K_{2(p)}K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}^2} \quad (3.15)$$

olmak üzere

$$\hat{w}_2 = -\left(\frac{\sigma_0^2}{s^2} - 1\right)\left(\frac{\sigma_0^2}{s^2}\right)^{(-q-1)} C_2(p, q) \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Eş. 3.14 ve Eş. 3.16, Eş. 3.7'de yerine konularak, $C(p, q) = C_1(p, q) + C_2(p, q)$ olmak üzere σ^2 için geliştirilmiş bir tahmin edici sınıfı formu,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(p,q)}^2 &= \sigma_0^2 + C(p, q)(s^2 - \sigma_0^2) \\ &= C(p, q)s^2 + \{1 - C(p, q)\}\sigma_0^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

biçiminde oluşturulur. Burada $C(p, q)$ ifadesi açık olarak,

$$C(p, q) = \frac{K_{1(p)}[K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}] - K_{1(-q)}[K_{1(p-q)} - K_{2(p)}]}{K_{2(p)}K_{2(-q)} - K_{1(p-q)}^2} \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. (Görüldüğü gibi, $C(p, q) > 0$ ve $1 - C(p, q) > 0$ olduğunda Eş. 3.17 ifadesi s^2 ve σ_0^2 değerlerinin konveks kombinasyonu haline gelmiştir.)

Yapılan çalışmada negatif değer alamayan varyansın tahmin problemi ele alındığı için $\hat{\sigma}_{(p,q)}^2 > 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle s^2 ve σ_0^2 değerlerine bakılmaksızın

$$0 < C(p, q) < 1 \quad (3.19)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece bütün n değerleri için (p, q) değerlerinin kabul edilebilir aralığı

$$\{(p, q) \mid 0 < C(p, q) < 1\} \quad (3.20)$$

şekilde verilir. $C(p, q) = 1$ ise önerilen tahmin edici sınıfı en küçük varyanslı sapmasız tahmin ediciye dönüşür, diğer durumlarda sapma,

$$Sapma\{\hat{\sigma}_{(p,q)}^2\} = \sigma^2(\lambda - 1)\{1 - C(p, q)\} \quad (3.21)$$

ifadesiyle verilir.

Eş. 3.17'de tanıtilan $\hat{\sigma}_{(p,q)}^2$ tahmin edici sınıfına ilişkin OHK değeri

$$\begin{aligned} OHK\{\hat{\sigma}_{(p,q)}^2\} &= E[\tilde{\sigma}_{(p,q)}^2 - \sigma^2]^2 \\ &= E[\sigma_0^2 + C(p, q)(s^2 - \sigma_0^2) - \sigma^2]^2 \\ &= E[C(p, q)(s^2 - \sigma_0^2) - (\sigma^2 - \sigma_0^2)]^2 \\ &= C(p, q)^2 E[(s^2 - \sigma_0^2)]^2 - 2(\sigma^2 - \sigma_0^2)C(p, q)E(s^2 - \sigma_0^2) \\ &\quad + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\ &= C(p, q)^2 E[(s^2)^2 - 2s^2\sigma_0^2 + \sigma_0^4] - 2C(p, q)(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\ &\quad + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\ &= C(p, q)^2 [Var(s^2) + (E[s^2])^2 - 2E(s^2)\sigma_0^2 + \sigma_0^4] \\ &\quad - 2C(p, q)(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C(p, q)^2 \left[\frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4 - 2\sigma^2\sigma_0^2 + \sigma_0^4 \right] - 2C(p, q)(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\
&\quad + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\
&= C(p, q)^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} + C(p, q)^2(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 - 2C(p, q)(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\
&\quad + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \\
&= C(p, q)^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} + (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2(C(p, q) - 1)^2 \\
&= \sigma^4 \left[\frac{1}{\sigma^4} (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \{1 - C(p, q)\}^2 + \frac{2\{C(p, q)\}^2}{(n-1)} \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifade $\lambda = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$ alınarak düzenlendiğinde,

$$OHK\{\hat{\sigma}_{(p,q)}^2\} = \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 \{1 - C(p, q)\}^2 + \frac{2\{C(p, q)\}^2}{(n-1)} \right] \quad (3.22)$$

ifadesine ulaşılır. Eş. 3.21 ve Eş. 3.22 ifadelerinden $\lambda = 1$ yani önsel tahmin σ_0^2 değeri ile σ^2 parametre değerinin birbirine eşit olması halinde önerilen tahmin edici sınıfı sapmasız hale geldiği görülmektedir ve bu tahmin edici

$$\min OHK\{\hat{\sigma}_{(p,q)}^2\} = \sigma^4 \left[\frac{2\{C(p, q)\}^2}{(n-1)} \right] \quad (3.23)$$

olarak verilen en küçük OHK'ye sahip olur. $\lambda = (\sigma_0^2/\sigma^2)$ değeri, önsel bilgi σ_0^2 değerinin parametre değeri σ^2 değerine bölünüşünü temsil eder. Ancak uygulamada λ gibi bir değer elde etme olasılığı oldukça düşüktür. Mishra(1985)'nın elde ettiği sonuca bakılarak λ için sapmasız bir tahmin edici aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{n-3}{n-1} \right) \frac{\sigma_0^2}{s^2}, \quad n > 3 \quad (3.24)$$

Eş. 3.24'de verilen sapmasız tahmin ediciye ait varyans;

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{2\sigma^4}{\sigma^4(n-5)} \quad (3.25)$$

olarak elde edilmiştir [16].

3.2.7. Tahmin edicilerin karşılaştırılması

En küçük OHK'ye sahip bir tahmin edicinin oldukça iyi özelliklere sahip olduğu yaygın olarak kabul edilir ve bu yüzden OHK değeri, farklı tahmin edicileri karşılaştırmada kriter olarak kullanılır. OHK kriterinin yanında, en küçük sapma da önemlidir ve göz önünde bulundurulmalıdır. Buradan hareketle Singh H. P. ve Saxena S. (2003) yaptıkları çalışmada önerdikleri tahmin edici sınıfı ile diğer tahmin edicileri karşılaştırmada OHK ve sapma değerlerini göz önünde bulundurmuşlardır [16].

Karşılaştırılan yığın varyansına ilişkin tahmin ediciler ve özelliklerinden kısaca şu şekilde söz edebiliriz:

- Örnek varyansı istatistiği,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Yığın varyansı için sapmasız bir tahmin edicidir. Bu tahmin ediciye ilişkin OHK değeri

$$OHK(s^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

ifadesiyle verilmektedir.

- EÇOB tahmin edicisi bilindiği gibi,

$$\hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

dir. Bu tahmin ediciye ilişkin OHK ve sapma değerleri sırasıyla,

$$OHK(\hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2) = \left(\frac{2n-1}{n^2} \right) \sigma^4$$

ve

$$Sapma(\hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

olarak ifade edilmektedir.

- Singh ve Singh (1997)'in ve Singh ve Saxena (2003)'nın yaptıkları çalışmalarda önerdikleri tahmin edicileri karşılaştırdıkları diğer bir tahmin edici,

$$\hat{\sigma}_m^2 = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) s^2$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $\left(\frac{n-1}{n+1} \right)$ sabiti $\hat{\sigma}_m^2$ tahmin edicisinin OHK değerini en küçükleyecek şekilde belirlenmiştir. Bu tahmin ediciye ait OHK ve sapma değerleri sırasıyla,

$$OHK(\hat{\sigma}_m^2) = \frac{2\sigma^4}{n+1}$$

ve

$$Sapma (\hat{\sigma}_m^2) = -\frac{2\sigma^2}{n+1}$$

olarak ifade edilmektedir.

- Bölüm 3.2.2’de ifade edildiği gibi Singh ve Singh(1997) tarafından önerilen tahmin edici sınıfını

$$\hat{\sigma}_{(p)}^2 = \sigma_0^2 + (s^2 - \sigma_0^2)w_{(p)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tahmin ediciye ait OHK ve sapma değerlerinin sırasıyla

$$OHK (\hat{\sigma}_{(p)}^2) = \sigma^4 \left[(\lambda - 1)^2 (1 - w_{(p)})^2 + \frac{2}{n-1} w_{(p)}^2 \right]$$

ve

$$Sapma(\hat{\sigma}_{(p)}^2) = \sigma^2(\lambda - 1)(1 - w_{(p)})$$

olarak elde edildiği Bölüm 3.2.2.1’de gösterilmiştir.

Aşağıda Singh H. P. ve Saxena S. (2003) tarafından önerilen tahmin edici sınıfının geleneksel tahmin edicilerden ve Singh ve Singh(1997) tahmin edici sınıfından hangi şartlarda daha iyi olduğu özetlenmiştir [16].

Öncelikle OHK değerleri göz önünde bulundurularak şu sonuçlara ulaşılmıştır:

- (i) $\hat{\sigma}_{(p,q)}^2$, s^2 ’den aşağıdaki şartlar sağlandığında daha küçük OHK’ye sahiptir.

$$1 - \sqrt{T} \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{T} \quad (3.26)$$

veya aynı eşitsizlik,

$$\sigma_0^2 (1 + \sqrt{T})^{-1} \leq \sigma^2 \leq \sigma_0^2 (1 - \sqrt{T})^{-1} \quad (3.27)$$

şeklinde de gösterilebilir Burada T ,

$$T = \frac{2}{n-1} \left[\frac{1 + C(p, q)}{1 - C(p, q)} \right] \quad (3.28)$$

olarak tanımlanmıştır.

- (ii) $OHK(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değeri, $OHK(\hat{\sigma}_m^2)$ değerinden aşağıdaki şartlarda daha küçüktür.

$$1 - \sqrt{G} \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{G} \quad (3.29)$$

veya aynı eşitsizlik

$$\sigma_0^2 (1 + \sqrt{G})^{-1} \leq \sigma^2 \leq \sigma_0^2 (1 - \sqrt{G})^{-1} \quad (3.30)$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada G , aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$G = \frac{2}{\{1 - C(p, q)\}^2} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{\{C(p, q)\}^2}{n-1} \right] \quad (3.31)$$

- (iii) $OHK(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değeri, $OHK(\hat{\sigma}_{ecob}^2)$ değerinden aşağıdaki şartlar sağlanırsa daha büyük değildir.

$$1 - \sqrt{R} \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{R} \quad (3.32)$$

veya aynı eşitsizlik

$$\sigma_0^2 (1 + \sqrt{R})^{-1} \leq \sigma^2 \leq \sigma_0^2 (1 - \sqrt{R})^{-1} \quad (3.33)$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada R

$$R = \frac{1}{\{1 - C(p, q)\}^2} \left[\frac{2n - 1}{n^2} - \frac{2\{C(p, q)\}^2}{n - 1} \right] \quad (3.34)$$

olarak tanımlanır.

- (iv) Aşağıdaki şartın sağlanması durumunda $OHK(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2) \leq OHK(\hat{\sigma}_{(p)}^2)$ olduğu görülmektedir.

$$\lambda \notin (1 - \sqrt{M}, 1 + \sqrt{M}) \quad (3.35)$$

Burada M aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M = \frac{2}{n - 1} \left[\frac{C(p, q) + w_{(p)}}{2 - C(p, q) - w_{(p)}} \right] \quad (3.36)$$

Singh H.P. ve Saxena S. (2003) yaptıkları çalışmada sözü geçen tahmin edicileri karşılaştırmada ikinci kriter olarak sapmaları ele almışlardır [16]. Bunun için mutlak görelî sapma (MGS: ARB: absolute relative bias) değerlerini hesaplamışlardır. Tahmin edicilere ait MGS değerleri

$$MGS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2, \hat{\sigma}_m^2) = \frac{Sapma(\hat{\sigma}_m^2)}{Sapma(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)} = \left| \frac{2}{(n + 1)(\lambda - 1)\{1 - C(p, q)\}} \right|,$$

$$MGS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2, \hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2) = \frac{Sapma(\hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2)}{Sapma(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)} = \left| \frac{1}{n(\lambda - 1)\{1 - C(p, q)\}} \right|$$

$$MGS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2, \hat{\sigma}_m^2) = \frac{Sapma(\hat{\sigma}_{(p)}^2)}{Sapma(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)} = \left| \frac{1 - w_{(p)}}{1 - C(p, q)} \right|$$

olarak elde edilir. Singh H.P. ve Saxena S. (2003) tarafından önerilen tahmin edici sınıfı karşılaştırılan diğer tahmin edicilere göre aşağıdaki şartlar altında daha küçük mutlak sapma (MS) değerine sahiptir [16].

- (i) $MS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değeri, $MS(\hat{\sigma}_m^2)$ değerini aşağıdaki şartlar sağlanırsa aşmaz.

$$\left[1 - \frac{2}{(n+1)\{1 - C(p, q)\}} \right] < \lambda < \left[1 + \frac{2}{(n+1)\{1 - C(p, q)\}} \right] \quad (3.37)$$

- (ii) $MS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değeri $MS(\hat{\sigma}_{e\zeta ob}^2)$ değerini aşağıdaki şartlar sağlanırsa aşmaz.

$$\left[1 - \frac{1}{n\{1 - C(p, q)\}} \right] < \lambda < \left[1 + \frac{1}{n\{1 - C(p, q)\}} \right] \quad (3.38)$$

- (iii) $MS(\hat{\sigma}_{(p,q)}^2)$ değeri $MS(\hat{\sigma}_{(p)}^2)$ değerinden aşağıdaki şartlar altında daha küçüktür.

$$\{1 - C(p, q)\}^2 < \{1 - w_{(p)}\}^2 \quad (3.39)$$

4. ÜSTEL DAĞILIMDA KONUM PARAMETRESİNE AİT DARALTILMIŞ TAHMİN EDİCİLER SINIFI

Bu bölümde üstel dağılımın konum parametresi için önerilen farklı tahmin ediciler ele alınmıştır.

