

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

135771

Hakan ÖZTÜRK

**SİLİNDİRİK GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT
DENKLEMİNİN SPEKTRAL GREEN FONKSİYONLARI
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**

FİZİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2003

135771

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİLİNDİRİK GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN
SPEKTRAL GREEN FONKSİYONLARI METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

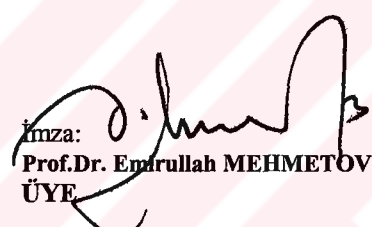
HAKAN ÖZTÜRK

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

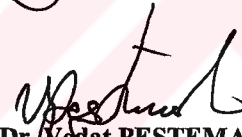
Bu tez, 02/07/2003 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza: 
Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR
DANIŞMAN

İmza: 
Prof. Dr. Emrullah MEHMETOV
ÜYE

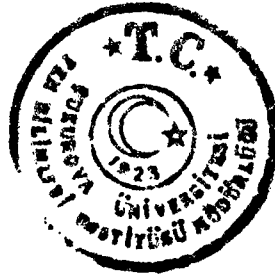
İmza: 
Doç. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
ÜYE

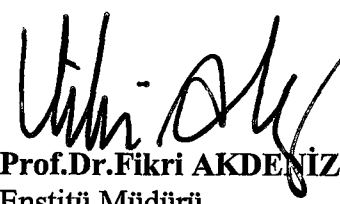
İmza: 
Doç. Dr. Fikret ANLI
ÜYE

İmza: 
Doç. Dr. Vedat PEŞTEMALCI
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Fizik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No: 754




Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

**Bu Çalışma Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FBE 2002-D42**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

**SİLİNDİRİK GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN
SPEKTRAL GREEN FONKSİYONU METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

Hakan ÖZTÜRK

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR

Yıl: 2003, Sayfa:107

Jüri: Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR

Prof. Dr. Emirullah MEHMETOV

Doç. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

Doç. Dr. Fikret ANLI

Doç. Dr. Vedat PEŞTAMALCI

Nötron transport denklemi reaktör fiziğinin güncel konularından biridir. Transport denkleminin bugüne kadar yapılan çözümleri genellikle dilim geometride olmuştur ve çok idealize edilmiş sistemler için yapılmıştır.

Bu doktora tezinde, transport denkleminin çözümleri detaylı olarak incelendi. Bu eşitlik, silindirik geometride yazılıp izotropik saçılmalı ve tek gruplu durum için değişkenlerine ayırma yöntemiyle yeni bir analitik çözüm üretildi. Daha sonra, ortogonal polinom setleri kullanılarak diskret ordinat denklem sistemine dönüştürüldü. Silindirik geometride transport denkleminin çözümüne daha doğru katkı sağlaması için Spektral Green Fonksiyonu metodu geliştirildi. Diskret ordinat denklem sistemi Diamond Difference ve Spektral Green Fonksiyonu metodu ile çözüldü.

Transport denkleminin dilim geometrideki çözümünde kullanılan metodlar, bizim çözüm metodlarımız için temel oluşturdu. Nötron skaler akısı için bulduğumuz sonuçların, daha önce yapılan çalışmalar ve nümerik hesaplamalarla uyum içinde olduğu gözlemlendi.

Anahtar Kelimeler: Nötron transport denklemi, silindirik geometri, spektral Green fonksiyonu, Diamond Difference

ABSTRACT

PhD THESIS

SOLUTION OF THE NEUTRON TRANSPORT EQUATION WITH SPECTRAL GREEN'S FUNCTION METHOD IN CYLINDRICAL GEOMETRY

Hakan ÖZTÜRK

DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR

Year: 2003, Pages: 107

Jury: Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR

Prof. Dr. Emirullah MEHMETOV

Assoc. Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

Assoc. Prof. Dr. Fikret ANLI

Assoc. Prof. Dr. Vedat PEŞTEMALCI

Neutron transport equation is one of the current topics of reactor physics. The solutions to the transport equation till now have been done in slab geometry and it is solved for very idealized systems.

In this PhD study, the solutions to the transport equation is presented in details. This equation is written in cylindrical geometry and then a new analytical solution is produced by the separation of variables for isotropic scattering and one-group case. After that, it is converted to the discrete-ordinates equation system by using orthogonal polynomials. Spectral Green's Function method is developed to provide more accurate solutions to the transport equation in cylindrical geometry. Discrete-ordinates equations is solved by Spectral Green's Function (SGF) and Diamond Difference (DD) methods.

The methods that have been used in the solution of transport equation in slab geometry are taken to be the base for our cylindrical transport solutions. The results we obtained for scalar neutron flux are consistent with the results by earlier studies and numerical calculations.

Key Words: Neutron transport equation, cylindrical geometry, Spectral Green's Function, Diamond Difference.

TEŞEKKÜR

Bu konuyu doktora tez çalışması olarak bana uygun gören, ısrarla çalışmalarımı özveriyle destekleyen ve beraber çalışmaya başladığımız ilk günden beri her konuda yardımını gördüğüm danışman hocam Prof. Dr. Süleyman GÜNGÖR'e saygılarımı sunar teşekkürü bir borç bilirim.

Uzakta olmasına rağmen desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, zor anlarımda yardımına koşan hocam Doç. Dr. Fikret ANLI'ya sonsuz teşekkürler.

Son olarak, bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan, beni sürekli çalışmalarına motive edip umudumu hiçbir zaman yitirmememi söyleyen ve inanan başta sevgili annem Güler ÖZTÜRK'e ve desteklerinin her zaman arkamda olduğunu gördüğüm kardeşlerime ayrı ayrı teşekkür ediyorum.

Bu doktora tez çalışmasını, her ne kadar aramızda olmasa da bu günümü görmeyi çok isteyen, rahmetle andığım sevgili babama atfetmek istiyorum.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	7
3. MATERYAL VE METOD.....	12
3.1. Tanımlar.....	12
3.2. Nötron Transport Denklemi.....	15
3.3. Transport Denkleminin Silindirik Geometride Türetilmesi.....	21
3.4. Silindirik Geometride Bir Boyutlu Nötron Transportu İçin Spektral Green Fonksiyonlarının (SGF) Türetilmesi ve Bu Fonksiyonlar İle Çözüm.....	27
3.4.1. İterasyon Denklemlerinin Oluşturulması.....	45
3.5. Silindirik Geometride S_N Denklemlerinin Diamond Difference (DD) Yöntemi İle Çözümü.....	55
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	63
4.1. Skaler Akı Değerlerinin SGF ve DD Nümerik Çözümleme Yöntemleriyle Bulunması.....	63
4.2. Spektral Green Çözümünün P_N ve S_N 'de DD Yöntemleri İle Karşılaştırılması.....	66
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	71
KAYNAKLAR.....	82
ÖZGEÇMİŞ.....	86
EKLER.....	87

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Farklı c_0 değerleri için v_k özdeğerleri.....	35
Çizelge 4.1	Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri ile hücre skaler akılarının S_2 yaklaşımı ile çözümü; $\sigma_{s0} = 0.99\text{cm}^{-1}$, $\sigma_T = 1\text{cm}^{-1}$, $r = 10\text{cm}$	65
Çizelge 4.2	Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri ile hücre skaler akılarının S_4 yaklaşımı ile çözümü; $\sigma_{s0} = 0.99\text{cm}^{-1}$, $\sigma_T = 1\text{cm}^{-1}$, $r = 10\text{cm}$	65
Çizelge 5.1	S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 5\text{cm}$).....	73
Çizelge 5.2	S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 2.5\text{cm}$).....	74
Çizelge 5.3	S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 1\text{cm}$).....	75
Çizelge 5.4	S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 5\text{cm}$).....	76
Çizelge 5.5	S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 2.5\text{cm}$).....	77
Çizelge 5.6	S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 1\text{cm}$).....	78

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Nötronun geliş ve saçılma doğrultusu.....	20
Şekil 3.2	Silindirik geometride nötron doğrultusu.....	21
Şekil 3.3	Silindirik geometride nötron doğrultusunun açısal değişkenleri (nötron doğrultusunun x-y düzlemindeki izdüşümü).....	25
Şekil 3.4	j hücresi; giren hücre-kenarı açısal akıları $\psi_{m,n,j\pm 1/2}$, hücre-ortalama açısal akısı $\psi_{m,n,j}$ ve iç kaynak Q_j	40
Şekil 3.5	Tek boyutlu silindirik geometride uzaysal hücre ağı.....	58
Şekil 5.1	S_2 ile iki hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	73
Şekil 5.2	S_2 ile dört hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	74
Şekil 5.3	S_2 ile on hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	75
Şekil 5.4	S_4 ile iki hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	76
Şekil 5.5	S_4 ile dört hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	77
Şekil 5.6	S_4 ile on hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı.....	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\vec{r}$	Konum vektörü
$\vec{u}$	Hız vektörü
t	Zaman
$N(\vec{r}, \vec{u}, t)$	Nötron açısal yoğunluğu
$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t)$	Açısal nötron dağılım fonksiyonu veya açısal nötron akısı
$j(\vec{r}, \vec{u}, t)$	Nötron açısal akımı
V	Hacim
S	Yüzey
$l(\vec{r}, \vec{u})$	Ortalama serbest yol
σ	Makroskopik tesir kesiti
Σ	Mikroskopik tesir kesiti
σ_T	Toplam makroskopik tesir kesiti
σ_s	Makroskopik saçılma tesir kesiti
$\hat{\Omega}$	Nötronun hızı doğrultusundaki birim vektör
Q	Kaynak terimi
$\phi(\vec{r}, t)$	Skaler nötron akısı
μ, η ve ξ	Silindirik geometride, nötron doğrultusu $\hat{\Omega}$ 'nın açısal değişkenleri
$\psi(r, \xi, \phi)$	Silindirik geometride, açısal nötron akısı
$H(\xi, \phi, \nu)$	Nötron açısal fonksiyonu için açısal kısmın genel çözümü
ν_k	$H(\xi, \phi, \nu_k)$ özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğerler.
ξ_m	Legendre polinomlarının kökleri ($P_N(\xi)=0, m=1,2,...,N$)
w_m^L	Gauss-Legendre kuadratürü için ağırlık faktörleri
u_n	Chebyshev polinomlarının kökleri ($T_N(u)=0, n=1,2,...,N$)
w_n^C	Gauss-Chebyshev kuadratürü için ağırlık faktörleri
$\psi_{m,n,j}$	j 'inci hücre için hücre-ortalama açısal akısı

$\psi_{m,n,j\pm 1/2}$	j 'inci hücre için hücre-kenarı açısal akısı
$\phi_{j\pm 1/2}$	j 'inci hücre için hücre-ortalama skaler akısı
$\theta_{m,n,m',n'}$	Uzaysal diskretize olmuş S_N denklemleri için spektral Green fonksiyonu
ρ	Spektral çap
ε	Bilgisayar programında yapılan iterasyonun devam edip etmeyeceğini belirleyen yakınsaklık kriteri



1.GİRİŞ

Dünyada hızla gelişen teknoloji ve endüstri beraberinde bazı sorunları da getirmiştir. Özellikle 1940'lı yıllardan sonra gelişen endüstri ile beraber, bu endüstri ve teknolojiyi çalıştıracak büyük miktarda enerjiye ihtiyaç duyulmuştur. Bu enerjinin mevcut doğal kaynaklardan karşılanamayacağı anlaşıncı nükleer enerjiye başvurulmuş ve nükleer santraller kurularak gelişmiş ülkelerde gerekli elektrik enerjisi giderilmeye çalışılmıştır. O günlerden günümüze kadar nükleer reaktörler üzerinde çalışmalar, özellikle güvenlik konusunda devam etmektedir.

Nükleer reaktörler, temelde içerisinde zincirleme fizyon reaksiyonları sonucunda açığa çıkan termal enerjinin elektrik enerjisine çevrildiği santrallerdir. Bu zincirleme fizyon olayları sonucunda ortaya çıkan nötronların kontrol altında tutulması, reaktör fiziğinin en önemli problemlerinden bir tanesidir. Zincirleme fizyonun olmasına neden olan nötronlar termal olduklarından, bunların reaktör içerisinde yavaşlatılması gerekir. Bu yavaşlatma işini moderatör denilen yavaşlatıcı, örneğin ağır su veya kontrol çubukları yapmaktadır. Nükleer reaktörlerde açığa çıkan nötronlar ve diğer parçacıklar reaktörden istenen verimin alınması için kontrol altında tutulmalıdır. Ayrıca çıkan nötronların sayısı, enerjileri ve konumları, o reaktörün genel davranışını göstermektedir. Bu nedenlerden dolayı, reaktör içinde zincirleme fizyonun devamı için nötronların dağılımı çok önemlidir. Temel olarak bu çalışma, Boltzmann denklemi olarak da bilinen, kararlı durumdaki nötronların davranışını gösteren nötron transport denkleminin silindirik geometrideki analitik çözümünü içermektedir.

Nötronlar reaktör içinde radyoaktif çekirdeklerle reaksiyonlar yaparlar ve bunun sonucu olarak rasgele dağılırlar. Böylece belirli bir anda reaktörün herhangi bir noktasında açığa çıkan nötronlar, başka bir anda reaktörün farklı bir noktasında enerjileri değişmiş olarak belirirler. Çünkü, reaktör içinde nötronlar sürekli olarak çekirdeklerle etkileştiklerinden, bir çoğu, her etkileşme sonrasında enerjileri değişmiş olarak farklı yönlerde saçılırlar. Böylece nötronlar, reaktör içinde yer değiştirmişlerdir ve nötronların reaktör içindeki bu hareketlerinin incelenmesine "Nötron Transport

Teorisi” denir. Nötronların davranışını gösteren denkleme ise “Nötron Transport Denklemi” veya “Boltzmann Denklemi” denir.

Reaktör içinde zincirleme reaksiyonlar sonucu açığa çıkan nötron sayısı bir reaksiyondan diğerine sabit kalıyorsa, reaktör “kritik” durumdadır. Bu durum reaktörün güvenli çalışması için istenen bir durumdur ve nükleer reaktörler genellikle kritik durumda tutulmak istenir. Bununla beraber, ardışık reaksiyonlar sonucu nötron sayısı azalıyorsa, reaktör “kritik altı”, artıyorsa, “kritik üstü” durumdadır. Kritik altı durum sönümlü olduğundan reaktörün güvenliği için bir tehlike oluşturmazken, kritik üstü durumda açığa çıkan enerji hızla arttığından kontrol altına alınamazsa, açığa çıkan aşırı ısı reaktörün kalbinin erimesine neden olur ve çevreye tehlikeli bir şekilde radyasyon yayılmasına yol açabilir.

Nötron transport teorisi, nötronların bir ortamda dağılımını inceler. Bu dağılım, bir çok rasgele olaydan ibarettir. Bu dağılım incelenirken önce reaksiyonlar bireysel olarak incelenir, bunların uyduğu yasalar çıkarılır ve daha sonra istatistik olarak genelleştirilir.

Transport problemi esasen radiatif transfer, nötron difüzyonu, plazma teorisi, ve sesin yayılması teorileri ile benzer diğer alanlara da aittir.

Nötron transport teorisi bireysel reaksiyon sonuçlarına uyan yasalarla başlar ve nötronların uzaysal, açısal ve enerjiye bağlı dağılımını inceleyen istatistiksel bir problem olarak düşünülür. Uygun şartlar altında, böyle basitleştirilmiş bir yöntem, bütün kaynak ve sınırlardan uzaklarda geçerli bir yaklaşımdır. Kaynak ve sınırlardan uzaklarda demekle ortalama serbest yola kıyasla büyük mesafeler anlatılmaktadır. Ortalama serbest yol, nötronun iki reaksiyon arasında aldığı ortalama yoldur. Bu, difüzyon teorisinin temelidir. Makul boyutlu cisimlerle veya sınır etkileriyle ilgileniliyorsa, nötron dağılımına daha gerçek yaklaşımlara dayanan daha doğru metotlar denenmelidir.

Nükleer reaktörlerde kontrol altında tutulması gereken en önemli parçacıklardan biri nötronlar olduğundan ve nötron transport denklemi de nötronların reaktör içinde dağılımını incelediğinden, nötron transport denklemi, reaktör dizaynı ve çalıştırılmasında önemli bir rol oynar. Difüzyon denklemi, transport denkleminin belli

yaklaşımlar altında sadece konuma bağlı hale gelmiş durumudur. Oysaki nötron transport teorisi nötronların genel davranışını konuma, açıya, zamana ve hıza bağlı olarak incelemektedir.

Nötronların tamamının aynı hıza sahip olduğunun varsayıldığı yaklaşıma tek-grup (one-group) yaklaşımı denir. Nötronların enerji değiştirdikleri kabul edilirse, -ki bu gerçek çözüme daha iyi bir yaklaşımdır, o zaman bu enerjiler belirli aralıklara bölünür ve buna da çok-grup (multi-group) yaklaşımı denir.

Nötron transport denklemi analitik, nümerik yada yarı analitik olmak üzere üç farklı yöntemle çözülebilir. İntegro diferansiyel Boltzmann denklemi (hem integral hem de diferansiyel terimler içerdiğinden dolayı bu ad verilmiştir) olarak da adlandırılan transport denkleminin yapılan ilk çözüm yaklaşımlarından bir tanesi Case yöntemidir (Lewis ve Miller, 1993). Case yöntemi, temelde kısmi diferansiyel denklemlerin değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözülmesi mantığına dayanmaktadır. Hem Case hem de değişkenlerine ayırma yöntemlerinde birden fazla çözüm bulunabilmekte ve bu çözümlerin birleşimi sınır şartlarını sağlamak koşuluyla genel çözümü vermektedir. Bu iki yöntem arasındaki tek fark, transport denkleminin çözümlerinin çoğunun tekil olmasıdır. Ayrıca bu çözümlerin denklemdaki integrale yerleştirilmesi durumunda fiziksel anlamları vardır. Son olarak Case yöntemi, nötron transport denkleminin düzlem geometride (dilim) yapılmış ilk analitik çözüm yaklaşımıdır. Nötron transport denkleminin çözümü için kullanılan yöntemlerden bir tanesi de Fourier transformu yöntemidir. Fourier transformu bir yaklaşım olmasının yanı sıra çok gruplu yani farklı hızlara sahip problemlerde de kullanılabilir.

Küresel harmonikler (P_N) yönteminde (Bell ve Glasstone, 1970) ise, akının açısal veya doğrultusal bağımlılığı elementer bir fonksiyon setine, bir polinom serisi olabilir, açılmaktadır. Bu yöntemle düzlem veya küresel geometride fonksiyon seti olarak genellikle Legendre polinomları tercih edilmekte ve sık kullanılan bir yöntem olarak transport teorisinde yerini almıştır.

Diskret Ordinat (S_N) yöntemi reaktör hesaplamalarında sık kullanılan nümerik yöntemlerdendir (Bell ve Glasstone, 1970). Bu yöntemle nötron transport denklemi sadece diskret doğrultularda çözülmektedir. Transport denklemindeki açısal integraller

diskret doğrultular üzerinden toplamlara, açısız türevler ise farklara dönüşmektedir. S_N yöntemiyle bulunan sonuçların güvenilirliği, diskret doğrultu sayısının artırılmasıyla artmaktadır. Bu arada, düzlem (dilim) geometri için yapılan bazı S_N yaklaşımları P_N yöntemiyle denktir.

Reaktör fiziğinin bazı alanlarında faydalı olduğu ispatlanan Monte Carlo yöntemi (Spanier ve Gelbard, 1969), transport denkleminin çözümünde kullanılan ve olasılık teorisine dayanan nümerik bir yöntemdir. Nötron transport teorisinde Monte Carlo tekniklerinin uygulanabilirliği makroskopik tesir kesiti (σ)'nin bir nötronun birim uzunlukta etkileşme olasılığını göstermesi gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla Monte Carlo yönteminde, her bir nötron birbirini takip eden reaksiyonlar sonucunda bir nötron seti oluşturmaktadır. Reaksiyon noktalarının yerleri ve bu reaksiyonların sonuçları, yani çıkan nötronların enerji ve doğrultuları, rasgele sayılar setiyle olasılık olarak tespit edilmektedir. Monte Carlo tekniği daha çok diğer yöntemlerin uygulanmasında zorluklar yaşanan karmaşık geometrilerde kullanışlıdır. Bütün bu yöntemlere ek olarak, transport denkleminin çözümünde varyasyon yöntemi de kullanılmaktadır (Bell ve Glasstone, 1970).

İntegro diferansiyel Boltzmann denklemi olarak da adlandırılan I. Tip nötron transport denklemi reaksiyonlar sonucunda saçılma ve soğurulmaların yanı sıra bir kaynağın bulunduğu küçük hacim elemanı içindeki nötron sayısının değişimi yazılarak oluşturulur. Böylece herhangi bir noktadaki açısız akı dağılımı bulunabilir. Fredholm denklemi olarak da bilinen III. Tip nötron transport denklemi ise sadece ortamın sınırdaki açısız akı değişimi cinsinden yazılır. Sınırdaki çözüm bulunduktan sonra ortamın herhangi bir noktasındaki çözüm bulunabilir. II. Tip nötron transport denkleminin çözümü ise varyasyon yöntemi kullanılarak bulunabilir.

Lineer Transport denklemi çeşitli geometrilerde farklı durumlar için çözüldükten sonra kritiklik, albedo, extrapolasyon mesafesi gibi fiziksel problemlerin hesaplamaları yapılabilmektedir. Daha önce yapılan çalışmalarda (Siewert ve Grandjean, 1979) dilim geometride bu fiziksel parametreler hesaplandığından, silindirik ve küresel geometrilerde de transport denkleminin çözümü yapılırsa bu parametreler hesaplanabilir.

Kritiklik problemi, reaktörün kritik kalınlığının oluşan ikincil nötron sayısına ne derece bağlı olduğunu gösteren bir hesaplama değildir. Albedo problemi, ortamdaki dışarı çıkan nötron sayısının dışarıdan ortama giren nötron sayısına oranı bulunarak hesaplanır. Sınırdaki akının bu şekilde bulunması ile ortamın soğurucu mu yoksa yansıtıcı mı olduğu anlaşılabilir. Extrapolasyon mesafesi ise Milne problemi kullanılarak hesaplanabilir. Milne problemi, $x < 0$ 'da boşluk, $x > 0$ 'da saçılma ve yutulmaların olduğu, sonsuzda bir kaynağın bulunduğu bir ortamdan oluşan yarı-uzay problemidir. Buna göre, sınırdan akının sıfır olduğu noktaya kadar olan uzaklık extrapolasyon uzaklığı olarak bulunur.

Reaktör fiziğinin yukarıda bahsedilen fiziksel parametrelerin gerçek değerlerine en yakın şekilde bulunması için reaktörün gerçek geometrisine en uygun geometrinin seçilmesi gerekmektedir. Bir çok reaktörün gerçek geometrisi silindirik olduğu için bu çalışmamızda nötron transport denkleminin silindirik geometri için yaptığımız çözümlerin önemi bir kat daha artmıştır.

Sınır şartları ve farklı saçılma fonksiyonları düşünüldüğünde herhangi bir fiziksel parametrenin bütün yöntemlerle kolaylıkla bulunması mümkün değildir. Bu nedenle farklı yöntemler geliştirilmiştir.

Bu tezde, daha önce dilim geometride I. Tip nötron transport denklemini çözmek için kullanılan Case, P_N ve S_N yöntemlerinden yararlanarak silindirik geometride Spektral Green Fonksiyonu (SGF) yöntemi ile transport eşitliği çözüldü. Bu çözümlemedeki yöntem, analitik çözüme dayanan nümerik bir yöntemdir. Transport eşitliğinin tek boyutlu silindirik geometrideki çözümü, diğer tek boyutlu geometrilerdeki çözümünden bir noktada önemli bir farkla ayrılmaktadır. Buradaki zorluk, silindirik geometride transport eşitliğinin çözümü aranırken, tek boyutta çalışılıyor olsa dahi, açısız akı fonksiyonu ψ konuma, ancak nötron açısız doğrultusunun iki tane bileşenine bağlı olmaktadır; $\psi(r, \xi, \phi)$. Nötronların reaktör içindeki dağılımını gösteren açısız akı fonksiyonu $\psi(r, \xi, \phi)$ için r konuma bağlı kısım ve $f(\xi, \phi)$ açıya bağlı kısım olmak üzere bunların çarpımından oluşan üstel bir fonksiyon önerildi. Bu önerilen yeni analitik çözüm yöntemi silindirik transport eşitliğini sağlamakta ve denklemini daha basit bir hale indirgemektedir. Böylece Spektral

Green Fonksiyonu (SGF) metodu kolaylıkla silindirik geometri problemlerine uygulanabilmektedir. Daha sonra, açılal akının radyal bağımlılığı için uzay, kuadratik yaklaşım ile hücrelere bölündü.

Bundan önceki çalışmaların bir çoğunda, silindirik geometride transport eşitliğinin çözümü için yapılan P_N yaklaşımıyla (Bell ve Glasston, 1970) bizim yaptığımız çözüm arasında bazı farklılıklar bulunmaktadır. Küresel harmonikler yönteminde konuma bağılı kısım için Bessel fonksiyonları cinsinden ifadeler çıkmakta ve bu yöntem yarı-analitik bir yöntemdir. Küresel harmonikler yönteminde sınır şartlarının uygulanabilirliğinin zorluğuna karşıt olarak bizim önerdiğimiz çözüm, bir çok fiziksel sınır şartını sağlayan, analitik çözüme dayanan nümerik bir yöntemdir.

Bu çalışmamızın giriş bölümünden sonra Bölüm 2’de, transport teorisi ve transport eşitliği ile ilgili bu güne kadar yapılmış çalışmalar özetlenmiştir. Bölüm 3’de, nötron transport denkleminin türetilmesi bulunan sonuçların karşılaştırmasını yapmak için Diamond-Difference (DD) yaklaşımıyla S_N yöntemi anlatılmıştır. Daha sonra ise, bu çalışmanın temelini oluşturan analitik çözüme dayalı Spektral Green Fonksiyonu yöntemi anlatılmıştır. Bölüm 4’de, silindirik geometride transport eşitliğinden bulduğumuz skaler akılar hesaplanarak bu sonuçlar diğer yöntemlerden bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Son olarak sonuç bölümünde ise, yeni yöntem ile bulduğumuz çözüm sonuçları değerlendirilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Transport teorisinin kaynağı bir yüzyıldan daha uzun süredir ilk olarak gazların kinetik teorisi çalışmaları için kullanılan Boltzmann eşitliğine dayanmaktadır. 1930'larda, yıldızlara ait atmosferlerdeki radyasyon transportu çalışmaları transport problemlerinin bir kaç analitik çözümünün bulunmasına yol açmıştır. Ancak bu problemlerin fiziği, yarı sonsuz uzay bir boyutlu geometrilerde sınırlı kalmıştır. 1940'larda nükleer zincir reaktörlerinin gelişine kadar nötr parçacık transport problemlerinin farklı geometrilerdeki çözümüne ilgi artmıştır. 1940'lara kadar transport problemleri için sadece bir kaç analitik yöntem çok idealize edilmiş sistemler için denenmiştir.

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin gücünün hızla artmasıyla çok amaçlı kullanımlara sahip nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Bu nümerik yöntemler genel amaçlı bilgisayar kodlarını içermektedir ve bu kodlar nükleer reaktörler, radyasyon kalkanlaması ve diğer uygulamalarda en sık karşılaşılan çok bölgeli, çok boyutlu transport problemlerinin çözümünde kullanılırlar.

Nötron dağılımını bulmak için transport teori çalışmak demek Boltzmann denklemini çalışmak demektir. Bu nedenle transport teorisi, Boltzmann'ın 1872'deki yayınıyla başlar. Lineer olmayan bir denklem olduğundan çözümü ancak bazı özel durumlar için vardır. Aslında, şu anda bile bu denklemin çözümü çok iyi anlaşılmamıştır. Böyle denklemler özellikle gazların kinetik teorisi, genellikle kaba bir yaklaşımla radiatif transport olaylarında ve plazma dinamiği alanlarında ortaya çıkmaktadır. Bununla birlikte, bazı yaklaşımlar altında lineer hale getirilmiş denklem, nükleer reaktör teorisi çalışmalarında iyi sonuçlar vermektedir.

J. Chadwick'in nötronu keşfinden sonra, 1932'de E. Fermi nötronlarla gerçekleşen nükleer reaksiyonları araştırmaya başladı. Yavaş nötronlar kullanılarak, beta bozunumunda açığa çıkan radyoaktif izotoplar oluşabileceğini bulmuştur. 1939'daki Bohr'un teorisinden sonra Fermi, fizyon reaksiyonundan hemen sonra nötronların salıverildiğini göstermiştir. Daha sonra büyük miktarlardaki enerji çıkışını görebilmek için bir dizi deney yapıldı. Nükleer enerjiye ihtiyaç duyulduğu için 1939'dan beri transport problemleri geniş olarak araştırılmıştır. 1 gram U^{235} 'in

bozunumundan 24×10^3 kWh enerji açığa çıkmaktadır. Bu sonuç, bilim adamlarının neden transport problemi çalışmalarıyla ilgilendiklerinin bir göstergesidir. Ancak transport problemi ile ilgili denklemin yapısı klasik matematiksel fizikteki denklemlerden oldukça farklıdır. Bu nedenle, transport teorisinin bu yönü bilim adamlarını bu denklemi, fizik yada nükleer mühendislikten çok uygulamalı matematik olarak düşünmeye sevk etmiştir. Dahası, nonlinear Boltzmann denkleminin aksine nötron transport denklemi lineer bir denklemdir.

Case (1967)'in çalışmasına kadar nötron transport teorisindeki problemlerin çoğu Fourier veya Laplace transformu teknikleriyle çözülüyordu. 1940'dan sonra nötron transport teorisinin genel durumu bir çok araştırmacı tarafından yeniden formülize edilmiştir; bunlar arasında Marshak (1947), Mark (1947), Davison (1958), Case, de Hoffman ve Placzek (1953) de vardı. O zamanlarda dağılım teorisi Case (1967) ve diğerleri tarafından başarıyla uygulanıyordu. Daha sonra Case (1967), tek hızlı nötron transport denklemini çözen yeni bir yöntem geliştirmiştir. Homojen denklemin tekil çözümlerini düşünmüş ve özfonksiyonlar için diklik ve tamlık teoremlerini geliştirmiştir. Bu yöntemin avantajı, bu sınıftaki bütün problemlerin sonlu sayıdaki açılım katsayılarının hesaplanması durumuna indirgenebilmesidir. Case, $-1 < z < 0$ aralığında analitik olan $X(z)$ gibi bir fonksiyon bulmak için Riemann-Hilbert problemlerinin çözülmesi gerektiğini tespit etmiştir. Çözümü bulduktan sonra, $X(z)$ 'in dispersiyon fonksiyonu olarak adlandırılan $A(z)$ Weiner-Hopf faktörizasyonunu sağladığını göstermiştir.

Case'in sonsuz veya yarı sonsuz ortamda izotropik saçılmalı tek hızlı transport denkleminde getirdiği çözümle sınırlı orijinal çalışmasından sonra, Case yönteminin genelleştirilmesiyle daha karmaşık problemler çözülmüştür. Mika (1961), izotropik olmayan saçılma için tek hızlı denklemin çözümünü elde etmiştir. Nötronların çekirdeklerle etkileşmesinde anizotropi durumunun nötron dağılımı üzerindeki etkisi nötron transport teorisinin önemli problemlerinden biridir. Anizotropik saçılma durumu incelendiğinde, saçılma fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden seriye açmak gelenek olmuştur. Serinin eğer sadece ilk terimi alınırsa bu, izotropik saçılma durumuna karşılık gelmektedir. Ancak ikinci terim de alınırsa lineer anizotropi

durumu, üçüncü terimi de alınırsa kuadratik anizotropi durumu düşünülmelidir. Bu durumlarda çözüm bulmak için tekil integral denklemlerinin de önemli bir rol oynadığı farklı yöntemler kullanılmaktadır. Daha yüksek mertebeden anizotropi durumları için sonuçlar oldukça karmaşıktır.