X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & \theta > 0, \quad x > 0 \\ 0, & d.h. \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde verilen üstel dağılıma sahip olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal örneği X rassal değişkenin oluşturduğu yığından tesadüfi olarak alınmış olduğu varsayalım

Örnek ortalaması istatistiği $\bar{x}$ 'nin, θ parametresinin en küçük varyanslı sapmasız bir tahmini ve aynı zamanda EÇOB tahmin edicisi olduğu bilinmektedir. Bu tahmin ediciye ilişkin OHK, yani varyans

$$OHK(\bar{x}) = \frac{\theta^2}{n} \quad (4.2)$$

ifadesiyle verilmektedir.

$T = n\bar{x}/(n+1)$ tahmin edicisinin, θ parametresi için $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ biçimindeki doğrusal tahmin ediciler sınıfının en küçük OHK'li tahmin edicisi olduğu ve bu tahmin ediciye ilişkin OHK değerinin,

$$OHK(T) = \frac{\theta^2}{n+1} \quad (4.3)$$

olarak ifade edildiği bilinmektedir.

Thompson (1968,a), $T_1 = \theta_0 + c(\bar{x} - \theta_0)$ şeklinde daraltıcı bir tahmin edici önermiştir [1]. Burada θ_0 , θ parametresi için bir önsel değer ve c , T_1 tahmin edicisinin OHK değerini en küçükleyecek şekilde seçilen bir sabittir. O halde c sabitini elde edebilmek için öncelikle T_1 tahmin edicisine ilişkin OHK değerinin hesaplanması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
OHK(T_1) &= E\{T_1 - \theta\}^2 \\
&= E\{c(\bar{x} - \theta_0) + \theta_0 - \theta\}^2 \\
&= E\{c(\bar{x} - \theta_0) - (\theta - \theta_0)\}^2 \\
&= E\{c^2(\bar{x} - \theta_0)^2 - 2c(\bar{x} - \theta_0)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2\} \\
&= c^2 E\{(\bar{x} - \theta_0)^2\} - 2c[E(\bar{x} - \theta_0)](\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 E\{(\bar{x} - \theta_0)^2\} - 2c(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 E\{\bar{x}^2 - 2\bar{x}\theta_0 + \theta_0^2\} + (-2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 [E(\bar{x}^2) - 2E(\bar{x})\theta_0 + \theta_0^2] + (-2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 [(V(\bar{x}) + E(\bar{x})) - 2E(\bar{x})\theta_0 + \theta_0^2] + (-2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 \left[\frac{n+1}{n} \theta^2 - 2\theta\theta_0 + \theta_0^2 \right] + (-2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 \frac{n+1}{n} \theta^2 - c^2 \theta^2 - 2c^2 \theta\theta_0 + c^2 \theta_0^2 + (-2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 \theta^2 \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) + (c^2 - 2c + 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
&= c^2 \theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + (c - 1)^2 (\theta - \theta_0)^2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Eş. 4.4 ifadesinin c 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde $OHK(T_1)$ değerini en küçükleyecek c değeri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(T_1)}{\partial c} &= 2c\theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + 2(c - 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
0 &= 2c\theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + 2(c - 1)(\theta - \theta_0)^2 \\
c &= \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + (\theta - \theta_0)^2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu c değeri Eş. 4.4 ifadesinde yerine yazıldığında T_1 tahmin edicisine ilişkin OHK değeri,

$$\begin{aligned}
 OHK(T_1) &= \left[\frac{(\theta - \theta_0)^2}{\theta^2 \frac{1}{n} + (\theta - \theta_0)^2} \right]^2 \theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + \left(\frac{(\theta - \theta_0)^2}{\theta^2 \left(\frac{1}{n} \right) + (\theta - \theta_0)^2} - 1 \right)^2 (\theta - \theta_0)^2 \\
 &= \frac{(\theta - \theta_0)^4 \frac{\theta^2}{n} + \frac{\theta^4}{n} (\theta - \theta_0)^2}{\left[\frac{\theta^2}{n} + (\theta - \theta_0)^2 \right]^2} \\
 &= \frac{(\theta - \theta_0)^2 \frac{\theta^2}{n} \left[\frac{\theta^2}{n} + (\theta - \theta_0)^2 \right]}{\left[\frac{\theta^2}{n} + (\theta - \theta_0)^2 \right]^2} \\
 &= \frac{(\theta - \theta_0)^2 \frac{\theta^2}{n}}{\left[\frac{\theta^2}{n} + (\theta - \theta_0)^2 \right]} \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.

θ parametresinin sapmasız tahmin edicisi $\bar{x}$ ile T_1 tahmin edicisinin OHK değerleri Eş. 4.2 ve Eş. 4.5 ifadeleri birbirine oranlanarak karşılaştırıldığında, T_1 tahmin edicisinin $\bar{x}$ tahmin edicisinden daha küçük bir OHK değerine sahip olduğu görülmektedir.

Pandey (1983), $r = \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right) - 1$ olarak tanımlandığında $|r| \leq 0,3$ iken büyük çaplı örnekler için T_1 tahmin edicisinin T tahmin edicisine göre daha küçük OHK'ye sahip olduğunu göstermiştir [23].

Srivastava (1985) $T_2 = \theta_0 + (1 - 2/n)(\bar{x} - \theta_0)$ tahmin edicisini önermiş ve $|r| \leq \sqrt{3}/2$ aralığında büyük çaplı örnekler için T_2 tahmin edicisinin T tahmin edicisine göre daha küçük OHK'ye sahip olduğunu göstermiştir [8].

Jani (1991) çalışmasında; yukarıda sözü geçen tahmin edicileri de içeren ve r 'nin daha geniş aralığı için tanımlanan genel bir tahmin ediciler sınıfı önermiştir [12].

$\Gamma(n)$ Gamma fonksiyonu,

$\Gamma(n, x)$: tamamlanmamış gamma fonksiyonu; $[\Gamma(n)]^{-1} \int_0^x u^{n-1} e^{-u} du$,

p : sıfırdan farklı bir reel sayı,

r : $r = (\theta_0/\theta) - 1$,

$X_{(k)}$: k. sıra istatistiği

olarak tanımlanmıştır.

Eş. 4.1'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonun θ parametresi için, $T_{3(p)}$ tahmin ediciler sınıfı

$$T_{3(p)} = \theta_0 [1 + k(\theta_0/\bar{x})^p] \quad (4.6)$$

olarak tanımlanmıştır [Jani 1991]. Bu tahmin ediciler sınıfına ait OHK,

$$\begin{aligned} OHK(T_{3(p)}) &= E\{T_{3(p)} - \theta\}^2 \\ &= E\{(\theta_0 - \theta) + k\theta_0^{p+1}\bar{x}^{-p}\}^2 \\ &= (\theta_0 - \theta)^2 + k^2\theta_0^{2p+2}E\{\bar{x}^{-2p}\} + 2k\theta_0^{p+1}(\theta_0 - \theta)E\{\bar{x}^{-p}\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

dır. Burada k , $OHK(T_{3(p)})$ 'yi en küçükleyecek şekilde seçilmiştir.

OHK hesaplanırken

$$E\{\bar{x}^{-jp}\} = n^{jp} \Gamma(n - jp) \theta^{-jp} / \Gamma(n)$$

fonksiyonundan yararlanılır.

OHK'yi en küçükleyecek k değeri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(T_{3(p)})}{\partial k} &= 2k\theta_0^{2p+2}E\{\bar{x}^{-2p}\} + 2\theta_0^{p+1}(\theta_0 - \theta)E\{\bar{x}^{-p}\} \\
0 &= 2k\theta_0^{2p+2}E\{\bar{x}^{-2p}\} + 2\theta_0^{p+1}(\theta_0 - \theta)E\{\bar{x}^{-p}\} \\
k &= -\frac{\theta_0^{p+1}(\theta_0 - \theta)E\{\bar{x}^{-p}\}}{\theta_0^{2p+2}E\{\bar{x}^{-2p}\}} \\
&= -\frac{\theta_0^{p+1}(\theta_0 - \theta)n^p\Gamma(n-p)\theta^{-p}/\Gamma(n)}{\theta_0^{2p+2}n^{2p}\Gamma(n-2p)\theta^{-2p}/\Gamma(n)} \\
&= -\frac{(\theta_0 - \theta)n^p\Gamma(n-p)}{\theta_0^{p+1}\theta^{-p}n^{2p}\Gamma(n-2p)} \\
&= -\frac{\left(\frac{\theta_0}{\theta} - 1\right)n^p\Gamma(n-p)}{\theta_0^{p+1}\theta^{-p-1}n^{2p}\Gamma(n-2p)} \\
&= -\frac{\left(\frac{\theta_0}{\theta} - 1\right)n^p\Gamma(n-p)}{(\theta_0/\theta)^{p+1}n^{2p}\Gamma(n-2p)} \\
&= -\frac{rn^p\Gamma(n-p)}{(1+r)^{p+1}n^{2p}\Gamma(n-2p)} \\
k &= -\frac{rn^p\Gamma(n-p)}{(1+r)^{p+1}n^{2p}\Gamma(n-2p)} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eş. 4.8 ifadesi θ parametresi yerine örnek ortalaması istatistiği $\bar{x}$ kullanılarak,

$$\hat{k} = -\frac{\left(\frac{\theta_0}{\bar{x}} - 1\right)\Gamma(n-p)}{(\theta_0/\bar{x})^{p+1}n^p\Gamma(n-2p)}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $T_{3(p)}$,

$$\begin{aligned}
T_{3(p)} &= \theta_0 - \theta_0 \frac{\left(\frac{\theta_0}{\bar{x}} - 1\right)\Gamma(n-p)}{(\theta_0/\bar{x})^{p+1}n^p\Gamma(n-2p)} \left(\frac{\theta_0}{\bar{x}}\right)^p \\
&= \theta_0 - (\theta_0 - \bar{x}) \frac{\Gamma(n-p)}{n^p\Gamma(n-2p)}
\end{aligned}$$

biçimini alır. Burada

$$k_1 = \frac{\Gamma(n-p)}{n^p \Gamma(n-2p)} \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edildiğinde

$$T_{3(p)} = \theta_0 - k_1(\theta_0 - \bar{x}) \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Bu tahmin edici sınıfına ait OHK,

$$\begin{aligned} OHK(T_{3(p)}) &= E\{T_{3(p)} - \theta\}^2 \\ &= E\{(\theta_0 - \theta) - k_1(\theta_0 - \bar{x})\}^2 \\ &= (\theta_0 - \theta)^2 + k_1^2 E\{(\theta_0 - \bar{x})^2\} - 2(\theta_0 - \theta)k_1 E\{\theta_0 - \bar{x}\} \\ &= (\theta_0 - \theta)^2 + k_1^2 [\theta_0^2 - 2\theta_0 E\{\bar{x}\} + E\{\bar{x}^2\}] - 2k_1(\theta_0 - \theta)^2 \\ &= (\theta_0 - \theta)^2(1 - 2k_1) + k_1^2 \theta_0^2 - 2k_1^2 \theta_0 \theta + k_1^2 \left(\frac{\theta^2}{n} + \theta^2 \right) \\ &= (\theta_0 - \theta)^2(1 - 2k_1) + k_1^2 (\theta_0^2 - 2\theta_0 \theta + \theta^2) + k_1^2 \frac{\theta^2}{n} \\ &= (\theta_0 - \theta)^2(1 - 2k_1) + k_1^2 (\theta_0 - \theta)^2 + k_1^2 \frac{\theta^2}{n} \\ &= (\theta_0 - \theta)^2(1 - 2k_1 + k_1^2) + k_1^2 \frac{\theta^2}{n} \\ &= (\theta_0 - \theta)^2(1 - k_1)^2 + k_1^2 \frac{\theta^2}{n} \\ &= \theta^2 \left(\frac{\theta_0}{\theta} - 1 \right)^2 (1 - k_1)^2 + k_1^2 \frac{\theta^2}{n} \\ &= \theta^2 [r^2(1 - k_1)^2 + k_1^2/n] \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak hesaplanır.

$$r^2 \leq (1 - k_1)^{-2} [(n+1)^{-1} - k_1^2 n^{-1}] = g \quad (4.12)$$

olmak üzere

$$\theta_0(1 + \sqrt{g})^{-1} \leq \theta \leq \theta_0(1 - \sqrt{g})^{-1} \quad (4.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda $OHK(T_{3(p)}) \leq OHK(T)$ olduğu görülmektedir.

$p=1$ alınırsa Eş. 4.10'da verilen tahmin edici Srivastava tarafından önerilen T_2 tahmin edicisine dönüşür. T_2 veya başka bir ifadeyle $T_{3(1)}$ tahmin edicisine ait OHK değeri Eş.4.9 ve Eş. 4.11 yardımıyla,

$$\begin{aligned} OHK(T_{3(1)}) &= \left[\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right)^2 r^2 + \frac{\left(1 - \frac{2}{n} \right)^2}{n} \right] \theta^2 \\ &= \left[\frac{4nr^2 + (n-2)^2}{n^3} \right] \theta^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

p 'ye değişik değerler verilerek θ 'nın geniş bir aralığı için T, T_1, T_2 'ye göre daha küçük OHK'li tahmin ediciler elde edilebilir.

Örneğin $p = -1$ alınırsa

$$T_{3(-1)} = \theta_0 + \frac{n(\theta_0 - \bar{x})}{n+1} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. $OHK(T_{3(-1)}) = (r^2 + n)(n+1)^{-2}\theta^2$ olarak bulunur. $OHK(T_{3(-1)})$ değeri, $r^2 \leq 1$ veya buna eşit olarak $\theta_0/2 \leq \theta < \infty$ olduğunda $OHK(T)$ değerinden daha küçüktür. $T_{3(-1)}$ tahmin edicisinin küçük OHK değerleri verdiği aralık T_1 ve T_2 tahmin edicilerinininkinden daha geniştir ve küçük çaplı örneklerde bile T tahmin edicisinden daha iyi olduğu söylenebilir.