Brockmann (1981) yaptığı çalışmada nötron transport teorisinde nötronların anizotropik saçılmasının önemine değinmiştir. Dilim geometride nümerik nötron transport teorisinde anizotropik saçılma ile ilgili önemli olan bir kaç yöntemin derlemesini yapmıştır. Ayrıca farklı anizotropik saçılma yöntemleri tartışılmış ve bu yöntemlerin güncel problemlere uyarlanabilirlikleri ortaya konmuştur.

Silindirik geometride az yapılan çalışmalardan bir tanesi r - z geometride varyasyonel sonlu elemanlar yöntemiyle transport denkleminin çözümüdür (Wood, 1985). Bu çalışmada ve daha bir çok çalışmada olduğu gibi, daha önce iki boyutlu geometriler için hazırlanmış FELICIT bilgisayar programı kullanılmıştır. Bu program yardımıyla bulunan sonuçlar sunulmuş ve bu sonuçlar gerçek çözüm ve diğer transport yöntemleriyle bulunan çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca kullanılan yöntemde transport denkleminin çok gruplu durumu incelenmiştir.

Lee ve ark (1985), analitik olarak çok gruplu, çok bölgeli P_N çözümlerini bir boyutlu dilim, silindir ve küre için yapmışlardır. Silindir için tek gruplu lineer anizotropik durumu incelemişlerdir. Bilindiği gibi P_N yönteminde, açısız akı elementer bir fonksiyon seti ile temsil ediliyordu. Buna göre silindirik geometride P_N yöntemi kullanıldığında açısız akı modifiye Bessel fonksiyonlarıyla temsil edilmiştir. Özetle, bir boyutlu sonsuz dilim, sonsuz simetrik silindir ve simetrik kürede çok gruplu P_N denklemlerine kapalı çözümler getirilmiştir.

De Barros ve Larsen (1990), tek gruplu dilim geometride diskret ordinat (S_N) problemlerinin çözümü için yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem aynı zamanda bu çalışmanın da temelini oluşturmaktadır. Spektral Green Fonksiyonları (SGF) adını verdikleri bu yöntemde her bir diskret ordinat doğrultusu ve hücre için tam olan parçacık dengesi (balans) denklemi ve yardımcı (auxiliary) denklem olmak üzere iki tane denklem bulunmaktadır. Yardımcı denklem, hücre içindeki kaynak ve hücrenin sınırlarındaki hücre-kenarı açısız akıları cinsinden hücre-ortalama açısız akısını

gösteren bir Green fonksiyonu içermektedir. Bulunan S_N denklemleri iterasyon tekniğiyle çözülmüştür.

Daha sonra yine De Barros ve Larsen (1992), x - y geometride lineer anizotropik saçılmalı tek gruplu diskret ordinat (S_N) problemlerinin çözümü için yeni bir nodal yöntem geliştirmişlerdir. Buna göre bir eksen boyunca nötron sızıntısının sabit kaldığı düşünülerek S_N denklemi tek boyutlu hale indirgenmiş ve çözüm için bir genelleştirme yapılmıştır. Çözümde oluşturulan Spektral Green Fonksiyonu Sabit Nodal (SGF-CN) yönteminin genel olarak S_N denklemlerinin çözümü için kullanılan diğer yöntemlerden daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Bu yöntemde sadece sızıntı terimi için yaklaşım yapılırken, diğer S_N yöntemlerinde hem sızıntı hem de saçılma terimleri için yaklaşım yapılmaktadır.

Spektral Green Fonksiyonu (SGF) yöntemi De Barros ve Larsen (1990; 1992) tarafından önce bir boyutlu dilim, daha sonra da iki boyutlu x - y geometri için geliştirildikten sonra Anlı ve Güngör (1996), bu yöntemi kullanarak üç boyutlu kartezyen geometride diskret ordinat problemlerinin çözümünü yapmışlar, skaler akıları hesaplamışlardır. Yine Anlı (2001), SGF yöntemini kullanarak dilim geometride izotropik ileri ve geri saçılmalı durum için transport denkleminin çözümünü incelemiştir.

Khouaja ve ark (1997) ise transport denkleminin analitik çözümünde kullanılması gelenek haline gelmiş küresel harmonikler yöntemini kullanarak sonlu silindir için bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu modelde, nötronların açısal dağılımı ileri ve geri hareket eden parçacıklar olmak üzere iki bölüme ayrılmıştır. Bu yöntem DP_N yöntemi olarak bilinmektedir (Bell ve Glasstone, 1970). Denklem sisteminde skaler akılar, çift pariteli transport tekniklerinde olduğu gibi, çift ve tek vektörler olarak ayrılmıştır. Oluşan denklem çifti sisteminin uzaysal çözümü için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Aynı zamanda, $z=0$ yüzeyinde giren bir akı ve kaynak olmayan silindir düşünülmüştür.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen SGF yöntemi ve silindirik geometri için yapılan çalışmalarla birlikte Lathrop (2000)'un çalışmaları temel alınarak bir boyutlu

silindirik geometride izotropik saçılmalı durum için çözüm yapılmıştır. Bu yapılan çözümün detayları Bölüm 3 ve 4’de verilmiştir.

Son olarak, günümüzde faaliyette olan nükleer reaktörlerin çoğunluğunun geometrisinin silindir olduğu gerçeğinden yola çıkarak bu çalışmanın yapılması gerekliliği duyulmuştur. Ayrıca bu geometride bu güne kadar yapılan çalışmaların hem sayısı az hem de kullanılan yöntemler nümerik yaklaşım yöntemleridir. Biz ise bu çalışmamızda, silindirik transport eşitliğinin çözümü için hem analitik hem de bu analitik çözüme dayalı olan Spektral Green Fonksiyonu (SGF) yöntemini geliştirdik.



3. MATERYAL VE METOD

3.1 Tanımlar

Bir reaktörün içindeki nötron dağılımının değişimi, o nükleer reaktörün davranışını yönlendiren temel fiziksel olaylardan birisidir. Nötron dağılımının matematiksel tanımı *nötron transport denklemi* veya kısaca *transport denklemi* diye adlandırılan bir denkleme dayanmaktadır. Aslında bu denklem, daha önce gazlar için geliştirilen Boltzmann denkleminin lineerize edilmiş halidir. Bu nedenle transport denklemi bazen Boltzmann denklemi olarak da isimlendirilir ve oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu nedenle çözümler, gerçek reaktör sistemleri için değil, sadece oldukça basitleştirilmiş fiziksel modeller için yapılabilmektedir.

Nötron transport teorisinin oluşturulmasındaki ilk adım, nötron dağılımı ile ilgili niceliklerin tanımlarının yapılmasıdır. Herhangi bir uygulamadaki nötron yoğunluğu ($\sim 10^{10} \text{cm}^{-3}$), atomik yoğunlukla ($\sim 10^{23} \text{cm}^{-3}$) karşılaştırıldığında çok düşük olduğundan, nötronların kendi aralarındaki etkileşmeler ihmal edilerek davranışları ideal gazların davranışına benzetilebilir. Öyleyse dağılım fonksiyonu, tek parçacık dağılım fonksiyonu şeklinde tanımlanabilir. Bazı uygulamalarda, örneğin nükleer reaktörlerin kinetik davranışları ile ilgili, daha yüksek mertebeden dağılım fonksiyonları düşünülmelidir.

Tanım 1: Nötronların yayıldığı bir ortam düşünelim. t anında, $\vec{r}$ noktasında, herhangi bir küçük hacim elemanı d^3r içinde, d^3u hız uzayında hızları $\vec{u}$ civarındaki nötronların sayısı $N(\vec{r}, \vec{u}, t)d^3rd^3u$ ile verilir. Başka bir deyişle, nötron açısallık yoğunluğu $N(\vec{r}, \vec{u}, t)$, t anında, $\vec{r}$ noktasında, $\vec{u}$ hızına sahip, birim hacimdeki nötron yoğunluğudur.

Tanım 2: u nötron sürati olmak üzere, $\hat{\Omega} = \vec{u} / u$ nötronların hızı doğrultusundaki birim vektördür. Buna göre;

$$d^3u = u^2 du d\hat{\Omega} \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir.

Tanım 3: $\vec{j}(\vec{r}, \vec{u}, t) = \vec{u}N(\vec{r}, \vec{u}, t)$, nötron açısal akımı, $\vec{u}$ hızına sahip nötronların yoğunluğudur.

Tanım 4: a) $\rho(\vec{r}, u, t) = \int d\hat{\Omega} N(\vec{r}, \vec{u}, t)$, birim hacimde bulunan ve $d\hat{\Omega}$ açısı içine saçılan nötron sayısıdır. Başka bir ifadeyle hıza bağlı nötron yoğunluğudur.

b) $\rho(\vec{r}, t) = \int N(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3u$, nötron yoğunluğunu yani, herhangi bir t anında, $\vec{r}$ noktasındaki hızdan bağımsız toplam nötron yoğunluğudur.

Tanım 5: a) $\phi(\vec{r}, t) = \int d^3u uN(\vec{r}, \vec{u}, t)$, hızdan bağımsız nötron akısını gösterir.

b) $\vec{J}(\vec{r}, t) = \int d^3u \vec{u}N(\vec{r}, \vec{u}, t)$, ise nötron akımını göstermektedir.

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ ile $\phi(\vec{r}, t)$ 'nin tanımının birbirine çok benzediği görünmektedir. Ancak akım bir vektör, akı ise bir skalerdir. Bu nedenle akım ve akının birimleri aynıdır; saniyede, santimetrekaredeki nötron sayısı=nötron/cm²s

İzotropik bir nötron dağılımında $\vec{J}(\vec{r}, t)=0$ iken $\phi(\vec{r}, t) \neq 0$ olur. Hem akım hem de akının özel fiziksel anlamları vardır. Buna göre, birim zamanda $d\vec{S}$ alanından geçen net nötron sayısı $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ ile verilir. Bu alandan geçen net nötron sayısı, alandan içeri giren ve alanın dışına çıkan nötronların farkıdır. Örneğin $d\vec{S}$ alanına bahsedilen zaman aralığında bir nötron giriyor ve yine bu alandan bir nötron çıkıyorsa, bu iki nötron cebirsel olarak toplanıp sıfır olur; yani net nötron sayısı sıfır olur. Ancak bu zaman aralığında $d\vec{S}$ 'yi geçen nötron sayısı ise 2 olur. Dolayısıyla $\vec{J} \cdot d\vec{S}$, $d\vec{S}$ boyunca bir nötron sızıntısı olduğunu gösterir.

Tanım 6: $l(\vec{r}, \vec{u})$, nötronlar için ortalama serbest yol olmak üzere $u/l(\vec{r}, \vec{u})$, saniyedeki reaksiyon sayısını (hızını, oranını) verir. Buna göre;

$$\frac{u}{l(\vec{r}, \vec{u})} N(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3r d^3u \quad (3.2)$$

ifadesi, $\vec{r}$ konumunda, hızları $\vec{u}$ olan nötronlar için saniyedeki olay sayısıdır. Çekirdeğin hızı nötronun hızı yanında çok küçük olup ihmal edildiğinden, l 'nin sadece nötronun hızının fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir.

Ortalama serbest yolun tersi makroskopik tesir kesiti olarak tanımlanır:

$$\sigma_T(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{1}{l(\vec{r}, \vec{u})} \quad (3.3)$$

Makroskopik tesir kesiti, var olan bütün çekirdeklerin tesir kesitlerinin toplamına eşittir:

$$\sigma_T(\vec{r}, \vec{u}) = \sum_i N_i(\vec{r}) \Sigma^i(\vec{u}) \quad (3.4)$$

Burada $N_i(\vec{r})$, $\vec{r}$ noktasında i tipindeki çekirdek yoğunluğu, $\Sigma^i(\vec{u})$ ise i tipi bir reaksiyon için toplam mikroskopik tesir kesitidir. Mikroskopik tesir kesiti, her biri farklı bir reaksiyonu gösteren bir çok bileşenin toplamından oluşur. Dolayısıyla;

$$\Sigma^i = \Sigma_s^i + \Sigma_a^i + \Sigma_{in}^i + \Sigma_f^i \quad (3.5)$$

olarak verilir. Burada $\Sigma_s^i, \Sigma_a^i, \Sigma_{in}^i$ ve Σ_f^i sırasıyla elastik saçılma, yutma(absorbition), inelastik saçılma ve fizyon tesir kesitleridir.

Tanım 7: Ne zaman bir reaksiyon meydana gelse, $c(\vec{r}, \vec{u})$ ikincil nötronlar açığa çıkar. $c(\vec{r}, \vec{u})$, hızı $\vec{u}$ olan bir nötronunun $\vec{r}$ noktasında oluşturduğu her reaksiyondan sonra açığa çıkan ikincil nötronların ortalama sayısıdır. Bir soğurma reaksiyonu için $c = 0$, esnek çarpışma için $c = 1$ ve fizyon için $c = \nu$ (fizyon başına üretilen nötron sayısı $\nu \sim 2,5$)'dur. c 'nin değeri ortamda bulunan maddelere ve onların tesir kesitlerine bağlıdır. Fizyon olmadığı durumda, yani $\sigma_f = 0$ durumunda;

$$c(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{\sigma_s(\vec{r}, \vec{u}) + \sigma_{in}(\vec{r}, \vec{u})}{\sigma_T(\vec{r}, \vec{u})} \quad (3.6)$$

olur. Fizyon olması durumunda ise $\nu\sigma_f(\vec{r}, \vec{u})$ teriminin (3.6) eşitliğindeki paya eklenmesi gerekir.

3.2. Nötron Transport Denklemi

Temelde nötronların davranışlarını açıklayan nötron transport denklemi, faz uzayında küçük bir hacim elemanı içindeki nötron sayısının korunumu göze alınarak türetilir. Bu arada transport denklemini türetirken bazı kabullenmeler yapılacaktır.

Bunlar:

- Nötronlar, noktasal birer parçacık olarak düşünülmektedir. Sadece kuantum mekaniksel dalga boyu atomik çapa göre küçük olan parçacıklar düşünülmektedir. Nötronların çarpışmalar arasında aldığı yollar atomik boyuttan çok fazla olduğundan noktasal olarak konumları ve hızlarını belirlemek zor değildir. Çok düşük enerjiye sahip nötronlar bir dalga gibi davranacağından Heisenberg belirsizlik ilkesine göre konumda önemli belirsizliklere yol açacaktır. Bu duruma reaktör uygulamalarında az rastlandığı için rahatlıkla ihmal edilebilir.
- Nötronların yapmış oldukları noktasal çarpışmalardan sonra doğrusal yollar takip ettikleri kabul edilmektedir. Nötronlar ve gama ışınları yüksüz olduklarından, uzun mesafeli elektrik ve manyetik kuvvetler bunların doğrusal yörüngelerini etkilemezler. Kısa mesafeli kuvvetler yörüngelerinden saptırabilir; bunlar da noktasal çarpışmalar olarak düşünülürler. Nötronlar çekirdeklerle, gama ışınları ise hem çekirdeklerle hem de orbital elektronlarla çarpışma yaparlar. Bu çarpışmalar da noktasal olarak düşünülebilir. Çünkü, çekirdeklerin yarıçapı 10^{-12} cm mertebesinde iken ,örneğin bir katıda, atomlar arası mesafe çok daha fazla, 10^{-8} cm mertebesinde dir.
- Nötron-nötron etkileşimleri göz önüne alınmaz. Nükleer reaktörlerde, radyasyon kalkanlamada ve diğer uygulamalardaki parçacık yoğunlukları atomik

yoğunluklara kıyasla küçüktür. Bu nedenle parçacık-parçacık etkileşimleri ihmal edilir.

- Çarpışmaların ani olduğu düşünülmektedir. Bir çarpışmadan sonra açığa çıkan parçacıklar ani olarak salıverilmektedir.
- Bütün olayların gerçekleştiği ortamdaki maddenin izotropik olduğu düşünülmektedir. Bu kabullenim reaktör ortamları için genellikle geçerlidir. Ancak çok düşük enerjili ve dolayısıyla uzun dalga boyuna sahip parçacıklar düşünülürse, belirli doğrultular boyunca uzanan kristallere sahip bir ortamla direkt ilişkisi olan kırınım desenleri oluşacaktır. Bu tip ortamlarda meydana gelen karışıklıklar, nötronların yavaşlatılması ile ilgili problemler içindir.
- Ortamı oluşturan maddelerin bileşenlerinin ve çekirdeklerin özelliklerinin aksi belirtilmediği sürece bilindiği düşünülmektedir. Eğer parçacık yoğunluğu önemli derecede artarsa, etkileşme hızı, özellikle nötron fizyonu, ortamın sıcaklığının artmasına neden olacaktır. Benzer şekilde, fizyon ve bilinen diğer nötron reaksiyonları yeni izotopların oluşmasına neden olacak ve bunlar ortamın nötronik özelliklerini önemli derecede etkileyecektir.
- Nötron yoğunluğu dağılımının, sadece ortalama yada beklenen değeri düşünülmektedir. Düşük parçacık yoğunluğuna bağlı dalgalanmalar dikkate alınmamaktadır. Düşük yoğunluk durumları dikkate alındığında, yoğunluk dağılımı için konum-enerji-açı faz uzayının büyük bir bölgesi üzerinden toplam alınmalıdır. Bu da çok fazla ve karmaşık matematiksel ifadelerin üremesine neden olur (Lewis ve Miller, 1993).

$\vec{r}$ noktası civarında, S yüzey alanına sahip küçük bir V hacminde, d^3u hız uzayında hızları $\vec{u}$ civarında olan nötronların sayısının dt zaman aralığındaki değişimi, (Case ve Zweifel, 1967; Bell ve Glasstone, 1970)

$$\text{Nötron sayısındaki değişim} = d^3u \, dt \int_V \frac{\partial N(\vec{r}, \vec{u}, t)}{\partial t} d^3r \quad (3.7)$$

olarak verilir. Ayrıca, nötron sayısının değişmesine neden olan muhtemel olaylar sıralanabilir. V hacmi içindeki toplam nötron sayısının değişimi, başka bir deyişle denge denklemi, bu hacime giren ve çıkan nötron sayısını gösterir.

Nötron sayısındaki değişim =

- (a) dt zaman aralığında, S yüzeyinden çıkan nötron sayısı
- (b) dt zaman aralığında, V hacminde reaksiyon yapan nötron sayısı
- + (c) dt zaman aralığında, çarpışmalar sonucunda açığa çıkan, hızları d^3u hız uzayında olan ikincil nötron sayısı

+ (d) dt zaman aralığında, kaynaklar tarafından üretilen nötron sayısı

(a) terimi, d^3r hacmine hızında bir değişiklik olmadan girip çıkan, yani reaksiyon yapmadan hacmi terk eden nötronları göstermektedir. (b) terimi, saçılmalar sonucu hızının değişmesinden dolayı d^3u hız uzayını terk eden ve tamamen soğurulan nötronları göstermektedir. (c) terimi, d^3u hız uzayına diğer bütün hızlardan saçılıp giren nötronları göstermektedir. Son olarak, bizim hesaplamalarımızda da hesaba almayacağımız (d) terimi ise, dış kaynaklardan d^3u d^3r 'de oluşan nötronları göstermektedir.

Bu terimler, matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir. Daha önce Tanım 5(b)'de dS alanını geçen net nötron sayısının $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ ile verildiği belirtilmişti, ve yine $\vec{J}$ 'nin tanımını yardımıyla (a) terimi

$$(a) = d^3u \, dt \int N(\vec{r}, \vec{u}, t) \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (3.8a)$$

olarak ifade edilir. (3.8a) denklemindeki integral, Gauss teoremi uygulanarak hacim integraline dönüştürülebilir. Böylece;

$$(a) = d^3u \, dt \int d^3r \vec{u} \cdot \vec{\nabla} N(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (3.8b)$$

olarak tekrar verilebilir. Çarpışma sayısı (hızı) ve tesir kesitleri daha önce Tanım 6'da tartışılmıştı. Buna göre (b) terimi, yani çarpışmalarla kaybolan nötron sayısı

$$(b) = d^3u \, dt \int d^3r \frac{uN(\vec{r}, \vec{u}, t)}{l(\vec{r}, \vec{u})} \quad (3.9a)$$

$$= d^3u \, dt \int d^3r u \sigma_T(\vec{r}, \vec{u}) N(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (3.9b)$$

olarak ifade edilir. (c) terimi, hacim elemanı dışında $\vec{u}'$ hızına sahip nötronların saçılmaya uğrayıp $\vec{u}$ hızıyla hacim elemanı içine girmesi durumunu vermektedir. Bu şekilde, $\vec{u}'$ hızına sahipken dışarıda saçılmaya uğrayıp $\vec{u}$ hızıyla hacim elemanı içine giren bütün nötronların sayısını bulmak için bütün $\vec{u}'$ ilk hızları üzerinden integral alınır. Buna göre,

$$(c) = d^3u \, dt \int d^3u' \int d^3r u' \psi(\vec{r}, \vec{u}', t) \sigma_s(\vec{u}' \rightarrow \vec{u}) \quad (3.10)$$

olarak ifade edilir. Son olarak kaynak yoğunluğu veya diğer adıyla izotropik nötron kaynağı $Q(\vec{r}, \vec{u}, t)$ ile gösterilirse (d) terimi,

$$(d) = d^3u \, dt \int d^3r Q(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (3.11)$$

olarak ifade edilir. Denklem (3.8b), (3.9b), (3.10) ve (3.11) yukarıda verilen denge denkleminde yerine yazılırsa ($d^3u \, dt$ diferansiyel terimleri her iki taraftan da sadeleştirildikten sonra),

$$\begin{aligned} & \int d^3r \frac{\partial}{\partial t} N(\vec{r}, \vec{u}, t) + \int d^3r \vec{u} \cdot \vec{\nabla} N(\vec{r}, \vec{u}, t) + \int d^3r u \sigma_T(\vec{r}, \vec{u}, t) N(\vec{r}, \vec{u}, t) \\ & - \int d^3r Q(\vec{r}, \vec{u}, t) - \int d^3r \int d^3u' u' N(\vec{r}, \vec{u}', t) \sigma_s(\vec{u}' \rightarrow \vec{u}, \vec{r}, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliği d^3r integrali parantezine alırsak, integral rasgele bir hacim elemanı üzerinden olduğundan, parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekir. Bu, bize nötron transport denklemini verir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(\vec{r}, \vec{u}, t) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} N(\vec{r}, \vec{u}, t) + u \sigma_T(\vec{r}, \vec{u}, t) N(\vec{r}, \vec{u}, t) \\ = \int d^3u' u' N(\vec{r}, \vec{u}', t) \sigma_s(\vec{u}' \rightarrow \vec{u}) + Q(\vec{r}, \vec{u}, t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bu çalışmada, nötron yoğunluğu $N(\vec{r}, \vec{u}, t)$ yerine nötron açısal akısı $\psi(\vec{r}, \vec{u}, t)$ 'ın kullanılması tercih edilmiştir. Bu nedenle denklem (3.13)'teki transport eşitliği aynı zamanda açısal akı $\psi(\vec{r}, \vec{u}, t)$ cinsinden de yazılabilir.

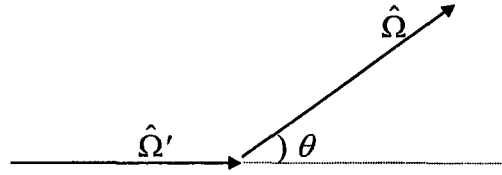
$$\text{Açısal akı} = u N(\vec{r}, \vec{u}, t) = \psi(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (3.14)$$

olarak tanımlanır. Buna göre $\hat{\Omega} = \vec{u} / u$ olduğu hatırlanarak $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t)$ cinsinden transport denklemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) + \sigma_T(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \\ = \int_{\Omega'} d\Omega' \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) \sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) + Q(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak ifade edilir. I. Tip nötron transport denklemi olarak bilinen bu denklem İntegro Diferansiyel Boltzmann denklemi olarak da adlandırılır. Bu tez çalışmasının diğer bölümlerinde sıklıkla nötron transport denkleminin bu hali kullanılacaktır. (3.15) denklemindeki $\sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ saçılma tesir kesiti daha önce Tanım 6'da verilmişti. Buna göre $\sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ saçılma tesir kesiti, hacim elemanı dışında $\hat{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir nötronun ortamda bulunan çekirdeklerden birinden saçılmaya uğrayıp $\hat{\Omega}$ doğrultusunda hacim elemanı içine girmesi olasılığıdır.

Denklem (3.15)' te en genel şekliyle verilen transport denkleminde hareket ederek düzlem geometri ve eğrisel geometriler için nötron transport denklemi türetilir. $\hat{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir nötronun, ortamda bulunan çekirdeklerden biri ile çarpışma yaptıktan sonra $\hat{\Omega}$ doğrultusunda saçılması şekil (3.1)'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Nötronun geliş ve saçılma doğrultusu

Düzlem geometride, tek enerjili durumda nötron açısal yoğunluğu bir tane radyal, bir tane de açısal değişkene bağlı olur. Sızıntı terimi ise;

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir. Burada μ nötronun geliş doğrultusu ile saçılma doğrultusu arasındaki açının kosinüsüdür.

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{x} = \cos \theta = \mu \quad (3.17)$$

$\mu = -1$ geri saçılmayı, $\mu = 1$ ileri saçılmayı gösterirken nötronların d^3r hacmine, $d\Omega$ katı açısında saçıldıkları düşünülmektedir.

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = -d(\cos \theta) d\phi = -d\mu d\phi \quad (3.18)$$

$$-1 \leq \mu \leq 1, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

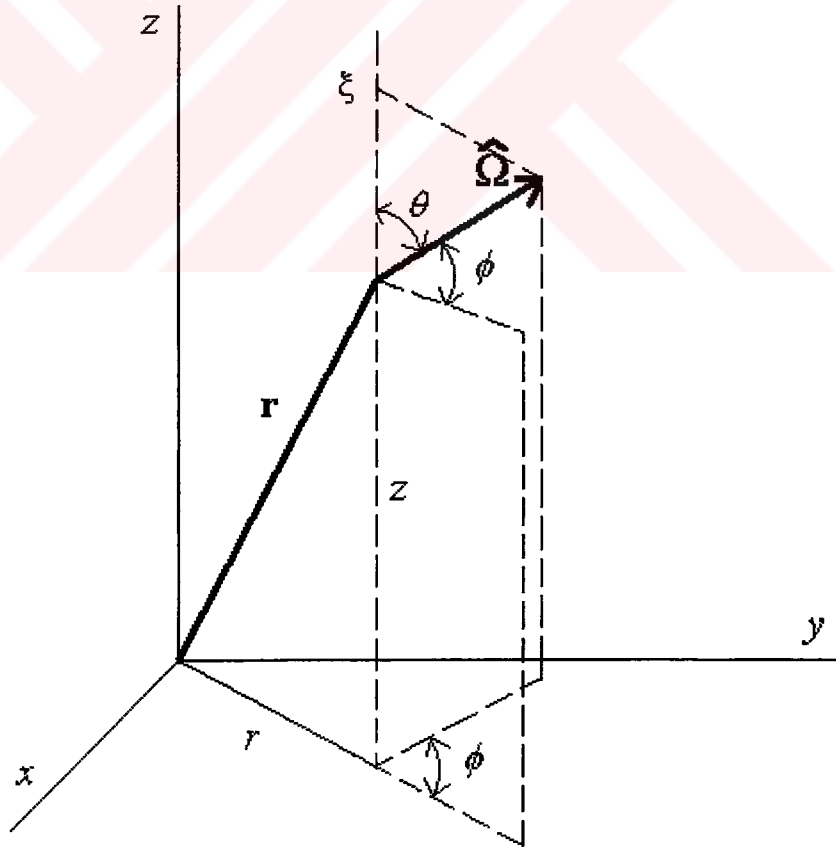
Buraya kadar düzlem geometri için yapılan tanımlamalar yardımıyla

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem, tek gruplu, izotropik saçılmalı, zamandan bağımsız, düzlem (dilim) geometride nötron transport denklemi olarak bilinir (Bell ve Glasstone, 1970).

3.3. Transport Denkleminin Silindirik Geometride Türetilmesi

Silindirik geometride nötron doğrultusu Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Silindirik geometride nötron doğrultusu

Şekil 3.2'e göre nötron doğrultusu $\hat{\Omega}$ 'nın açısal değişkenleri arasında

$$\mu = \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi, \quad \eta = \sqrt{1 - \xi^2} \sin \phi \quad (3.20)$$

$$\tan \phi = \frac{\eta}{\mu}, \quad \mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \quad (3.21)$$

bağıntıları kurulabilir. Burada μ ; nötron hızı birim vektörü $\hat{\Omega}$ 'nın r doğrultusundaki bileşeni, ξ ; z doğrultusundaki bileşeni ve η ; azimutal açı doğrultusundaki bileşeni olmak üzere $-1 \leq \mu \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, $-1 \leq \xi \leq 1$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ şeklinde değişmektedir. Bu açısal parametrelere bağlı olarak daha önce denklem (3.15)'de verilen nötron transport denklemi zamandan bağımsız olarak

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma_T(\vec{r}, \hat{\Omega}) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) \\ = \int_{\Omega'} d\Omega' \psi(r, \hat{\Omega}') \sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) + Q(r, \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ saçılma tesir kesiti, $\hat{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir nötronun ortamda bulunan çekirdeklerden birinden saçılmaya uğrayıp $\hat{\Omega}$ doğrultusunda ilerleme olasılığıdır. Anizotropik saçılmalı bir durum için saçılma tesir kesitini Legendre polinomları cinsinden açıp ilk iki terimi almak yeterli olacaktır;

$$\sigma_s(\vec{r}, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{sl}(\vec{r}) P_l(\mu_0) \quad (3.23)$$

burada μ_0 , gelen nötronların yönünü tanımlayan $\hat{\Omega}'$ vektörü ile saçılan nötronların yönünü tanımlayan $\hat{\Omega}$ vektörü arasındaki açının kosinüsüdür ve $\mu_0 = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$ bağıntısı ile verilebilir, öte yandan $d\Omega'$ katı açı olup silindirik geometride $d\Omega' =$

$d\xi' d\phi'$ olarak alınabilir. İki nötron doğrultusunun x,y,z düzlemindeki izdüşümleri ve bunlar arasındaki açının kosinüsü

$$\hat{\Omega}' = \cos\phi' \sin\theta' \hat{i} + \sin\phi' \sin\theta' \hat{j} + \cos\theta' \hat{k} \quad (3.24)$$

$$\hat{\Omega} = \cos\phi \sin\theta \hat{i} + \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} &= \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') \\ &= \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilebilir (Lewis ve Miller, 1993).

Bununla beraber ortamın homojen olması, bütün makroskopik tesir kesitlerini yer koordinatlarından bağımsız yapar. Ayrıca izotropik ortamlarda saçılma tesir kesiti seriye açıldıktan sonra sadece ilk teriminin alınması yeterli olacaktır.

Şimdi bu tanımlamaları kullanarak silindirik geometride, dış kaynaklı, tek hızlı, izotropik saçılmalı ve homojen ortamlar için transport denklemi

$$\hat{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \psi(r, \hat{\Omega}) + \sigma_T \psi(r, \hat{\Omega}) = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{\Omega'} d\Omega' \psi(r, \hat{\Omega}') + Q(r, \hat{\Omega}) \quad (3.27)$$

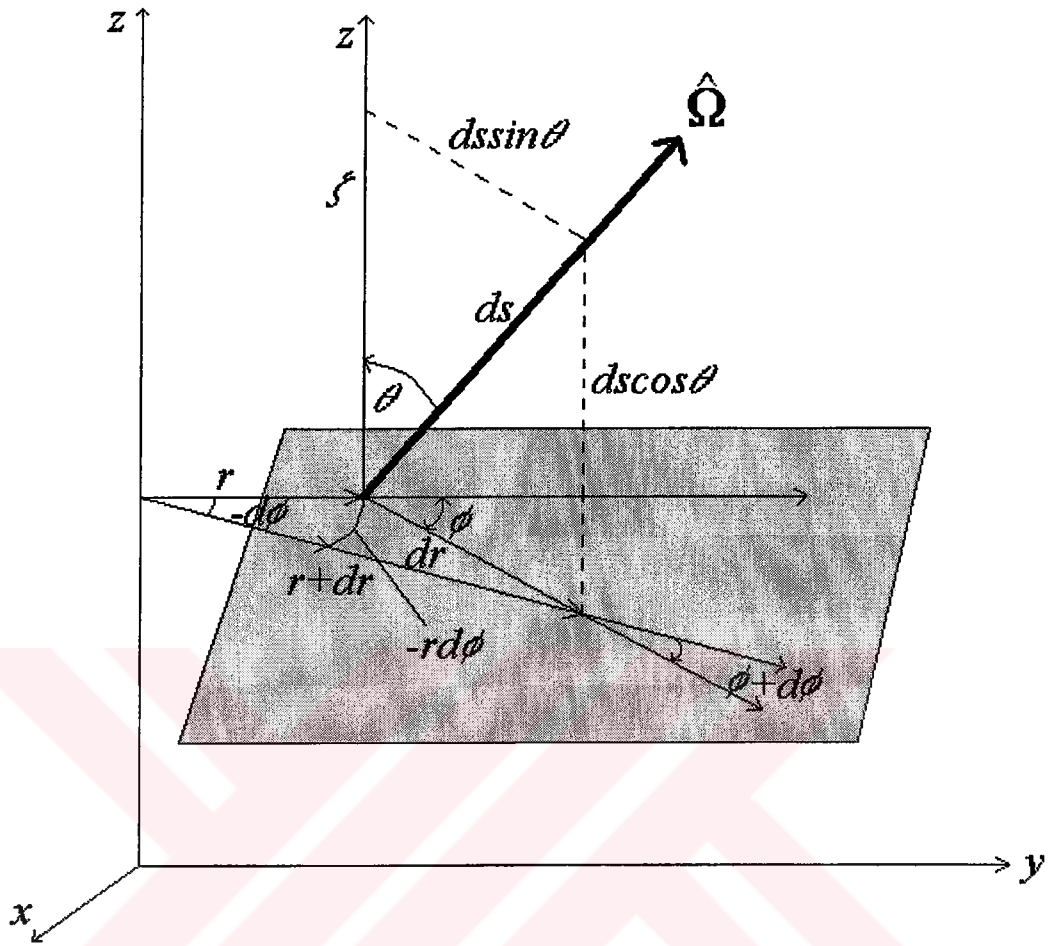
olarak ifade edilebilir.

Daha önce nötron transport denklemi için sonsuz büyüklükte doğrultu, hacim ve enerji elemanları ($d\hat{\Omega}$, d^3r ve d^3u) içindeki nötron sayısının korunduğunu gösteren bir durum ifadesi kullanılmıştı. Bütün doğrultular ve sonlu bir hacim üzerinden toplam alındığında, o hacimdeki nötronların korunduğunu gösteren bir eşitlik ortaya çıkmaktadır. Küresel ve silindirik geometrilerde bu toplamaların yapılabilmesi için, sızıntı (streaming) operatörü $\hat{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \psi$ 'ın işlemleri kolaylaştırmak amacıyla özel bir

şekilde ifade edilmesi gerekir. $\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi$ 'ın ifade edilmesi gereken bu özel şekle *korunumlu durum* denir.

Küresel ve silindirik geometrilerde, parçacığın hareketinin doğrultusunu tanımlamak için kullanılan koordinat sisteminin yönelimi parçacık hareket ettikçe değişmektedir. Kısacası, parçacık bir doğru boyunca hareket ettiği sürece açısal koordinatlar sürekli değişmektedir. Silindirik geometride, açısal koordinat sisteminin yönelimi şekil 3.2'deki gibidir. Tek boyutlu silindirik geometride nötron transport denklemini çalışmak diğer tek boyutlu geometrilere kıyasla daha zordur. Çünkü tek boyutlu silindirik geometride açısal akıyı tanımlamak için iki tane açısal değişkene; ξ ve ϕ , gereksinim vardır.

Şimdi tek boyutlu silindirik geometride transport denkleminin çözümünü büyük ölçüde kolaylaştıracak $\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi$ sızıntı operatörünün korunumlu durumunu bulmak için gerekli olan parametreler tanımlanmalıdır.



Şekil 3.3: Silindirik geometride nötron doğrultusunun açısal değişkenleri (nötron doğrultusunun x-y düzlemindeki izdüşümü)

Eğer sistem sonsuz z doğrultusunda silindirik simetriye sahip ise, açısal dağılım üç değişkene bağlıdır. Bunlar (şekil 3.3); r , silindirin ekseninden (z eksen) olan uzaklık; θ , nötron doğrultusu $\hat{\Omega}$ ile z arasındaki açı; ϕ , $\hat{\Omega}$ 'nın x - y düzlemindeki izdüşümü ile r arasındaki açıdır. Böylece şekil 3.3'den yararlanarak genel haliyle sızıntı operatörü

$$\hat{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{d\phi}{ds} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (3.28)'de yer alan $\frac{dr}{ds}$ ve $\frac{d\phi}{ds}$ ifadeleri şekil 3.3'den yararlanılarak

$$\cos \phi = \frac{dr}{ds \sin \theta} \quad \sin \phi = -\frac{r d\phi}{ds \sin \theta} \quad (3.29)$$

$$\frac{dr}{ds} = \sin \theta \cos \phi \quad \frac{d\phi}{ds} = -\frac{\sin \theta \sin \phi}{r} \quad (3.30)$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra denklem (3.30)'daki türev ifadeleri denklem (3.28)'de yerine yazılırsa sızıntı operatörü

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \phi - \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\sin \theta \sin \phi}{r} \quad (3.31)$$

halini alır. Yine şekil 3.3'e göre $\cos \theta = \xi$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \xi^2}$ ve denklem (3.20) yardımıyla sızıntı operatörü korunumlu durumda

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi = \mu \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (3.32)$$

olarak ifade edilebilir.

Böylece sızıntı operatörü $\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi$ 'ın korunumlu hali bulunduktan sonra tek boyutlu silindirik geometride transport denklemi korunumlu durumda

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \sigma_r \psi = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi', \phi') d\phi' d\xi' + Q/2 \quad (3.33)$$

olarak ifade edilir.

3.4. Silindirik Geometride Bir Boyutlu Nötron Transportu İçin Spektral Green Fonksiyonlarının (SGF) Türetilmesi ve Bu Fonksiyonlar İle Çözüm

Bölüm 1’de bu çalışmada analitik çözüme dayanan nümerik bir yöntem kullanıldığı belirtilmişti. Daha sonra bölüm 3.4 ve bölüm 3.5’de geçen nümerik yöntemlerde kullanılacak analitik çözüm bu bölümde ele alınacaktır. Silindirik geometride tek hızlı, izotropik saçılmalı ve dış kaynağın olmadığı homojen bir ortam için transport eşitliği denklem (3.33) yardımıyla

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \sigma_T \psi = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi', \phi') d\phi' d\xi' \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi denklem (3.20)’deki açısal ifadeler yardımıyla transport eşitliği

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \sigma_T \psi \\ = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi', \phi') d\phi' d\xi' \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde yazılabilir. Transport eşitliği değişkenlerine ayırma yöntemi ve küresel harmonikler yöntemi kullanılarak silindirik geometride çözülebilir (Gelbard, 1968 : Greenspan, Kelber, Okrent 1968’den). Silindirik geometride silindirin radyal boyutu r ’nin 0 ile ∞ aralığında değiştiği düşünülmektedir. Yapacağımız çözümün Bessel fonksiyonları yerine ona benzeyen analitik bir çözüm olacağı düşünüldüğünde konuma bağlı kısmının eksponansiyel olması gerektiği anlaşılır. Silindirik geometride Transport denkleminin Spektral Green Fonksiyonu (SGF) ile çözümünün bulunabilmesi için denklemde yer alan açısal türev teriminden kurtulmamızı

sağlayacak bir açısal akı fonksiyonunun bulunması gerekir. Daha önceki bölümlerde de değinildiği gibi silindirik tek boyutlu geometride açısal akı fonksiyonu ψ 'nin ξ ve ϕ gibi iki açıya bağlı olması gerekliliği göz önüne alınırsa

$$\psi(r, \xi, \phi) \approx \exp(-\sigma_T r f(\xi, \phi)) \quad (3.36)$$

şeklinde bir çözüm profilinin silindirik geometri transport denklemini sağlayacağı açıktır (Lathrop, 2000). Burada $f(\xi, \phi)$, açısal kısmın çözümü olup denklemi sağlayan herhangi bir fonksiyon olabilir. Şimdi $\psi(r, \xi, \phi)$ için önerdiğimiz bu çözüm profili denklem (3.35)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left[-\sigma_T f(\xi, \phi) \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi + \frac{\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi}{r} \sigma_T r \frac{df}{d\phi} + \sigma_T \right] e^{-\sigma_T r f(\xi, \phi)} \\ &= \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-\sigma_T r f(\xi', \phi')} d\phi' d\xi' \end{aligned} \quad (3.37)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.37)'nin her iki tarafı σ_T ile bölünüp $d\phi d\xi$ ile çarpılıp integral alınırsa eşitlikte bir değişiklik olmaması gerekir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[-f(\xi, \phi) \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi + \sqrt{1-\xi^2} \sin \phi \frac{df}{d\phi} + 1 \right] e^{-\sigma_T r f(\xi, \phi)} d\phi d\xi \\ &= \frac{c_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-\sigma_T r f(\xi', \phi')} d\phi' d\xi' \right] d\phi d\xi \end{aligned} \quad (3.38)$$

olarak yazılabilir. Burada $\int d\Omega = \iint d\phi d\xi = 4\pi$ katı açıdır ve $c_0 = \sigma_{s0}/\sigma_T$ şeklindedir. Dolayısıyla bu tanımlamalar ışığında denklem (3.38) tekrar düzenlenerek,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left[-f(\xi, \phi) \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi + \sqrt{1-\xi^2} \sin \phi \frac{df}{d\phi} + 1 \right] e^{-\sigma_r r f(\xi, \phi)} d\phi d\xi \\
& = c_0 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-\sigma_r r f(\xi', \phi')} d\phi' d\xi'
\end{aligned} \tag{3.39}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.39) eşitliğinin sağlanabilmesi için eşitliğin sol tarafında integral içinde köşeli parantez içindeki ifadenin c_0 'a eşit olması gerektiği kolaylıkla görülmektedir.

$$-f(\xi, \phi) \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi + \sqrt{1-\xi^2} \sin \phi \frac{df}{d\phi} + 1 = c_0 \tag{3.40}$$

Eşitlik (3.40) ile verilen diferansiyel denklem MAPPLE V bilgisayar programı yardımıyla çözülürse $f(\xi, \phi)$ için

$$f(\xi, \phi) = \frac{(1-c_0) \cos \phi}{\sqrt{1-\xi^2}} + C \frac{\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.41}$$

ifadesi bulunur; burada integral sabitini $C = 0$ almanın hiçbir sakıncası yoktur. Bu durumda açısal akının genel profili

$$\psi(r, \xi, \phi) = e^{-\sigma_r r \frac{(1-c_0) \cos \phi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.42}$$

şeklinde olacaktır. Denklem (3.42)'den görüldüğü gibi $|1-c_0| \ll 1$ olduğundan açısal akı silindirin sınırlarına doğru gidildikçe (r artıkça) beklenildiği gibi sıfır olacaktır. Şimdi açısal akı için bulunan bu çözümü (denklem 3.42) denklem (3.33)'teki transport eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi \frac{d\psi}{dr} - \frac{\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi}{r} \left(-\frac{\sigma_T r (c_0 - 1) \sin \phi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \psi + \sigma_T \psi \\
& = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi', \phi') d\phi' d\xi'
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-\xi^2} \cos \phi \frac{d\psi}{dr} + \sigma_T (c_0 - 1) \sin^2 \phi \psi + \sigma_T \psi \\
& = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi', \phi') d\phi' d\xi'
\end{aligned} \tag{3.44}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece denklem (3.35) ile verilen transport eşitliğindeki açısal türev teriminden kurtulmuş oluruz. Elde edilen denklem (3.44)'e pseudo-slab (sözde-dilim) transport denklemi adı verilir. Bunun sonucu olarak açısal türev teriminden kurtulduktan sonra silindirik geometri transport denklemi dilim geometri denklemine benzetilmiş olur. Silindirik geometri transport eşitliğinde yer alan açısal türev terimi, problemin çözülmesinde ve özellikle çözümde kullanılacak nümerik yöntemin seçimine karar vermekte sorun oluşturmaktadır. Bu nedenle, silindirik ve küresel geometrilerde ve daha geniş anlamıyla kartezyen dışındaki geometrilerde, açısal türev teriminin çözümü zorlaştırmasından dolayı, problemin sözde dilim geometriye indirgenmesi alışıla gelmiştir. Daha sonra başlangıç ve sınır şartlarıyla beraber simetri özellikleri kullanılarak çözüme gidilir.

Denklem (3.44)'deki sözde dilim denklemi bir diferansiyel denklem olduğundan, çözüm için bir homojen bir de özel çözüm önerilir. Bu homojen ve özel çözümler, transport denkleminin ayrı ayrı çözümleri olduğu gibi, bunların lineer kombinasyonları da bir çözüm oluşturur. Öyleyse denklem (3.44)'e

$$\psi(r, \xi, \phi) = \psi^p + \psi^h \tag{3.45}$$

şeklinde çözüm önerilir. Önce homojen çözümü, $\psi^h(r, \xi, \phi)$, inceleyelim.

$$\psi^h(r, \xi, \phi) = H(\xi, \phi, \nu) e^{\sigma_r r / \nu} \quad (3.46)$$

şeklinde bir homojen çözüm olsun; burada $H(\xi, \phi, \nu)$ açısal kısmın genel çözümü, ν ise özdeğerlerdir (De Barros ve Larsen, 1990;1992). ν özdeğerleri N çift için $(\pm)$ değerler aldığından burada açısal akının, r 'nin artması karşısında azalmasını gösteren nicelik $H(\xi, \phi, \nu)$ fonksiyonudur. Çünkü bu fonksiyon negatif değerler de alabilmektedir. Şimdi homojen çözüm olan denklem (3.46), denklem (3.44)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\nu} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi + (c_0 - 1) \sin^2 \phi + 1 \right) H(\xi, \phi, \nu) \\ &= \frac{c_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} H(\xi', \phi', \nu) d\phi' d\xi' \end{aligned} \quad (3.47)$$

eşitliği $H(\xi, \phi, \nu)$ için çözülürse, açısal kısmın çözümü için;

$$H(\xi, \phi, \nu) = \frac{\nu c_0}{4\pi \left[\nu(c_0 - 1) \sin^2 \phi + \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi + \nu \right]} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} H(\xi', \phi', \nu) d\phi' d\xi' \quad (3.48)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki ν özdeğerlerini bulmak için denklem (3.48)'in her iki tarafı $d\phi d\xi$ ile çarpılıp bütün açılar üzerinden toplamı alınır.

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} H(\xi, \phi, \nu) d\phi d\xi \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{\nu c_0 d\phi d\xi}{4\pi \left[\nu(c_0 - 1) \sin^2 \phi + \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi + \nu \right]} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} H(\xi', \phi', \nu) d\phi' d\xi' \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Denklem (3.49)'un sağ tarafındaki integral ile sol tarafındaki integral terimleri aynı olduğu için karşılıklı sadeleştirmelere gidilirse

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{\nu c_0 d\phi d\xi}{4\pi \left[\nu(c_0 - 1) \sin^2 \phi + \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi + \nu \right]} = 1 \quad (3.50)$$

bulunur. Bu integralde $\cos \phi$ 'ye göre seri açılım kullanıp sonra da $\cos \phi$ üzerinden integral alınırsa $(\cos \phi)^n$, $n = \text{tek}$ için, $0-2\pi$ aralığında sıfır olur. Bu nedenle $d\phi$ integrali $0-\pi$ aralığında alınıp sonuç 2 ile çarpılabilir.

$$\frac{\nu c_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\pi} \frac{d\phi d\xi}{\nu(c_0 - 1) \sin^2 \phi + \sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi + \nu} = 1 \quad (3.51)$$

Buradan özdeğerlerin analitik olarak bulunabilmesi için integralin alınması gereklidir. Ancak kolaylık olması bakımından $u = \cos \phi$ değişken değişimi yapılırsa, denklem (3.51)'deki integral yeniden düzenlenerek,

$$\frac{\nu c_0}{2\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2} \left\{ \nu(c_0 - 1)(1 - u^2) + u\sqrt{1 - \xi^2} + \nu \right\}} = 1 \quad (3.52)$$

şeklini alır. Normalizasyon şartını veren bu integral denkleminden (3.52), analitik olarak ν özdeğerleri bulunabilir. Ancak hem bu integralin alınmasının zor olmasından hem de daha sonraki bölümlerde kullanılacağı için, bu integral seri

toplam şeklinde yazılıp oradan v özdeğerleri kolaylıkla bulunabilir. Yani buradaki integraller Gauss integral formülleri yardımıyla seri toplamalar halinde yazılabilirler. (3.52) denkleminde du ve $d\xi$ üzerinden integraller sırasıyla Gauss-Chebyshev ve Gauss-Legendre integral formüllerine benzetilerek çözüme gidilebilir. Burada Gauss integral formülü;

$$\int_a^b w(x)y(x)dx \cong \sum_{m=1}^M w_m y(x_m) \quad (3.53)$$

ile verilir. Burada $w(x)$ ağırlık fonksiyonudur ve Gauss-Legendre formülünde $w(x) = 1$ 'e eşittir. (a,b) integral aralığının $(-1,1)$ olarak alınması gelenek olmuştur. Bu durumda x_m , Legendre polinomunun kökleridir. Örneğin $M=2$ için Legendre polinomu $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ olduğundan, bu polinomun kökleri $x_m = \pm 1/\sqrt{3}$ olur. w_m seçilen M 'e göre değişmektedir. Gauss-Chebyshev integral formülünde $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ 'dir. Bu durumda x_n , 1. Tip Chebyshev polinomunun kökleri olur.

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}x) \quad (3.54)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \cong \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N y(x_n) \quad (3.55)$$

Burada kökler

$$x_n = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right), \quad w_n = \frac{\pi}{N}, \quad n = 1, \dots, N \quad (3.56)$$

olarak verilir.

Şimdi tanımlanan Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev integral formülleri denklem (3.52)'ye uygulanırsa,

$$\frac{\nu c_0}{2\pi} \sum_{m=1}^M w_m \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{\nu(c_0 - 1)(1 - u_n^2) + u_n \sqrt{1 - \xi_m^2} + \nu} = 1 \quad (3.57)$$

şeklinde integral denklem seri toplam haline dönüşmüş olur. Denklem (3.57)'ye dispersiyon bağıntısı denir. Bundan sonra, $M=N=2$ için denklem (3.57) çözülerek ν özdeğerleri bulunabilir. Daha önce, $M=N=2$ için Gauss-Chebyshev kuadratürünün kökleri $u_1 = 1/\sqrt{2}$, $u_2 = -1/\sqrt{2}$ ve ağırlık fonksiyonları $w_1 = w_2 = \pi/2$ ile Gauss-Legendre kuadratürünün kökleri $\xi_1 = 1/\sqrt{3}$, $\xi_2 = -1/\sqrt{3}$ ve ağırlık fonksiyonları $w_1 = w_2 = 1$ değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu değerlerle birlikte $c_0 = 0.99$, denklem (3.57)'de yerine yazılırsa ν özdeğerleri $\nu = \pm 8.185455091$ olarak bulunur.

N ve M aynı veya farklı seçilebilir. Ancak farklı seçildiklerinde ν özdeğerlerinde komplikasyonlara yol açabilir. Bu nedenle, $M = N$ olacak şekilde bir seçim yapılması uygun bulunmuştur. u_n ve ξ_m köklerinin orjine göre simetrik olması için N ve M sayıları çift sayı seçilir. Şayet N ve M sayıları tek seçilirse, köklerden bir tanesi orjinde olmak üzere geriye kalan kökler yine orjine göre simetrik olarak dağılım gösterirler. Örneğin $N = M = 4$ için kökler $u_1 = -u_4$, $u_2 = -u_3$ ve $\xi_1 = -\xi_4$, $\xi_2 = -\xi_3$ şeklinde bir simetriye sahip iken özdeğerler de $\nu_1 = -\nu_4$ ve $\nu_2 = -\nu_3$ biçiminde olur.

Denklem (3.57)'deki N ve M sayıları ($N=M$) çift alınarak ν özdeğerleri için çözülürse N 'inci dereceden N bilinmeyenli bir polinom elde edilir. Bu polinomun kökleri ν_k özdeğerlerini verir; $k = 1, 2, \dots, N$. Bir önceki paragrafta da belirtildiği gibi u_n ve ξ_m kökleri orjine göre simetrik olduğundan ν_k özdeğerleri de orjine göre ($\nu = 0$ 'a göre) simetrik ve daima $\pm$ çiftler halinde olurlar. Denklem (3.57) MAPPLE V programı kullanılarak ν_k özdeğerleri için çözülmüş ve sonuçlar çizelge 3.1'de verilmiştir. $c_0 = 0.99$ ve $N=M=2$ için daha önce denklem (3.57) ν özdeğerleri için analitik olarak çözülmüş ve $\nu_k \cong \pm 8.185$ ($k=1, 2$) civarında bulunmuştur.

Çizelge 3.1: Farklı c_0 değerleri için ν_k özdeğerleri

	$M=N$	$c_0 = 0.33$	$c_0 = 0.60$	$c_0 = 0.99$	$c_0 = 1.20$	$c_0 = 1.80$
ν_k	2	± 1.22322	± 1.44338	± 8.18545	$\pm 1.74078i$	$\pm 0.77152i$
	4	± 1.23876	± 1.42123	± 8.18137	± 0.55695	± 0.51999
		± 0.90997	± 0.68395	± 0.57630	± 0.36176	± 0.26366
		± 0.54314	± 0.50907	± 0.41248	± 0.17973	± 0.12553
		± 0.47645	± 0.31609	± 0.21172	$\pm 1.75891i$	$\pm 0.80504i$

Bu özdeğerler farklı yöntemler kullanılarak da hesaplanabilir. Çizelge 3.1'den de görüldüğü gibi $c_0 \approx 1$ (veya $|1-c_0| \ll 1$) durumunda transport teorisi çözümleri difüzyon teorisi çözümlerine yaklaşmaktadır. Bu durum, zayıf soğurucu bir ortamı göstermektedir. $0 < c_0 < 1$ durumunda, özdeğerler reel ve $\nu_k > 1$ 'dir; $c_0 > 1$ durumunda ise özdeğerlerden bir çifti imajiner, diğerleri reeldir.

Bu bölümde, daha önce bulunan analitik çözüm yardımıyla, tek boyutlu ve tek gruplu izotropik saçılmalı silindirik geometri nötron transport denkleminin nümerik çözümü Spektral Green Fonksiyonları yöntemi ile yapılacaktır.

Tek boyutlu nötron transport denklemini çözmek için farklı özelliklere sahip bir çok nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin çoğunda Taylor açılımı kullanıldığından ve seri sonsuza kadar açılmadığından uzaysal yuvarlatma hataları göze çarpmaktadır. Nümerik hesaplamalarda doğrultu diskretizasyonu ile uzaysal bir ağ oluşturulmaktadır. Bu oluşturulan ağın kaba olması, hücre adımının büyük olması, çözümlemede negatif akı değerlerinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

De Barros ve Larsen (1990) dilim geometride, bütün hesaplamalarda yuvarlatma hatalarından bağımsız yeni bir nümerik yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem, her uzaysal hücre ve diskret doğrultuda geçerli olan standart bir denge denklemi ile yine her uzaysal hücre ve doğrultuda geçerli standart olmayan yardımcı bir eşitlik içermektedir. Denge denklemi, analitik diskret ordinat denklemlerinin uzaysal bir hücre üzerinden integre edilmesiyle bulunur. Yardımcı eşitlik ise, hücre-

ortalama açısıl akısını, hücre içindeki kaynak ve hücrenin iki sınırına giren hücre-kenarı açısıl akılarının lineer bir kombinasyonu olarak açıklar. Gerçekte bu yardımcı eşitlik, giren hücre-kenarı akıları ile kaynak cinsinden hücre-ortalama akıları için Green fonksiyonlarını içerir. Bu Green fonksiyonu, değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen diskret ordinat denklemlerinin analitik çözümüne dayanan spektral bir analiz kullanılarak bulunur. Sonuçta ortaya çıkan yardımcı eşitlik, denge (balans) denklemi gibi, bütün uzaysal hücre ve diskret ordinat doğrultularında geçerlidir. Burada kullanılan yöntem, diskret ordinat denklemlerinin spektral analizine dayandığından ve bir Green fonksiyonu içeren yardımcı eşitlik kullanıldığından, bu yöntem “Spektral Green Fonksiyonu (SGF)” denmiştir.

Bulunan SGF denklemleri iki çeşit bilinmeyen içerir: Hücre-kenarı ve hücre-ortalama açısıl akıları. Balans ve yardımcı eşitliklerin çözülmesiyle elde edilen bu niceliklerin nümerik değerleri, uzaysal yuvarlatma (truncation) hataları içermez ve her zaman ızgara (grid) noktalarında tam çözümdürler. De Barros ve Larsen (1990)’dan sonra yapılan çalışmalarda da SGF yönteminin diskret ordinat problemlerinde sık kullanılan Diamond Difference (DD) yaklaşımından daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir (Anlı, 2001).

Bu aşamada, silindirik geometride transport denkleminin SGF yöntemi uygulanmadan önce, açısıl akı fonksiyonuna önerilen özel çözümün aranması yararlı olacaktır. Diskretize olmuş transport denklemi dış kaynak dahil

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi^2} u \frac{d\psi(r, \xi, u)}{dr} + \sigma_T (c_0 - 1)(1 - u^2) \psi(r, \xi, u) + \sigma_T \psi(r, \xi, u) \\ = \frac{\sigma_{s0}}{2\pi} \int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 \frac{\psi(r, \xi', u')}{\sqrt{1-u'^2}} du' + Q/2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde verilebilir. Bu denklem için önerilen özel çözüm uzaysal bağımsız olan $\psi^p(r) = \text{sabit}$ olsun. Gerçekte özel çözüm kaynağın bir fonksiyonu olabilir. Ancak kaynak uzaysal bağımlı bir fonksiyon olarak seçilirse transport denklemi çözülemez bir duruma gelmektedir (De Barros ve Larsen, 1990; 1992). Bunu denklem (3.58)’de

yerine yazarsak türev terimi düşecektir ve yine $c_0 = \sigma_{s0} / \sigma_T$ olacak şekilde her iki taraf σ_T ile bölünürse;

$$(c_0 - 1)(1 - u^2) \psi^p(\xi, u) + \psi^p(\xi, u) = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 \frac{\psi(\xi', u') du'}{\sqrt{1 - u'^2}} + \frac{Q}{2\sigma_T} \quad (3.59)$$

eşitliği elde edilir. Buradan açısal akı için önerilen özel çözüm adına,

$$\psi^p(\xi, u) = \frac{c_0}{2\pi[(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1]} \int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 \frac{\psi du'}{\sqrt{1 - u'^2}} + \frac{Q}{2\sigma_T[(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1]} \quad (3.60)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.60)'ın her iki tarafı $\int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ ile çarpılır ve

$I = \int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 \frac{\psi du}{\sqrt{1 - u^2}}$ değişken integrand ataması yapılırsa

$$I = \frac{c_0}{\pi} I \int_{-1}^1 \frac{du}{[(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1]\sqrt{1 - u^2}} + \frac{Q}{\sigma_T} \int_{-1}^1 \frac{du}{[(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1]\sqrt{1 - u^2}} \quad (3.61)$$

ile verilen integral denkleminde ulaşılır. Denklem (3.61)'deki integraller MAPPLE V programı ile çözülürse

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{[(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1]\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{c_0}} \quad (3.62)$$

bulunur ve bu sonuç integrand I da yerine yazılırsa,

$$I = \frac{Q\pi}{\sqrt{\sigma_s \sigma_T} (1 - \sqrt{c_0})} \quad (3.63)$$

sonucuna varılır. Böylece integrand I , denklem (3.60)'daki özel çözümde yerine yazılırsa, açısıl akı fonksiyonunun özel çözümü için;

$$\psi^p(\xi, u) = \frac{Q}{2\sigma_T(1 - \sqrt{c_0})(c_0 - 1)(1 - u^2) + 1} \quad (3.64)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.64)'den de görüldüğü gibi transport denkleminde önerilen özel çözüm sadece Q 'ya bağlı ve r konumundan bağımsızdır. Ancak Q konuma bağlı ise özel çözüm de konuma bağlı olurdu.

Denklem (3.58)'deki transport denkleminde yer alan integraller Gauss integral formülleri yardımıyla seri toplam halinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \xi_m^2} u_n \frac{d\psi_{m,n}}{dr} + \sigma_T(c_0 - 1)(1 - u_n^2)\psi_{m,n} + \sigma_T\psi_{m,n} \\ = \frac{\sigma_{s0}}{2\pi} \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^N \psi_{m',n'}(r) w_{m'} w_{n'} + Q/2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem bir hücre üzerinden integre edilir ve her iki taraf σ_T ile bölünürse;

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - \xi_m^2} u_n}{\sigma_T} [\psi_{m,n,j+1/2} - \psi_{m,n,j-1/2}] + h[(c_0 - 1)(1 - u_n^2) + 1]\psi_{m,n,j} \\ = \frac{c_0 h}{2\pi} \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^N \psi_{m',n',j} w_{m'} w_{n'} + \frac{hQ_j}{2\sigma_T} \end{aligned} \quad (3.66)$$

denge (balans) denkleminde ulaşılmış olur. Burada $\psi_{m,n,j}$ hücre-ortalama açısıl akısı, $\psi_{m,n,j\pm 1/2}$ ise hücre kenarı açısıl akılarıdır.

Daha önce denklem (3.46)'da transport denkleminin homojen kısmı için bir çözüm önerilmişti. Bu homojen çözüm, N 'inci merteye yaklaşıklığı için bulunan bütün özdeğerler tarafından sağlanmalıdır. Madem ki bütün ν özdeğerleri bu homojen çözümü sağlıyor, bunların lineer kombinasyonları da bir çözüm olmalıdır. Buna göre transport denkleminin homojen kısmının çözümü yeniden

$$\psi_{m,n}^h(r) = \sum_{k=1}^N \beta_k H_{m,n}(\nu_k) \exp(\sigma_T r / \nu_k) \quad (3.67)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu yeni durumda genel çözüm

$$\psi_{m,n}(r) = \psi_{m,n}^p + \sum_{k=1}^N \beta_k H_{m,n}(\nu_k) \exp(\sigma_T r / \nu_k) \quad (3.68)$$

şeklinde ifade edilir. Burada β_k sabitleri rasgele olup sınır koşullarından bulunabilir. Ancak bu bölümde transport denklemini SGF yöntemiyle çözüleceğinden, bu yöntemin en avantajlı yönlerinden biri olan β_k sabitlerinin bulunmasına gerek kalmamasıdır.