$T_{3(p)}$ tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciyle karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} \frac{OHK(T_{3(p)})}{V(\bar{x})} &= \frac{\theta^2 \left[r^2(1 - k_1)^2 + \frac{k_1^2}{n} \right]}{\frac{\theta^2}{n}} \\ &= n[r^2(1 - k_1)^2 + k_1^2/n] \end{aligned} \quad (4.15)$$

ifadesi elde edilir.

4.1. Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Farklı n, p ve θ_0/θ değerleri için Eş. 4.15 yardımıyla hesaplanan $T_{3(p)}$ tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinlikleri Çizelge 4.1’de yer almaktadır. Çizelge 4.1, aynı zamanda T ve T_1 tahmin edicilerinin sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinliklerini içermektedir. T_1 tahmin edicisi θ parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Burada θ parametresi yerine sapmasız tahmin edicisi $\bar{x}$ kullanılarak oluşturulan sapmalı tahmin ediciye ait OHK değerleri simülasyon çalışması yardımıyla elde edilmiştir. Bu simülasyon çalışmasında işlem kolaylığı sağlamak adına $\theta = 1$ alınarak üstel dağılımdan gelen n örnek çapına sahip veri setleri üretilmiştir. Üretilen bu veri setleri kullanılarak θ parametresinin sapmasız tahmin edicisi ile T_1 tahmin edicisi ve bu tahmin edicilere ait OHK değerleri 100000 denemelik Monte Carlo simülasyonu ile hesaplanmıştır. Elde edilen $OHK(T_1)/OHK(\bar{x})$ göreceli etkinlik değerleri Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Üstel dağılımın dağılış parametresi için önerilen bazı tahmin edicilerinin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri

θ_0/θ	Tahmin Edici	Örnek Çapı n			
		3	5	7	11
0.125	$T_{3(-1)}$	0.3311	0.2452	0.1931	0.1349
	$T_{3(-1/2)}$	0.0087	0.0054	0.0039	0.0025
	$T_{3(1/2)}$	0.2863	0.1562	0.1075	0.0662
	$T_{3(1)}$	2.3542	1.4125	1.0089	0.6420
	$T_{3(3/2)}$	-	4.3598	3.4581	2.3959
	$T_{3(2)}$	-	7.4721	7.0471	5.6046
	$T_{3(5/2)}$	-	-	10.2411	9.7512
	T_1	0.6973	0.7914	0.8376	0.8954
0.50	$T_{3(-1)}$	0.2344	0.1736	0.1367	0.0955
	$T_{3(-1/2)}$	0.0062	0.0038	0.0027	0.0018
	$T_{3(1/2)}$	0.2027	0.1106	0.0761	0.0469
	$T_{3(1)}$	1.6667	1.0000	0.7143	0.4545
	$T_{3(3/2)}$	-	3.0866	2.4482	1.6962
	$T_{3(2)}$	-	5.2900	4.9891	3.9679
	$T_{3(5/2)}$	-	-	7.2503	6.9035
	T_1	0.4371	0.5560	0.6432	0.7377
1.00	$T_{3(-1)}$	0.1875	0.1389	0.1094	0.0764
	$T_{3(-1/2)}$	0.0050	0.0030	0.0022	0.0014
	$T_{3(1/2)}$	0.1622	0.0885	0.0609	0.0375
	$T_{3(1)}$	1.3333	0.8000	0.5714	0.3636
	$T_{3(3/2)}$	-	2.4693	1.9586	1.3570
	$T_{3(2)}$	-	4.2320	3.9913	3.1743
	$T_{3(5/2)}$	-	-	5.8002	5.5228
	T_1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.50	$T_{3(-1)}$	0.2344	0.1736	0.1367	0.0955
	$T_{3(-1/2)}$	0.0062	0.0038	0.0027	0.0018
	$T_{3(1/2)}$	0.2027	0.1106	0.0761	0.0469
	$T_{3(1)}$	1.6667	1.0000	0.7143	0.4545
	$T_{3(3/2)}$	-	3.0866	2.4482	1.6962
	$T_{3(2)}$	-	5.2900	4.9891	3.9679
	$T_{3(5/2)}$	-	-	7.2503	6.9035
	T_1	0.4265	0.5535	0.6393	0.7382
2.50	$T_{3(-1)}$	0.6094	0.4514	0.3555	0.2483
	$T_{3(-1/2)}$	0.0161	0.0099	0.0071	0.0046
	$T_{3(1/2)}$	0.5271	0.2875	0.1978	0.1218
	$T_{3(1)}$	4.3333	2.6000	1.8571	1.1818
	$T_{3(3/2)}$	-	8.0252	6.3654	4.4101
	$T_{3(2)}$	-	13.7540	12.9716	10.3165
	$T_{3(5/2)}$	-	-	18.8508	17.9492
	T_1	0.8678	0.9155	0.9376	0.9617
	T	0.7500	0.8333	0.8750	0.9166

Çizelge 4.1'e bakıldığında göz önünde bulundurulan tüm θ_0/θ ve n değerleri için T_1 tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciden daha küçük OHK değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bununla birlikte $\theta_0/\theta \leq 1$ iken T_1 tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciye göre hesaplanan göreceli etkinlik değerleri T tahmin edicisinininkilerden daha küçüktür. Çizelge 4.1'e göre, T_2 yani $T_{3(1)}$ tahmin edicisi θ_0/θ değerleri 1 civarında ve $n \geq 5$ olması durumunda sapmasız tahmin ediciden daha küçük OHK değerleri sergilerken, $T_{3(-1)}$, $T_{3(-1/2)}$ ve $T_{3(1/2)}$ tahmin edicilerine ait OHK değerleri ele alınan tüm θ_0/θ ve n değerleri için sapmasız tahmin edicinin OHK değerinden daha küçüktür. Buna ek olarak yine tüm θ_0/θ ve n değerleri için $T_{3(-1)}$, $T_{3(-1/2)}$ ve $T_{3(1/2)}$ tahmin edicilerinin T_1 tahmin edicisinden üstün olduğu görülmektedir.

5. PARETO DAĞILIMINDA ŞEKİL PARAMETRESİ İÇİN DARALTILMIŞ TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde shrinkage tahmin yöntemleri ile ilgili yapılan çalışmaların ışığı altında Pareto dağılımının şekil (shape) parametresi için farklı daraltılmış tahmin ediciler elde edilmiştir. Öncelikle Pareto dağılımının şekil parametresi için EÇOB ve sapmasız tahmin edicilerin elde edilişi gösterilmiştir. Sonra önceki bölümlerde sözü geçen shrinkage tahmin yöntemleri yardımıyla yeni tahmin ediciler elde edilmiştir. Ardından bu sapmalı tahmin ediciler, sapmasız tahmin edici ile OHK'leri vasıtasıyla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda hangi durumlarda elde edilen tahmin edici sınıflarının, sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu belirlenmeye çalışılmıştır.

X , klasik Pareto dağılımına sahip rassal bir değişken olsun. α , dağılım parametresi ve β , şekil parametresi olmak üzere X rassal değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{(\beta+1)}} & ; x > \alpha \\ 0 & ; x \leq \alpha \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

5.1. β Parametresinin EÇOB Tahmin Edicisi

X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eş. 5.1'de verildiği gibi tanımlanmak üzere, Pareto dağılımının şekil parametresi β 'nın EÇOB tahmin edicisini elde etmek için oluşturulan olabilirlik fonksiyonu,

$$L(x_i) = \frac{\beta^n \alpha^{n\beta}}{\prod_{i=1}^n x_i^{(\beta+1)}}$$

olarak ifade edilir. Buradan hareketle EÇOB tahmin edicisi,

$$\frac{\partial \ln L(x_i)}{\partial \beta} = n \frac{1}{\beta} + n \ln \alpha - \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

ifadesinin sıfıra eşitlenmesiyle

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\alpha}}$$

şeklinde elde edilir.

Rytgaard (1990) çalışmasında; $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$ ise $\ln(x_i/\alpha) \sim \text{Üstel}(1/\beta)$ ve dolayısıyla $T = \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\alpha} \sim \text{Gamma}(n, 1/\beta)$ olduğunu göstermiştir. Bu durumda T rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\beta t}, & t > 0 \\ 0 & , d. h \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Böylece $\hat{\beta} = \frac{n}{T}$ tahmin edicisine ilişkin beklenen değer,

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= \int_0^{\infty} \frac{n}{t} f_T(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{n}{t} \frac{\beta^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{n}{n-1} \beta \int_0^{\infty} \frac{\beta^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{n}{n-1} \beta \end{aligned} \tag{5.2}$$

olarak hesaplanır. Varyans ise

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}^2) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{n}{t}\right)^2 f_T(t) dt \\
&= \frac{n^2 \beta^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^{\infty} \frac{\beta^{n-2}}{(n-3)!} t^{n-3} e^{-\beta t} dt \\
&= \frac{n^2 \beta^2}{(n-1)(n-2)}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}) &= E(\hat{\beta}^2) - \left(E(\hat{\beta})\right)^2 \\
&= \frac{n^2 \beta^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{n}{n-1} \beta\right)^2 \\
&= n^2 \beta^2 \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \right] \\
&= n^2 \beta^2 \left[\frac{n-1-n+2}{(n-1)^2(n-2)} \right] \\
&= \frac{n^2 \beta^2}{(n-1)^2(n-2)} \tag{5.3}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca $E(\hat{\beta})$ ve $E(\hat{\beta}^2)$ ifadelerinden yola çıkılarak $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin jp -inci dereceden beklenen değerinin;

$$E(\hat{\beta}^{jp}) = \frac{n^{jp} \beta^{jp}}{\frac{(n-1)!}{(n-jp-1)!}}$$

olduğu sonucuna ulaşılabilir.

5.2. β Parametresinin Sapmasız Tahmin Edicisi

Önceki bölümde β parametresinin EÇOB tahmin edicisine ait beklenen değer Eş.5.2’de verildiği gibidir. Dolayısıyla β parametresi için sapmasız bir tahmin edici;

$$\tilde{\beta} = \frac{n-1}{n} \hat{\beta}$$

olarak tanımlanabilir. Bu tahmin ediciye ilişkin beklenen değer β parametresine eşit olacağı açıkça görülmektedir. $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine ait varyans,

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}^2) &= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\hat{\beta}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 E(\hat{\beta}^2) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{n^2\beta^2}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\beta}) &= E(\tilde{\beta}^2) - \left(E(\tilde{\beta})\right)^2 \\ &= \frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 - \beta^2 \\ &= \frac{1}{(n-2)}\beta^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde elde edilir. Buna ek olarak $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin j -inci dereceden beklenen değeri

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\beta}^{jp}) &= E\left[\left(\frac{n-1}{n}\tilde{\beta}\right)^{jp}\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{jp} E(\tilde{\beta}^{jp}) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{jp} \frac{n^{jp}\beta^{jp}}{\frac{(n-1)!}{(n-jp-1)!}} \\
&= (n-1)^{jp} \frac{(n-jp-1)!}{(n-1)!} \beta^{jp}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

5.3. β Parametresi için Önerilen $\hat{\beta}_{ss}$ Tahmin Edicisi

β parametresi için Bölüm (2.1)'de tanıtilan tahmin edici yardımıyla elde edilen $\hat{\beta}_{ss} = c\tilde{\beta} + (1-c)\beta_0$ formundaki tahmin edici, $\tilde{\beta}$; β parametresi için sapmasız bir tahmin edici, β_0 ; β parametresi için önsel değeri ve c ; $OHK(\hat{\beta}_{ss})$ değerini en küçükleyecek bir sabit olmak üzere,

$$\hat{\beta}_{ss} = c(\tilde{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.5)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $OHK(\hat{\beta}_{ss})$ değeri,

$$OHK(\hat{\beta}_{ss}) = E[c(\tilde{\beta} - \beta_0) + \beta_0 - \beta]^2 \quad (5.6)$$

şeklindedir. Eş. 5.6'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
OHK(\hat{\beta}_{ss}) &= E[c(\tilde{\beta} - \beta_0) + \beta_0 - \beta]^2 \\
&= E\left[c^2(\tilde{\beta} - \beta_0)^2 + 2c(\tilde{\beta} - \beta_0)(\beta_0 - \beta) + (\beta_0 - \beta)^2\right] \\
&= c^2 E\left[(\tilde{\beta} - \beta_0)^2\right] - 2c(\beta_0 - \beta)E(\tilde{\beta} - \beta_0) + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= c^2 E[\tilde{\beta}^2 - 2\beta_0\tilde{\beta} + \beta_0] - 2c(\beta_0 - \beta)^2 + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= c^2[E(\tilde{\beta}^2) - 2\beta_0 E(\tilde{\beta}) + \beta_0] - 2c(\beta_0 - \beta)^2 + (\beta_0 - \beta)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 \left[\frac{(n-1)}{(n-2)} \beta^2 - 2\beta_0\beta + \beta_0 \right] - 2c(\beta_0 - \beta)^2 + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= c^2 \frac{(n-1)}{(n-2)} \beta^2 - c^2 2\beta_0\beta + c^2 \beta_0 - 2c(\beta_0 - \beta)^2 + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= c^2 \frac{(n-1)}{(n-2)} \beta^2 - c^2 \beta^2 + c^2 \beta^2 - c^2 2\beta_0\beta + c^2 \beta_0 - 2c(\beta_0 - \beta)^2 \\
&\quad + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{(n-1)}{(n-2)} - 1 \right] + c^2(\beta_0 - \beta)^2 - 2c(\beta_0 - \beta)^2 + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= \frac{c^2 \beta^2}{n-2} + (c-1)^2(\beta_0 - \beta)^2
\end{aligned}$$

$$OHK(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{c^2 \beta^2}{n-2} + (c-1)^2(\beta - \beta_0)^2 \quad (5.7)$$

ifadesi elde edilir. Eş. 5.7'deki ifadenin c ' ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle OHK değerini en küçükleyecek daraltma faktörü c ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(\hat{\beta}_{ss})}{\partial c} &= \frac{2c\beta^2}{n-2} + 2(c-1)(\beta_0 - \beta)^2 \\
0 &= \frac{c\beta^2}{n-2} + (c-1)(\beta_0 - \beta)^2 \\
(\beta_0 - \beta)^2 &= c \left[\frac{\beta^2}{n-2} + (\beta_0 - \beta)^2 \right] \\
c &= \frac{(\beta_0 - \beta)^2}{\frac{\beta^2}{n-2} + (\beta_0 - \beta)^2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifade aynı zamanda,

$$c = \frac{(\beta - \beta_0)^2}{Var(\hat{\beta}) + (\beta - \beta_0)^2} \quad (5.8)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç olarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için Eş. 2.1’de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen daraltılmış tahmin edici,

$$\hat{\beta}_{ss} = \frac{(\beta - \beta_0)^2}{Var(\tilde{\beta}) + (\beta - \beta_0)^2} (\tilde{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.9)$$

dir. Böylece bu tahmin ediciye ait Eş. 5.7’ de verilen OHK ifadesinde Eş. 5.8’ deki c daraltma faktörü yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} OHK(\hat{\beta}_{ss}) &= \frac{\beta^2}{n-2} \left(\frac{(\beta_0 - \beta)^2}{Var(\tilde{\beta}) + (\beta_0 - \beta)^2} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(\beta_0 - \beta)^2}{Var(\tilde{\beta}) + (\beta_0 - \beta)^2} - 1 \right)^2 (\beta_0 - \beta)^2 \\ &= \frac{\beta^2(\beta_0 - \beta)^4}{(n-2)(Var(\tilde{\beta}) + (\beta_0 - \beta)^2)^2} + \frac{(\beta_0 - \beta)^2 \left(\frac{\beta^2}{n-2} \right)^2}{(Var(\tilde{\beta}) + (\beta_0 - \beta)^2)^2} \\ &= \frac{\beta^2(\beta_0 - \beta)^2[(n-2)(\beta_0 - \beta)^2 + \beta^2]}{(n-2)^2(Var(\tilde{\beta}) + (\beta_0 - \beta)^2)^2} \\ &= \frac{\beta^2(\beta_0 - \beta)^2[(n-2)(\beta_0 - \beta)^2 + \beta^2]}{(n-2)^2 \left(\frac{\beta^2}{n-2} + (\beta_0 - \beta)^2 \right)^2} \\ &= \frac{\beta^2(\beta_0 - \beta)^2[(n-2)(\beta_0 - \beta)^2 + \beta^2]}{\frac{(n-2)^2}{(n-2)^2} (\beta^2 + (n-2)(\beta_0 - \beta)^2)^2} \\ &= \frac{\beta^2(\beta_0 - \beta)^2}{(n-2)(\beta_0 - \beta)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$OHK(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{\beta^2(\beta - \beta_0)^2}{(n-2)(\beta - \beta_0)^2 + \beta^2} \quad (5.10)$$

şeklinde elde edilir.

β parametresinin sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ 'e ilişkin varyans ve $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisine ilişkin OHK karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} \frac{OHK(\hat{\beta}_{ss})}{Var(\tilde{\beta})} &= \frac{\frac{\beta^2(\beta - \beta_0)^2}{(n-2)(\beta - \beta_0)^2 + \beta^2}}{\frac{\beta^2}{n-2}} \\ &= \frac{(n-2)(\beta - \beta_0)^2}{(n-2)(\beta - \beta_0)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ifadesine ulaşılır. Eş. 5.11'de verilen ifade $n > 2$ olduğu sürece 1' den küçük olacağından $OHK(\hat{\beta}_{ss}) < Var(\tilde{\beta})$ sonucuna ulaşılır.

Daraltma faktörü olan c sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Ancak uygulamada β parametresine ulaşmak mümkün olamayacağı için β parametresi yerine sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda daraltma faktörü c için bir tahmin edici,

$$\hat{c} = \frac{(\tilde{\beta} - \beta_0)^2}{\frac{\tilde{\beta}^2}{n-2} + (\tilde{\beta} - \beta_0)^2} \quad (5.12)$$

olarak elde edilir. Eş. 5.12'de verilen daraltma faktörü kullanılarak elde edilen tahmin edici

$$\hat{\beta}_{ss} = \frac{(\tilde{\beta} - \beta_0)^2}{\frac{\tilde{\beta}^2}{n-2} + (\tilde{\beta} - \beta_0)^2} (\tilde{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.13)$$

şeklini alır. Eş. 5.13' de verilen sapmalı tahmin edici ile sapmasız tahmin edicinin etkinlikleri simülasyon çalışması bölümünde Monte Carlo denemeleri yardımıyla karşılaştırılmıştır.

5.4. β Parametresi için Önerilen $\hat{\beta}_{se}$ Tahmin Edicisi

β parametresi için Bölüm (2.1)'de tanıtilan tahmin edici yardımıyla elde edilen $\hat{\beta}_{se} = c\hat{\beta} + (1 - c)\beta_0$ formundaki tahmin edici, $\hat{\beta}$; β parametresi için EÇOB tahmin edicisi, β_0 ; β parametresi için önsel tahmin değeri ve c ; $OHK(\hat{\beta}_{se})$ değerini en küçükleyecek bir sabit olmak üzere;

$$\hat{\beta}_{se} = c(\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.14)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $OHK(\hat{\beta}_{se})$ değeri

$$OHK(\hat{\beta}_{se}) = E[c(\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0 - \beta]^2 \quad (5.15)$$

dir. Eş. 5.15'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} OHK(\hat{\beta}_{se}) &= E[c(\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0 - \beta]^2 \\ &= E \left[c^2(\hat{\beta} - \beta_0)^2 - 2c(\hat{\beta} - \beta_0)(\beta - \beta_0) + (\beta - \beta_0)^2 \right] \\ &= c^2 E \left[(\hat{\beta} - \beta_0)^2 \right] - 2c(\beta - \beta_0) E[\hat{\beta} - \beta_0] + (\beta - \beta_0)^2 \\ &= c^2 E[\hat{\beta}^2 - 2\hat{\beta}\beta_0 + \beta_0^2] - 2c(\beta - \beta_0) E[\hat{\beta} - \beta_0] + (\beta - \beta_0)^2 \\ &= c^2 \left[\frac{n^2\beta^2}{(n-1)(n-2)} - 2\frac{n}{n-1}\beta\beta_0 + \beta_0^2 \right] \\ &\quad - 2c(\beta - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1}\beta - \beta_0 \right] + (\beta - \beta_0)^2 \\ &= c^2 \frac{n^2\beta^2}{(n-1)(n-2)} - 2c^2 \frac{n}{n-1}\beta\beta_0 + c^2\beta_0^2 \\ &\quad - 2c(\beta - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1}\beta - \beta_0 \right] + (\beta - \beta_0)^2 + c^2 \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \beta^2 \\ &\quad - c^2 \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2}{(n-1)^2} \right] + c^2 \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]^2 \\
&\quad - 2c \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right] (\beta - \beta_0) + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2}{(n-1)^2} \right] + \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right]^2 \\
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{n^2(n-1) - n^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)} \right] + \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right]^2 \\
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{n^2(n-1-n+2)}{(n-1)^2(n-2)} \right] + \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right]^2 \\
&= c^2 \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right] + \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right]^2
\end{aligned}$$

$$OHK(\hat{\beta}_{se}) = c^2 \beta^2 \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} + \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right]^2 \quad (5.16)$$

elde edilir. Bu ifadenin c 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde OHK değerini en küçükleyecek daraltma faktörü c ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(\hat{\beta}_{se})}{\partial c} &= 2c\beta^2 \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \\
&\quad + 2 \left[c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) - (\beta - \beta_0) \right] \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) \\
0 &= c\beta^2 \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} + c \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 - (\beta - \beta_0)^2 \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right) \\
c &= \frac{(\beta - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için Eş. 2.1'de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{se} = \frac{(\beta - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2} (\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.18)$$

olarak elde edilir. Böylece bu tahmin ediciye ait Eş. 5.16'da verilen OHK ifadesinde Eş. 5.17'deki c daraltma faktörü yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında elde edilen tahmin ediciye ilişkin OHK değeri,

$$\begin{aligned} OHK(\hat{\beta}_{se}) &= \left[\frac{(\beta - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2} \right]^2 \beta^2 \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \\ &\quad + \left[\frac{(\beta - \beta_0) \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2} - (\beta - \beta_0)^2 \right]^2 \\ &= (\beta - \beta_0)^2 \left[\frac{\beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right] \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]^2}{\left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 \right]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[\left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]^2 - \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left[\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right]^2 \right]}{\left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 \right]^2} \right] \\ &= \frac{(\beta - \beta_0)^2}{\left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 \right]^2} \left[\beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right] \left[\frac{n}{n-1} \beta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_0 \right]^2 + \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right] \right] \\ &= \frac{(\beta - \beta_0)^2 \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right]}{\left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 \right]^2} \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta - \beta_0)^2 \beta^2 \left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2 + \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2} \\
OHK(\hat{\beta}_{se}) &= \frac{\beta^2 (\beta - \beta_0)^2 \left(\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right)}{\left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 + \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

β parametresinin sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ 'e ilişkin varyans ve $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicisine ilişkin OHK karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{OHK(\hat{\beta}_{se})}{Var(\tilde{\beta})} &= \frac{\frac{\beta^2 (\beta - \beta_0)^2 \left(\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \right)}{\left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2 + \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \beta^2}}{\frac{\beta^2}{n-2}} \\
&= \frac{(\beta - \beta_0)^2}{(n-2) \left[\beta^2 + \left(\beta - \frac{n-1}{n} \beta_0 \right)^2 \right]} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. β ve β_0 ifadeleri 2'den büyük reel değerler alabileceği için $n > 2$ olduğu sürece Eş. 5.20'deki etkinlik değerinin 1' den küçük olacağı görülmektedir.

Yine, daraltma faktörü olan c sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edildiği için β parametresi yerine EÇOB tahmin edicisi $\hat{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda daraltma faktörü için bir tahmin;

$$\hat{c} = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1} \hat{\beta} - \beta_0 \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \hat{\beta}^2 + \left(\frac{n}{n-1} \hat{\beta} - \beta_0 \right)^2} \quad (5.21)$$

olarak elde edilir. Eş. 5.21’de verilen daraltma faktörü kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edici,

$$\hat{\beta}_{se} = \frac{(\hat{\beta} - \beta_0) \left[\frac{n}{n-1} \hat{\beta} - \beta_0 \right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \hat{\beta}^2 + \left(\frac{n}{n-1} \hat{\beta} - \beta_0 \right)^2} (\hat{\beta} - \beta_0) + \beta_0 \quad (5.22)$$

biçiminde yazılır.

Bunun yanı sıra, Eş. 5.9 ve Eş. 5.18’de verilen $\hat{\beta}_{ss}$ ve $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicilerine ilişkin sapma değerleri sırasıyla,

$$Sapma(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{\beta^2(\beta - \beta_0)^2}{\beta^2 + (n-2)(\beta - \beta_0)^2}$$

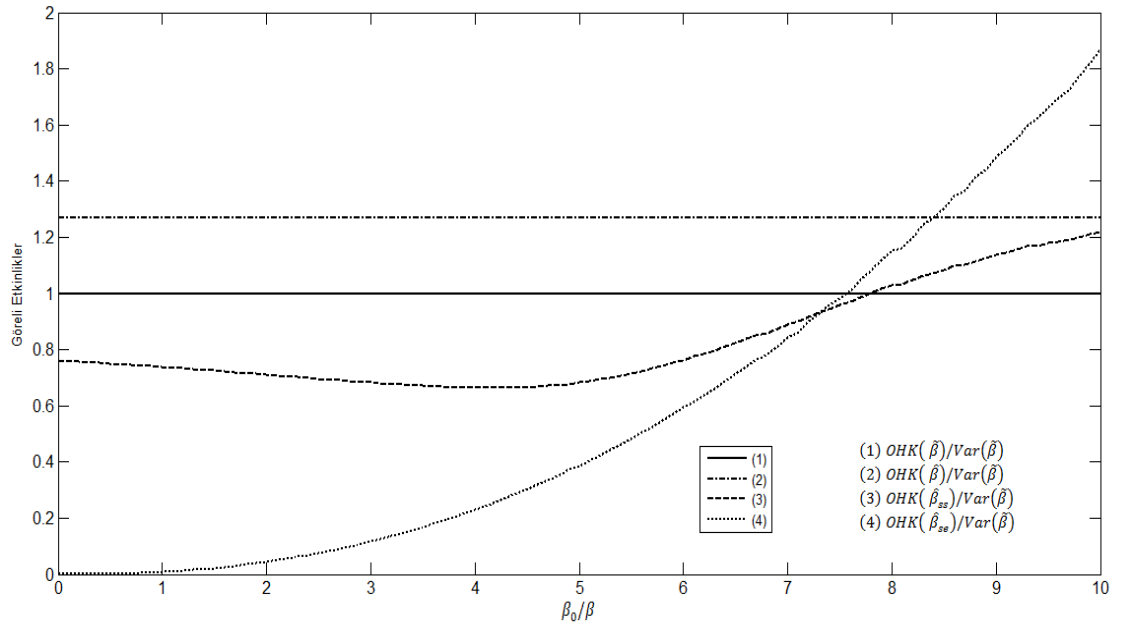
ve

$$Sapma(\hat{\beta}_{se}) = \frac{n^2 \beta^2 (\beta - \beta_0)^2}{n^2 \beta^2 + (n-1)^2(n-2) \left(\frac{n}{n-1} \beta - \beta_0 \right)^2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan $Sapma(\hat{\beta}_{ss})/Sapma(\hat{\beta}_{se}) < 1$ olduğu görülmektedir. $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisine ilişkin sapmanın $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicilerine ilişkin sapmadan daha küçük olduğu sonucuna ulaşılır.