Açısal akı fonksiyonu $\psi_{m,n}(r)$ bir hücre üzerinden integre edilirse,

$$\psi_{m,n,j} \equiv \frac{1}{h} \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \psi_{m,n}(r) dr \quad (3.69)$$

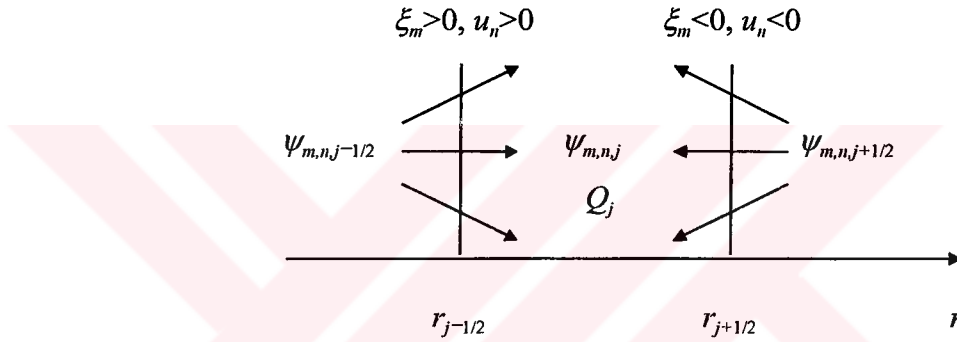
şeklinde hücre-ortalama açısal akısı, $\psi_{m,n,j}$, bulunur. Burada h hücre genişliği olarak adlandırılır ve $h = r_{j+1/2} - r_{j-1/2}$ ile verilir. Denklem (3.68)'de açısal akı için bulunan genel çözüm denklem (3.69)'daki hücre-ortalama açısal akı denkleminde yerine yazılırsa,

$$\psi_{m,n,j} = \psi_{m,n,j}^p + \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\nu_k H_{m,n}(\nu_k)}{h \sigma_T} \left[\exp\left(\frac{\sigma_T r_{j+1/2}}{\nu_k}\right) - \exp\left(\frac{\sigma_T r_{j-1/2}}{\nu_k}\right) \right] \quad (3.70)$$

ifadesi elde edilir. Aynı zamanda denklem (3.68) hücre-kenarı açısıl akıları için yazılırsa

$$\psi_{m,n,j\pm 1/2} = \psi_{m,n,j\pm 1/2}^p + \sum_{k=1}^N \beta_k H_{m,n}(v_k) \exp\left(\frac{\sigma_T r_{j\pm 1/2}}{v_k}\right) \quad (3.71)$$

ifadesi elde edilir.



Şekil 3.4: j hücresi; giren hücre-kenarı açısıl akıları $\psi_{m,n,j\pm 1/2}$, hücre-ortalama açısıl akısı $\psi_{m,n,j}$ ve iç kaynak Q_j

Denklem (3.66) ile verilen denge denkleminin çözümü için sadece sınır şartlarının varlığı yeterli değildir. Çünkü bilinmeyenlerin sayısı denklem sayısından daha fazladır. Bilinmeyenlerin sayısının, azaltılması için hücre-ortalama açısıl akısının hücre-kenarı açısıl akılarıyla ilişkilendirilmesi gerekir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda Diamond Difference, Finite difference ve Finite Element gibi yöntemlerle hücre-kenarı akıları ile hücre-ortalama akıları arasında ilişkiler kurulabiliyordu (Scheid, 1988). Biz bu çalışmada fark denklemleri yerine Green fonksiyonlarını kullanarak yeni bir yardımcı eşitlik tanımlayacağız.

De Barros ve Larsen (1990)'in dilim geometride yaptıkları bir çalışmayı takip ederek şu şekilde bir yardımcı (auxiliary) eşitlik yazılabilir; herhangi bir j 'inci hücrede m yönündeki $\psi_{m,n,j}$ hücre-ortalama akısının, $\xi_m < 0, u_n < 0$ için $\psi_{m,n,j-1/2}$ ve $\xi_m > 0,$

$u_n > 0$ için $\psi_{m,n,j+1/2}$ hücre kenarı açısal akıları ile Q iç kaynağından oluştuğu düşünülebilir. Bu nedenle

$$\psi_{m,n,j} = \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',j-1/2} + \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',j+1/2} + G_{m,n}(Q)$$

$$j=1,\dots,J \text{ ve } m=n=1,\dots,N \quad (3.72)$$

şeklinde bir yardımcı eşitlik yazılabilir. Burada $\theta_{m,n,m',n'}$, uzayda diskretize olmuş S_N operatörünün Green fonksiyonu rolünü oynamaktadır. $G_{m,n}(Q)$ ise, özel çözümün otomatik olarak korunması için hesaplanan iç kaynağın bir fonksiyonudur.

Denklem (3.70) ve (3.71), denklem (3.72)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^p + \beta_k \psi_{m,n,k,j}^h &= \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m,n}^p + \beta_k \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',k,j-1/2}^h \\ &+ \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m,n}^p + \beta_k \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',k,j+1/2}^h + G_{m,n}(Q) \end{aligned}$$

$$(3.73)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (3.73)'ün her iki tarafında Q terimi içeren sabit ifadelerin birbirine eşit olması gerektiği gerçeğinden yola çıkarak $G_{m,n}(Q)$ için,

$$G_{m,n}(Q) = \left\{ 1 - \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} - \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \right\} \psi_{m,n}^p \quad (3.74)$$

ifadesi elde edilir. Ancak bizim problemimizde işlem kolaylığı sağlaması bakımından Q kaynağına bağlı $\psi_{m,n}^p$ terimi sıfır kabul edilmiştir. Ayrıca denklem (3.73)'den rahatlıkla görülebildiği gibi, homojen kısma ait terimlerin önündeki β_k sabitlerinin bulunmasına gerek olmaksızın karşılıklı sadeleşmektedirler. Böylece denklem (3.73)'ün geriye kalan kısmı,

$$\psi_{m,n,k,j}^h = \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',k,j-1/2}^h + \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',k,j+1/2}^h \quad (3.75)$$

olur. Denklem (3.70) ve (3.71)'de hücre-ortalama ve hücre-kenarı açısal akıları için yazılan eşitliklerin sağ tarafındaki ikinci terimler homojen kısmın çözümleri olduğundan bunlar denklem (3.75)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \beta_k \frac{v_k H_{m,n}(v_k)}{h\sigma_T} \left[\exp\left(\frac{\sigma_T r_{j+1/2}}{v_k}\right) - \exp\left(\frac{\sigma_T r_{j-1/2}}{v_k}\right) \right] \\ &= \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \beta_k H_{m',n'}(v_k) \exp\left(\frac{\sigma_T r_{j-1/2}}{v_k}\right) \\ &+ \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \beta_k H_{m',n'}(v_k) \exp\left(\frac{\sigma_T r_{j+1/2}}{v_k}\right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.76)'nın her iki tarafı $\exp\left[\frac{\sigma_T(r_{j+1/2} + r_{j-1/2})}{2v_k}\right]$ terimi ile bölünür ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{2v_k H_{m,n}(v_k)}{h\sigma_T} \sinh\left(\frac{h\sigma_T}{2v_k}\right) = \exp\left(-\frac{h\sigma_T}{2v_k}\right) \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} H_{m',n'}(v_k) \\ &+ \exp\left(\frac{h\sigma_T}{2v_k}\right) \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} H_{m',n'}(v_k) \end{aligned} \quad (3.77)$$

bağıntısı elde edilir. Sonuçta, $1 \leq m, 1 \leq n, k \leq N \times N/2$ için $k=1,2,\dots, N \times N/2$ olmak üzere ξ_m, P_N 'in kökleri; u_n, T_N 'in kökleri ve w_m, w_n ağırlık fonksiyonları ile belirlenen v_k 'nin bilinen değerleri kullanılarak, $\theta_{m,n,m',n'}$ Green fonksiyonları için $N \times N \times 2^{N-1}$ bilinmeyenli $N \times N \times 2^{N-1}$ tane lineer denklem sistemi elde edilir. Eğer m ve n 'i sabit tutup $k=1,\dots, N \times N/2$ 'yi denkleme yerleştirirsek, $N \times N/2$ tane $\theta_{m,n,m',n'}$ bilinmeyeni için $N \times N/2$ denklemden oluşan lineer bir denklem seti bulunur. Örneğin; yarıçapı 10cm,

hücre genişliği $h=5\text{cm}$ olan sistemde $N=2$ mertebe yaklaşımı için $\nu_1=-\nu_2=8.185454827$ özdeğerleri bulunmuş, $c_0=0.99$ ve doğrultu kosinüsleri $\xi_1=-\xi_2=1/\sqrt{3}$ olarak alınmış ve önce denklem (3.48)'den $H_{m,n,k}$ fonksiyonları yani $H_{1,1,1}$, $H_{1,2,1}$, $H_{2,1,1}$, $H_{2,2,1}$, $H_{1,1,2}$, $H_{1,2,2}$, $H_{2,1,2}$ ve $H_{2,2,2}$ değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu bulunan $H_{m,n,k}$ değerleri denklem (3.77)'de yerine yazılırsa; $m=1,2$ $n=1,2$ ve $k=1,2$ için 2 bilinmeyenli 4 tane denklem çifti oluşur. Bu 8 denklem, çiftler halinde çözülerek 8 adet $\theta_{m,n,m',n'}$ bilinmeyen Green fonksiyonları rahatlıkla bulunabilir. Bu sekiz denklem aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{2\nu_1 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})}{h\sigma_T} H_{1,1}(\nu_1) = \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{1,1,1,1}H_{1,1}(\nu_1) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{1,1,2,2}H_{2,2}(\nu_1) \quad (3.78a)$$

$$\frac{2\nu_2 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})}{h\sigma_T} H_{1,1}(\nu_2) = \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})\theta_{1,1,1,1}H_{1,1}(\nu_2) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})\theta_{1,1,2,2}H_{2,2}(\nu_2) \quad (3.78b)$$

$$\frac{2\nu_1 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})}{h\sigma_T} H_{1,2}(\nu_1) = \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{1,2,1,1}H_{1,1}(\nu_1) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{1,2,2,2}H_{2,2}(\nu_1) \quad (3.78c)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\nu_2 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})}{h\sigma_T} H_{1,2}(\nu_2) = & \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})\theta_{1,2,1,1}H_{1,1}(\nu_2) \\ & + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})\theta_{1,2,2,2}H_{2,2}(\nu_2) \end{aligned} \quad (3.78d)$$

$$\frac{2\nu_1 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})}{h\sigma_T} H_{2,1}(\nu_1) = \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{2,1,1,1}H_{1,1}(\nu_1) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})\theta_{2,1,2,2}H_{2,2}(\nu_1) \quad (3.78e)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\nu_2 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})}{h\sigma_T} H_{2,1}(\nu_2) &= \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_2}) \theta_{2,1,1,1} H_{1,1}(\nu_2) \\ &+ \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2}) \theta_{2,1,2,2} H_{2,2}(\nu_2) \end{aligned} \quad (3.78f)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\nu_1 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1})}{h\sigma_T} H_{2,2}(\nu_1) &= \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_1}) \theta_{2,2,1,1} H_{1,1}(\nu_1) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_1}) \theta_{2,2,2,2} H_{2,2}(\nu_1) \end{aligned} \quad (3.78g)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\nu_2 \sinh(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2})}{h\sigma_T} H_{2,2}(\nu_2) &= \exp(-\frac{h\sigma_T}{2\nu_2}) \theta_{2,2,1,1} H_{1,1}(\nu_2) + \exp(\frac{h\sigma_T}{2\nu_2}) \theta_{2,2,2,2} H_{2,2}(\nu_2) \end{aligned} \quad (3.78h)$$

Benzer şekilde $N=4$ için 8'erli gruplar halinde 16 adet denklem grubu elde edilir. Toplamda ise 128 adet bilinmeyen ve 128 adet denklem oluşur. Her bir grupta 8 denklem ve bu denklemler yardımıyla bulunacak 8 adet bilinmeyen $\theta_{m,n,m',n'}$ Green fonksiyonları yer almaktadır. $N \times N \times 2^{N-1}$ denklem sisteminde iterasyon tekniği kullanılarak SGF'ler hesaplanabilir. $N=2$ durumu örnek olarak verilirse $\theta_{1,1,1,1} = \theta_{1,2,2,2} = \theta_{2,1,1,1} = \theta_{2,2,2,2}$ ve $\theta_{1,1,2,2} = \theta_{1,2,1,1} = \theta_{2,1,2,2} = \theta_{2,2,1,1}$ olacak şekilde Green fonksiyonları simetrik çıktığından, oluşan iterasyon matrisi de simetriktir. Böylece Spektral Green Fonksiyonları kolaylıkla bulunmuş olur.

Özetlenirse, denklem (3.57)'den hesaplanan ν_k özdeğerleri ($k=1,2,\dots,N \times N/2$) denklem (3.77)'de yerlerine yazılarak oluşan lineer denklem sisteminden $\theta_{m,n,m',n'}$ Spektral Green Fonksiyonları hesaplanır. Daha sonra bulunan $\theta_{m,n,m',n'}$ 'lar, yardımcı eşitlik (3.72) ve sınır şartları ile birlikte balans denklemi (3.66)'nın çözümünü gerçekleştirir. Denklem (3.66) ve (3.72) kullanılarak, basit iterasyon tekniği yardımıyla hücre-kenarı açılal akıları için

$$\begin{aligned} \psi_{m,n,j+1/2} &= \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} A_{m,n,m',n'} \psi_{m,n,m',n',j-1/2} + \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N A_{m,n,m',n'} \psi_{m,n,m',n',j+1/2} \\ 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N/2 \end{aligned} \quad (3.79a)$$

$$\psi_{m,n,j-1/2} = \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} A_{m,n,m',n'} \psi_{m,n,m',n',j-1/2} + \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N A_{m,n,m',n'} \psi_{m,n,m',n',j+1/2}$$

$$1 \leq m \leq N, \quad N/2 < n \leq N \quad (3.79b)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak kenar-açısal akıları iteratif olarak hesaplanır. Problemin çözümünde kullanılan sınır şartları ise

$$\psi_{m,n}(0) = f_{m,n} \text{ veya } \psi_{m,n,1/2} = f_{m,n} \quad \xi_m > 0, u_n > 0 \text{ ve } 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N/2 \quad (3.80a)$$

$$\psi_{m,n}(a) = g_{m,n} \text{ veya } \psi_{m,n,J+1/2} = g_{m,n} \quad \xi_m < 0, u_n < 0 \text{ ve } 1 \leq m \leq N, N/2 < n \leq N \quad (3.80b)$$

olarak verilmiştir.

3.4.1. İterasyon Denklemlerinin Oluşturulması

Hücre-kenarı açısal akılarının nümerik olarak hatasız ve hızlı bir şekilde hesaplanması için iterasyon matrislerinin oluşturulması gereklidir. Bu iterasyon matrisleri oluşturulmadan önce matriste yer alacak katsayıların bulunması gerekmektedir.

İterasyon matrisleri; ξ_m ve u_n açısal değerlerine, w_m ile w_n ağırlık faktörlerine, hücre genişliği (adımı) h değerine, daha önce bölüm 3.4'de bulunan v_k özdeğerlerine, sistemin kritiklik durumlarını belirleyen σ_{s0} ve σ_T katsayıları ile son olarak da $\theta_{m,n,m',n'}$ ile tanımlanan Spektral Green Fonksiyonlarına (SGF) bağlı olarak bulunacaktır. Burada silindirik geometride transport denkleminin çözümünde kullanılacak iterasyon matrisinin bulunması ile ilgili takip edilecek yol verilecektir.

1) $N=2$ durumu: İkinci Legendre polinomu $P_2 = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$ 'nin kökleri $\xi_1 = -\xi_2$, ağırlık faktörleri $w_1^L = w_2^L = 1$ ve birinci tip Chebyshev polinomunun kökleri

$u_n = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right]$, $u_1 = -u_2$ ve ağırlık faktörleri $w_1^C = w_2^C = \pi/2$ 'dir. Sonsuz uzunluktaki silindirin yarıçapı 10cm alınıp hücre sayıları belirlenerek iterasyon matrisleri oluşturulabilir. Bu matrisler oluşturulmadan önce hücre-kenarı açısıl akıları için genel bağıntılar türetilmelidir.

Herhangi bir j 'inci hücre için denge (balans) eşitliği denklem (3.66) tekrar düzenlenerek;

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi_m^2} \frac{u_n}{h} [\psi_{m,n,j+1/2} - \psi_{m,n,j-1/2}] + [(\sigma_{s0} - \sigma_T)(1-u_n^2)]\psi_{m,n,j} + \sigma_T\psi_{m,n,j} \\ = \frac{\sigma_{s0}}{2\pi} \sum_{m'=n'=1}^N \psi_{m',n',j} w_{m'}^L w_{n'}^C \end{aligned} \quad (3.81)$$

şeklini alır. $N=2$ durumu incelendiğinden $m = n = 1$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi_1^2} \frac{u_1}{h} (\psi_{1,1,j+1/2} - \psi_{1,1,j-1/2}) + (\sigma_{s0} - \sigma_T)(1-u_1^2)\psi_{1,1,j} + \sigma_T\psi_{1,1,j} \\ = \frac{\sigma_{s0}}{4} (\psi_{1,1,j} + \psi_{1,2,j} + \psi_{2,1,j} + \psi_{2,2,j}) \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1,1,j+1/2} - \psi_{1,1,j-1/2} \\ = -\frac{h\sqrt{3}}{4} (\sigma_{s0} + 2\sigma_T)\psi_{1,1,j} + \frac{h\sqrt{3}}{4} \sigma_{s0} (\psi_{1,2,j} + \psi_{2,1,j} + \psi_{2,2,j}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

eşitliği elde edilir. $\psi_{1,1,j}$, $\psi_{1,2,j}$, $\psi_{2,1,j}$ ve $\psi_{2,2,j}$ için yardımcı eşitlikler

$$\psi_{1,1,j} = \theta_{1,1,1,1}\psi_{1,1,j-1/2} + \theta_{1,1,2,2}\psi_{2,2,j+1/2} \quad (3.84a)$$

$$\psi_{1,2,j} = \theta_{1,2,1,1}\psi_{1,1,j-1/2} + \theta_{1,2,2,2}\psi_{2,2,j+1/2} \quad (3.84b)$$

$$\psi_{2,1,j} = \theta_{2,1,1,1} \psi_{1,1,j-1/2} + \theta_{2,1,2,2} \psi_{2,2,j+1/2} \quad (3.84c)$$

$$\psi_{2,2,j} = \theta_{2,2,1,1} \psi_{1,1,j-1/2} + \theta_{2,2,2,2} \psi_{2,2,j+1/2} \quad (3.84d)$$

şeklinde ifade edilir. Bu yardımcı eşitlikler denklem (3.83)'de yerine yazılır ve

$$A = \frac{h\sqrt{3}}{4}(\sigma_{s0} + 2\sigma_T), \quad B = \frac{h\sqrt{3}}{4}\sigma_{s0} \text{ katsayıları kullanılarak;}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1,1,j+1/2} = & \left[1 - A\theta_{1,1,1,1} + B(\theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,1,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \psi_{1,1,j-1/2} \\ & + \left[-A\theta_{1,1,2,2} + B(\theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,1,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \psi_{2,2,j+1/2} \end{aligned} \quad (3.85a)$$

eşitliği elde edilir. Aynı işlemler $m=1 \ n=2$, $m=2 \ n=1$ ve $m=2 \ n=2$ için yapılırsa sırasıyla;

$$\begin{aligned} \psi_{1,2,j-1/2} = & \psi_{1,2,j+1/2} + \left[-A\theta_{1,2,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{2,1,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \psi_{1,1,j-1/2} \\ & + \left[-A\theta_{1,2,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{2,1,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \psi_{2,2,j+1/2} \end{aligned} \quad (3.85b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2,1,j+1/2} = & \psi_{2,1,j-1/2} + \left[-A\theta_{2,1,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \psi_{1,1,j-1/2} \\ & + \left[-A\theta_{2,1,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \psi_{2,2,j+1/2} \end{aligned} \quad (3.85c)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2,2,j-1/2} = & \left[-A\theta_{2,2,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,1,1,1}) \right] \psi_{1,1,j-1/2} \\ & + \left[1 - A\theta_{2,2,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,1,2,2}) \right] \psi_{2,2,j+1/2} \end{aligned} \quad (3.85d)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece iterasyonun hızlı yakınsaması için hücre-kenarı açısıl akıları için gerekli ifadeler türetilmiş olur. Eşitlik (3.85a,b,c ve d) yardımıyla kenar-açısıl akıları bulunabilir. Bu dört eşitliğin çözümü,

$$\begin{pmatrix} \psi_{1,1,j+1/2} \\ \psi_{1,2,j+1/2} \\ \psi_{2,1,j+1/2} \\ \psi_{2,2,j+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1,1,j-1/2} & K_1 & K_2 \\ \psi_{1,2,j-1/2} & L_1 & L_2 \\ \psi_{2,1,j-1/2} & P_1 & P_2 \\ \psi_{2,2,j-1/2} & R_1 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_{1,1,j-1/2} \\ \psi_{2,2,j+1/2} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

şeklinde matris denklemi haline getirilerek hücre-kenarı açısıl akıları için kolaylıkla ifade edilebilir. Burada $K_1, K_2, \dots$ vb. katsayıların yer aldığı matrise iterasyon matrisi M denir. Ayrıca $K_1, K_2, L_1, L_2, P_1, P_2, R_1$ ve R_2 Green fonksiyonlarını içeren basitleştirilmiş matris katsayılarıdır ve aşağıdaki gibi verilirler:

$$K_1 = \left[-A\theta_{1,1,1,1} + B(\theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,1,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \quad (3.87a)$$

$$K_2 = \left[-A\theta_{1,1,2,2} + B(\theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,1,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \quad (3.87b)$$

$$L_1 = \left[-A\theta_{1,2,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{2,1,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \quad (3.87c)$$

$$L_2 = \left[-A\theta_{1,2,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{2,1,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \quad (3.87d)$$

$$P_1 = \left[-A\theta_{2,1,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,2,1,1}) \right] \quad (3.87e)$$

$$P_2 = \left[-A\theta_{2,1,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,2,2,2}) \right] \quad (3.87f)$$

$$R_1 = \left[-A\theta_{2,2,1,1} + B(\theta_{1,1,1,1} + \theta_{1,2,1,1} + \theta_{2,1,1,1}) \right] \quad (3.87g)$$

$$R_2 = \left[-A\theta_{2,2,2,2} + B(\theta_{1,1,2,2} + \theta_{1,2,2,2} + \theta_{2,1,2,2}) \right] \quad (3.87h)$$

Denklem (3.86)'da matris eşitliği olarak gösterilen denklem sisteminde iterasyon tekniği kullanılarak kenar-açısal akıları bulunabilir. $i=1,2,\dots,I$ olacak şekilde hücre genişliği h , I sayıda hücreye bölünerek her bir hücredeki kenar akıları hesaplanır. Örneğin bizim problemimizde olduğu gibi 10cm yarıçapındaki silindir $I=2$ alınarak iki hücreye bölünürse, her bir hücrenin genişliği $h=5$ cm olur. Bu durumda bir hücre üzerinden integral alınarak bulunan denge eşitliği ve SGF elemanları yardımıyla, denklem (3.86)'da matris gösterimiyle özetlenen şekliyle kenar akıları hesaplanır.

$I=4$ alındığında hücre genişliği $h=2.5$ cm olacaktır. İterasyon matrisi M' deki katsayılar yeniden düzenlenerek yeni bir iterasyon matrisi oluşturulur ve denklem sistemi aynı yolla çözümlenip kenar akıları hesaplanır.

$I=10$ için hücre genişliği $h=1$ cm olmak üzere yeni bir iterasyon matrisi ancak değişmiş katsayılarla oluşturulur. Benzer şekilde $I=20, 50, 100$ hücre sayısı için h , σ_{s0} , σ_T , v_k ve $\theta_{m,n,m',n'}$ değerleri kullanılarak iterasyon matrisleri yeniden düzenlenirse hücre-kenarı açısal akıları hesaplanabilir.

2) $N=4$ durumu: Dördüncü Legendre polinomu $P_4 = \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3)$ 'ün kökleri $\xi_1 = -\xi_4$ ve $\xi_2 = -\xi_3$, ağırlık faktörleri $w_1^L = w_4^L$ ve $w_2^L = w_3^L$ ve birinci tip Chebyshev polinomunun kökleri bu defa $N=4$ olmak üzere $u_n = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right]$, $u_1 = -u_4$, $u_2 = -u_3$ ve ağırlık faktörleri $w_1^C = w_2^C = w_3^C = w_4^C = \pi/4$ 'dir.

$N=4$ durumu incelendiğinden, herhangi bir j 'inci hücre için yazılmış olan balans denklemi, denklem (3.81)'den alınıp $m=n=1$ için yazılırsa

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1,j+1/2} - \psi_{1,1,j-1/2} &= \frac{-h}{u_1 \sqrt{1-\xi_1^2}} \left[\sigma_T + (\sigma_{s0} - \sigma_T)(1-u_1^2) \right] \psi_{1,1,j} + \frac{h\sigma_{s0}}{8u_1 \sqrt{1-\xi_1^2}} \\
&\times \left\{ \left(\psi_{1,1,j} + \psi_{1,2,j} + \psi_{1,3,j} + \psi_{1,4,j} + \psi_{4,1,j} + \psi_{4,2,j} + \psi_{4,3,j} + \psi_{4,4,j} \right) w_1^L \right. \\
&\left. + \left(\psi_{2,1,j} + \psi_{2,2,j} + \psi_{2,3,j} + \psi_{2,4,j} + \psi_{3,1,j} + \psi_{3,2,j} + \psi_{3,3,j} + \psi_{3,4,j} \right) w_2^L \right\} \quad (3.88)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yine, sadece $m=n=1$ için SGF yardımcı eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1,j} &= \theta_{1,1,1,1} \psi_{1,1,j-1/2} + \theta_{1,1,1,2} \psi_{1,2,j-1/2} + \theta_{1,1,2,1} \psi_{2,1,j-1/2} + \theta_{1,1,2,2} \psi_{2,2,j-1/2} \\
&+ \theta_{1,1,3,3} \psi_{3,3,j+1/2} + \theta_{1,1,3,4} \psi_{3,4,j+1/2} + \theta_{1,1,4,3} \psi_{4,3,j+1/2} + \theta_{1,1,4,4} \psi_{4,4,j+1/2} \quad (3.89)
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu SGF yardımcı eşitlikleri $m=1,2,3,4$ ve $n=1,2,3,4$ için yazılabilir. Böylece denklem (3.88)'in sağ tarafında yer alan hücre-ortalama açısıl akılarını tek tek denklem (3.89)'daki gibi yazıp bu yardımcı eşitlikler denklem (3.88)'de yerine yazılırsa sadece hücre-kenarı açısıl akıları cinsinden balans eşitliği elde edilmiş olur. Ancak burada diğer SGF yardımcı eşitliklerinin tamamının yazılmasına gerek duyulmamıştır. Böylece denklem (3.88)'den $\psi_{1,1,j+1/2}$ hücre-kenarı açısıl akısı hesaplanabilir.