5.5. $\hat{\beta}_{ss}$ ile $\hat{\beta}_{se}$ Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde Eş. 5.13 ve Eş. 5.22’de verilen tahmin ediciler ile sapmasız tahmin edicinin görelî etkinlik değerleri simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışmasında işlem kolaylığı sağlamak adına, Basit Pareto Dağılımında da olduğu gibi dağılış parametresi $\alpha = 1$ olarak alınmıştır. Pareto dağılımına sahip bir veri setinin varyansının hesaplanabilmesi için şekil parametresinin 2’den büyük olması gerekmektedir. Ayrıca Thompson (1968,a) çalışmasında, önerdiği tahmin edicinin üstünlüğünü kanıtlamak için yaptığı uygulamada normal dağılıma sahip bir yığının tanımlayıcı iki parametresi arasındaki oranı 1/5 olarak almıştır. Buradan hareketle, 100000 denemelik Monte Carlo simülasyon çalışmasında $\alpha = 1$ ve $\beta = 5$ parametrelerine sahip Pareto dağılımından gelen veri setlerinden yararlanılmıştır.



Şekil 5.1: EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri

Şekil 5.1’de $n=10$ durumunda değişik β_0/β değerleri için yukarıda sözü geçen dört tahmin edicinin sapmasız tahmin ediciye göre görelî etkinlikleri yer almaktadır. Şekil 5.1’e bakıldığında sapmasız tahmin edicinin EÇOB tahmin edicisinden daha küçük OHK değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca sapmasız tahmin edici ve

EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen her iki sapmalı tahmin edicinin de belli bir β_0/β değerine kadar sapmasız tahmin ediciden daha üstün olduğu görülmektedir. Bununla birlikte küçük β_0/β değerleri için EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin, sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin ediciden daha küçük OHK değerlerine sahiptir. Ancak β_0/β değeri büyüdükçe sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen tahmin edicinin OHK değerindeki artış hızının, EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin OHK değerindeki artış hızına göre daha az olduğu gözlenmektedir. Şekil 5.1’de sabit bir n değerine karşılık değişen β_0/β değerleri ele alınmıştır. Sabit bir β_0/β değeri ele alındığında değişen n değerleri için etkinlik değerlerinin nasıl etkilendiğini gözlemlemek için yapılan simülasyon çalışması sonuçları Çizelge 5.1’de özetlenmiştir.

Çizelge 5.1: $\beta_0/\beta = 2.5$ durumunda farklı n değerleri için EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göreli etkinlik değerleri

Tahmin Ediciler	n				
	5	10	15	25	50
$\tilde{\beta}$	1	1	1	1	1
$\hat{\beta}$	1.6477	1.2710	1.1707	1.0982	1.0475
$\hat{\beta}_{ss}$	0.4687	0.6959	0.7887	0.8686	0.9328
$\hat{\beta}_{se}$	0.1283	0.0767	0.0660	0.0600	0.0557

Çizelge 5.1’e bakıldığında, n artarken $\hat{\beta}_{ss}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin OHK değerlerinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin OHK değerine yakınsadığı görülmektedir. Bununla birlikte $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicisine ait göreli etkinlik değerlerine bakıldığında n artarken, bu tahmin edicinin $\tilde{\beta}$ sapmasız tahmin edicisine göre üstünlüğünün de arttığı görülmektedir.

5.6. β Parametresi için Önerilen $\beta_{(p)}^*$ Tahmin edici sınıfı

β parametresi için Eş. 4.6'da tanımlanan tahmin edici sınıfı Pareto dağılımının şekil parametresi için,

$$\beta_{(p)}^* = \beta_0 \left[1 + k \left(\frac{\beta_0}{\tilde{\beta}} \right)^p \right] \quad (5.23)$$

olarak tanımlanabilir. $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin OHK'nin hesaplanmasında,

$$E \left[\left(\frac{1}{\tilde{\beta}} \right)^{jp} \right] = K_{1(jp)} (1/\beta)^{jp}, \quad (j = 1, 2) \quad (5.24)$$

ve

$$K_{1(jp)} = (n-1)^{-jp} \frac{(n+jp-1)!}{(n-1)!} \quad (5.25)$$

fonksiyonlarından yararlanılır. $OHK(\beta_{(p)}^*)$ değeri,

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = E[\beta_{(p)}^* - \beta]^2 \quad (5.26)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $\lambda = \frac{\beta_0}{\beta}$ olmak üzere gerekli bilgiler yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} OHK(\beta_{(p)}^*) &= E \left[k \left(\frac{\beta_0}{\tilde{\beta}} \right)^p \beta_0 + \beta_0 - \beta \right]^2 \\ &= E [k(\beta_0)^{p+1} (\tilde{\beta})^{-p} + (\beta_0 - \beta)]^2 \\ &= E [k^2(\beta_0)^{2(p+1)} (\tilde{\beta})^{-2p} + 2k(\beta_0)^{p+1} (\tilde{\beta})^{-p} (\beta_0 - \beta) + (\beta_0 - \beta)^2] \\ &= k^2(\beta_0)^{2(p+1)} E [(\tilde{\beta})^{-2p}] + 2k(\beta_0)^{p+1} (\beta_0 - \beta) E [(\tilde{\beta})^{-p}] + (\beta_0 - \beta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2(\beta_0)^{2(p+1)}K_{1(2p)}\beta^{-2p} + 2k(\beta_0)^{p+1}(\beta_0 - \beta)K_{1(p)}\beta^{-p} + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= k^2\beta^2\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\frac{\beta_0^{2p}}{\beta^{2p}}K_{1(2p)} + 2k\beta\frac{\beta_0}{\beta}\frac{\beta_0^p}{\beta^p}\beta\left(\frac{\beta_0}{\beta} - 1\right)K_{1(p)} + \beta^2\left(\frac{\beta_0}{\beta} - 1\right)^2
\end{aligned}$$

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \beta^2[k^2(\lambda)^{2(1+p)}K_{1(2p)} + 2k(\lambda)^{(1+p)}(\lambda - 1)K_{1(p)} + (\lambda - 1)^2]$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin k ' ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle, OHK değerini en küçükleyecek daraltma faktörü k ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(\hat{\beta}_{ss})}{\partial k} &= 2k(\lambda)^{2(1+p)}K_{1(2p)} + 2(\lambda)^{(1+p)}(\lambda - 1)K_{1(p)} \\
0 &= k(\lambda)^{2(1+p)}K_{1(2p)} + (\lambda)^{(1+p)}(\lambda - 1)K_{1(p)} \\
k &= -\frac{(\lambda)^{(1+p)}(\lambda - 1)K_{1(p)}}{(\lambda)^{2(1+p)}K_{1(2p)}}
\end{aligned}$$

$$k = (\lambda)^{-p}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)K_{1(p)}/K_{1(2p)}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla k ifadesinde gerekli bilgiler yerine yazılarak düzenlendiğinde,

$$k = \left(\frac{\beta - \beta_0}{\beta_0}\right)\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^p (n - 1)^p \frac{(n + p - 1)!}{(n + 2p - 1)!} \quad (5.27)$$

ifadesine ulaşılır.

Daraltma faktörü olan k sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Ancak uygulamada β parametresine ulaşmak mümkün olamayacağı için, Eş. 5.27'de β parametresi yerine sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda k daraltma faktörü için bir tahmin edici;

$$\hat{k} = \left(\frac{\tilde{\beta} - \beta_0}{\beta_0} \right) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^p (n-1)^p \frac{(n+p-1)!}{(n+2p-1)!}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için Eş. 4.6'da verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen shrinkage tahmin edicisi,

$$k_{(p)} = (n-1)^p \frac{(n+p-1)!}{(n+2p-1)!} \quad (5.28)$$

olmak üzere, Eş. 5.27'te gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\beta_{(p)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0)k_{(p)} \quad (5.29)$$

olarak elde edilir.

Böylece $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin OHK, yukarıdaki tahmin edici Eş. 5.26'da yerine yazılıp gerekli işlemler yapılarak,

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \frac{k_{(p)}^2 \beta^2}{(n-2)} + (k_{(p)} - 1)^2 (\beta - \beta_0)^2 \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. $\lambda = \beta_0/\beta$ olarak alındığında,

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \beta^2 \left[\frac{k_{(p)}^2}{(n-2)} + (k_{(p)} - 1)^2 (1 - \lambda)^2 \right] \quad (5.31)$$

şeklinde yazılabilir.

$\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre göreceli etkinliği;

$$\frac{OHK(\beta_{(p)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} = \frac{\beta^2 \left[\frac{k_{(p)}^2}{(n-2)} + (k_{(p)} - 1)^2 (1 - \lambda)^2 \right]}{\beta^2 / (n-2)}$$

$$\frac{OHK(\beta_{(p)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} = k_{(p)}^2 + (n-2)(k_{(p)} - 1)^2 (1 - \lambda)^2 \quad (5.32)$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir. Eş. 5.32 ifadesinin 1' den küçük olması durumunda $OHK(\beta_{(p)}^*) < Var(\tilde{\beta})$ olacağı aşıkardır.

Bunun yanı sıra $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin sapma,

$$\begin{aligned} Sapma(\beta_{(p)}^*) &= E(\beta_{(p)}^*) - \beta \\ &= E[\beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0)k_{(p)}] - \beta \\ &= \beta_0 + k_{(p)}\beta - k_{(p)}\beta_0 - \beta \\ &= \beta_0(1 - k_{(p)}) - \beta(1 - k_{(p)}) \\ &= (1 - k_{(p)})(\beta_0 - \beta) \end{aligned} \quad (5.33)$$

olarak elde edilir.

Örnek 1: $p=1$ durumu ele alındığında Eş. 5.28 ve Eş. 5.29 yardımıyla

$$\beta_{(1)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0) \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

tahmin edicisi elde edilir. Bu tahmin ediciye ait OHK

$$OHK(\beta_{(1)}^*) = \beta^2 \left[\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n+1)^2} + \left(\frac{(n-1)}{(n+1)} - 1 \right)^2 (1 - \lambda)^2 \right]$$

şeklindedir.

$\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre göreceli etkinliği;

$$\begin{aligned}\frac{OHK(\beta_{(1)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} &= \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} + (n-2) \left(\frac{(n-1)}{(n+1)} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \\ &= \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} + \frac{4(n-2)}{(n+1)^2} (1-\lambda)^2\end{aligned}$$

dır. $OHK(\beta_{(1)}^*)/Var(\tilde{\beta}) < 1$ iken $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu söylenebilir. Buradan hareketle,

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} + \frac{4(n-2)}{(n+1)^2} (1-\lambda)^2 < 1 \quad (5.34)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 5.34’de gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$0 < \lambda < 1 + \left(\frac{n}{n-2} \right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda $\beta_{(1)}^*$ sapmalı tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ sapmasız tahmin edicisinden daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır. Buna ek olarak büyük örnek çapları için (yani $n \rightarrow \infty$ iken),

$$(1-\lambda)^2 < \frac{n}{n-2} \quad (5.35)$$

ifadesinden yola çıkılarak $n \rightarrow \infty$ iken $(1-\lambda)^2 < 1$ ’dir. Dolayısıyla $0 < \lambda < 2$ aralığında $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 2: $p=2$ durumu ele alındığında Eş. 5.28 ve Eş. 5.29 yardımıyla,

$$\beta_{(2)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0) \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

tahmin edicisi elde edilir. Bu tahmin ediciye ait OHK

$$OHK(\beta_{(2)}^*) = \beta^2 \left[\frac{(n-1)^4}{(n+1)^2(n+2)^2(n-2)} + \left(\frac{(n-1)^2}{(n+1)(n+2)} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \right]$$

şeklindedir.

$\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre görelî etkinliği,

$$\begin{aligned} \frac{OHK(\beta_{(2)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} &= \left[\frac{(n-1)^2}{(n+1)(n+2)} \right]^2 + (n-2) \left(\frac{(n-1)^2}{(n+1)(n+2)} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \\ &= \frac{(n-1)^4}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{(n-2)(5n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} (1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

dir. $OHK(\beta_{(2)}^*)/Var(\tilde{\beta}) < 1$ iken $\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu söylenebilir. Sonuç olarak,

$$\frac{(n-1)^4}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{(n-2)(5n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} (1-\lambda)^2 < 1 \quad (5.36)$$

olarak yazılabilir. Eş. 5.36'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$1 - \left(\frac{2n^2 + n + 3}{(n-2)(5n+1)} \right)^{1/2} < \lambda < 1 + \left(\frac{2n^2 + n + 3}{(n-2)(5n+1)} \right)^{1/2} \quad (5.37)$$

ifadesi elde edilir. Eş. 5.37'nin sağlanması durumunda $\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır. Buna ek olarak büyük örnek çapları için (yani $n \rightarrow \infty$ iken),

$$(1 - \lambda)^2 < \frac{2n^2 + n + 3}{(n - 2)(5n + 1)} \quad (5.38)$$

olarak elde edilir. Eş. 5.38'den yola çıkılarak $n \rightarrow \infty$ iken $(1 - \lambda)^2 < 2/5$, dolayısıyla $0.37 < \lambda < 1.63$ aralığında $\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır.