Benzer şekilde $m=1,n=2$; $m=1,n=3$; $m=1,n=4$; $m=2,n=1$; $m=2,n=2$; $m=2,n=3$; $m=2,n=4$; $m=3,n=1$; $m=3,n=2$; $m=3,n=3$; $m=3,n=4$; $m=4,n=1$; $m=4,n=2$; $m=4,n=3$; ve $m=4,n=4$ için de balans denklemleri SGF yardımcı eşitlikleri içine yerleştirilerek yazılabilir. Sonunda bütün hücre-kenarı açısıl akıları bu denklemler yardımıyla hesaplanabilir. Burada, bu denklemlerin tamamının çıkarılışı üzerinde durulmamış sadece $m=n=1$ durumu incelenmiştir. SGF yardımcı eşitlikleri denklem (3.88)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa kenar açısıl akıları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1,j+1/2} &= (1-PA_1) \psi_{1,1,j-1/2} + PA_2 \psi_{1,2,j-1/2} + PA_3 \psi_{2,1,j-1/2} + PA_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\
&+ PA_5 \psi_{3,3,j+1/2} + PA_6 \psi_{3,4,j+1/2} + PA_7 \psi_{4,3,j+1/2} + PA_8 \psi_{4,4,j+1/2} \quad (3.90a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{1,2,j+1/2} = & PB_1 \psi_{1,1,j-1/2} + (1+PB_2) \psi_{1,2,j-1/2} + PB_3 \psi_{2,1,j-1/2} + PB_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + PB_5 \psi_{3,3,j+1/2} + PB_6 \psi_{3,4,j+1/2} + PB_7 \psi_{4,3,j+1/2} + PB_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90b)$$

$$\begin{aligned}\psi_{1,3,j-1/2} = & \psi_{1,3,j+1/2} - PC_1 \psi_{1,1,j-1/2} - PC_2 \psi_{1,2,j-1/2} - PC_3 \psi_{2,1,j-1/2} - PC_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - PC_5 \psi_{3,3,j+1/2} - PC_6 \psi_{3,4,j+1/2} - PC_7 \psi_{4,3,j+1/2} - PC_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90c)$$

$$\begin{aligned}\psi_{1,4,j-1/2} = & \psi_{1,4,j+1/2} - PD_1 \psi_{1,1,j-1/2} - PD_2 \psi_{1,2,j-1/2} - PD_3 \psi_{2,1,j-1/2} - PD_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - PD_5 \psi_{3,3,j+1/2} - PD_6 \psi_{3,4,j+1/2} - PD_7 \psi_{4,3,j+1/2} - PD_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90d)$$

$$\begin{aligned}\psi_{2,1,j+1/2} = & QA_1 \psi_{1,1,j-1/2} + QA_2 \psi_{1,2,j-1/2} + (1+QA_3) \psi_{2,1,j-1/2} + QA_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + QA_5 \psi_{3,3,j+1/2} + QA_6 \psi_{3,4,j+1/2} + QA_7 \psi_{4,3,j+1/2} + QA_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90e)$$

$$\begin{aligned}\psi_{2,2,j+1/2} = & QB_1 \psi_{1,1,j-1/2} + QB_2 \psi_{1,2,j-1/2} + QB_3 \psi_{2,1,j-1/2} + (1+QB_4) \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + QB_5 \psi_{3,3,j+1/2} + QB_6 \psi_{3,4,j+1/2} + QB_7 \psi_{4,3,j+1/2} + QB_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90f)$$

$$\begin{aligned}\psi_{2,3,j-1/2} = & \psi_{2,3,j+1/2} - QC_1 \psi_{1,1,j-1/2} - QC_2 \psi_{1,2,j-1/2} - QC_3 \psi_{2,1,j-1/2} - QC_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - QC_5 \psi_{3,3,j+1/2} - QC_6 \psi_{3,4,j+1/2} - QC_7 \psi_{4,3,j+1/2} - QC_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90g)$$

$$\begin{aligned}\psi_{2,4,j-1/2} = & \psi_{2,4,j+1/2} - QD_1 \psi_{1,1,j-1/2} - QD_2 \psi_{1,2,j-1/2} - QD_3 \psi_{2,1,j-1/2} - QD_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - QD_5 \psi_{3,3,j+1/2} - QD_6 \psi_{3,4,j+1/2} - QD_7 \psi_{4,3,j+1/2} - QD_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90h)$$

$$\begin{aligned}\psi_{3,1,j+1/2} = & \psi_{3,1,j-1/2} + RA_1 \psi_{1,1,j-1/2} + RA_2 \psi_{1,2,j-1/2} + RA_3 \psi_{2,1,j-1/2} + RA_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + RA_5 \psi_{3,3,j+1/2} + RA_6 \psi_{3,4,j+1/2} + RA_7 \psi_{4,3,j+1/2} + RA_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90i)$$

$$\begin{aligned}\psi_{3,2,j+1/2} = & \psi_{3,2,j-1/2} + RB_1 \psi_{1,1,j-1/2} + RB_2 \psi_{1,2,j-1/2} + RB_3 \psi_{2,1,j-1/2} + RB_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + RB_5 \psi_{3,3,j+1/2} + RB_6 \psi_{3,4,j+1/2} + RB_7 \psi_{4,3,j+1/2} + RB_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90j)$$

$$\begin{aligned}\psi_{3,3,j-1/2} = & -RC_1 \psi_{1,1,j-1/2} - RC_2 \psi_{1,2,j-1/2} - RC_3 \psi_{2,1,j-1/2} - RC_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + (1 - RC_5) \psi_{3,3,j+1/2} - RC_6 \psi_{3,4,j+1/2} - RC_7 \psi_{4,3,j+1/2} - RC_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90k)$$

$$\begin{aligned}\psi_{3,4,j-1/2} = & -RD_1 \psi_{1,1,j-1/2} - RD_2 \psi_{1,2,j-1/2} - RD_3 \psi_{2,1,j-1/2} - RD_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - RD_5 \psi_{3,3,j+1/2} + (1 - RD_6) \psi_{3,4,j+1/2} - RD_7 \psi_{4,3,j+1/2} - RD_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90l)$$

$$\begin{aligned}\psi_{4,1,j+1/2} = & \psi_{4,1,j-1/2} + SA_1 \psi_{1,1,j-1/2} + SA_2 \psi_{1,2,j-1/2} + SA_3 \psi_{2,1,j-1/2} + SA_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + SA_5 \psi_{3,3,j+1/2} + SA_6 \psi_{3,4,j+1/2} + SA_7 \psi_{4,3,j+1/2} + SA_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90m)$$

$$\begin{aligned}\psi_{4,2,j+1/2} = & \psi_{4,2,j-1/2} + SB_1 \psi_{1,1,j-1/2} + SB_2 \psi_{1,2,j-1/2} + SB_3 \psi_{2,1,j-1/2} + SB_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & + SB_5 \psi_{3,3,j+1/2} + SB_6 \psi_{3,4,j+1/2} + SB_7 \psi_{4,3,j+1/2} + SB_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90n)$$

$$\begin{aligned}\psi_{4,3,j-1/2} = & -SC_1 \psi_{1,1,j-1/2} - SC_2 \psi_{1,2,j-1/2} - SC_3 \psi_{2,1,j-1/2} - SC_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - SC_5 \psi_{3,3,j+1/2} - SC_6 \psi_{3,4,j+1/2} + (1 - SC_7) \psi_{4,3,j+1/2} - SC_8 \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90o)$$

$$\begin{aligned}\psi_{4,4,j-1/2} = & -SD_1 \psi_{1,1,j-1/2} - SD_2 \psi_{1,2,j-1/2} - SD_3 \psi_{2,1,j-1/2} - SD_4 \psi_{2,2,j-1/2} \\ & - SD_5 \psi_{3,3,j+1/2} - SD_6 \psi_{3,4,j+1/2} - SD_7 \psi_{4,3,j+1/2} + (1 - RD_8) \psi_{4,4,j+1/2}\end{aligned}\quad (3.90p)$$

Bu eşitliklerde görünen sabitler balans denklemindeki ortak parantezlerden gelmektedir.

$N=2$ durumunda yapıldığı gibi burada da kenar açısıl akılarının bulunması için oluşturulan bu denklem seti matris denklem setine dönüştürülerek basit iterasyon tekniği ile denklem (3.80a) ve (3.80b)'de verilen sınır şartları kullanılarak çözülebilir.

İterasyonlarda yakınsaklık kriteri olarak $\varepsilon = 10^{-7}$ alınmıştır. Yani; (3.85) ve (3.90) denklemleri için, iterasyon yapılırken, hücre-kenarı açısıl akıları için uygun bir başlangıç değeri verilir ve her yeni akı değeri ile bir önceki akı değeri arasındaki fark en az ε 'a eşit olana kadar iterasyon devam eder. Bu şekilde bütün hücreler için

hücre-kenarı açısıl akıları ardışık iterasyonla bulunur. Buna göre M iterasyon matrisi ve ψ tüm hücre-kenarı açısıl akılarını içeren sütun vektörü olmak üzere;

$$\psi^{i+1} - \psi^i = M [\psi^i - \psi^{i-1}] \quad \text{veya} \quad e^{i+1} = M e^i \quad (3.91)$$

şeklinde bir iterasyon algoritması tanımlanabilir. Burada e^i , i 'inci ve $(i-1)$ 'inci iterasyonda elde edilen açısıl akılar arasındaki farkı göstermektedir. İterasyonlarda elde edilen değerler en az ε yakınsaklık değerine eşit olana kadar devam edeceğine göre;

$$e^{i+1} = M e^i = M^2 e^{i-1} = \dots M^{i+1} e^0 \quad (3.92)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu ifadenin normu alınır veya iterasyon sayısının büyük olması halinde

$$|e^{i+1}| \leq |M^{i+1}| |e^0| \approx \rho^{i+1} |e^0| \quad (3.93)$$

$$\rho = \lim_{i \rightarrow \infty} |M^i|^{1/i} \quad (3.94)$$

elde edilir. Burada ρ spektral çap olup yukarıdaki ifadeler kullanılarak

$$\rho = \frac{|e^{i+1}|}{|e^i|} \quad (3.95)$$

bağıntısına ulaşılır. Uygulanan iterasyon prosedürü için çözümleme yakınsıyorsa, $\rho < 1$ olmalıdır. $\rho \approx 1$ ise, çözümün yakınsaması son derece yavaştır ve iterasyon sayısı oldukça büyüktür. Eğer $\rho \approx 0$ ise, yakınsama çok hızlı olacaktır. Denklem (3.91)-(3.95) ile verilen ifadeler yakınsaklık için genel bir prosedür ifade etmektedir.

İterasyon matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce en büyük olanı spektral çapa yakın değer olarak alınabilmektedir. Hücre-kenarı açısıl akıları ve SGF değerleri biliniyorsa, bu yöntemde tanımlanan yardımcı eşitlikler kullanılarak hücre-ortalama açısıl akıları hesaplanabilir. Hücre-ortalama açısıl akısının tüm açılar üzerinden integrali ortalama skaler akıyı verecektir. Buna göre hücre-ortalama skaler akısı için

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (3.96)$$

şeklinde bir genel ifade kullanılabilir. Bu integrasyonu bütün açılar üzerinden alabilmek için, daha önce de bahsedildiği gibi bir boyutlu silindirik geometride iki tane açısıl değişken bulunduğundan, iki açısıl kuadratur seti kullanılmıştır. Bunlar Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratur setleridir. Öyleyse, hücre-ortalama skaler akısı bu kuadratur setleri kullanıldığında

$$\phi_{j+1/2} = \frac{2}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \psi_{m,n,j+1/2} w_m^L w_n^C \quad (3.97)$$

şeklini alır. Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadraturlerinin ardışık kullanılması çarpım (product) kuadratur olarak adlandırılır.

$N=2$ mertebe yaklaşımı, yani 2 hücre için skaler akılar

$$r_{1/2} = 0 \text{ cm için } \phi_1 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \psi_{m,n,1/2} w_m^L \quad (3.98a)$$

$$r_{3/2} = 5 \text{ cm için } \phi_2 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \psi_{m,n,3/2} w_m^L \quad (3.98b)$$

$$r_{5/2} = 10 \text{ cm için } \phi_3 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \psi_{m,n,5/2} w_m^L \quad (3.98c)$$

ile verilen eşitliklerle hesaplanabilir. Benzer şekilde $N=4$ hücre için 5 tane, $N=10$ hücre için 11 tane, $N=20$ için 21 tane, $N=50$ için 51 tane ve son olarak $N=100$ için 101 tane hücre-ortalama skaler akıları elde edilir.

3.5. Silindirik Geometride S_N Denklemlerinin Diamond Difference (DD) Yöntemi İle Çözümü

Enerji bağımlı nötron transport denkleminin nümerik çözümünü bulmak için diskret ordinatlar veya benzeri yöntemler reaktör hesaplamalarında geniş olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemde, nötron akısının açısal dağılımı için küresel harmonikler yerine bir dizi diskret doğrultu kullanılmaktadır. Yeterli doğrultu seçimi yapıldıktan sonra, kullanılan bilgisayarın izin verdiği derecede, istenen herhangi bir doğruluk mertebesinde transport denkleminin çözümü bulunabilir.

Diskret ordinatlar yöntemi (S_N), integro diferansiyel transport denkleminin nümerik çözümlemesinde etkin olarak kullanılan yöntemlerden birisidir. Bu yöntem ilk olarak yıldızlara ait atmosferlerdeki radyasyon transportu problemlerinde kullanılmıştır (Chandrasekhar, 1960; Lewis ve Miller 1993'ten). Bugünkü kullanım şekline göre bu yöntem, transport denkleminin diskret açısal doğrultulardaki çözümünü içermektedir. S_N yöntemi aynı zamanda yürütülmesi kolay ve bilgisayar belleği gereksinimlerini minimuma indirgeyen bir yöntemdir.

S_N yönteminde açısal akı, sadece sınırlı sayıdaki doğrultularda dikkate alınır ve bu diskret doğrultular arasında lineer olarak değiştiği kabul edilir. S_N sembolü genelde diskret ordinat yöntemini tanımlamakta kullanılır. Burada S "segment(kısım)"ı gösterirken N doğrultu sayısını göstermektedir. N sayısı arttıkça gerçek açısal akı dağılımına daha iyi bir yaklaşım yapılırken, hesaplamalarda karmaşıklıklarla karşılaşmaktadır. Temelde denklem sistemi P_N yöntemine benzemekte ve aynı işlem sırası takip edilmektedir. Fakat seçilen diskret doğrultular çift yönlü olmalıdır. $N = 2, 4, 8, \dots$ gibi alınarak $S_2, S_4, S_8, \dots$ yaklaşımı için çözümler yapılır. S_N 'de de N tane denklem sisteminden daha fazla sayıda bilinmeyen ile

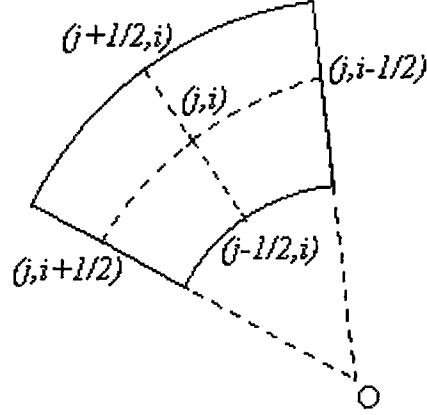
karşılaşılr. Bu zorluğu aşabilmek için Diamond Difference, Lineer Sürekli, Lineer Süreksiz, Green Fonksiyonu, Asimtotik Analiz ve Basitleştirilmiş P_N gibi yöntemler geliştirilmiştir (Larsen, 1983; Anlı, 2001; Adams ve Martin, 1992; Yavuz ve Larsen, 1992). Pratikte S_4 yaklaşımının bir çok uygulamada yeterli olduğu düşünülürken, bazen S_8 ve S_{16} yaklaşımları da kullanılır. Diskret doğrultular cinsinden S_N ifadesi, uzayda sadece açısız nötron akısı dağılımına uygulanır. Ancak P_N yaklaşımında olduğu gibi, açısız nötron akısının, saçılma açısının kosinüsü üzerinden küresel harmoniklerin (veya Legendre polinomlarının) toplamı olarak yazılması, anizotropik saçılma durumunun incelenmesine olanak sağlar.

S_N yaklaşımı ile transport denklemi çok gruplu olarak yazılabilir. Çift grup denklem seti sonlu fark şeklinde ifade edilir ve daha sonra P_1 ve difüzyon yaklaşımı yöntemlerinde olduğu gibi çözüme gidilir (Glasstone ve Sesonske, 1981). Hem iç hem de dış iterasyon teknikleri gerektiğinde kullanılabilir. Grup sabitlerinde, özellikle transfer tesir kesitlerinde bazı önemsiz farklar vardır; bunlar anizotropik saçılımın Legendre açılımında yer alan ifadelerin sayısına bağlıdır. Ayrıca anizotropik saçılma durumunda çok gruplu S_N denklemlerinin DTF-IV gibi bilgisayar kodlarıyla çözümü mümkündür (Lathrop, 1965; Glasstone ve Sesonske 1981'den).

S_N yönteminin, özellikle difüzyon teorisinin yetersiz kaldığı durumlarda, reaktör fiziğinde faydalı uygulamaları vardır. Küçük boyutlu ancak hızlı çalışan reaktörler için kritiklik hesaplamaları ve hücre homojenleştirme problemleri örnek olarak verilebilir. S_N yönteminin özel kullanım alanlarından birisi de özellikle hızlı nötron sistemleri için tesir kesitlerinin ayarlanmasıdır. Bu ayarlama, integral denemeleriyle elde edilen sonuçların, S_8 (veya S_{16}) hesaplamaları ile elde edilenlerle karşılaştırılması şeklinde yapılmaktadır. Diskret ordinat yöntemi, zırhlanma hesaplamalarında da yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu aşamada, silindirik geometride transport denkleminin Diamond Difference (Değerli Fark) yaklaşım yöntemiyle çözümüne başlanabilir. Bölüm 3.4'de transport denkleminin analitik yaklaşım yapılmış ve silindirik geometri için transport denklemi denklem (3.44) ile verilen pseudo-slab denkleminin dönüştürülmüştü.

57



Şekil 3.5: Tek boyutlu silindirik geometride uzaysal hücre ağı

Denklem (3.69)'da tanımlanan hücre-ortalama açısai akısı yardımıyla denklem (3.101) bir hücre üzerinden integre edilirse;

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi_m^2} u_n \left[\psi_{m,n,j+1/2} - \psi_{m,n,j-1/2} \right] - h \left[-\sigma_T + (\sigma_T - \sigma_{s0})(1-u_n^2) \right] \psi_{m,n,j} \\ = \frac{h\sigma_{s0}}{2\pi} \sum_{m'=n'=1}^N \psi_{m',n',j} w_m^L w_n^C \end{aligned} \quad (3.102)$$

denge (balans) denkleminde ulaşılır. Burada $M=N$ olarak alındığından tek toplam sembolü kullanılmış ve hücre-kenarı açısai akıları için $\psi_{m,n}(r_{j+1/2}) = \psi_{m,n,j+1/2}$, $\psi_{m,n}(r_{j-1/2}) = \psi_{m,n,j-1/2}$ şeklinde bir notasyon kullanılmıştır. Bundan sonra notasyonların karışmaması için Legendre ve Chebyshev kuadratürleri için ağırlık fonksiyonları sırasıyla w_m^L ve w_n^C ile gösterilecektir. Denklem (3.102)'nin sağ tarafındaki toplam eşitliği;

$$\begin{aligned} \frac{h\sigma_{s0}}{2\pi} \sum_{m'=n'=1}^N \psi_{m',n',j} w_m^L w_n^C = \frac{h\sigma_{s0}}{2\pi} \left\{ \psi_{1,1,j} w_1^L w_1^C + \dots + \psi_{1,N,j} w_1^L w_N^C + \dots \right. \\ \left. + \psi_{N,1,j} w_N^L w_1^C + \dots + \psi_{N,N,j} w_N^L w_N^C \right\} \end{aligned} \quad (3.103)$$

şeklinde seriye açılabilir. Denklem (3.102)'de hücre-kenarı açısal akılarını bulmak için bilinmeyen sayısı kadar denkleme ihtiyaç vardır. Ancak denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olduğu için yardımcı eşitliklere ihtiyaç vardır. Bu aşamada hücre-kenarı açısal akılarını, hücre-ortalama açısal akılarına bağlayan ilişkilere gereksinim duyulmaktadır. Bu ilişkiler S_N denklem sistemi çözümlerinde sık kullanılan DD eşitlikleridir. DD yönteminde hücre-ortalama açısal akısı;

$$\psi_{m,n,j} = \frac{1}{2}(\psi_{m,n,j+1/2} + \psi_{m,n,j-1/2}) \quad (3.104)$$

ile hücre-kenarı açısal akılarının aritmetik ortalaması biçiminde verilir. Buna göre $N=M=2$ merteye yaklaşıklığı için DD fark denklemleri;

$$\psi_{1,1,j} = \frac{1}{2}(\psi_{1,1,j+1/2} + \psi_{1,1,j-1/2}) \quad \psi_{1,2,j} = \frac{1}{2}(\psi_{1,2,j+1/2} + \psi_{1,2,j-1/2}) \quad (3.105a)$$

$$\psi_{2,1,j} = \frac{1}{2}(\psi_{2,1,j+1/2} + \psi_{2,1,j-1/2}) \quad \psi_{2,2,j} = \frac{1}{2}(\psi_{2,2,j+1/2} + \psi_{2,2,j-1/2}) \quad (3.105b)$$

olarak ifade edilir.

Şimdi denklem (3.105a) ve (3.105b)'deki yardımcı eşitlikler, denklem (3.102)'deki denge eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \xi_m^2} u_n [\psi_{m,n,j+1/2} - \psi_{m,n,j-1/2}] - \frac{h}{2} [-\sigma_T + (\sigma_T - \sigma_{s0})(1 - u_n^2)] \\ & \times [\psi_{m,n,j+1/2} + \psi_{m,n,j-1/2}] = \frac{h\sigma_{s0}}{4\pi} \sum_{m'=n'=1}^2 (\psi_{m',n',j+1/2} + \psi_{m',n',j-1/2}) w_{m'}^L w_{n'}^C \end{aligned} \quad (3.106)$$

şeklini alır. Artık denge eşitliği çözülebilir hale getirilmiştir. Ayrıca $N=M=2$ için $w_{m'} = 1$ ve $w_{n'} = \pi/2$, denklem (3.106)'da yerine yazılır ve toplam parantezi seriye açılırsa;

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-\xi_m^2} u_n \left[\psi_{m,n,j+1/2} - \psi_{m,n,j-1/2} \right] - \frac{h}{2} \left[-\sigma_T + (\sigma_T - \sigma_{s0})(1-u_n^2) \right] \\
& \times \left[\psi_{m,n,j+1/2} + \psi_{m,n,j-1/2} \right] = \frac{h\sigma_{s0}}{8} \left\{ \psi_{1,1,j+1/2} + \psi_{1,2,j+1/2} + \psi_{2,1,j+1/2} + \psi_{2,2,j+1/2} \right. \\
& \left. + \psi_{1,1,j-1/2} + \psi_{1,2,j-1/2} + \psi_{2,1,j-1/2} + \psi_{2,2,j-1/2} \right\} \quad (3.107)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $n = m = 1$ doğrultusu için denklem (3.107)'den hücre-kenarı açısal akıları arasında bir ilişki kurulur. Ancak daha önce işlem kolaylığı sağlaması amacıyla bazı değişken atamaları yapmakta fayda vardır. Bunlar;

$$K_1 = \frac{h}{u_1 \sqrt{1-\xi_1^2}} \left[\frac{\sigma_{s0}}{4} - \sigma_T + (\sigma_T - \sigma_{s0})(1-u_1^2) \right] \quad K_2 = \frac{h\sigma_{s0}}{4u_1 \sqrt{1-\xi_1^2}} \quad (3.108a)$$

$$A = 1 - \frac{K_1}{2} \quad A_1 = 1 + \frac{K_1}{2} \quad A_2 = \frac{K_2}{2} \quad (3.108b)$$

ile verilir. Bu sabitler kullanılarak

$$\begin{aligned}
\psi_{1,1,j+1/2} = \frac{A_1}{A} \psi_{1,1,j-1/2} + \frac{A_2}{A} \left[\psi_{1,2,j+1/2} + \psi_{2,1,j+1/2} + \psi_{2,2,j+1/2} \right. \\
\left. + \psi_{1,2,j-1/2} + \psi_{2,1,j-1/2} + \psi_{2,2,j-1/2} \right] \quad (3.109)
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Kullanılan iterasyon tekniğine bağlı olarak $\psi_{1,1,j-1/2}$ eşitliğin sağ tarafında yer almalıdır. $m=1, n=2$ için yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2,j-1/2} = \frac{A_1}{A} \psi_{1,2,j+1/2} + \frac{A_2}{A} \left[\psi_{1,1,j+1/2} + \psi_{1,1,j-1/2} + \psi_{2,1,j+1/2} \right. \\
\left. + \psi_{2,1,j-1/2} + \psi_{2,2,j+1/2} + \psi_{2,2,j-1/2} \right] \quad (3.110)
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada ise $\psi_{1,2,j+1/2}$ eşitliğin sağ tarafında yer almalıdır. $m=2, n=1$ için

$$\psi_{2,1,j+1/2} = \frac{A_1}{A} \psi_{2,1,j-1/2} + \frac{A_2}{A} \left[\psi_{1,1,j+1/2} + \psi_{1,1,j-1/2} + \psi_{1,2,j+1/2} + \psi_{1,2,j-1/2} + \psi_{2,2,j+1/2} + \psi_{2,2,j-1/2} \right] \quad (3.111)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada ise $\psi_{2,1,j-1/2}$ eşitliğin sağ tarafında yer almalıdır. $m=2, n=2$ için

$$\psi_{2,2,j-1/2} = \frac{A_1}{A} \psi_{2,2,j+1/2} + \frac{A_2}{A} \left[\psi_{1,1,j+1/2} + \psi_{1,1,j-1/2} + \psi_{1,2,j+1/2} + \psi_{1,2,j-1/2} + \psi_{2,1,j+1/2} + \psi_{2,1,j-1/2} \right] \quad (3.112)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada da $\psi_{2,2,j+1/2}$ eşitliğin sağ tarafında yer almalıdır. Böylece (3.109), (3.110), (3.111) ve (3.112) denklemlerinden yararlanarak iteratif çözümleme ile hücre-kenarı açısıl akıları hesaplanabilir. Buradan da görüldüğü üzere, N^2 bilinmeyenli, N^2 sayıda denklemden oluşan bir denklem sistemi meydana gelmiş olur. Bu N^2 sayıdaki bilinmeyen hücre-kenarı açısıl akıları, $N \times N$ simetrik bir iterasyon matrisi oluşturularak kolaylıkla çözülebilir. Dikkat edilirse, tek açılı problemlerde; örneğin dilim geometride N bilinmeyenli, N denklem sistemine ulaşılmaktadır. Ancak burada iki açının olması N^2 bilinmeyenli, N^2 denkleme götürmektedir. Bu sistemi çözmek için başlangıç değeri olarak $\psi_{1/2}=1$ alınıp, yani birim zamanda birim alandaki nötron sayısını silindirin z ekseninde normalize edip, Gauss Siedel iterasyon tekniği kullanılarak Basic programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı yapılmıştır. Ayrıca $\psi_{5/2}=0$, reaktörün yan yüzeyinde akının sıfır olduğu, dışarıya sızıntının olmadığı durum düşünülmektedir. Bu programda hücre sayısı 2,4,10,20,50 ve 100 olarak alınmıştır. İzotropik saçılma tesir kesiti

$\sigma_{s0}=0.99$, toplam tesir kesiti $\sigma_T=1$ olarak alınmış ve Gauss-Legendre ile Gauss-Chebyshev kuadratur setleri çarpım kuadratürü (product quadrature) şeklinde kullanılarak hücre-kenarı açısal akıları ve hücre-ortalama açısal akılar hesaplanmıştır. Hücre-kenarı skaler akıları hesaplanırken

$$\phi_{j+1/2} = \frac{2}{4\pi} \sum_{m=n=1}^N \psi_{m,n,j+1/2} w_m^L w_n^C \quad (3.113)$$

ifadesi kullanılmıştır. Programda ayrıca yakınsaklık sınırı için 10^{-7} mertebesi kullanılmış ve bu yakınsaklık sağlandığı zaman skaler akılar hesaplatılmıştır. $N=2$ ve $N=4$ yaklaşıklığı için sonuçlar çizelge (4.1) ve çizelge (4.2)'de verilmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Skaler Akı Değerlerinin SGF ve DD Nümerik Çözümleme Yöntemleriyle Bulunması

Nötron Transport denkleminin silindirik geometride çözümü için kullandığımız Spektral Green Fonksiyonları (SGF) yöntemiyle; $\xi_m > 0, u_n > 0$ için $f_m = 1$; $\xi_m < 0, u_n < 0$ için $g_m = 0$ sınır şartları ve $\sigma_T = 1 \text{ cm}^{-1}$, $\sigma_{s0} = 0.99 \text{ cm}^{-1}$, $r = 10 \text{ cm}$, $Q = 0$ kullanılarak hücre-kenarı açısız akıları hesaplanmıştır. Bir hücre için açısız akının bütün açılar üzerinden integrali skaler akıyı verecektir. Öyleyse skaler akı;

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (4.1)$$

şeklinde verilebilir. Tek boyutlu silindirik geometride çarpım kuadratur kullanıldığından, Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri kullanılarak skaler akı diskretize edilebilir ve;

$$\phi_{j\pm 1/2} = \frac{2}{4\pi} \sum_{m=n=1}^N \psi_{m,n,j\pm 1/2} w_m^L w_n^C \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada yer almamakla beraber bölüm 3.1’de tanım 3’de verildiği kadarıyla nötron açısız akımı da hesaplanabilir. Daha sonra ise nötron akımı açısız akılar cinsinden;

$$\bar{J}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \hat{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılıp, yine Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri kullanılarak;

$$J_{j\pm 1/2} = \frac{2}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \xi_m u_n \psi_{m,n,j\pm 1/2} w_m^L w_n^C \quad (4.4)$$

nötron akım ifadesi verilebilir.

SGF yardımcı eşitlikleri kullanılarak da

$$\psi_{m,n,j} = \sum_{m'=1}^{M/2} \sum_{n'=1}^{N/2} \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',j-1/2} + \sum_{m'=M/2+1}^M \sum_{n'=N/2+1}^N \theta_{m,n,m',n'} \psi_{m',n',j+1/2} \quad (4.5)$$

$j=1,\dots,J$ ve $m=n=1,\dots,N$

hücre-ortalama açısak akıları hesaplanabilir. Bu çalışmada, hücre-kenar açısak akıları hesaplandıktan sonra skaler akılar hesaplanmıştır.

$N=2$ ve $N=4$ mertebeye yaklaşımı için bölüm 3.5’de ve bölüm 3.6’da detaylı bir şekilde bahsedilen Diamond Difference (DD) ve Spektral Green Fonksiyonu (SGF) yöntemleriyle hücre-kenar açısak akılarına bağı skaler akılar hesaplanmıştır. Burada silindirin yarıçapı 10cm olarak alınmış ve bu aralık 100 hücreye kadar bölünerek her hücredeki açısak ve skaler akılar hesaplanmıştır. Akı hesaplamalarında QBASIC programı kullanılmıştır. Gerek her hücredeki skaler akıları ve gerekse SGF ve DD yöntemleriyle bulunan akıları karşılaştırmak amacıyla $r = 0, 5$ ve 10cm’deki sonuçlar çizelge 4.1 ve çizelge 4.2’de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratrleri ile hücre skaler akılarının S_2 yaklaşımı ile çözümü; $\sigma_{s0} = 0.99\text{cm}^{-1}$, $\sigma_T = 1\text{cm}^{-1}$, $r = 10\text{cm}$.

Hücre Sayısı	$\phi(0)$		$\phi(5)$		$\phi(10)$		İterasyon Sayısı	
	SGF	DD	SGF	DD	SGF	DD	SGF	DD
	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot
2	0.9238	0.9781	0.4037	1.0610	0.0390	0.2105	133	3
4	0.9238	0.9240	0.4037	0.4026	0.0390	0.0386	231	211
10	0.9238	0.9239	0.4037	0.4036	0.0390	0.0389	553	318
20	0.9238	0.9238	0.4037	0.4037	0.0390	0.0390	1061	485
50	0.9238	0.9238	0.4037	0.4038	0.0390	0.0390	2535	953
100	0.9238	0.9238	0.4037	0.4038	0.0390	0.0390	4957	1673

Çizelge 4.2: Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratrleri ile hücre skaler akılarının S_4 yaklaşımı ile çözümü; $\sigma_{s0} = 0.99\text{cm}^{-1}$, $\sigma_T = 1\text{cm}^{-1}$, $r = 10\text{cm}$.

Hücre Sayısı	$\phi(0)$		$\phi(5)$		$\phi(10)$		İterasyon Sayısı	
	SGF	DD	SGF	DD	SGF	DD	SGF	DD
	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot	Metot
2	0.9251	1.0020	0.4001	0.9898	0.0377	0.1764	125	2
4	0.9251	0.9249	0.4001	0.4008	0.0377	0.0381	219	240
10	0.9251	0.9251	0.4001	0.3999	0.0377	0.0376	525	338
20	0.9251	0.9251	0.4001	0.4001	0.0377	0.0377	993	491
50	0.9251	0.9251	0.4001	0.4002	0.0377	0.0377	2361	923
100	0.9251	0.9251	0.4001	0.4002	0.0377	0.0377	4637	1591

4.2. Spektral Green Çözümünün P_N ve S_N 'de DD Yöntemleri ile Karşılaştırılması

Küresel harmonikler yöntemi, silindirik geometride nötron akısı dağılımını hesaplamak için sık kullanılan yöntemlerden birisidir. Reaktör bir bütün olarak düşünüldüğünde P_1 yaklaşımı veya diğer adıyla difüzyon teorisi genel hatlarıyla yeterli sonuçlar vermektedir. Ancak, reaktör hücrelere bölünüp ve her hücre bireysel olarak düşünüldüğünde, genellikle zayıf veya kuvvetli absorpsiyona sahip bölgelerden dolayı, P_1 teorisi tatmin edici sonuçlar vermez. Bu noktada, açısız akının küresel harmonikler cinsinden açılımı, bazen transport denkleminde daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılır. Ortaya çıkan denklem sistemi, açısız akının iki nötron doğrultu kosinüsüne bağlı olmasından dolayı, düzlem veya küresel geometrideki denklem sistemlerinden daha karmaşık olur.

Silindirik geometride, açısız akı (tek-hızlı) küresel harmonikler cinsinden,

$$\psi(r, \xi, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \left[P_l(\xi) \phi_l^0 + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\xi) (\cos m\phi) \phi_l^m(r) \right] \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, associated Legendre fonksiyonları P_l^m 'nin diklik şartından dolayı, açılım katsayıları

$$\phi_l^m(r) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \psi(r, \xi, \phi) P_l^m(\xi) \cos m\phi \, d\phi \, d\xi \quad (4.7)$$

şeklinde verilebilir. Denklem (1) $\sin m\phi$ cinsinden herhangi bir ifade içermediğinden, simetriden dolayı ψ, ϕ 'nin bir çift fonksiyonu olmalıdır (Bell ve Glasstone, 1970).

Çözümün simetrik olduğu gerçeğinden yola çıkılarak, P_N tek mertebe yaklaşımı için çözüm $N+1$ tane özdeğer içerir. N arttıkça, çözümlerden bir tanesi asimtotik çözüme çok yaklaşırken, diğer çözümler $-1 < \nu < +1$ aralığına düşen geçici

çözümlere yaklaşır. P_N çift mertebe yaklaşımında, tek mertebe yaklaşımına göre N tane kök içerir, fakat çift mertebe yaklaşımlar fazla kullanılmaz. Bunun nedeni, P_1 , P_3 , P_5 gibi tek mertebe yaklaşıklıkların P_2 , P_4 gibi çift mertebe yaklaşıklıklara göre daha doğru sonuçlar vermesidir.

Burada transport teorisi ile elde edilen sonuçların klasik difüzyon teorisi çözümlerinden gerçeğe daha yakın olduğu söylenebilir. P_1 yaklaşımı (difüzyon teorisi) ile elde edilen çözümler asimtotik olduğundan sadece kaynağın yakınlarında geçerli olmakta, kaynağın uzaklarındaki geçici çözümleri içermemektedir. Buradan anlaşıldığına göre, P_N yönteminde N değeri arttıkça sonuç analitik transport teorisi çözümüne yaklaşmaktadır. Silindirik geometri transport eşitliğinin dilim geometrideki transport eşitliğinden tek farkı $\frac{\eta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ açısal türev terimine sahip olmasıdır. Öyleyse r değeri yeteri kadar büyük alınırsa, bu terimin sıfıra gittiği ve sonucun dilim geometriye dönüştüğü açıkça görülebilir (Gelbard 1968: Greenspan, Kelber ve Okrent 1968'den).

Gelbard (1968)'in yaptığı silindirik geometri transport eşitliği çözümlerinde denklem (1)'in her iki tarafı $P_l^m(\xi) \cos m\phi$ terimi ile çarpılıp, küresel harmoniklerin diklik ve tekrarlama bağıntıları yardımıyla, daha sonra bütün açılar üzerinden integral alınıp transport denkleminde yerine yazılıp, sınır koşulları uygulandıktan sonra farklı iteratif yöntemler kullanılarak çözümler aranmıştır. Böylece;

$$D \begin{pmatrix} \frac{du}{dr} \\ \frac{dv}{dr} \end{pmatrix} \equiv D \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 u'_1 \\ \xi_2 u'_2 \\ \xi_3 u'_3 \\ -\xi_1 v'_1 \\ -\xi_2 v'_2 \\ -\xi_3 v'_3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

şeklinde bir matris denkleminde ulaşılır (Gelbard, 1968). Burada D , nötron doğrultu kosinüslerinin oluşturduğu diagonal matris, u ve v ise sırasıyla, akının ileri ve geri bileşenleridir. Bu çözümler P_3 yaklaşımıyla yapılmıştır.

Denklem (4.8)'deki matris denklemini çözmenin farklı yolları vardır. Bunlardan bir tanesi de bilgisayar kod sistemi olan PALINDROME adı verilen iteratif olmayan bir yöntemdir (Waldinger ve ark., 1964).

Khouaja ve ark (1997) sonlu eksenel simetrik (r - z) silindirik geometri için DP_N yöntemini kullanarak transport denkleminin çözümünü yapmışlardır. Kullandıkları yöntemde, nötron hareketi boyunca açısal dağılım ileri ve geri hareket eden parçacıklar olmak üzere iki alt bölüme ayrılmıştır. Bu yöntem çift-pariteli transport denklemi çözümlerine benzemektedir (Lewis ve Miller, 1993). Daha sonra, transport denkleminin uzaysal kısmının çözümü için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Dış kaynağın olmadığı ve $z = 0$ düzleminde giren bir akı olduğu düşünülmüştür. Skaler akı için;

$$\phi(r, z) = \int_0^{r_0} \psi(r') \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r_p^+}}{(r_p^+)^3} z r' d\phi' dr' \quad (4.9a)$$

$$r_p^+ = [r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \phi' + z^2]^{1/2} \quad (4.9b)$$

şeklinde analitik bir fonksiyon önerilmiştir. Burada $\psi(r')$, giren açısal akının r -doğrultusundaki uzaysal değişimini göstermektedir.

Bu çalışmamızda ise tek gruplu ve tek boyutlu silindirik geometride transport denkleminin çözümünde nötron açısal akısı için,

$$\psi(r, \xi, \phi) = \exp \left(-\sigma_T r \frac{(1 - c_0) \cos \phi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \quad (4.10)$$

şeklinde bir çözüm bulduk. Khouaja va ark (1997)'nin çalışmasında $z \rightarrow \infty$ yapılıp toplam ve saçılma tesir kesitleri için de aynı değerler kullandığımızda birbirine çok yakın skaler akı değerlerine ulaştık. Buna bir örnek olması itibariyle $r_0 = 1\text{cm}$, $\sigma_T = 1$, $\sigma_{s0} = 0$ (saf absorplayıcı bir ortam) durumunu bizim problemimize uyarladığımızda bulduğumuz skaler akılar; $\psi(r = 0) = 0.4876$, $\psi(r = 1) = 0.1971$ bulduk. Khouaja va ark (1997)'nin aynı parametreler için sonuçları $\psi(r = 0) = 0.4102$, $\psi(r = 1) = 0.1980$ şeklindedir.

Silindirik geometri transport denkleminin çözümü için bizim kullandığımız yeni yöntemde Spektral Green Fonksiyonu (SGF) ile çözümleme yapılmıştır. Gerekli bilgisayar programları QBASIC'te hazırlanmıştır. Yarıçapı $r_0 = 10\text{cm}$ olan silindirde, çeşitli hücre sayıları için akı değerleri ayrı ayrı hesaplandı ve sonuçlar çizelge 4.1 ve çizelge 4.2'de sunuldu.

Transport denkleminin çözümleri için kullanılan, İntegral Transport (İT) ve küresel harmonikler (P_N) analitik yöntemlerinin (Lewis ve Miller, 1993) yanısıra S_N 'de nümerik yöntem sonuçları (DD), bizim silindirik geometride uyguladığımız SGF yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırıldığında, SGF çözümünün P_N ve DD çözümlerinde üstün taraflarının olduğu görülmektedir. P_N yöntemiyle yapılan çözümde Bessel fonksiyonlarının karmaşıklığı ve integral sabitlerinin bulunmasında zorluklarla karşılaşmaktadır. Khouaja va ark (1997) bu sorunu gidermek için sonlu silindirde (r - z) açısal aralığı ikiye bölerek DP_N yöntemiyle çözüm yapmışlardır. Başka bir alternatif olarak bu durumlarda özel çözüme gidilebilir. Ama SGF yönteminde sınır şartları yardımıyla integral sabitleri iterasyonlar ile bulunmasına gerek kalmamaktadır.

Transport denkleminin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan DD yaklaşımı ile diskret ordinat S_N yöntemi genellikle reaktör fiziğinde ve zırhlama problemlerinde kullanılır (Bell ve Glasstone, 1970). Diskret ordinat yöntemiyle transport çözümleri, İntegral Transport ve Difüzyon teorisi ile bulunan sonuçlardan daha iyi doğruluğa sahip olmasına rağmen, bilgisayar programlamasında geniş belleğe ve zamana ihtiyaç duyulması, negatif akı değerleri verebilmesi, yuvarlatma hataları içermesi ve birden

fazla açısal değışkene bağlı açısal türev ifadelerinin yer aldığı silindirik geometri denklemlerine uyarlanması çok güçlüklerle karşılasılması, S_N yönteminin uygulama alanlarını kısıtlamaktadır.

Bu çalışmada, N 'in küçük değerleri için DD ile çözülen S_N eşitliğinde negatif ve normalize edilmiş değerin dışındaki akı değerleriyle karşılaşılmıştır (çizelge 4.1 ve 4.2). Ancak N yaklaşım sayısı ne olursa olsun SGF yöntemi, yuvarlatma hatalarında bağımsız olmak üzere hiç negatif akı değeri vermemiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Daha önce bölüm 3'te bahsedilen Spektral Green Fonksiyonları (SGF) yöntemi ve Diamond Difference (DD) yöntemi ile; hücre-kenarı açısal akıları, hücre-ortalama açısal akıları ve hücre-ortalama skaler akılarını veren ifadeler iterasyon denklemleri oluşturularak belirlenmiş ve bu akılara ait nümerik değerler bölüm 4.1'de detaylı olarak verilmişti. Bu bölümde ise, bulunan akı değerlerinin çizelge ve grafikler yardımıyla tartışması yapılacaktır.

Tek boyutta; homojen ve izotropik olan silindirik bir reaktör için $\sigma_T = 1 \text{ cm}^{-1}$, $\sigma_s = 0.99 \text{ cm}^{-1}$, $r = 10 \text{ cm}$, $Q = 0$ değerleri ile bölüm 3.6'da verilen sınır şartları kullanılarak farklı uzaysal hücre sayıları için S_2 ve S_4 yaklaşımları ile Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev çarpım kuadratur setleri yardımıyla nötron transport denkleminin çözümü yapılmıştır. $\sigma_T = 1 \text{ cm}^{-1}$; reaktör içinde nötronların reaksiyona girme olasılıkları toplamının 1 olduğunu gösterir. $\sigma_s = 0.99 \text{ cm}^{-1}$ ise, nötronların izotropik yani her yöne eşit olasılıkla yayıldıkları bir ortamda çoğunlukla saçılmaya uğradıklarını gösterir. $Q = 0$ ortamda bir kaynağın olmadığını gösterir.

S_2 ve S_4 mertebe yaklaşımları için $r = 0, 5$ ve 10 cm 'deki hücre-ortalama skaler akıları çizelge 4.1 ve çizelge 4.2'de verilmiştir. Yakınsaklık kriteri $\varepsilon = 10^{-7}$ koşulunun sağlanması için gerekli iterasyon sayıları da bu çizelgelerde verilmiştir. İterasyon sayılarının fazla olması; çarpım kuadratur kullanılması, tek boyutlu silindirik geometri olmasına rağmen transport denkleminde iki açısal değişkenin yer alması ve yakınsaklık kriterinin çok küçük olması nedenlerine dayanmaktadır. Bu çizelgelerdeki ilk sütun hücre sayısını, son sütun iterasyon sayılarını, diğer sütunlar ise karşılaştırma yapılması amacıyla iki metottan bulunan skaler akı değerlerini göstermektedir.

S_N yaklaşımında, 2 ve 4 hücre sayıları için DD yöntemiyle hesaplanan skaler akılar ile aynı hücre sayıları için SGF yöntemiyle hesaplanan skaler akılar arasında oldukça büyük farklar görülmektedir. Ancak hücre sayıları arttıkça bu farkın kapandığı ve hatta kalmadığı görülmektedir. Buradan da açıkça görüldüğü gibi SGF

yöntemiyle hesaplanan skaler akılar hücre sayısına bağlı olmaksızın aynı olmaktadır. Hücre sayısı arttıkça, DD yöntemiyle hesaplanan skaler akı değerleri SGF yöntemiyle hesaplanan akı değerleri ile aynı olmaktadır. Bu da problemin çözümünde kullandığımız SGF yönteminin etkinliğini gösteren delillerden biridir.

Her hücrede iç kaynak olmadığı $Q = 0$ kabul edilmiştir. Ancak iç kaynağın olması durumunda $Q(r)$ herhangi bir fonksiyon olarak alınıp analitik olarak özel çözümü elde edilebilir.

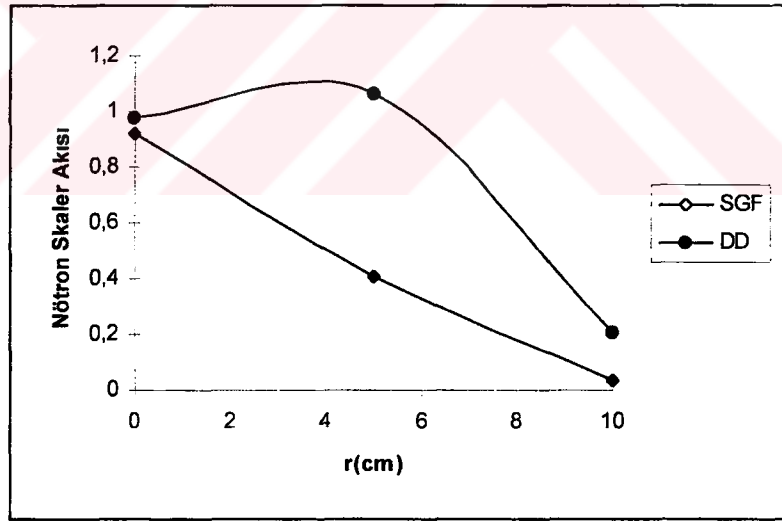
Bu çalışmada skaler akılar SGF ve DD yöntemleriyle $N=2$ ve $N=4$ mertebesi için hesaplandı. Fakat $N>4$ için de kuadratur setleri kullanılarak akı hesaplamalarına devam edilebilir. N büyüdükçe bölüm 3.4'de bulunan özdeğerleri hesaplamak için kullanılan polinomun derecesi artacaktır ve bu nedenle sonlu aritmetik ve yuvarlatma hataları oluşabilir. Bunun yanısıra bölüm 3.6'da hesaplandığı kadarıyla $\theta_{m,n,m',n'}$ Green fonksiyonlarını bulmak için $N \times N \times 2^{N-1}$ tane denklem sistemi çözülmek durumundadır. N 'nin büyük olması bu fonksiyonların hesaplanacağı denklem sistemini arttırmakta ve zorlaştırmaktadır. Bu durum SGF yönteminin doğruluğuna, N üzerinde bir sınırlama getirir.

Yukarıda problemimizin çözümünü esas olarak oluşturan SGF yönteminin her ne kadar olumlu yönleri varsa, her yöntemde olduğu gibi, bu yöntemde problemlere uygulanmasında bazı dezavantajlar da vardır. SGF yöntemi bilgisayar belleğinde oldukça geniş yer kaplamaktadır. Bu çalışmada tüm hesaplamalar PC Pentium I 166 MHz'lik bir bilgisayar kullanılmıştır. Daha hızlı bir bilgisayarla iterasyon süresini kısaltmak mümkündür.

$N=2$ ve 4 için SGF ve DD yöntemleriyle hesaplanan ve çizelge 4.1 ile 4.2'de verilen skaler akı sonuçlarının daha detaylı incelenmesi amacıyla akılar konumun fonksiyonu olacak şekilde aşağıdaki grafiklerle tekrar düzenlenmiştir.

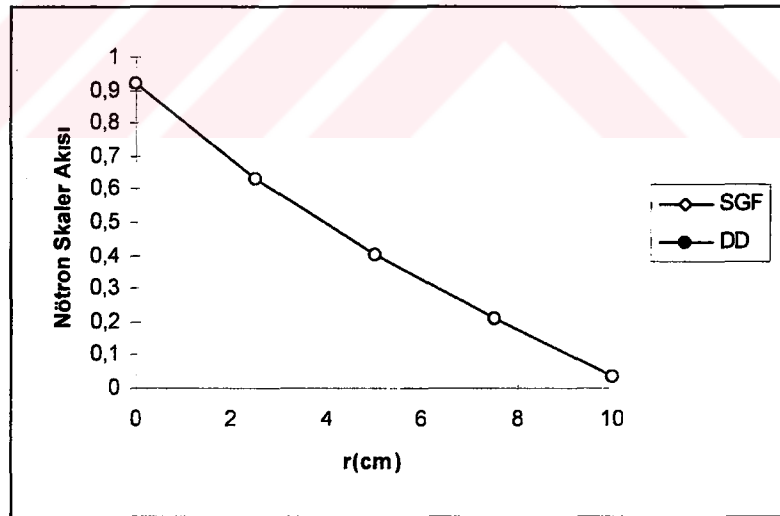
Çizelge 5.1: S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 5\text{cm}$)

Konum (cm)	İki hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9238	0.9781
5	0.4037	1.0610
10	0.0390	0.2105

Şekil 5.1: S_2 ile iki hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

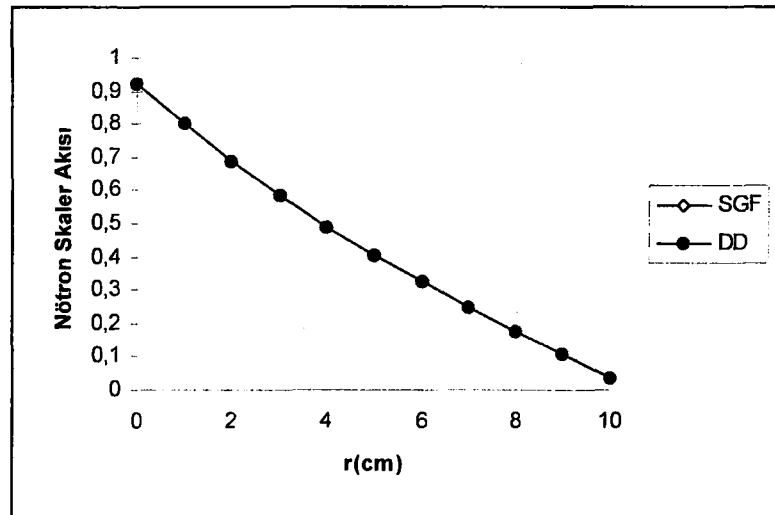
Çizelge 5.2: S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 2.5\text{cm}$)

Konum (cm)	Dört hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9238	0.9240
2.5	0.6340	0.6331
5	0.4037	0.4026
7.5	0.2114	0.2105
10	0.0390	0.0386

Şekil 5.2: S_2 ile dört hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

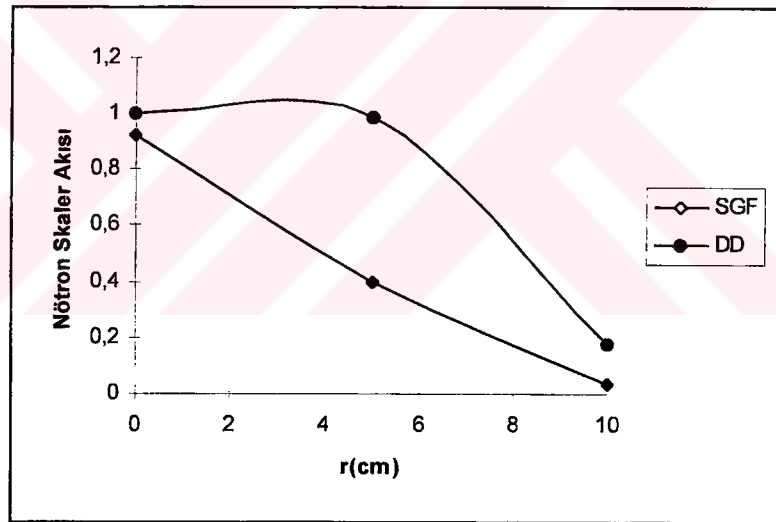
Çizelge 5.3: S_2 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 1\text{cm}$)

Konum (cm)	On hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9238	0.9239
1	0.7991	0.7991
2	0.6864	0.6863
3	0.5839	0.5838
4	0.4902	0.4900
5	0.4037	0.4036
6	0.3233	0.3232
7	0.2477	0.2476
8	0.1759	0.1758
9	0.1066	0.1065
10	0.0390	0.0389

Şekil 5.3: S_2 ile on hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

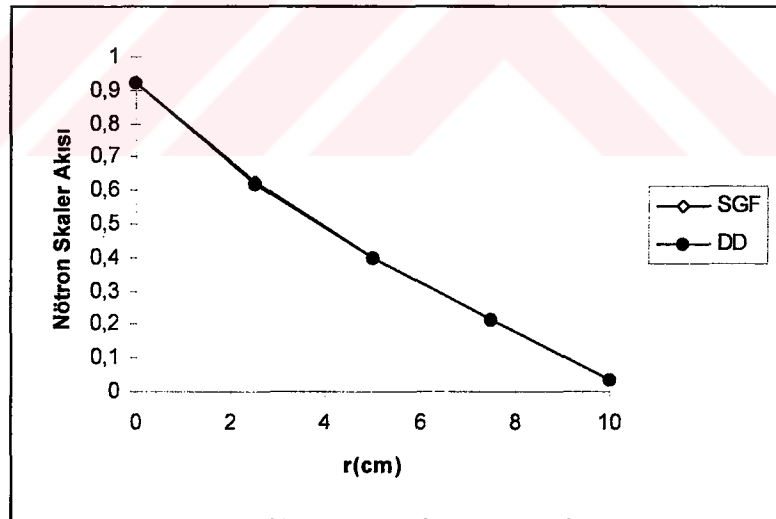
Çizelge 5.4: S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 5\text{cm}$)

Konum (cm)	İki hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9251	1.0020
5	0.4001	0.9898
10	0.0377	0.1764

Şekil 5.4: S_4 ile iki hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

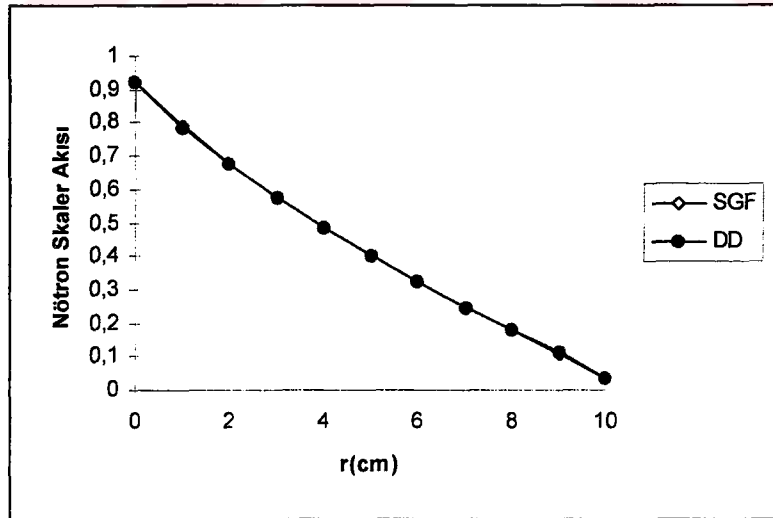
Çizelge 5.5: S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 2.5\text{cm}$)

Konum (cm)	Dört hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9251	0.9249
2.5	0.6252	0.6177
5	0.4001	0.4008
7.5	0.2127	0.2133
10	0.0377	0.0381

Şekil 5.5: S_4 ile dört hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

Çizelge 5.6: S_4 ile silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı değerleri (hücre adımı $h = 1$ cm)

Konum (cm)	On hücre için silindirde nötron akısı	
	SGF	DD
0	0.9251	0.9251
1	0.7888	0.7858
2	0.6767	0.6769
3	0.5761	0.5757
4	0.4845	0.4844
5	0.4001	0.3999
6	0.3217	0.3215
7	0.2481	0.2481
8	0.1781	0.1778
9	0.1101	0.1114
10	0.0377	0.0376

Şekil 5.6: S_4 ile on hücreli silindirde SGF ve DD için nötron skaler akısı

Bu çalışmada, tek boyutlu silindirik geometride tek gruplu nötron transport denkleminin çözümü yapılmıştır. Yani nötronların tamamının aynı enerjiye sahip oldukları kabul edilmiştir. Burada kullandığımız Spektral Green Fonksiyonu yöntemi çok gruplu problemlerin çözümüne de uygulanabilir. Çok gruplu çözümde, $\theta_{m,n,m',n'}$ Green fonksiyonlarını $\theta_{m,n,m',n',g,g'}$ şeklinde düşünmek gereklidir. $\theta_{m,n,m',n',g,g'}$, ξ_m ve u_n yönünde g' grup enerjisi ile gelen parçacıkların saçılmaya uğrayarak ξ_m ve u_n yönünde g grup enerjisi ile ilerlemelerinden dolayı hücre ortalama akıya getirdikleri katkıyı tanımlar. Böyle çok gruplu problemlere uygulanan SGF yönteminde de bulunan sonuçlar yuvarlatma hatalarından bağımsız olur.

SGF yönteminin, herhangi bir saçılma yasası uygulanarak çok boyutlu problemlere de uygulanabileceğini söylemek mümkündür. İki boyutlu x - y kartezyen geometride S_N problemleri kaynağın yanına, enine sızıntı terimi getirilerek x ve y üzerinden ayrı ayrı integre edilip çözülebilir (De Barros ve Larsen, 1992). Üç boyutlu x - y - z kartezyen geometride ise S_N eşitlikleri kaynağın yanına, hacimsel sızıntı terimi getirilerek x , y ve z üzerinden ayrı ayrı integre edilip çözülebilir (Anlı ve Güngör, 1996). Bu eşitliklerin her biri uzaysal yuvarlatma hatalarından arındırılmış olarak çözülmüşlerdir.

Bu doktora tez çalışmasında, izotropik saçılmalı, tek hızlı nötron transport denklemini, silindirik geometride analitik bir çözüm bulunmuş ve Spektral Green Fonksiyonu çözümleri kullanılarak incelenmiş olup bütün durumlar için SGF yönteminin daha doğru sonuçlara yakınsadığı gözlenmiştir.

Nötron transport denklemini çözümlerinde Ortogonal (dik) polinomlar kolaylık sağladığı için çok sık kullanılmaktadır. Bu çalışmada, nötron transport denkleminin çözümü için bir çok fonksiyonun özelliklerinden yararlanılmıştır. Bu fonksiyonların tanım aralıkları, diklik koşulları ve diğer özelliklerine bakılarak, nötron dağılımının uzaysal yada açısal kısımlarından hangisine uyum sağladıklarına karar vermek önemlidir. Bu çalışmada Legendre ve Chebyshev polinomları ile Gauss fonksiyonları kullanıldığı gibi, modifiye Bessel fonksiyonları da kullanılabilir (Bell ve Glasstone, 1970).

Çizelgelerde skaler akılar için verilen değerler normalize olmuş değerlerdir. Silindirin z-ekseni üzerinde ($r = 0$) birim zamanda, birim alandaki nötron sayısı normalize edilerek 1'e eşitlenmiştir. Diğer noktadaki ($r > 0$) akı değerleri ise 0 ile 1 arasında exponansiyel azalan bir dağılım göstermektedir.

Nötron transport denkleminin çözümü için bir çok analitik ve nümerik yöntem geliştirilmiş ve bunlar literatürdeki yerlerini almışlardır. Ancak bu yöntemlerin büyük bir çoğunluğu dilim geometride yapılan çalışmalara aittir. Dilim geometride bir çok araştırmacının yaptığı çalışmalara rağmen tam çözüm sadece çok idealize edilmiş (sınırlanmış) durumlar için mümkün olmuştur. Biz de bu sınırlamalardan bazılarında kurtulmak ve çözümleri sistematik hale getirmek için bugün faaliyette olan reaktörlerin gerçek geometrik yapısına uygun olan silindirik geometride nötronların dağılımını inceledik. Silindirik geometride transport denkleminin yapılan nümerik ve analitik çözümler yok denecek kadar az olduğundan ve incelenen probleme, geometriye, saçılma fonksiyonunun izotropik ve anizotropik olmasına göre hangi yöntemin kullanılacağı önem kazandığından, bu çalışmamızda yeni bir analitik çözüm fonksiyonu ve yöntem geliştirdik. Çünkü geliştirilen yöntemler, problem çözümlerinde birbirine göre bazı kolaylıklar veya zorluklar göstermektedir.

Transport teorisindeki temel problemlerden birisi de kritik kalınlığın hesaplanması ve reaktörün dengesinin devam ettirilmesi için reaktör içindeki nötron dağılımının belirlenmesidir. Bu amaca yönelik olarak bölüm 4'te nötronların dağılımını gösteren $\psi(r, \xi, \phi)$ açısal akı fonksiyonu belirlendikten sonra nötron skaler akısı değerleri hesaplanmıştır ve sonuçlar çizelge 4.1 ve çizelge 4.2'de verilmiştir.

Bu doktora tez çalışmasının temelini oluşturan silindirik geometrideki SGF yöntemi çözümü De Barros ve Larsen (1990;1992)'in yaptıkları çalışmaya dayanmaktadır. Bunun yanı sıra, Case ve Zweifel (1967), Bell ve Glasstone (1970), Gelbard (1968; Greenspan ve ark 1968'den)'in dilim geometri transport denkleminin çözümünde kullandıkları Case yöntemi ve silindirik geometride modifiye Bessel fonksiyonları ile yaptıkları P_N yöntemi, bu çalışmada kullandığımız yöntemin elde edilmesinde büyük rol oynamışlardır.

Basitlik için genellikle bir şey kaybetmeden, dış kaynaksız, zamandan bağımsız, tek boyutta, izotropik saçılmalı, tek gruplu nötron transport denklemi silindirik geometride ele alınmıştır. Bu aşamada yaptığımız çalışma, transport denkleminin bu şartlar altında dilim, küre ve silindirik geometrideki çözüm yöntemlerinin araştırılması ve yeni çözüm yöntemlerinin ortaya çıkarılması konusunda önem kazanmıştır. Kullandığımız yöntemin basit, açık, nümerik ve diğer yöntemlere taşınabilir olması bir çok alana uygulanabilirliğini arttırmaktadır.

Belki de bu çalışmanın en önemli özelliği; silindirik geometri için daha önce kimse tarafından hem analitik hem de nümerik çözüm içeren bir yöntem olarak kullanılmamış olmasıdır. Ayrıca bu yöntem ile anizotropik saçılma, ileri ve geri saçılım, sonlu silindir, kritik kalınlık, Albedo ve Milne problemleri incelenebilir.

Sonuç olarak, silindirik geometride nötron transport denkleminin analitik bir çözüme dayalı nümerik Spektral Green fonksiyonu ile daha doğru sonuçlar elde ettik. Kullandığımız yöntemin bazı özelliklerini ise şöyle sıralayabiliriz: Bu yöntem, transport denkleminin çözümünde kullanılan diğer bir çok yöntemde karşılaşılan yuvarlatma hatalarından bağımsız (tam çözüm), açısal türev işlemlerinden uzak, literatürde olmayan yeni bir analitik çözüm içermekte, diğer yöntemler kadar hızlı ve saçılmalarda yuvarlatma hatası içermemektedir. Ayrıca bu yöntem, yüksek mertebeli S_N hesaplamalarında da kullanılabilir. Bundan sonraki çalışmalarımızda amacımız, daha genel bir analitik çözüm fonksiyonu üreterek çok gruplu, anizotropik saçılmalı, özellikle silindirik geometride transport denkleminin çözümlerini aramaktır.