5.7. β Parametresi için Önerilen $\beta_{(p)}^*$ Tahmin edici sınıfı

Bölüm 3.2.2'de tanıtilan tahmin edici sınıfı Pareto dağılımının şekil parametresi β için,

$$\beta_{(p)}^* = \beta_0 \left[1 + w \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} \right)^p \right] \quad (5.39)$$

olarak tanımlanabilir. $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin OHK'nin hesaplanmasında,

$$E(\tilde{\beta}^{jp}) = K_{2(jp)}(\beta)^{jp}, (j = 1, 2)$$

ve

$$K_{2(jp)} = (n - 1)^{jp} \frac{(n - jp - 1)!}{(n - 1)!}$$

fonksiyonlarından yararlanılır. $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin $OHK(\beta_{(p)}^*)$ değeri,

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = E[\beta_{(p)}^* - \beta]^2 \quad (5.40)$$

şeklindedir. Böylece $\lambda = \frac{\beta_0}{\beta}$ olmak üzere Eş. 5.40'da verilen $OHK(\beta_{(p)}^*)$ eşitliğinde gerekli bilgiler yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
OHK(\beta_{(p)}^*) &= E \left[w \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} \right)^p \beta_0 + \beta_0 - \beta \right]^2 \\
&= E [w(\tilde{\beta})^p (\beta_0)^{1-p} + \beta_0 - \beta]^2 \\
&= E [w^2(\tilde{\beta})^{2p} (\beta_0)^{2(1-p)} + 2w(\tilde{\beta})^p (\beta_0)^{1-p} (\beta_0 - \beta) + (\beta_0 - \beta)^2] \\
&= w^2 (\beta_0)^{2(1-p)} E [(\tilde{\beta})^{2p}] + 2w(\beta_0)^{1-p} (\beta_0 - \beta) E[(\tilde{\beta})^p] + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= w^2 (\beta_0)^{2(1-p)} K_{(2p)}(\beta)^{2p} + 2w(\beta_0)^{1-p} (\beta_0 - \beta) K_{(p)}(\beta)^p \\
&\quad + (\beta_0 - \beta)^2 \\
&= w^2 (\lambda)^{2(1-p)} K_{(2p)}(\beta)^2 + 2w(\lambda)^{1-p} (\lambda - 1) K_{(p)}(\beta)^2 + (\beta)^2 (\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \beta^2 [w^2 (\lambda)^{2(1-p)} K_{2(2p)} + 2w(\lambda)^{1-p} (\lambda - 1) K_{2(p)} + (\lambda - 1)^2]$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifadenin w ' ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle, OHK değerini en küçükleyecek daraltma faktörü w ;

$$w = \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) (\lambda)^p \left(\frac{K_{2(p)}}{K_{2(2p)}} \right) \quad (5.41)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla Eş. 5.41'deki w ifadesinde gerekli bilgiler yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial OHK(\beta_{(p)}^*)}{\partial w} &= \beta^2 [2w(\lambda)^{2(1-p)} K_{(2p)} + 2(\lambda)^{1-p} (\lambda - 1) K_{(p)}] \\
0 &= 2w(\lambda)^{2(1-p)} K_{(2p)} + 2(\lambda)^{1-p} (\lambda - 1) K_{(p)} \\
w &= - \frac{(\lambda)^{1-p} (\lambda - 1) K_{(p)}}{(\lambda)^{2(1-p)} K_{(2p)}} \\
&= -(\lambda - 1) (\lambda)^{p-1} (K_{(p)} / K_{(2p)}) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) (\lambda)^p \left(\frac{K_{(p)}}{K_{(2p)}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\beta - \beta_0}{\beta_0} \right) \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^p \frac{(n-1)^p \frac{(n-p-1)!}{(n-1)!}}{(n-1)^{2p} \frac{(n-2p-1)!}{(n-1)!}}$$

$$w = \left(\frac{\beta - \beta_0}{\beta_0} \right) \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^p (n-1)^{-p} \frac{(n-p-1)!}{(n-2p-1)!} \quad (5.42)$$

ifadesine ulaşılır.

Daraltma faktörü olan w sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Ancak uygulamada β parametresine ulaşmak mümkün olamayacağı için, Eş. 5.42'de β parametresi yerine sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda w daraltma faktörü için bir tahmin;

$$\hat{w} = \left(\frac{\tilde{\beta} - \beta_0}{\beta_0} \right) \left(\frac{\beta_0}{\tilde{\beta}} \right)^p (n-1)^{-p} \frac{(n-p-1)!}{(n-2p-1)!} \quad (5.43)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak Eş. 5.43'de verilen ifadeden

$$w_{(p)} = (n-1)^{-p} \frac{(n-p-1)!}{(n-2p-1)!} \quad (5.44)$$

olarak alındığında Eş. 5.39'da verilen tahmin edici sınıfı

$$\beta_{(p)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0)w_{(p)} \quad (5.45)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin OHK, yukarıdaki tahmin edici Eş. 5.40 yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} OHK(\beta_{(p)}^*) &= E[(\tilde{\beta} - \beta_0)w_{(p)} + \beta_0 - \beta]^2 \\ &= E[(\tilde{\beta} - \beta_0)^2 w_{(p)}^2 + 2(\tilde{\beta} - \beta_0)w_{(p)}(\beta_0 - \beta) + (\beta_0 - \beta)^2] \\ &= w_{(p)}^2 E[(\tilde{\beta} - \beta_0)^2] + 2w_{(p)}(\beta_0 - \beta)E[\tilde{\beta} - \beta_0] + (\beta_0 - \beta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_{(p)}^2 E[\tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\beta}\beta_0 + \beta_0^2] - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)E[\tilde{\beta} - \beta_0] + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= w_{(p)}^2 [E(\tilde{\beta}^2) - 2\beta_0 E(\tilde{\beta}) + \beta_0^2] - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)[E(\tilde{\beta}) - \beta_0] \\
&\quad + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= w_{(p)}^2 \left[\frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 - 2\beta_0\beta + \beta_0^2 \right] - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)[\beta - \beta_0] \\
&\quad + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= w_{(p)}^2 \frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 - 2w_{(p)}^2\beta_0\beta + w_{(p)}^2\beta_0 - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)^2 \\
&\quad + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= w_{(p)}^2 \frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 - w_{(p)}^2\beta^2 + w_{(p)}^2\beta^2 - 2w_{(p)}^2\beta_0\beta + w_{(p)}^2\beta_0 \\
&\quad - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 \\
&= w_{(p)}^2\beta^2 \left[\frac{(n-1)}{(n-2)} - 1 \right] + w_{(p)}^2(\beta - \beta_0)^2 - 2w_{(p)}(\beta - \beta_0)^2 \\
&\quad + (\beta - \beta_0)^2
\end{aligned}$$

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \frac{w_{(p)}^2\beta^2}{(n-2)} + (w_{(p)} - 1)^2(\beta - \beta_0)^2 \quad (5.46)$$

olarak elde edilir. $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin OHK, Eş. 5.46'da $\lambda = \beta_0/\beta$ olarak alındığında,

$$OHK(\beta_{(p)}^*) = \beta^2 \left[\frac{w_{(p)}^2}{(n-2)} + (w_{(p)} - 1)^2(1 - \lambda)^2 \right] \quad (5.47)$$

şeklinde yazılabilir.

$\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre göreceli etkinliği,

$$\frac{OHK(\beta_{(p)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} = w_{(p)}^2 + (n-2)(w_{(p)} - 1)^2(1 - \lambda)^2 \quad (5.48)$$

ifadesi yardımıyla hesaplanabilir. Eş. 5.48’de verilen ifade birden küçük ise $OHK(\beta_{(p)}^*) < Var(\tilde{\beta})$ olacağı açıktır. Sonuç olarak $OHK(\beta_{(p)}^*) < Var(\tilde{\beta})$ eşitsizliği sağlandığında Pareto dağılımının şekil parametresi için önerilen $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha etkindir.

Bunun yanı sıra $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicisine ilişkin sapma,

$$\begin{aligned}
 Sapma(\beta_{(p)}^*) &= E(\beta_{(p)}^*) - \beta \\
 &= E[\beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0)w_{(p)}] - \beta \\
 &= \beta_0 + w_{(p)}\beta - w_{(p)}\beta_0 - \beta \\
 &= \beta_0(1 - w_{(p)}) - \beta(1 - w_{(p)}) \\
 &= (1 - w_{(p)})(\beta_0 - \beta)
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3: $p=1$ olarak ele alındığında Eş. 5.44 ve Eş. 5.45 yardımıyla

$$\beta_{(1)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0) \frac{(n-2)}{(n-1)}$$

tahmin edicisi elde edilir. Bu tahmin ediciye ait OHK

$$OHK(\beta_{(1)}^*) = \beta^2 \left[\frac{(n-2)^2}{(n-2)(n-1)^2} + \left(\frac{(n-2)}{(n-1)} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \right]$$

şeklindedir.

$\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre göreceli etkinliği,

$$\frac{OHK(\beta_{(1)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} + (n-2) \left(\frac{(n-2)}{(n-1)} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2$$

$$= \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} + \frac{(n-2)}{(n-1)^2} (1-\lambda)^2$$

biçiminde hesaplanabilir. Dolayısıyla $OHK(\beta_{(1)}^*)/Var(\tilde{\beta}) < 1$ iken $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu söylenebilir. Buradan hareketle,

$$\frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} + \frac{(n-2)}{(n-1)^2} (1-\lambda)^2 < 1$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$0 < \lambda < 1 + \left(\frac{2n-3}{n-2}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik sağlandığında $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır. Buna ek olarak büyük örnek çapları için (yani $n \rightarrow \infty$ iken),

$$(1-\lambda)^2 < \frac{2n-3}{n-2} \quad (5.50)$$

dir. Eş. 5.50'den yola çıkılarak $n \rightarrow \infty$ iken $(1-\lambda)^2 < 2$ dir. $0 < \lambda < 2.41$ aralığında $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 4: $p=2$ durumu ele alındığında Eş. 5.44 ve Eş. 5.45 yardımıyla

$$\beta_{(2)}^* = \beta_0 + (\tilde{\beta} - \beta_0) \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)^2}$$

tahmin edicisi elde edilir.

Bu tahmin ediciye ait OHK,

$$OHK(\beta_{(2)}^*) = \beta^2 \left[\frac{(n-3)^2(n-4)^2}{(n-2)(n-1)^4} + \left(\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)^2} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \right]$$

şeklindedir.

$\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre görelî etkinliği,

$$\begin{aligned} \frac{OHK(\beta_{(2)}^*)}{Var(\tilde{\beta})} &= \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{(n-1)^4} + (n-2) \left(\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)^2} - 1 \right)^2 (1-\lambda)^2 \\ &= \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{(n-1)^4} + \frac{(n-2)(5n-11)^2}{(n-1)^2} (1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanabilir. Dolayısıyla $OHK(\beta_{(2)}^*)/Var(\tilde{\beta}) < 1$ iken $\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu söylenebilir. Buradan hareketle,

$$\frac{(n-3)^2(n-4)^2}{(n-1)^4} + \frac{(n-2)(5n-11)^2}{(n-1)^2} (1-\lambda)^2 < 1$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$1 - \left(\frac{2n^2 - 9n + 13}{(n-2)(5n-11)} \right)^{1/2} < \lambda < 1 + \left(\frac{2n^2 - 9n + 13}{(n-2)(5n-11)} \right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik sağlandığı durumunda $\beta_{(1)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinden daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır. Buna ek olarak büyük örnek çapları için (yani $n \rightarrow \infty$ iken),

$$(1-\lambda)^2 < \frac{2n^2 - 9n + 13}{(n-2)(5n-11)} \quad (5.51)$$

dir. Eş. 5.51'den yola çıkılarak $n \rightarrow \infty$ iken $(1 - \lambda)^2 < 2/5$ 'dir. Dolayısıyla $0.37 < \lambda < 1.63$ aralığında $\beta_{(2)}^*$ tahmin edicisinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisine göre daha üstün olduğu sonucuna ulaşılır.

5.8. $\beta_{(p)}^*$ ile $\beta_{(p)}^*$ Tahmin Edici Ailelerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde farklı örnek çapları n , p ve λ değerleri kullanılarak elde edilen Pareto dağılımının şekil parametresi için önerilen sapmalı tahmin edicilerin, sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinlikleri hesaplanmıştır. Bu bölümde ele alınan λ değerleri, Örnek'lerde büyük n değerleri için oluşturulan etkinlik aralıkları göz önünde bulundurularak seçilmiştir.

Eş. 5.29'da verilen tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinliği Eş. 5.32 yardımıyla farklı n, p ve λ değerleri için hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerler Çizelge 5.2'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.2'ye bakıldığında $\beta_{(-1/2)}^*$ ve $\beta_{(1/2)}^*$ tahmin edicilerinin bütün λ değerleri için sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu görülmektedir. Bununla birlikte $0.50 \leq \lambda \leq 1.50$ iken ele alınan tüm sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin ediciye göre daha üstündür. Ancak λ değerleri 1'den uzaklaştıkça ele alınan sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre üstünlüğü azalmaktadır. Ayrıca p değerinin büyümesi de sapmalı tahmin edici sınıfının üstünlüğünün azalmasına neden olmaktadır.

Benzer şekilde Eş. 5.45'de verilen tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciye göre göreceli etkinliği Eş. 5.48 yardımıyla farklı n, p ve λ değerleri için hesaplanmış olup, hesaplanan bu değerler Çizelge 5.3'de yer almaktadır.