KAYNAKLAR

- ADAMS, M.L. and MARTIN, W.R., 1992. Diffusion Synthetic Acceleration of Discontinuous Finite Element Transport Iterations. Nucl. Sci. Eng., 111, 145-167.
- ANDREWS, L.C., 1998. Special Functions of Mathematics for Engineers. Oxford University Press, London, 479s.
- ANLI, F., 1995. Üç Boyutlu Kartezyen Geometride Diskret-Ordinat Problemlerinin Spektral Green Fonksiyonları (SGF) İle Çözümü. Doktora Tezi. Ç.Ü. Fen Enstitüsü, Adana, 112s.
- ANLI, F. and GÜNGÖR, S., 1996. A Spectral Nodal Method for One-Group X,Y,Z-Cartesian Geometry Discrete Ordinates Problems. Ann. Nucl. Energy, 23, 669-680.
- ANLI, F., 2001. Spectral Green's Function Method for Neutron Transport: Isotropic, Forward and Backward Scattering in 1-D Slab Geometry. Ann. Nucl. Energy, 28, 1033-1042.
- BADRUZZAMAN, A., 1988. A Finite-Moments Algorithm for Transport Equations in Cylindrical Geometry. Trans. Am. Nucl. Soc. 56, 307-309.
- BELL, W.W., 1968. Special Functions for Scientist and Engineers. Van Nostrand Company, London, 247s.
- BELL, G.I. and GLASSTONE, S., 1970. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 619s.
- BRANTLEY, P.S. and LARSEN, E.W., 2000. Spatial and Angular Moment Analysis of Continuous and Discretized Transport Problems. Nucl. Sci. Eng., 135, 199-226.
- BROCKMANN, H., 1981. Treatment of Anisotropic Scattering in Numerical Neutron Transport Theory. Nucl. Sci. Eng., 77, 377-414.
- CASE, K.M. and ZWEIFEL, P.F., 1967. Linear Transport Theory. Addison Wesley Publishing Company, USA, 342s.
- CASE, K.M., De HOFFMANN, F. and PLACZEK, G., 1953. Introduction To The

- Theory of Neutron Diffusion. Vol. 1, U.S. Govt. Print. Off., Wasington, D.C.
- DAVISON, B., 1958. Neutron Transport Theory. Oxford University Press, London, 450s.
- De ABREU, M.P., 1998. On the Spectrum of the One-Speed Slab-Geometry Discrete Ordinates Operator in Neutron Transport Theory. Ann. Nucl. Energy, 25(15), 1209-1219.
- De BARROS, R.C. and LARSEN, E.W., 1990. A Numerical Method For One-Group Slab Geometry Discrete Ordinates Problems with No Spatial Truncation Error. Nucl. Sci. Eng., 104, 199-208.
- _____ and _____, 1992. A Spectral Nodal Method for One-Group X,Y-Geometry Discrete Ordinates Problems. Nucl. Sci. Eng., 111,34-45.
- FLETCHER, J.K., 1983. The Solution of the Multigroup Neutron Transport Equation Using Spherical Harmonics. Nucl. Sci. Eng., 84, 33-46.
- GLASSTONE, S. and SESONSKE, A., 1981. Nuclear Reactor Engineering. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 805s.
- GREENSPAN, H., KELBER, C.N. and OKRENT, D., 1968. Computing Methods in Reactor Physics. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 589s.
- GÜLEÇYÜZ, M.Ç., 1999. Elementer Çözümler Yönteminin Özfonksiyonlarının ve Diklik Bağıntılarının Boltzmann Denkleminin Üçüncü Formunda Kullanılması. Doktora Tezi. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 67s.
- HSU, S.C., WU, C.Y. and Ou, N.R., 1998. Azimuthally Dependent Radiative Transfer in a Non-homogeneous Cylindrical Medium. Radiation Physics and Chemistry, 53, 107-113.
- KAŞKAŞ, A., 1998. İzotropik ve Anizotropik Saçılma İçin F_N ve Yeni Geliştirilen Bir Yöntemle Uygulamalar. Doktora Tezi. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 80s.
- KHOUAJA, H. ve Ark., 1997. Spherical Harmonics-Finite Element Treatment of Neutron Transport in Cylindrical Geometry. Ann. Nucl. Energy, 24, 515-531.
- KIM, S.T. and DORNING, J.J., 1988. A Discrete Nodal Transport Method for

- Cylindrical Geometry. Trans. Am. Nucl. Soc. 57, 233-235.
- LAMARSH, J.R., 1975. Introduction to Nuclear Engineering. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 626s.
- LARSEN, E.W., 1983. On Numerical Solutions of Transport Problems in the Diffusion Limit. Nucl. Sci. Eng., 83, 90-99.
- LATHROP, K.D., 2000. A Comparison of Angular Difference Schemes for One-Dimensional Spherical Geometry S_N Equations. Nucl. Sci. Eng., 134, 239-264.
- LEE, C.E., ve Ark., 1985. Analytical Solution To The Moment Transport Equations-II. Ann. Nucl. Energy, 12(11): 613-632.
- LEWIS, E.E. and MILLER, W.F. Jr., 1993. Computational Methods of Neutron Transport. American Nuclear Society, USA, 401s.
- MARK, J.C., 1947. Phy. Rev., 72, 558.
- MARSHAK, R.E., 1947. Phy. Rev., 71, 443.
- MIKA, J., 1961. Nucl. Sci. Eng., 11, 415.
- MITNIS, G.J., 1963. Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems. PhD Thesis. ANL-6787, 162s.
- MOREL, J.E. and LARSEN, E.W., 1990. A Multiple Balance Approach for Differencing the S_N Equations. Nucl. Sci. Eng., 105, 1-15.
- POMRANING, G.C., 1989. The Transport Equation in General Geometry. Nucl. Sci. Eng., 101, 330-340.
- SAHNI, D.C. and SHARMA, A., 2000. Computation of Higher Spherical Harmonics Moments of the Angular Flux for Neutron Transport Problems in Spherical Geometry. Ann. Nucl. Energy, 27, 411-433.
- SANCHEZ, R. and McCORMICK, N.J., 1982. A Review of Neutron Transport Approximations. Nucl. Sci. Eng., 80, 481-535.
- SCHEID, F., 1988. Schaum's Outline of Theory and Problems of Numerical Analysis McGraw Hill, New York, 471s.
- SIEWERT, C.E. and GRANDJEAN, P., 1979. Three Basic Neutron Transport

- Problems in Spherical Geometry. Nucl. Sci. Eng., 70, 96-110.
- SPANIER, J. and GELBARD, E.M., 1969. Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems. Addison-Wesley Publishing Co., Inc.
- YAVUZ, M. and LARSEN, E.W., 1992. Iterative Methods for Solving X-Y Geometry S_N Problems on Parallel Architecture Computers. Ann. Nucl. Energy, 112, 32-42.
- YILDIZ, C., 1984. The Criticality Problems in Neutron Transport Theory for Extremely Anisotropic Scattering Kernels. PhD Thesis. ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 143s.
- WALDINGER, H., 1964. Numerical Integration of the Spherical Harmonics Equations. Nucl. Sci. Eng., 18, 4.
- WEINBERG, A.M. and WIGNER, E.P., 1958. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, Chicago.
- WU, Y. ve Ark., 1999. A Discrete Ordinates Nodal Method for One-Dimensional Neutron Transport Calculation in Curvilinear Geometries. Nucl. Sci. Eng., 133, 350-357.
- WOOD, J., 1985. A Multigroup Finite-Element Solution of The Neutron Transport Equation-II, R-Z Geometry. Ann. Nucl. Energy, 12(5): 217-231.
- ZWEIFEL, P.F., 1973. Reactor Physics. McGraw Hill, New York, 319s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Hakan ÖZTÜRK
Doğum Yeri, Yılı : KARS/Arpaçay, 1973
Medeni Durumu : Bekar
Adres : Yeşilyurt Mah. 212 Sok. No: 20, 01150, Seyhan/ADANA.
Telefon : 0. 322. 2275360
E-mail : hozturk@cu.edu.tr

Eğitim Durumu:

Lisans : Çukurova Üniversitesi, Fen-Edeb. Fak., Fizik Bölümü, Adana, 1995
Y. Lisans : Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 1997
Doktora : Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2003

Çalıştığı Kurumlar:

Milli Eğitim Bakanlığı : 1995-1996 Eğitim-Öğretim Yılı, Güz Dönemi
Çukurova Üniversitesi : 1996- Halen devam etmektedir.

Katıldığı Ulusal ve Uluslararası Toplantılar:

1. Workshop on Linac-Ring Type e-p and $\gamma\gamma$ Colliders, 9-11 April 1997, Ankara University, Turkey.
2. İlköğretim ve Ortaöğretimde Fen-Fizik Eğitimi, 20-21 Nisan 1998, Adana, Türkiye
3. 1998 European School of High-Energy Physics, 23 August-5 September 1998, St Andrews, Scotland
4. Türk Fizik Derneği 18. Fizik Kongresi, 25-28 Ekim 1999, Çukurova Üniversitesi, Adana

Yayınlar:

1. Güneşsel ve Atmosferik Nötrinolar, Çukurova Üniv., Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, p:89-101, cilt:8, 1997.
2. On the Difference Between High-Energy Proton and Pion Showers and Their Signals in a Compensating Calorimeter, Akchurin N., et.al, NIM A 408 (1998) 380-396.
3. Fizik Eğitiminde Öğrenci Faktörü, TFD 18. Uluslararası Fizik Kongresi, (Bildiri) 1999.

Y. A. YÜREKÖĞRETİM KURULU
EDİTÖRİYERİ MERKEZİ

EKLER

EK I

S₄ için DD yöntemi programı:

```
10 DEFDBL A-H, L-Z
20 DIM X1(101, 2), X2(101, 2), X3(101, 2), X4(101, 2), F(101, 2)
30 DIM Y1(101, 2), Y2(101, 2), Y3(101, 2), Y4(101, 2)
40 DIM Z1(101, 2), Z2(101, 2), Z3(101, 2), Z4(101, 2)
50 DIM U1(101, 2), U2(101, 2), U3(101, 2), U4(101, 2)
60 REM ***** DATA SEÇİMİ *****
70 CLS : LOCATE 1, 2: PRINT STRING$(78, 178): FOR I = 1 TO 22
80 LOCATE I, 1: PRINT CHR$(178): LOCATE I, 2: PRINT CHR$(178)
90 LOCATE I, 79: PRINT CHR$(178): LOCATE I, 78: PRINT CHR$(178)
100 LOCATE 23, 1: PRINT STRING$(79, 178): NEXT I: LOCATE 3, 10
110 LOCATE 3, 10: PRINT STRING$(56, 205): LOCATE 8, 10
120 PRINT STRING$(57, 205): LOCATE 4, 16
130 PRINT "Solution Of The Neutron Transport Equation"
140 LOCATE 5, 14
150 PRINT "Discrete-Ordinates Problems With S4(DD) Scheme"
160 LOCATE 6, 17
170 PRINT " For a Given Number Of Spatial Cells"
180 LOCATE 3, 9: PRINT CHR$(201): LOCATE 4, 9: PRINT CHR$(186)
190 LOCATE 5, 9: PRINT CHR$(186): LOCATE 7, 9: PRINT CHR$(186)
200 LOCATE 8, 9: PRINT CHR$(200): PRINT CHR$(186): LOCATE 6, 9
200 LOCATE 8, 9: PRINT CHR$(200): PRINT CHR$(186): LOCATE 6, 9
210 PRINT CHR$(186): LOCATE 3, 66: PRINT CHR$(187): LOCATE 4, 66
220 LOCATE 4, 66: PRINT CHR$(186): LOCATE 5, 66: PRINT CHR$(186)
230 LOCATE 7, 66: LOCATE 6, 66: PRINT CHR$(186): LOCATE 7, 66
240 PRINT CHR$(186): LOCATE 8, 66: PRINT CHR$(188): LOCATE 10, 10
250 PRINT "Two Cells Calculations.....Cell Width (50cm), N=2"
260 LOCATE 11, 10
270 PRINT "Four Cells Calculations....Cell Width (25cm), N=4"
280 LOCATE 12, 10
290 PRINT "Ten Cells Calculations.....Cell Width (10cm), N=10"
300 LOCATE 13, 10
310 PRINT "Twenty Cells Calculations..Cell Width ( 5cm), N=20"
320 LOCATE 14, 10
330 PRINT "Fifty Cells Calculations...Cell Width ( 2cm), N=50"
340 LOCATE 15, 10
350 PRINT "Hundret Cells Calculations.Cell Width ( 1cm), N=100"
350 PRINT "Hundret Cells Calculations.Cell Width ( 1cm), N=100"
360 LOCATE 18, 10:
```

```

370 PRINT "Input Number Of Cells..... N=": LOCATE 18, 47:
380 INPUT " ", N: LOCATE 19, 10
390 PRINT "Convergence Criteria.....TOL=":
400 LOCATE 19, 47: INPUT " ", TOL: TIMES$ = "00.00"
410 IF N = 2 THEN 500 ELSE 420
420 IF N = 4 THEN 500 ELSE 430
430 IF N = 10 THEN 500 ELSE 440
440 IF N = 20 THEN 500 ELSE 450
450 IF N = 50 THEN 500 ELSE 460
460 IF N = 100 THEN 500 ELSE 470
470 LOCATE 19, 10: PRINT "Only You Can Choose N=2,4,10,20,50,100"
480 LOCATE 20, 10: PRINT "Press Enter To Try Again": LOCATE 20, 42:
490 INPUT " ", A$: GOTO 360
500 H=10/N:S0=.99: ST=1
510 PI=4*ATN(1):WC(1)=PI/4:WC(2)=PI/4:WC(3)=PI/4:WC(4)=PI/4
520 WL(1)=.3478548452#:WL(2)=.6521451551#:WL(3)=WL(2):WL(4)=WL(1)
530 M(1)=.8611363117#:M(2)=.3399810434#:M(3)=-M(2):M(4)=-M(1)
540 N(1)=.9238795325#:N(2)=.3826834325#:N(3)=-N(2):N(4)=-N(1)
550 P1=H*(S0*WL(1)/8-ST+(ST-S0)*(1-N(1)^2))/(N(1)*SQR(1-M(1)^2))
560 P2=S0*H/(8*N(1)*SQR(1-M(1)^2))
570 A=1-P1/2:A1=1+P1/2:A2=P2/2
580 R1=H*(S0*WL(1)/8-ST+(ST-S0)*(1-N(2)^2))/(N(2)*SQR(1-M(1)^2))
590 R2=S0*H/(8*N(2)*SQR(1-M(1)^2))
600 B=1-R1/2:B1=1+R1/2:B2=R2/2
610 S1=H*(S0*WL(2)/8-ST+(ST-S0)*(1-N(1)^2))/(N(1)*SQR(1-M(2)^2))
620 S2=S0*H/(8*N(1)*SQR(1-M(2)^2))
630 C=1-S1/2:C1=1+S1/2:C2=S2/2
640 T1=H*(S0*WL(2)/8-ST+(ST-S0)*(1-N(2)^2))/(N(2)*SQR(1-M(2)^2))
650 T2=S0*H/(8*N(2)*SQR(1-M(2)^2))
660 D=1-T1/2:D1=1+T1/2:D2=T2/2
670 REM PRINT (2+A1)/(2-A1), A2/(2-A1), -B1/(2+B2), (2-B2)/(2+B2)
680 REM
690 REM *****Cell Calculation *****
700 FOR I = 1 TO N+1:X1(I,0)=1:X2(I,0)=1:X3(I,0)=1:X4(I,0)=1:F(I,0)=1
710 Y1(I,0)=1:Y2(I,0)=1:Y3(I,0)=1:Y4(I,0)=1:Z1(I,0)=1:Z2(I,0)=1:Z3(I,0)=1:
Z4(I,0)=1:U1(I,0)=1:U2(I,0)=1:U3(I,0)=1:U4(I,0)=1:NEXTI:Z1(N+1,0)=0:
Z2(N+1,0)=0: Z3(N+1,0)=0: Z4(N+1,0)=0:U1(N+1,0)=0:U2(N+1,0)=0:
U3(N+1,0)=0: U4(N+1,0)=0
720 GOSUB 760: BEEP
730 PRINT " Procedure Converged With Iteration.....": K
740 PRINT " Time Required For Calculation.....": TIMES$
750 PRINT " Number Of Cell.....": N: END
760 REM ***** SUBROUTINE *****
770 LOCATE 22, 5: PRINT "Iteration Counter:"

```

```

780 LOCATE 22, 40: PRINT "Timer:"
790 FOR K = 1 TO 9000: FOR I = 1 TO N
800 X1(1,1)=1:X2(1,1)=1:Y1(1,1)=1:Y2(1,1)=1
810 Z1(1,1)=1:Z2(1,1)=1:U1(1,1)=1:U2(1,1)=1
820 X3(N+1,1)=0:X4(N+1,1)=0:Y3(N+1,1)=0:Y4(N+1,1)=0
830 Z3(N+1,1)=0:Z4(N+1,1)=0:U3(N+1,1)=0:U4(N+1,1)=0
840 X11=(X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)+X4(I,0)+U1(I+1,0)
+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
850 X12=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)
+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)
+Z4(I,0))*WL(2)
860 X1(I+1,1)=(A1/A)*X1(I,0)+(A2/A)*(X11+X12)
870 X21=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)+X4(I,0)+U1(I+1,0)
+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
880 X2(I+1,1)=(B1/B)*X2(I,0)+(B2/B)*(X21+X12)
890 X31=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X4(I+1,0)+X4(I,0)+U1(I+1,0)
+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
900 X3(I,1)=(B1/B)*X3(I+1,0)+(B2/B)*(X31+X12)
910 X41=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+U1(I+1,0)
+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
920 X4(I,1)=(A1/A)*X4(I+1,0)+(A2/A)*(X41+X12)
930 Y11=(Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)
+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
940 Y12=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)
+X4(I,0)+U1(I+1,0)+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)
+U4(I,0))*WL(1)
950 Y1(I+1,1)=(C1/C)*Y1(I,0)+(C2/C)*(Y11+Y12)
960 Y21=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)
+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
970 Y2(I+1,1)=(D1/D)*Y2(I,0)+(D2/D)*(Y21+Y12)
980 Y31=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y4(I+1,0)+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)
+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
990 Y3(I,1)=(D1/D)*Y3(I+1,0)+(D2/D)*(Y31+Y12)
1000 Y41=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Z1(I+1,0)
+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
1010 Y4(I,1)=(C1/C)*Y4(I+1,0)+(C2/C)*(Y41+Y12)
1020 Z11=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)
+Y4(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
1030 Z1(I+1,1)=(C1/C)*Z1(I,0)+(C2/C)*(Z11+Y12)
1040 Z21=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)
+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)+Z1(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)
1050 Z2(I+1,1)=(D1/D)*Z2(I,0)+(D2/D)*(Z21+Y12)
1060 Z31=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)
+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z4(I+1,0)+Z4(I,0))*WL(2)

```

```

1070 Z3(I,1)=(D1/D)*Z3(I+1,0)+(D2/D)*(Z31+Y12)
1080 Z41=(Y1(I+1,0)+Y1(I,0)+Y2(I+1,0)+Y2(I,0)+Y3(I+1,0)+Y3(I,0)+Y4(I+1,0)
+Y4(I,0)+Z1(I+1,0)+Z1(I,0)+Z2(I+1,0)+Z2(I,0)+Z3(I+1,0)+Z3(I,0))*WL(2)
1090 Z4(I,1)=(C1/C)*Z4(I+1,0)+(C2/C)*(Z41+Y12)
1100 U11=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)
+X4(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
1110 U1(I+1,1)=(A1/A)*U1(I,0)+(A2/A)*(U11+X12)
1120 U21=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)
+X4(I,0)+U1(I+1,0)+U1(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
1130 U2(I+1,1)=(B1/B)*U2(I,0)+(B2/B)*(U21+X12)
1140 U31=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)
+X4(I,0)+U1(I+1,0)+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U4(I+1,0)+U4(I,0))*WL(1)
1150 U3(I,1)=(B1/B)*U3(I+1,0)+(B2/B)*(U31+X12)
1160 U41=(X1(I+1,0)+X1(I,0)+X2(I+1,0)+X2(I,0)+X3(I+1,0)+X3(I,0)+X4(I+1,0)
+X4(I,0)+U1(I+1,0)+U1(I,0)+U2(I+1,0)+U2(I,0)+U3(I+1,0)+U3(I,0))*WL(1)
1170 U4(I,1)=(A1/A)*U4(I+1,0)+(A2/A)*(U41+X12)
1180 NEXT I
1190 FOR I=1 TO N+1
1200 F(I,1)=((X1(I,1)+X2(I,1)+X3(I,1)+X4(I,1)+U1(I,1)+U2(I,1)+U3(I,1)+U4(I,1))*
WL(1)+(Y1(I,1)+Y2(I,1)+Y3(I,1)+Y4(I,1)+Z1(I,1)+Z2(I,1)+Z3(I,1)+Z4(I,1))
*WL(2))*125:NEXT I
1210 LOCATE 22, 25: PRINT K: LOCATE 22, 48: PRINT TIMES$
1220 IF (F(1,0)-F(1,1))<=TOL THEN GOTO 1260 ELSE 1230
1230 FOR I=1 TO N+1:X1(I,0)=X1(I,1):X2(I,0)=X2(I,1):X3(I,0)=X3(I,1):
X4(I,0)=X4(I,1):Y1(I,0)=Y1(I,1):Y2(I,0)=Y2(I,1):Y3(I,0)=Y3(I,1):Y4(I,0)=Y4(I,1)
1240 Z1(I,0)=Z1(I,1):Z2(I,0)=Z2(I,1):Z3(I,0)=Z3(I,1):Z4(I,0)=Z4(I,1):
U1(I,0)=U1(I,1):U2(I,0)=U2(I,1):U3(I,0)=U3(I,1):U4(I,0)=U4(I,1)
1250 F(I,0)=F(I,1):NEXT I:NEXT K
1260 CLS
1270 PRINT " I      X1(I,1)    Y1(I,1)    Z1(I,1)    U1(I,1)    F(I,1)"
1280 PRINT "====  =====  =====  =====  =====
=====
1290 FOR I = 1 TO N + 1
1300 F(I,1)=((X1(I,1)+X2(I,1)+X3(I,1)+X4(I,1)+U1(I,1)+U2(I,1)+U3(I,1)+U4(I,1))*
WL(1)+(Y1(I,1)+Y2(I,1)+Y3(I,1)+Y4(I,1)+Z1(I,1)+Z2(I,1)+Z3(I,1)+Z4(I,1))
*WL(2))*125
1310 PRINT I; :PRINT USING "   .####^ ^ ^ ^";X1(I,1),Y1(I,1),Z1(I,1),U1(I,1),F(I,1)
:NEXT I
1320 RETURN
Ok

```

EK II

S₄ için SGF yöntemi programı:

```
10 DEFDBL A-H, L-Z
20 DIM X1(101, 2), X2(101, 2), X3(101, 2), X4(101, 2), F(101, 2)
30 DIM Y1(101, 2), Y2(101, 2), Y3(101, 2), Y4(101, 2)
40 DIM Z1(101, 2), Z2(101, 2), Z3(101, 2), Z4(101, 2)
50 DIM U1(101, 2), U2(101, 2), U3(101, 2), U4(101, 2)
60 DIM DETA11(10, 5), DETA12(10, 5), DETA21(10, 5), DETA22(10, 5)
70 DIM DETA33(10, 5), DETA34(10, 5), DETA43(10, 5), DETA44(10, 5)
80 DIM DET11(10, 5), DET12(10, 5), DET21(10, 5), DET22(10, 5)
90 DIM DET33(10, 5), DET34(10, 5), DET43(10, 5), DET44(10, 5)
95 DIM A(5, 5, 10), E(5, 5, 10), L(5, 5, 10)
100 DIM T11(10, 5), T12(10, 5), T21(10, 5), T22(10, 5)
110 DIM T33(10, 5), T34(10, 5), T43(10, 5), T44(10, 5)
120 REM ***** DATA SEÇİMİ *****
130 CLS : LOCATE 1, 2: PRINT STRING$(78, 178): FOR I = 1 TO 22
140 LOCATE I, 1: PRINT CHR$(178): LOCATE I, 2: PRINT CHR$(178)
150 LOCATE I, 79: PRINT CHR$(178): LOCATE I, 78: PRINT CHR$(178)
160 LOCATE 23, 1: PRINT STRING$(79, 178): NEXT I: LOCATE 3, 10
170 LOCATE 3, 10: PRINT STRING$(56, 205): LOCATE 8, 10
180 PRINT STRING$(57, 205): LOCATE 4, 13
190 PRINT "Solution Of The Neutron Transport Equation"
200 LOCATE 5, 13
210 PRINT "Spectral Green Function Method With S4 Quadrature"
220 LOCATE 6, 13
230 PRINT "Sets, For a Given Number Of Spatial Cells"
240 LOCATE 3, 9: PRINT CHR$(201): LOCATE 4, 9: PRINT CHR$(186)
250 LOCATE 5, 9: PRINT CHR$(186): LOCATE 7, 9: PRINT CHR$(186)
260 LOCATE 8, 9: PRINT CHR$(200): PRINT CHR$(186): LOCATE 6, 9
270 PRINT CHR$(186): LOCATE 3, 66: PRINT CHR$(187): LOCATE 4, 66
280 LOCATE 4, 66: PRINT CHR$(186): LOCATE 5, 66: PRINT CHR$(186)
290 LOCATE 7, 66: LOCATE 6, 66: PRINT CHR$(186): LOCATE 7, 66
300 PRINT CHR$(186): LOCATE 8, 66: PRINT CHR$(188): LOCATE 10, 10
310 PRINT "Two Cells Calculations.....Cell Width (50cm), N=2"
320 LOCATE 11, 10
330 PRINT "Four Cells Calculations....Cell Width (25cm), N=4"
340 LOCATE 12, 10
350 PRINT "Ten Cells Calculations.....Cell Width (10cm), N=10"
360 LOCATE 13, 10
370 PRINT "Twenty Cells Calculations..Cell Width ( 5cm), N=20"
380 LOCATE 14, 10
390 PRINT "Fifty Cells Calculations...Cell Width ( 2cm), N=50"
```

```

400 LOCATE 15, 10
410 PRINT "Hundred Cells Calculations.Cell Width ( 1cm), N=100"
420 LOCATE 18, 10:
430 PRINT "Input Number Of Cells..... N=": LOCATE 18, 47:
440 INPUT " ", N: LOCATE 19, 10
450 PRINT "Convergence Criteria.....TOL=":
460 LOCATE 19, 47: INPUT " ", TOL: TIME$ = "00.00"
470 H = 10 / N: S0 = .99: ST = 1: N(1) = 8.181373693999999#:
      N(2) = .5763040502#: N(3) = .4124765822#: N(4) = .2117150757#:
      N(5) = -N(4): N(6) = -N(3): N(7) = -N(2): N(8) = -N(1)
480 ML(1) = .8611363117#: ML(2) = .3399810434#: ML(3) = -ML(2):
      ML(4) = -ML(1): MC(1) = .9238795325#: MC(2) = .3826834325#:
      MC(3) = -MC(2): MC(4) = -MC(1)
490 PI = 4 * ATN(1): WL(1) = .3478548452#: WL(2) = .6521451551#:
      WL(3) = WL(2): WL(4) = WL(1): WC(1) = PI / 4:
      WC(2) = WC(3) = WC(4) = WC(1)
500 FOR I = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR K = 1 TO 8
510 A(I, J, K) = (.25 * S0 * N(K)) / (PI * (N(K) * (S0 - 1) * (1 - MC(J) ^ 2)
      + SQR(1 - ML(I) ^ 2) * MC(J) + N(K))) : NEXT K: NEXT J: NEXT I
520 FOR I = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR K = 1 TO 8
530 E(I, J, K) = (A(I, J, K) * N(K) / (ST * H)) * (EXP(.5 * H * ST / N(K))
      - EXP(-.5 * H * ST / N(K)))
540 NEXT K: NEXT J: NEXT I
550 FOR I = 1 TO 2: FOR J = 1 TO 2: FOR K = 1 TO 8
560 L(I, J, K) = A(I, J, K) * EXP(-.5 * H * ST / N(K)): NEXT K: NEXT J: NEXT I
570 FOR I = 3 TO 4: FOR J = 3 TO 4: FOR K = 1 TO 8
580 L(I, J, K) = A(I, J, K) * EXP(.5 * H * ST / N(K)): NEXT K: NEXT J: NEXT I
590 FOR I = 1 TO 7
600 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
610 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
620 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
630 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
640 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
650 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
660 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
670 NEXT I
680 FOR I = 1 TO 6
690 A2(I) = A1(I) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(I): B2(I) = A1(I) * C1(I + 1)
      - A1(I + 1) * C1(I)
700 C2(I) = A1(I) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(I): D2(I) = A1(I) * E1(I + 1)
      - A1(I + 1) * E1(I)
710 E2(I) = A1(I) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(I): F2(I) = A1(I) * G1(I + 1)
      - A1(I + 1) * G1(I)
720 NEXT I

```



```

730 FOR I = 1 TO 5
740 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1): B3(I) = A2(1) * C2(I + 1)
    - A2(I + 1) * C2(1)
750 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1): D3(I) = A2(1) * E2(I + 1)
    - A2(I + 1) * E2(1)
760 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
770 NEXT I
780 FOR I = 1 TO 4
790 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1): B4(I) = A3(1) * C3(I + 1)
    - A3(I + 1) * C3(1)
800 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1): D4(I) = A3(1) * E3(I + 1)
    - A3(I + 1) * E3(1)
810 NEXT I
820 FOR I = 1 TO 3
830 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1): B5(I) = A4(1) * C4(I + 1)
    - A4(I + 1) * C4(1)
840 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
850 NEXT I
860 DETA1 = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4) * (A3(1) ^ 3)
    * (A4(1) ^ 2)))
870 DETA2 = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
    - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
880 DETA = DETA1 * DETA2
890 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
900 A1(I) = E(K, J, 1) * L(1, 2, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(1, 2, 1)
910 B1(I) = E(K, J, 1) * L(2, 1, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(2, 1, 1)
920 C1(I) = E(K, J, 1) * L(2, 2, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(2, 2, 1)
930 D1(I) = E(K, J, 1) * L(3, 3, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(3, 3, 1)
940 E1(I) = E(K, J, 1) * L(3, 4, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(3, 4, 1)
950 F1(I) = E(K, J, 1) * L(4, 3, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(4, 3, 1)
960 G1(I) = E(K, J, 1) * L(4, 4, I + 1) - E(K, J, I + 1) * L(4, 4, 1)
970 NEXT I
980 FOR I = 1 TO 6
990 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1): B2(I) = A1(1) * C1(I + 1)
    - A1(I + 1) * C1(1)
1000 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1): D2(I) = A1(1) * E1(I + 1)
    - A1(I + 1) * E1(1)
1010 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1): F2(I) = A1(1) * G1(I + 1)
    - A1(I + 1) * G1(1)
1020 NEXT I
1030 FOR I = 1 TO 5
1040 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1): B3(I) = A2(1) * C2(I + 1)
    - A2(I + 1) * C2(1)
1050 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1): D3(I) = A2(1) * E2(I + 1)

```

```

- A2(I + 1) * E2(1)
1060 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
1070 NEXT I
1080 FOR I = 1 TO 4
1090 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1): B4(I) = A3(1) * C3(I + 1)
- A3(I + 1) * C3(1)
1100 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1): D4(I) = A3(1) * E3(I + 1)
- A3(I + 1) * E3(1)
1110 NEXT I
1120 FOR I = 1 TO 3
1130 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1): B5(I) = A4(1) * C4(I + 1)
- A4(I + 1) * C4(1)
1140 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
1150 NEXT I
1160 DETA11(K, J) = (1 / ((E(K, J, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
* (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
1170 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
- A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
1180 DET11(K, J) = DETA11(K, J) * DET
1190 T11(K, J) = DET11(K, J) / DETA
1200 NEXT J: NEXT K
1210 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
1220 A1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
1230 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
1240 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
1250 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
1260 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
1270 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
1280 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
1290 NEXT I
1300 FOR I = 1 TO 6
1310 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1):
B2(I) = A1(1) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(1)
1320 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1):
D2(I) = A1(1) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(1)
1330 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1):
F2(I) = A1(1) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(1)
1340 NEXT I
1350 FOR I = 1 TO 5
1360 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1):
B3(I) = A2(1) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(1)
1370 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1):
D3(I) = A2(1) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(1)
1380 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)

```



```

1390 NEXT I
1400 FOR I = 1 TO 4
1410 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1):
      B4(I) = A3(1) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(1)
1420 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1):
      D4(I) = A3(1) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(1)
1430 NEXT I
1440 FOR I = 1 TO 3
1450 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1):
      B5(I) = A4(1) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(1)
1460 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
1470 NEXT I
1480 DETA12(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
1490 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
1500 DET12(K, J) = DETA12(K, J) * DET
1510 T12(K, J) = DET12(K, J) / DETA
1520 NEXT J: NEXT K
1530 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
1540 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
1550 B1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
1560 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
1570 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
1580 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
1590 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
1600 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
1610 NEXT I
1620 FOR I = 1 TO 6
1630 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1): B2(I) = A1(1) * C1(I + 1)
      - A1(I + 1) * C1(1)
1640 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1): D2(I) = A1(1) * E1(I + 1)
      - A1(I + 1) * E1(1)
1650 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1): F2(I) = A1(1) * G1(I + 1)
      - A1(I + 1) * G1(1)
1660 NEXT I
1670 FOR I = 1 TO 5
1680 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1): B3(I) = A2(1) * C2(I + 1)
      - A2(I + 1) * C2(1)
1690 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1): D3(I) = A2(1) * E2(I + 1)
      - A2(I + 1) * E2(1)
1700 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
1710 NEXT I
1720 FOR I = 1 TO 4

```

```

1730 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1): B4(I) = A3(1) * C3(I + 1)
      - A3(I + 1) * C3(1)
1740 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1): D4(I) = A3(1) * E3(I + 1)
      - A3(I + 1) * E3(1)
1750 NEXT I
1760 FOR I = 1 TO 3
1770 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1): B5(I) = A4(1) * C4(I + 1)
      - A4(I + 1) * C4(1)
1780 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
1790 NEXT I
1800 DETA21(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
1810 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
1820 DET21(K, J) = DETA21(K, J) * DET
1830 T21(K, J) = DET21(K, J) / DETA
1840 NEXT J: NEXT K
1850 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
1860 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
1870 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
1880 C1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
1890 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
1900 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
1910 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
1920 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
1930 NEXT I
1940 FOR I = 1 TO 6
1950 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1):
      B2(I) = A1(1) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(1)
1960 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1):
      D2(I) = A1(1) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(1)
1970 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1):
      F2(I) = A1(1) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(1)
1980 NEXT I
1990 FOR I = 1 TO 5
2000 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1):
      B3(I) = A2(1) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(1)
2010 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1):
      D3(I) = A2(1) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(1)
2020 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
2030 NEXT I
2040 FOR I = 1 TO 4
2050 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1):
      B4(I) = A3(1) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(1)

```

```

2060 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1):
      D4(I) = A3(1) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(1)
2070 NEXT I
2080 FOR I = 1 TO 3
2090 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1):
      B5(I) = A4(1) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(1)
2100 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
2110 NEXT I
2120 DETA22(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
2130 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2)
      * C5(3) - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
2140 DET22(K, J) = DETA22(K, J) * DET
2150 T22(K, J) = DET22(K, J) / DETA
2160 NEXT J: NEXT K
2170 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
2180 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
2190 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
2200 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
2210 D1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
2220 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
2230 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
2240 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
2250 NEXT I
2260 FOR I = 1 TO 6
2270 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1):
      B2(I) = A1(1) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(1)
2280 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1):
      D2(I) = A1(1) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(1)
2290 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1):
      F2(I) = A1(1) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(1)
2300 NEXT I
2310 FOR I = 1 TO 5
2320 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1):
      B3(I) = A2(1) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(1)
2330 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1):
      D3(I) = A2(1) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(1)
2340 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
2350 NEXT I
2360 FOR I = 1 TO 4
2370 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1):
      B4(I) = A3(1) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(1)
2380 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1):
      D4(I) = A3(1) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(1)

```

```

2390 NEXT I
2400 FOR I = 1 TO 3
2410 A5(I) = A4(I) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(I):
      B5(I) = A4(I) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(I)
2420 C5(I) = A4(I) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(I)
2430 NEXT I
2440 DETA33(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
2450 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
2460 DET33(K, J) = DETA33(K, J) * DET
2470 T33(K, J) = DET33(K, J) / DETA
2480 NEXT J: NEXT K
2490 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
2500 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
2510 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
2520 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
2530 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
2540 E1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
2550 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
2560 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
2570 NEXT I
2580 FOR I = 1 TO 6
2590 A2(I) = A1(I) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(I):
      B2(I) = A1(I) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(I)
2600 C2(I) = A1(I) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(I):
      D2(I) = A1(I) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(I)
2610 E2(I) = A1(I) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(I):
      F2(I) = A1(I) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(I)
2620 NEXT I
2630 FOR I = 1 TO 5
2640 A3(I) = A2(I) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(I):
      B3(I) = A2(I) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(I)
2650 C3(I) = A2(I) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(I):
      D3(I) = A2(I) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(I)
2660 E3(I) = A2(I) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(I)
2670 NEXT I
2680 FOR I = 1 TO 4
2690 A4(I) = A3(I) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(I):
      B4(I) = A3(I) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(I)
2700 C4(I) = A3(I) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(I):
      D4(I) = A3(I) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(I)
2710 NEXT I
2720 FOR I = 1 TO 3

```

```

2730 A5(I) = A4(I) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(I):
      B5(I) = A4(I) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(I)
2740 C5(I) = A4(I) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(I)
2750 NEXT I
2760 DETA34(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
2770 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
2780 DET34(K, J) = DETA34(K, J) * DET
2790 T34(K, J) = DET34(K, J) / DETA
2800 NEXT J: NEXT K
2810 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
2820 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
2830 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
2840 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
2850 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
2860 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
2870 F1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
2880 G1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 4, 1)
2890 NEXT I
2900 FOR I = 1 TO 6
2910 A2(I) = A1(I) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(I):
      B2(I) = A1(I) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(I)
2920 C2(I) = A1(I) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(I):
      D2(I) = A1(I) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(I)
2930 E2(I) = A1(I) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(I):
      F2(I) = A1(I) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(I)
2940 NEXT I
2950 FOR I = 1 TO 5
2960 A3(I) = A2(I) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(I):
      B3(I) = A2(I) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(I)
2970 C3(I) = A2(I) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(I):
      D3(I) = A2(I) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(I)
2980 E3(I) = A2(I) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(I)
2990 NEXT I
3000 FOR I = 1 TO 4
3010 A4(I) = A3(I) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(I):
      B4(I) = A3(I) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(I)
3020 C4(I) = A3(I) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(I):
      D4(I) = A3(I) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(I)
3030 NEXT I
3040 FOR I = 1 TO 3
3050 A5(I) = A4(I) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(I):
      B5(I) = A4(I) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(I)

```

```

3060 C5(I) = A4(1) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(1)
3070 NEXT I
3080 DETA43(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
3090 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
3100 DET43(K, J) = DETA43(K, J) * DET
3110 T43(K, J) = DET43(K, J) / DETA
3120 NEXT J: NEXT K
3130 FOR K = 1 TO 4: FOR J = 1 TO 4: FOR I = 1 TO 7
3140 A1(I) = L(1, 1, 1) * L(1, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(1, 2, 1)
3150 B1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 1, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 1, 1)
3160 C1(I) = L(1, 1, 1) * L(2, 2, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(2, 2, 1)
3170 D1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 3, 1)
3180 E1(I) = L(1, 1, 1) * L(3, 4, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(3, 4, 1)
3190 F1(I) = L(1, 1, 1) * L(4, 3, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * L(4, 3, 1)
3200 G1(I) = L(1, 1, 1) * E(K, J, I + 1) - L(1, 1, I + 1) * E(K, J, 1)
3210 NEXT I
3220 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1):
      B5(I) = A4(1) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(1)
3230 FOR I = 1 TO 6
3240 A2(I) = A1(1) * B1(I + 1) - A1(I + 1) * B1(1):
      B2(I) = A1(1) * C1(I + 1) - A1(I + 1) * C1(1)
3250 C2(I) = A1(1) * D1(I + 1) - A1(I + 1) * D1(1):
      D2(I) = A1(1) * E1(I + 1) - A1(I + 1) * E1(1)
3260 E2(I) = A1(1) * F1(I + 1) - A1(I + 1) * F1(1):
      F2(I) = A1(1) * G1(I + 1) - A1(I + 1) * G1(1)
3270 NEXT I
3280 FOR I = 1 TO 5
3290 A3(I) = A2(1) * B2(I + 1) - A2(I + 1) * B2(1):
      B3(I) = A2(1) * C2(I + 1) - A2(I + 1) * C2(1)
3300 C3(I) = A2(1) * D2(I + 1) - A2(I + 1) * D2(1):
      D3(I) = A2(1) * E2(I + 1) - A2(I + 1) * E2(1)
3310 E3(I) = A2(1) * F2(I + 1) - A2(I + 1) * F2(1)
3320 NEXT I
3330 FOR I = 1 TO 4
3340 A4(I) = A3(1) * B3(I + 1) - A3(I + 1) * B3(1):
      B4(I) = A3(1) * C3(I + 1) - A3(I + 1) * C3(1)
3350 C4(I) = A3(1) * D3(I + 1) - A3(I + 1) * D3(1):
      D4(I) = A3(1) * E3(I + 1) - A3(I + 1) * E3(1)
3360 NEXT I
3370 FOR I = 1 TO 3
3380 A5(I) = A4(1) * B4(I + 1) - A4(I + 1) * B4(1):
      B5(I) = A4(1) * C4(I + 1) - A4(I + 1) * C4(1)

```

```

3390 C5(I) = A4(I) * D4(I + 1) - A4(I + 1) * D4(I)
3400 NEXT I
3410 DETA44(K, J) = (1 / ((L(1, 1, 1) ^ 6) * (A1(1) ^ 5) * (A2(1) ^ 4)
      * (A3(1) ^ 3) * (A4(1) ^ 2)))
3420 DET = A5(1) * (B5(2) * C5(3) - B5(3) * C5(2)) - B5(1) * (A5(2) * C5(3)
      - A5(3) * C5(2)) + C5(1) * (A5(2) * B5(3) - A5(3) * B5(2))
3430 DET44(K, J) = DETA44(K, J) * DET
3440 T44(K, J) = DET44(K, J) / DETA
3450 NEXT J: NEXT K
3460 REM " Iteration Constants      "
3470 CL11 = H / (MC(1) * SQR(1 - ML(1) ^ 2)):
      CH1 = ST + (S0 - ST) * (1 - MC(1) ^ 2)
3480 CL12 = H / (MC(2) * SQR(1 - ML(1) ^ 2)):
      CH2 = ST + (S0 - ST) * (1 - MC(2) ^ 2)
3490 CL21 = H / (MC(1) * SQR(1 - ML(2) ^ 2)):
      CL22 = H / (MC(2) * SQR(1 - ML(2) ^ 2))
3500 TW111 = (T11(1, 1) + T11(1, 2) + T11(1, 3) + T11(1, 4) + T11(4, 1)
      + T11(4, 2) + T11(4, 3) + T11(4, 4)) * WL(1)
3510 TW112 = (T11(2, 1) + T11(2, 2) + T11(2, 3) + T11(2, 4) + T11(3, 1)
      + T11(3, 2) + T11(3, 3) + T11(3, 4)) * WL(2)
3520 TW121 = (T12(1, 1) + T12(1, 2) + T12(1, 3) + T12(1, 4) + T12(4, 1)
      + T12(4, 2) + T12(4, 3) + T12(4, 4)) * WL(1)
3530 TW122 = (T12(2, 1) + T12(2, 2) + T12(2, 3) + T12(2, 4) + T12(3, 1)
      + T12(3, 2) + T12(3, 3) + T12(3, 4)) * WL(2)
3540 TW211 = (T21(1, 1) + T21(1, 2) + T21(1, 3) + T21(1, 4) + T21(4, 1)
      + T21(4, 2) + T21(4, 3) + T21(4, 4)) * WL(1)
3550 TW212 = (T21(2, 1) + T21(2, 2) + T21(2, 3) + T21(2, 4) + T21(3, 1)
      + T21(3, 2) + T21(3, 3) + T21(3, 4)) * WL(2)
3560 TW221 = (T22(1, 1) + T22(1, 2) + T22(1, 3) + T22(1, 4) + T22(4, 1)
      + T22(4, 2) + T22(4, 3) + T22(4, 4)) * WL(1)
3570 TW222 = (T22(2, 1) + T22(2, 2) + T22(2, 3) + T22(2, 4) + T22(3, 1)
      + T22(3, 2) + T22(3, 3) + T22(3, 4)) * WL(2)
3580 TW331 = (T33(1, 1) + T33(1, 2) + T33(1, 3) + T33(1, 4) + T33(4, 1)
      + T33(4, 2) + T33(4, 3) + T33(4, 4)) * WL(1)
3590 TW332 = (T33(2, 1) + T33(2, 2) + T33(2, 3) + T33(2, 4) + T33(3, 1)
      + T33(3, 2) + T33(3, 3) + T33(3, 4)) * WL(2)
3600 TW341 = (T34(1, 1) + T34(1, 2) + T34(1, 3) + T34(1, 4) + T34(4, 1)
      + T34(4, 2) + T34(4, 3) + T34(4, 4)) * WL(1)
3610 TW342 = (T34(2, 1) + T34(2, 2) + T34(2, 3) + T34(2, 4) + T34(3, 1)
      + T34(3, 2) + T34(3, 3) + T34(3, 4)) * WL(2)
3620 TW431 = (T43(1, 1) + T43(1, 2) + T43(1, 3) + T43(1, 4) + T43(4, 1)
      + T43(4, 2) + T43(4, 3) + T43(4, 4)) * WL(1)
3630 TW432 = (T43(2, 1) + T43(2, 2) + T43(2, 3) + T43(2, 4) + T43(3, 1)
      + T43(3, 2) + T43(3, 3) + T43(3, 4)) * WL(2)

```


3640 TW441 = (T44(1, 1) + T44(1, 2) + T44(1, 3) + T44(1, 4) + T44(4, 1)
 + T44(4, 2) + T44(4, 3) + T44(4, 4)) * WL(1)
 3650 TW442 = (T44(2, 1) + T44(2, 2) + T44(2, 3) + T44(2, 4) + T44(3, 1)
 + T44(3, 2) + T44(3, 3) + T44(3, 4)) * WL(2)
 3660 PA1 = -CL11 * CH1 * T11(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 3670 PA2 = -CL11 * CH1 * T12(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 3680 PA3 = -CL11 * CH1 * T21(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 3690 PA4 = -CL11 * CH1 * T22(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 3700 PA5 = -CL11 * CH1 * T33(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 3710 PA6 = -CL11 * CH1 * T34(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 3720 PA7 = -CL11 * CH1 * T43(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 3730 PA8 = -CL11 * CH1 * T44(1, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 3740 PB1 = -CL12 * CH2 * T11(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 3750 PB2 = -CL12 * CH2 * T12(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 3760 PB3 = -CL12 * CH2 * T21(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 3770 PB4 = -CL12 * CH2 * T22(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 3780 PB5 = -CL12 * CH2 * T33(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 3790 PB6 = -CL12 * CH2 * T34(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 3800 PB7 = -CL12 * CH2 * T43(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 3810 PB8 = -CL12 * CH2 * T44(1, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 3820 PC1 = CL12 * CH2 * T11(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 3830 PC2 = CL12 * CH2 * T12(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 3840 PC3 = CL12 * CH2 * T21(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 3850 PC4 = CL12 * CH2 * T22(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 3860 PC5 = CL12 * CH2 * T33(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 3870 PC6 = CL12 * CH2 * T34(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 3880 PC7 = CL12 * CH2 * T43(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 3890 PC8 = CL12 * CH2 * T44(1, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 3900 PD1 = CL11 * CH1 * T11(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 3910 PD2 = CL11 * CH1 * T12(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 3920 PD3 = CL11 * CH1 * T21(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 3930 PD4 = CL11 * CH1 * T22(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 3940 PD5 = CL11 * CH1 * T33(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 3950 PD6 = CL11 * CH1 * T34(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 3960 PD7 = CL11 * CH1 * T43(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 3970 PD8 = CL11 * CH1 * T44(1, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 3980 QA1 = -CL21 * CH1 * T11(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 3990 QA2 = -CL21 * CH1 * T12(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4000 QA3 = -CL21 * CH1 * T21(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4010 QA4 = -CL21 * CH1 * T22(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4020 QA5 = -CL21 * CH1 * T33(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4030 QA6 = -CL21 * CH1 * T34(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4040 QA7 = -CL21 * CH1 * T43(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4050 QA8 = -CL21 * CH1 * T44(2, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)

4060 QB1 = -CL22 * CH2 * T11(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4070 QB2 = -CL22 * CH2 * T12(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4080 QB3 = -CL22 * CH2 * T21(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4090 QB4 = -CL22 * CH2 * T22(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4100 QB5 = -CL22 * CH2 * T33(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4110 QB6 = -CL22 * CH2 * T34(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4120 QB7 = -CL22 * CH2 * T43(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4130 QB8 = -CL22 * CH2 * T44(2, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4140 QC1 = CL22 * CH2 * T11(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4150 QC2 = CL22 * CH2 * T12(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4160 QC3 = CL22 * CH2 * T21(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4170 QC4 = CL22 * CH2 * T22(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4180 QC5 = CL22 * CH2 * T33(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4190 QC6 = CL22 * CH2 * T34(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4200 QC7 = CL22 * CH2 * T43(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4210 QC8 = CL22 * CH2 * T44(2, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4220 QD1 = CL21 * CH1 * T11(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4230 QD2 = CL21 * CH1 * T12(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4240 QD3 = CL21 * CH1 * T21(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4250 QD4 = CL21 * CH1 * T22(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4260 QD5 = CL21 * CH1 * T33(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4270 QD6 = CL21 * CH1 * T34(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4280 QD7 = CL21 * CH1 * T43(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4290 QD8 = CL21 * CH1 * T44(2, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4300 RA1 = -CL21 * CH1 * T11(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4310 RA2 = -CL21 * CH1 * T12(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4320 RA3 = -CL21 * CH1 * T21(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4330 RA4 = -CL21 * CH1 * T22(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4340 RA5 = -CL21 * CH1 * T33(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4350 RA6 = -CL21 * CH1 * T34(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4360 RA7 = -CL21 * CH1 * T43(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4370 RA8 = -CL21 * CH1 * T44(3, 1) + CL21 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4380 RB1 = -CL22 * CH2 * T11(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4390 RB2 = -CL22 * CH2 * T12(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4400 RB3 = -CL22 * CH2 * T21(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4410 RB4 = -CL22 * CH2 * T22(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4420 RB5 = -CL22 * CH2 * T33(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4430 RB6 = -CL22 * CH2 * T34(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4440 RB7 = -CL22 * CH2 * T43(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4450 RB8 = -CL22 * CH2 * T44(3, 2) + CL22 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4460 RC1 = CL22 * CH2 * T11(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4470 RC2 = CL22 * CH2 * T12(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4480 RC3 = CL22 * CH2 * T21(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4490 RC4 = CL22 * CH2 * T22(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)

4500 RC5 = CL22 * CH2 * T33(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4510 RC6 = CL22 * CH2 * T34(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4520 RC7 = CL22 * CH2 * T43(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4530 RC8 = CL22 * CH2 * T44(3, 3) - CL22 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4540 RD1 = CL21 * CH1 * T11(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4550 RD2 = CL21 * CH1 * T12(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4560 RD3 = CL21 * CH1 * T21(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4570 RD4 = CL21 * CH1 * T22(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4580 RD5 = CL21 * CH1 * T33(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4590 RD6 = CL21 * CH1 * T34(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4600 RD7 = CL21 * CH1 * T43(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4610 RD8 = CL21 * CH1 * T44(3, 4) - CL21 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4620 SA1 = -CL11 * CH1 * T11(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4630 SA2 = -CL11 * CH1 * T12(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4640 SA3 = -CL11 * CH1 * T21(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4650 SA4 = -CL11 * CH1 * T22(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4660 SA5 = -CL11 * CH1 * T33(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4670 SA6 = -CL11 * CH1 * T34(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4680 SA7 = -CL11 * CH1 * T43(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4690 SA8 = -CL11 * CH1 * T44(4, 1) + CL11 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4700 SB1 = -CL12 * CH2 * T11(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4710 SB2 = -CL12 * CH2 * T12(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4720 SB3 = -CL12 * CH2 * T21(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4730 SB4 = -CL12 * CH2 * T22(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4740 SB5 = -CL12 * CH2 * T33(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4750 SB6 = -CL12 * CH2 * T34(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4760 SB7 = -CL12 * CH2 * T43(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4770 SB8 = -CL12 * CH2 * T44(4, 2) + CL12 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4780 SC1 = CL12 * CH2 * T11(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4790 SC2 = CL12 * CH2 * T12(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4800 SC3 = CL12 * CH2 * T21(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4810 SC4 = CL12 * CH2 * T22(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4820 SC5 = CL12 * CH2 * T33(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4830 SC6 = CL12 * CH2 * T34(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4840 SC7 = CL12 * CH2 * T43(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4850 SC8 = CL12 * CH2 * T44(4, 3) - CL12 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)
 4860 SD1 = CL11 * CH1 * T11(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW111 + TW112)
 4870 SD2 = CL11 * CH1 * T12(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW121 + TW122)
 4880 SD3 = CL11 * CH1 * T21(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW211 + TW212)
 4890 SD4 = CL11 * CH1 * T22(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW221 + TW222)
 4900 SD5 = CL11 * CH1 * T33(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW331 + TW332)
 4910 SD6 = CL11 * CH1 * T34(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW341 + TW342)
 4920 SD7 = CL11 * CH1 * T43(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW431 + TW432)
 4930 SD8 = CL11 * CH1 * T44(4, 4) - CL11 * (S0 / 8) * (TW441 + TW442)

```

4940 REM ***** Input For Cell Calculation *****
4950 FOR I = 1 TO N + 1: X1(I, 0) = 1: X2(I, 0) = 1: X3(I, 0) = 1:
      X4(I, 0) = 1: F(I, 0) = 1
4960 Y1(I, 0) = 1: Y2(I, 0) = 1: Y3(I, 0) = 1: Y4(I, 0) = 1
4970 Z1(I, 0) = 1: Z2(I, 0) = 1: Z3(I, 0) = 1: Z4(I, 0) = 1
4980 U1(I, 0) = 1: U2(I, 0) = 1: U3(I, 0) = 1: U4(I, 0) = 1: NEXT I
4990 X3(N + 1, 0) = 0: X4(N + 1, 0) = 0: Y3(N + 1, 0) = 0: Y4(N + 1, 0) = 0:
      Z3(N + 1, 0) = 0: Z4(N + 1, 0) = 0: U3(N + 1, 0) = 0: U4(N + 1, 0) = 0
5000 GOSUB 5040: BEEP
5010 PRINT "Procedure converged with Iteration....."; K
5020 PRINT "Time Required for Calculation....."; TIMES$
5030 PRINT "Number of Cell....."; N: END
5040 REM ***** SUBROUTINE *****
5050 LOCATE 22, 5: PRINT "Iteration Counter:"
5060 LOCATE 22, 40: PRINT "Timer:"
5070 FOR K = 1 TO 9000: FOR I = 1 TO N
5080 X1(I + 1, 1) = 1: X2(I + 1, 1) = 1: Y1(I + 1, 1) = 1: Y2(I + 1, 1) = 1: Z1(I + 1, 1) = 1:
      Z2(I + 1, 1) = 1: U1(I + 1, 1) = 1: U2(I + 1, 1) = 1: X3(N + 1, 1) = 0:
      X4(N + 1, 1) = 0: Y3(N + 1, 1) = 0: Y4(N + 1, 1) = 0: Z3(N + 1, 1) = 0:
      Z4(N + 1, 1) = 0: U3(N + 1, 1) = 0: U4(N + 1, 1) = 0
5090 X1(I + 1, 1) = (1 + PA1) * X1(I, 0) + PA2 * X2(I, 0) + PA3 * Y1(I, 0)
      + PA4 * Y2(I, 0) + PA5 * Z3(I + 1, 0) + PA6 * Z4(I + 1, 0)
      + PA7 * U3(I + 1, 0) + PA8 * U4(I + 1, 0)
5100 X2(I + 1, 1) = PB1 * X1(I, 0) + (1 + PB2) * X2(I, 0) + PB3 * Y1(I, 0)
      + PB4 * Y2(I, 0) + PB5 * Z3(I + 1, 0) + PB6 * Z4(I + 1, 0)
      + PB7 * U3(I + 1, 0) + PB8 * U4(I + 1, 0)
5110 Y1(I + 1, 1) = QA1 * X1(I, 0) + QA2 * X2(I, 0) + (1 + QA3) * Y1(I, 0)
      + QA4 * Y2(I, 0) + QA5 * Z3(I + 1, 0) + QA6 * Z4(I + 1, 0)
      + QA7 * U3(I + 1, 0) + QA8 * U4(I + 1, 0)
5120 Y2(I + 1, 1) = QB1 * X1(I, 0) + QB2 * X2(I, 0) + QB3 * Y1(I, 0)
      + (1 + QB4) * Y2(I, 0) + QB5 * Z3(I + 1, 0) + QB6 * Z4(I + 1, 0)
      + QB7 * U3(I + 1, 0) + QB8 * U4(I + 1, 0)
5130 Z1(I + 1, 1) = Z1(I, 0) + RA1 * X1(I, 0) + RA2 * X2(I, 0)
      + RA3 * Y1(I, 0) + RA4 * Y2(I, 0) + RA5 * Z3(I + 1, 0)
      + RA6 * Z4(I + 1, 0) + RA7 * U3(I + 1, 0) + RA8 * U4(I + 1, 0)
5140 Z2(I + 1, 1) = Z2(I, 0) + RB1 * X1(I, 0) + RB2 * X2(I, 0)
      + RB3 * Y1(I, 0) + RB4 * Y2(I, 0) + RB5 * Z3(I + 1, 0)
      + RB6 * Z4(I + 1, 0) + RB7 * U3(I + 1, 0) + RB8 * U4(I + 1, 0)
5150 U1(I + 1, 1) = U1(I, 0) + SA1 * X1(I, 0) + SA2 * X2(I, 0)
      + SA3 * Y1(I, 0) + SA4 * Y2(I, 0) + SA5 * Z3(I + 1, 0)
      + SA6 * Z4(I + 1, 0) + SA7 * U3(I + 1, 0) + SA8 * U4(I + 1, 0)
5160 U2(I + 1, 1) = U2(I, 0) + SB1 * X1(I, 0) + SB2 * X2(I, 0)
      + SB3 * Y1(I, 0) + SB4 * Y2(I, 0) + SB5 * Z3(I + 1, 0)
      + SB6 * Z4(I + 1, 0) + SB7 * U3(I + 1, 0) + SB8 * U4(I + 1, 0)

```

```

5170 X3(I, 1) = X3(I + 1, 0) - PC1 * X1(I, 0) - PC2 * X2(I, 0)
      - PC3 * Y1(I, 0) - PC4 * Y2(I, 0) - PC5 * Z3(I + 1, 0)
      - PC6 * Z4(I + 1, 0) - PC7 * U3(I + 1, 0) - PC8 * U4(I + 1, 0)
5180 X4(I, 1) = X4(I + 1, 0) - PD1 * X1(I, 0) - PD2 * X2(I, 0)
      - PD3 * Y1(I, 0) - PD4 * Y2(I, 0) - PD5 * Z3(I + 1, 0)
      - PD6 * Z4(I + 1, 0) - PD7 * U3(I + 1, 0) - PD8 * U4(I + 1, 0)
5190 Y3(I, 1) = Y3(I + 1, 0) - QC1 * X1(I, 0) - QC2 * X2(I, 0)
      - QC3 * Y1(I, 0) - QC4 * Y2(I, 0) - QC5 * Z3(I + 1, 0)
      - QC6 * Z4(I + 1, 0) - QC7 * U3(I + 1, 0) - QC8 * U4(I + 1, 0)
5200 Y4(I, 1) = Y4(I + 1, 0) - QD1 * X1(I, 0) - QD2 * X2(I, 0)
      - QD3 * Y1(I, 0) - QD4 * Y2(I, 0) - QD5 * Z3(I + 1, 0)
      - QD6 * Z4(I + 1, 0) - QD7 * U3(I + 1, 0) - QD8 * U4(I + 1, 0)
5210 Z3(I, 1) = -RC1 * X1(I, 0) - RC2 * X2(I, 0) - RC3 * Y1(I, 0)
      - RC4 * Y2(I, 0) + (1 - RC5) * Z3(I + 1, 0) - RC6 * Z4(I + 1, 0)
      - RC7 * U3(I + 1, 0) - RC8 * U4(I + 1, 0)
5220 Z4(I, 1) = -RD1 * X1(I, 0) - RD2 * X2(I, 0) - RD3 * Y1(I, 0)
      - RD4 * Y2(I, 0) - RD5 * Z3(I + 1, 0) + (1 - RD6) * Z4(I + 1, 0)
      - RD7 * U3(I + 1, 0) - RD8 * U4(I + 1, 0)
5230 U3(I, 1) = -SC1 * X1(I, 0) - SC2 * X2(I, 0) - SC3 * Y1(I, 0)
      - SC4 * Y2(I, 0) - SC5 * Z3(I + 1, 0) - SC6 * Z4(I + 1, 0)
      + (1 - SC7) * U3(I + 1, 0) - SC8 * U4(I + 1, 0)
5240 U4(I, 1) = -SD1 * X1(I, 0) - SD2 * X2(I, 0) - SD3 * Y1(I, 0)
      - SD4 * Y2(I, 0) - SD5 * Z3(I + 1, 0) - SD6 * Z4(I + 1, 0)
      - SD7 * U3(I + 1, 0) + (1 - SD8) * U4(I + 1, 0)
5250 NEXT I
5260 LOCATE 22, 25: PRINT K: LOCATE 22, 48: PRINT TIMES$
5270 FOR I = 1 TO N + 1: F(I, 1) = ((X1(I, 1) + X2(I, 1) + X3(I, 1)
      + X4(I, 1) + U1(I, 1) + U2(I, 1) + U3(I, 1) + U4(I, 1)) * WL(1)
      + (Y1(I, 1) + Y2(I, 1) + Y3(I, 1) + Y4(I, 1) + Z1(I, 1) + Z2(I, 1)
      + Z3(I, 1) + Z4(I, 1)) * WL(2)) / 8: NEXT I
5280 IF (F(1, 0) - F(1, 1)) <= TOL THEN 5310 ELSE 5290
5290 FOR I = 1 TO N + 1: X1(I, 0) = X1(I, 1): X2(I, 0) = X2(I, 1):
      X3(I, 0) = X3(I, 1): X4(I, 0) = X4(I, 1): Y1(I, 0) = Y1(I, 1):
      Y2(I, 0) = Y2(I, 1): Y3(I, 0) = Y3(I, 1): Y4(I, 0) = Y4(I, 1)
5300 Z1(I, 0) = Z1(I, 1): Z2(I, 0) = Z2(I, 1): Z3(I, 0) = Z3(I, 1):
      Z4(I, 0) = Z4(I, 1): U1(I, 0) = U1(I, 1): U2(I, 0) = U2(I, 1):
      U3(I, 0) = U3(I, 1): U4(I, 0) = U4(I, 1): F(I, 0) = F(I, 1):
      NEXT I: NEXT K
5310 CLS
5320 PRINT "I   X1(I,1)   Y1(I,1)   Z1(I,1)   U1(I,1)   F(I,1)"
5330 PRINT "==== ===== ===== ===== ===== ====="
5340 FOR I = 1 TO N + 1
5350 F(I, 1) = ((X1(I, 1) + X2(I, 1) + X3(I, 1) + X4(I, 1) + U1(I, 1) + U2(I, 1)
      + U3(I, 1) + U4(I, 1)) * WL(1) + (Y1(I, 1) + Y2(I, 1) + Y3(I, 1) + Y4(I, 1)

```