Çizelge 5.2. Eş. 5.29’da önerilen tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciye göre
görelî etkinlikleri

		Örnek Çapı n				
λ	Tahmin Edici	5	10	15	25	50
0.125	$\beta_{(-1)}^*$	0.8657	0.9130	0.9357	0.9490	0.9749
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9738	0.9831	0.9875	0.9901	0.9951
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9022	0.9354	0.9518	0.9615	0.9809
	$\beta_{(1)}^*$	0.8719	0.9211	0.9436	0.9563	0.9796
	$\beta_{(3/2)}^*$	1.1139	1.1369	1.1304	1.1190	1.0761
	$\beta_{(2)}^*$	1.6853	1.6965	1.6407	1.5788	1.3687
	$\beta_{(5/2)}^*$	2.4890	2.5955	2.5228	2.4111	1.9533
0.50	$\beta_{(-1)}^*$	0.8148	0.8788	0.9100	0.9284	0.9646
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9730	0.9826	0.9871	0.9898	0.9950
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.8858	0.9236	0.9426	0.9541	0.9770
	$\beta_{(1)}^*$	0.7355	0.8164	0.8594	0.8861	0.9416
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.6667	0.7647	0.8182	0.8519	0.9231
	$\beta_{(2)}^*$	0.7319	0.8302	0.8785	0.9065	0.9581
	$\beta_{(5/2)}^*$	0.9107	1.0270	1.0697	1.0858	1.0823
1.00	$\beta_{(-1)}^*$	0.7901	0.8622	0.8975	0.9184	0.9596
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9726	0.9823	0.9869	0.9896	0.9949
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.8778	0.9179	0.9382	0.9504	0.9751
	$\beta_{(1)}^*$	0.6694	0.7656	0.8186	0.8521	0.9231
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.4499	0.5842	0.6668	0.7224	0.8490
	$\beta_{(2)}^*$	0.2696	0.4103	0.5090	0.5805	0.7590
	$\beta_{(5/2)}^*$	0.1455	0.2665	0.3652	0.4432	0.6600
1.50	$\beta_{(-1)}^*$	0.8148	0.8788	0.9100	0.9284	0.9646
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9730	0.9826	0.9871	0.9898	0.9950
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.8858	0.9236	0.9426	0.9541	0.9770
	$\beta_{(1)}^*$	0.7355	0.8164	0.8594	0.8861	0.9416
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.6667	0.7647	0.8182	0.8519	0.9231
	$\beta_{(2)}^*$	0.7319	0.8302	0.8785	0.9065	0.9581
	$\beta_{(5/2)}^*$	0.9107	1.0270	1.0697	1.0858	1.0823
2.50	$\beta_{(-1)}^*$	1.0123	1.0115	1.0097	1.0082	1.0046
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9760	0.9846	0.9887	0.9910	0.9956
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9494	0.9693	0.9781	0.9830	0.9920
	$\beta_{(1)}^*$	1.2645	1.2227	1.1859	1.1583	1.0892
	$\beta_{(3/2)}^*$	2.4013	2.2085	2.0290	1.8880	1.5164
	$\beta_{(2)}^*$	4.4301	4.1901	3.8347	3.5142	2.5509
	$\beta_{(5/2)}^*$	7.0327	7.1109	6.7060	6.2265	4.4606

Çizelge 5.3: Eş. 5.45’de önerilen tahmin edicisinin sapmasız tahmin ediciye göre
görelî etkinlikleri

		Örnek Çapı n				
λ	Tahmin Edici	5	10	15	25	50
0.125	$\beta_{(-1)}^*$	0.8719	0.9211	0.9436	0.9563	0.9796
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9022	0.9354	0.9518	0.9615	0.9809
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9738	0.9831	0.9875	0.9901	0.9951
	$\beta_{(1)}^*$	0.8657	0.9130	0.9357	0.9490	0.9749
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.9948	0.9987	0.9997	1.0000	1.0003
	$\beta_{(2)}^*$	1.6888	1.5148	1.4053	1.3331	1.1750
	$\beta_{(5/2)}^*$	2.9280	2.6133	2.3354	2.1289	1.6252
0.50	$\beta_{(-1)}^*$	0.7355	0.8164	0.8594	0.8861	0.9416
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.8858	0.9236	0.9426	0.9541	0.9770
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9730	0.9826	0.9871	0.9898	0.9950
	$\beta_{(1)}^*$	0.8148	0.8788	0.9100	0.9284	0.9646
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.6758	0.7768	0.8302	0.8630	0.9304
	$\beta_{(2)}^*$	0.7325	0.8001	0.8412	0.8686	0.9297
	$\beta_{(5/2)}^*$	1.0254	1.0314	1.0250	1.0197	1.0083
1.00	$\beta_{(-1)}^*$	0.6694	0.7656	0.8186	0.8521	0.9231
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.8778	0.9179	0.9382	0.9504	0.9751
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9726	0.9823	0.9869	0.9896	0.9949
	$\beta_{(1)}^*$	0.7901	0.8622	0.8975	0.9184	0.9596
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.5212	0.6692	0.7480	0.7966	0.8966
	$\beta_{(2)}^*$	0.2689	0.4536	0.5677	0.6433	0.8108
	$\beta_{(5/2)}^*$	0.1030	0.2644	0.3897	0.4819	0.7092
1.50	$\beta_{(-1)}^*$	0.7355	0.8164	0.8594	0.8861	0.9416
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.8858	0.9236	0.9426	0.9541	0.9770
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9730	0.9826	0.9871	0.9898	0.9950
	$\beta_{(1)}^*$	0.8148	0.8788	0.9100	0.9284	0.9646
	$\beta_{(3/2)}^*$	0.6758	0.7768	0.8302	0.8630	0.9304
	$\beta_{(2)}^*$	0.7325	0.8001	0.8412	0.8686	0.9297
	$\beta_{(5/2)}^*$	1.0254	1.0314	1.0250	1.0197	1.0083
2.50	$\beta_{(-1)}^*$	1.2645	1.2227	1.1859	1.1583	1.0892
	$\beta_{(-1/2)}^*$	0.9494	0.9693	0.9781	0.9830	0.9920
	$\beta_{(1/2)}^*$	0.9760	0.9846	0.9887	0.9910	0.9956
	$\beta_{(1)}^*$	1.0123	1.0115	1.0097	1.0082	1.0046
	$\beta_{(3/2)}^*$	1.9130	1.6374	1.4877	1.3946	1.2014
	$\beta_{(2)}^*$	4.4417	3.5723	3.0293	2.6704	1.8810
	$\beta_{(5/2)}^*$	8.4051	7.1672	6.1078	5.3222	3.4012

Çizelge 5.3'e bakıldığında $\beta_{(-1/2)}^*$ ve $\beta_{(1/2)}^*$ tahmin edicilerinin bütün λ değerleri için sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu görülmektedir. Bununla birlikte $0.50 \leq \lambda \leq 1.50$ iken ele alınan tüm sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu gözlenmektedir. Bununla birlikte Çizelge 5.3'deki tahmin ediciler ile Çizelge 5.2'deki tahmin edicilere ait görelî etkinlik değerleri karşılaştırıldığında Eş. 5.45'de verilen tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciye göre üstün olduğu aralığın Eş. 5.29 ile verilen tahmin edici sınıfıninkine göre daha büyük olduğu gözlenmektedir.

Önceki bölümlerde, parametre tahminlerinin karşılaştırılmasında OHK kriterinin yanı sıra sapmalarında önemli bir yere sahip olduğundan söz edilmişti. Bu doğrultuda $\beta_{(p)}^*$ ile $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıflarına ait sapmaların karşılaştırılmasında Eş. 5.33 ile Eş. 5.49'un birbirine oranlanmasıyla elde edilen

$$\frac{Sapma(\beta_{(p)}^*)}{Sapma(\beta_{(p)}^*)} = \frac{1 - k_{(p)}}{1 - w_{(p)}} \quad (5.52)$$

ifadesinden yararlanılabilir.

Eş. 5.52 yardımıyla farklı n ve p değerleri için hesaplanmış görelî sapma değerleri Çizelge 5.4'te verilmiştir.

Çizelge 5.4: Farklı n ve p değerleri için Eş. 5.29 ve Eş. 5.45 tahmin edici sınıflarının görelî sapmaları

p	Örnek Çapı n				
	10	15	20	25	50
-1	0.6111	0.5714	0.5526	0.5417	0.5204
-1/2	0.2185	0.2120	0.2089	0.2070	0.2035
1/2	4.5769	4.7175	4.7880	4.8303	4.9151
1	1.6364	1.7500	1.8095	1.8462	1.9216
3/2	1.1841	1.2952	1.3569	1.3961	1.4799
2	0.9985	1.1009	1.1623	1.2030	1.2940
5/2	0.9108	0.9958	1.0530	1.0931	1.1882

Çizelge 5.4'e göre p 'nin negatif değerlerinde $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfına ilişkin sapma değerleri $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfına ilişkin sapma değerlerinden küçüktür. Buna ek olarak p 'nin pozitif değerlerinde meydana gelen artışın $Sapma(\beta_{(p)}^*)/Sapma(\beta_{(p)}^*)$ değerinde azalışa neden olduğu görülmektedir. Ancak p 'nin 1 civarındaki değerleri için $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfına ilişkin sapmanın $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfına ilişkin sapmadan daha küçük olduğu belirtilmelidir.

6. SONUÇ

İyi bir tahmin ediciden söz edildiğinde akla gelen ilk iki özellik sapmasızlık ve etkinlik yani küçük varyansa sahip olma durumudur. Ancak bazı durumlarda sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin edicilere göre daha küçük OHK' lere sahiptirler. Bu durumda sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin edicilere tercih edilebilirler. Bu çalışmada bu durum dikkate alınarak, normal ve üstel dağılımın parametrelerinin tahmini üzerine yapılan çalışmalar incelenmiş ve Thompson (1968,a), Jani (1991), Singh ve Singh (1997), Singh ve Saxena (2003) tarafından önerilen tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciden daha küçük OHK değerine sahip olduğu durumlar gösterilmiştir [1, 12, 14]. Daha sonra Thompson (1968,a), Jani (1991), Singh ve Singh (1997) tarafından önerilen bu tahmin ediciler kullanılarak Pareto dağılımının şekil parametresi için sapmasız tahmin ediciden daha küçük OHK değerine sahip tahmin ediciler önerilmiştir.

Öncelikle, Thompson (1968,a)'nın önermiş olduğu tahmin ediciden yola çıkılarak Pareto dağılımının şekil parametresine ilişkin iki tane sapmalı tahmin edici oluşturulmuştur. Şekil 5.1 ve Çizelge 5.1'de verilen görelî etkinlik değerlerine bakıldığında önerilen sapmalı tahmin edicilerin EÇOB ve sapmasız tahmin edicilere göre daha küçük OHK'ye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, küçük β_0/β değerleri için EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin ediciye ait OHK değerleri, sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin OHK değerlerinden daha küçüktür. Ancak tahmin edicilerin tanıtıldığı bölümde $Sapma(\hat{\beta}_{ss})$ değerinin $Sapma(\hat{\beta}_{se})$ değerinden küçük olduğu belirtilmişti. Eğer araştırmacı, sapmasız tahmin ediciye göre daha küçük OHK değeri ile birlikte parametreden sapma değerinin de küçük olmasını istiyorsa bu durumda $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisini kullanması daha uygun olacaktır.

Bu tahmin edicilere ek olarak, Jani (1991) ve Singh ve Singh (1997)'in önermiş olduğu tahmin edici sınıflarından yararlanılarak, Pareto dağılımının şekil parametresine ilişkin iki tane sapmalı tahmin edici sınıfı oluşturulmuştur.

Bölüm 5.8’de bu tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre hangi durumlarda daha küçük OHK’ ye sahip oldukları incelenmiştir. Buna göre Eş. 5.29’ da verilen $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının, $0.50 \leq \lambda \leq 1.50$ iken sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu söylenebilir. Ancak λ değerleri 1’den uzaklaştıkça ele alınan sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre üstünlüğü azalmaktadır. Ayrıca p değerinin büyümesi de sapmalı tahmin edici sınıfının üstünlüğünün azalmasına neden olmaktadır. Benzer şekilde Eş. 5.45’de verilen $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının da $0.50 \leq \lambda \leq 1.50$ iken sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu söylenebilir. $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicileri ile $\beta_{(p)}^*$ tahmin edicilerine ait göreceli etkinlik değerleri incelendiğinde hemen hemen aynı λ ve p değerleri için iki tahmin edici sınıfının da sapmasız tahmin ediciye göre daha üstün olduğu görülmektedir. Ayrıca iki tahmin edici sınıfının da etkin olduğu aralıklara bakıldığında, örnek çapı büyüdükçe sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye üstünlüklerinin azaldığı gözlenmektedir. Buna ek olarak, Örnek 1 ve Örnek 3’te de görüldüğü gibi, $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciye göre üstün olduğu aralık $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının kine göre daha büyüktür. Ayrıca p’nin negatif değerleri için $\beta_{(p)}^*$, pozitif değerleri için $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının daha etkin olduğu görülmektedir. Bununla birlikte p’nin negatif değerleri için $\beta_{(p)}^*$, pozitif değerleri için $\beta_{(p)}^*$ tahmin edici sınıfının daha küçük sapmaya sahip olduğu görülmektedir. Önerilen bu tahmin edicilerin etkin ve küçük sapmaya sahip olduğu aralıklarda kullanılmasıyla parametre tahmininde daha sağlıklı sonuçlara ulaşmak mümkün olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Thompson, J.R., "Some shrinkage techniques for estimating the mean" **Jour. Amer. Statist. Assoc.**, 63: 113-122 (1968a).
2. Thompson, J.R., "Accuracy borrowing in the estimation of the mean by shrinkage to an interval", **Jour. Amer. Statist. Assoc.**, 63: 953-963 (1968b).
3. Mehta, J.S., Srinivasan, S.R., "Estimation of the mean by shrinkage to a point", **Jour. Amer. Statist. Assoc.**, 66 (233): 86-90 (1971).
4. Govindarajulu, Z., Sahai, H., "Estimation of a normal distribution with known coefficient of variation", **Statist. Appl. Res., JUSE**, (A), 91: 85-98 (1972).
5. Das, B., "Estimation of μ^2 in normal population", **Cal. Statist. Assoc. Bull.** 24: 135-140 (1975).
6. Rao, V.N., Singh, J., "A note on estimation of μ^2 in normal density", **Jour. Ind. Soc. Agril. Statist.**, 34 (1): 82-84 . (1982).
7. Srivastava, V.K., Dwivedi, T.D., Bhatnagar, S., "Estimation of the square of mean in normal population", **Statistica**, n.4: 455-466 (1980).
8. Singh H.P., Katyar, N.P., "A generalized class of estimators for common parameters of two normal distribution with known coefficient of variation", **Jour. Ind. Soc. Agril. Statist.**, 40(2): 127-149 (1988).
9. Bhatnagar, S., "On the use of population variance in estimating mean", **Jour. Ind. Soc. Agril. Statist.**, 38: 403-409 (1986).
10. Srivastava, R., "On shrinkage estimation of the exponential scale parameter", **IEEE Trans. Reliability**, 34: 224-226 (1985).
11. Singh H.P., "Estimation of parameters in normal parent". **Jour. Ind. Soc. Agril. Statist.**, 11(1) :98-107 (1990).
12. Jani, P.N., "A class of shrinkage estimators for the scale parameter of the exponential distribution", **IEEE Trans. Reliability**, 40: 68-70 (1991).
13. Kourouklis, S. "Estimation in the two-parameter exponential distribution with prior information", **IEEE Trans. Reliability**, 43(3): 446-450 (1994).
14. Singh H.P., Singh, R., "A class of shrinkage estimators for the variance of a normal population", **Microelectron and Reliability**, 37 (5): 863-867 (1997).

15. Singh H.P., Shukla S. K., "A family of shrinkage estimators for the square of mean in normal distribution", ***Statistical Papers***, 44: 433-442 (2003).
16. Singh H.P., Saxena S., "A class of shrinkage estimators for variance of a normal Population", ***Brazilian Journal of Probability and Statistics***, 17: 41–56 (2003).
17. Pareto V. Cours d' Economia Politique. Roge and Cie, Lassanne and Paris (1897)
18. Rytgaard M., "Estimation in Pareto Distribution", ***ASTIN Bulletin*** , 20(2): 201-216 (1990).
19. Singh D.C., Singh P., Singh, P.R., "Shrunken estimators for the scale parameter of classical Pareto Distribution". ***Microelectronand Reliability***, 36 (3): 435-439 (1996).
20. Prakash G., Singh D.C., Singh R.D., "Some test estimators for the scale parameter of classical Pareto Distribution". ***Journal of Statistical Research***, 40 (2): 41-54 (2006).
21. Prakash G., "Some estimators for the Pareto Distribution", ***Journal of Scientific Research***, 1 (2): 236-247 (2009).
22. Mishra A., "A note on estimation of amaunt of information in normal samples." ***Journal of Indian Society of Agricultural statistics***. 37: 226-230 (1985).
23. Pandey B. N., "Comprasion of shrunken estimators of the scale parameter of an exponential densty function", ***JISAS***, 35: 109-120 (1983)

EKLER

EK-1 Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Şekil 3.1. oluşturmada kullanılan komut:

```
clc
clear
den=100000;

b=normrnd(0,5,1,100);k=length(b);a=sort(abs(b));
for i=1:k

n=9;
sigma=1;mu(i)=sigma.*a(i);
[S1(i) S2(i) S3(i) S4(i) S5(i)]=OHKortk(mu(i),sigma,n,den);
end
S1;
S2;
S3;
S4;
S5;
plot(a,S1);hold on; plot(a,S2);
plot(a,S3);plot(a,S4);plot(a,S5);hold off
```

OHKortk fonksiyonu

```
function [S1, S2, S3, S4, S5]=OHKort(mu, sigma, n, den)
T1=0;T2=0;T3=0;T4=0;T5=0;
for j=1:den
x(j,1:n)=normrnd(mu,sigma,1,n);
xort(j)=mean(x(j,:));s2(j)=var(x(j,:));
c1(j)=1;
c2(j)=(mu^2)/(mu^2+(sigma^2)/n);
c3(j)=(mu^2)/(mu^2+(s2(j))/n);
c4(j)=(xort(j)^2)/(xort(j)^2+(sigma^2)/n);
c5(j)=(xort(j)^2)/(xort(j)^2+(s2(j))/n);
cx1(j)=c1(j)*xort(j);
cx2(j)=c2(j)*xort(j);
cx3(j)=c3(j)*xort(j);
cx4(j)=c4(j)*xort(j);
cx5(j)=c5(j)*xort(j);
T1=T1+((cx1(j)-mu)^2)/den;
T2=T2+((cx2(j)-mu)^2)/den;
T3=T3+((cx3(j)-mu)^2)/den;
T4=T4+((cx4(j)-mu)^2)/den;
T5=T5+((cx5(j)-mu)^2)/den;
end
S1=T1/T1;
S2=T2/T1;
S3=T3/T1;
S4=T4/T1;
S5=T5/T1;
```

EK-1 (Devam) Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Çizelge 3.1. oluşturmada kullanılan komutlar:

```

clc
clear
p=[-1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5 ];n=[3 5 7 11];k=length(p);L=1;

a=2*p;b=4*p;
for i=1:4
    A(i,1:k)=(n(i)+a-1)/2-1; B(i,1:k)=(n(i)+b-1)/2-1;
    for j=1:k

        if A(i,j)<0
            FA(i,j)=0;
        else if A(i,j)==fix(A(i,j))
            FA(i,j)=factorial(A(i,j));

        else
            FA(i,j)=kesirlif(A(i,j)+1);
        end

        if B(i,j)<0
            FB(i,j)=0;
        else if B(i,j)==fix(B(i,j))
            FB(i,j)=factorial(B(i,j));

        else
            FB(i,j)=kesirlif(B(i,j)+1);
        end

        wp(i,j)=(((n(i)-1)/2)^p(j))*(FA(i,j)/ FB(i,j));
        Etkinlik(i,j)=(2/(n(i)-1))/(((1-wp(i,j))^2)*((L-
1)^2)+(2*wp(i,j)^2)/(n(i)-1));
    end
end
Etkinlik

kesirlif fonksiyonu

function [kf]=kesirlif(x)
r=x+0.5;f(1)=pi^(0.5);
for i=2:r
    f(i)=(i-1.5)*f(i-1);
end
kf=f(r);

```

EK-1 (Devam) Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Varyansın tahmininde Thompson(1968) tahmin edicisi için kullanılan komut

```
clc
clear
mu=1;sigma=5;lamda=0.125;n=3 ;den=100000;T1=0;T2=0;
for j=1:den

    x(j,1:n)=normrnd(mu,sigma,1,n);
    sigma20=(sigma^2)*lamda;
    sigma2(j)=var(x(j,:));
    c(j)=((sigma2(j)-sigma20)^2)/(2*(sigma2(j)^2)/(n-2)+(sigma2(j)-sigma20)^2);
    sigma2s(j)=c(j)*(sigma2(j)-sigma20)+sigma20;
    T1=T1+((sigma2(j)-sigma^2)^2)/den;
    T2=T2+((sigma2s(j)-sigma^2)^2)/den;
end
T1
T2
Etkinlik=T1/T2
```

Çizelge 4.1. oluşturmada kullanılan komutlar:

```
clc
clear
p=[-1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5];n=[3 5 7 11];k=length(p);L=0.5;
a=p;b=2*p;
for i=1:4
    A(i,1:k)=(n(i)-a-1); B(i,1:k)=(n(i)-b-1);
    for j=1:k

        if A(i,j)<0
            FA(i,j)=0;
        else if A(i,j)==fix(A(i,j))
            FA(i,j)=factorial(A(i,j));
        else
            FA(i,j)=kesirlif(A(i,j)+1);
        end
    end
    if B(i,j)<0
        FB(i,j)=0;
    else if B(i,j)==fix(B(i,j))
        FB(i,j)=factorial(B(i,j));
    else
        FB(i,j)=kesirlif(B(i,j)+1);
    end
end
    k1(i,j)=(FA(i,j))/ (((n(i))^p(j))*(FB(i,j)));
    Etkinlik(i,j)=(((1-k1(i,j))^2)*((L-1)^2)+((1-k1(i,j))^2))*(n(i));
end
Etkinlik
```

EK-1 (Devam) Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Üstel dağılımın dağılış parametresinin tahmininde Thompson(1968) tahmin edicisi için kullanılan komut

```
clc
clear
mu=1; lamda=2.5; n=11 ; den=100000; T1=0; T2=0;
for j=1:den

    x(j,1:n)=exprnd(mu,1,n);
    mu0=mu*lamda;
    mus(j)=mean(x(j,:));
    c(j)=((1-lamda)^2)/(((1-lamda)^2)+1/n);
    mut(j)=c(j)*(mus(j)-mu0)+mu0;
    T1=T1+((mus(j)-mu)^2)/den;
    T2=T2+((mut(j)-mu)^2)/den;
end
T1
T2
Etkinlik=T2/T1
```

Şekil 5.1. oluşturmada kullanılan komutlar:

```
clc
clear
l=0:0.1:10; n=10; k=length(l); den=100000;
for i=1:k
    alfa=1; B=1/5; B0(i)=B*l(i);
    [S1(i) S2(i) S3(i) S4(i)]= OHKPARETOT(alfa,B,B0(i),n,den);
end
S1
S2
S3
S4
plot(l,S1); hold on; plot(l,S2); plot(l,S3); plot(l,S4); hold off
```

OHKPARETOT fonksiyonu

```
function [S1 S2 S3 S4]= OHKPARETOT(alfa,B,B0,n,den)
T1=0; T2=0; T3=0; T4=0;
for j=1:den
    x(j,1:n)=gprnd(B,alfa,alfa,1,n);
    a(j,:)=log(x(j,:)/alfa);
    Be(j)=n/(sum(a(j,:))); Bs(j)=(n-1)/(sum(a(j,:)));
    c1(j)=((Be(j)-B0)*((n/(n-1))*Be(j)-B0))/(((n^2)/((n-1)^2)*(n-2))*((Be(j)^2)+((n/(n-1))*Be(j)-B0)^2));
    c2(j)=((Bs(j)-B0)^2)/((Bs(j)^2)/(n-2)+(Bs(j)-B0)^2);
    Bte(j)=c1(j)*(Be(j)-B0)+B0; Bts(j)=c2(j)*(Bs(j)-B0)+B0;
    T1= T1+((Bs(j)-B)^2)/den; T2= T2+((Be(j)-B)^2)/den;
    T3= T3+((Bts(j)-B)^2)/den; T4= T4+((Bte(j)-B)^2)/den;
end
S1=T1/T1;
S2=T2/T1;
S3=T3/T1;
S4=T4/T1;
```

EK-1 (Devam) Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Çizelge 5.2.ve 5.3 oluşturmada kullanılan komutlar:

```

clc
clear
p=[ -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5 ];n=[ 10 15 20 25
50];k=length(p);l=length(n);lamda=1.50;
for i=1:l
    A(i,1:k)=(n(i)+p-1); B(i,1:k)=(n(i)+2*p-1); C(i,1:k)=(n(i)-p-1);
    D(i,1:k)=(n(i)-2*p-1);
    for j=1:k
        if A(i,j)<0
            FA(i,j)=0;
        else if A(i,j)==fix(A(i,j))
            FA(i,j)=factorial(A(i,j));
        else
            FA(i,j)=kesirlif(A(i,j)+1);
        end
    end
    if B(i,j)<0
        FB(i,j)=0;
    else if B(i,j)==fix(B(i,j))
        FB(i,j)=factorial(B(i,j));
    else
        FB(i,j)=kesirlif(B(i,j)+1);
    end
end
    if C(i,j)<0
        FC(i,j)=0;
    else if C(i,j)==fix(C(i,j))
        FC(i,j)=factorial(C(i,j));
    else
        FC(i,j)=kesirlif(C(i,j)+1);
    end
end
    if D(i,j)<0
        FD(i,j)=0;
    else if D(i,j)==fix(D(i,j))
        FD(i,j)=factorial(D(i,j));
    else
        FD(i,j)=kesirlif(D(i,j)+1);
    end
end
    kp(i,j)=((n(i)-1)^p(j))*(FA(i,j)/FB(i,j));
    wp(i,j)=((n(i)-1)^(-p(j)))*(FC(i,j)/FD(i,j));
    EtkinlikJani(i,j)=(kp(i,j))^2+(n(i)-2)*((kp(i,j)-1)^2)*((1-
lamda)^2);
    EtkinlikSingh(i,j)=(wp(i,j))^2+(n(i)-2)*((wp(i,j)-1)^2)*((1-
lamda)^2);
end
EtkinlikJani
EtkinlikSingh

```


EK-1 (Devam): Matlab Programlama Dilinde Yazılmış Komutlar

Çizelge 5.4 oluşturmada kullanılan komutlar:

```

clc
clear
p=[ -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5 ];n=[ 10 15 20 25
50];k=length(p);l=length(n);
for i=1:l
    A(i,1:k)=(n(i)+p-1); B(i,1:k)=(n(i)+2*p-1); C(i,1:k)=(n(i)-p-1);
    D(i,1:k)=(n(i)-2*p-1);

    for j=1:k
        if A(i,j)<0
            FA(i,j)=0;
        else if A(i,j)==fix(A(i,j))
            FA(i,j)=factorial(A(i,j));
        else
            FA(i,j)=kesirlif(A(i,j)+1);
        end
    end
    if B(i,j)<0
        FB(i,j)=0;
    else if B(i,j)==fix(B(i,j))
        FB(i,j)=factorial(B(i,j));
    else
        FB(i,j)=kesirlif(B(i,j)+1);
    end
end
    if C(i,j)<0
        FC(i,j)=0;
    else if C(i,j)==fix(C(i,j))
        FC(i,j)=factorial(C(i,j));
    else
        FC(i,j)=kesirlif(C(i,j)+1);
    end
end
    if D(i,j)<0
        FD(i,j)=0;
    else if D(i,j)==fix(D(i,j))
        FD(i,j)=factorial(D(i,j));
    else
        FD(i,j)=kesirlif(D(i,j)+1);
    end
end
    kp(i,j)=((n(i)-1)^p(j))*(FA(i,j)/FB(i,j));
    wp(i,j)=((n(i)-1)^(-p(j)))*(FC(i,j)/FD(i,j));
    sapma(i,j)=(1-kp(i,j))/(1-wp(i,j));
end
end
sapma

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZDEMİR, Şenay
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.01.1988, İKİZDERE
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 537 303 21 04
 e-mail : snyozdemir@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2009
Lise	Keçiören Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2005

Yabancı Dil

İngilizce (2010 Sonbahar Dönemi KPDS Puanı: 89)

Yayınlar

Özdemir, Ş., Ebeğil M., “Klasik Pareto Dağılımının Şekil Parametresi İçin Shrinkage Tahmin Ediciler”, SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, (Cilt:16, 1-2012’de yayına kabul edilmiştir.)