

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK ARALIKTA TANIMLI BERNSTEIN TİPLİ BAZI OPERATÖRLERLE
YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELİS EREN

OCAK 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK ARALIKTA TANIMLI BERNSTEIN TIPLI BAZI OPERATÖRLERLE
YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melis EREN

DANIŞMAN : Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

ZONGULDAK

Ocak 2022

KABUL:

Melis EREN tarafından hazırlanan “Simetrik Aralıkta Tanımlı Bernstein Tipli Bazı Operatörlerle Yaklaşım” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 18/01/2022

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi, Göllyaka Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri
Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./...../2022

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Melis EREN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK ARALIKTA TANIMLI BERNSTEIN TİPLİ BAZI OPERATÖRLERLE YAKLAŞIM

Melis EREN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Ocak 2022, 129 sayfa

İlk bölümde; tezde kullanılan önemli teorik bilgiler verilmiştir. Sonraki bölümde; Bernstein polinomlarıyla yaklaşımın önemli özellikleri bir ve iki boyutlu fonksiyonlar için verilmiştir. Daha sonra bir ve iki değişkenli q -Bernstein polinomları ile yaklaşım ve p, q -Bernstein polinomlarının temel özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; genelleştirilmiş Bernstein-Schurer operatörü ile genelleştirilmiş Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörleri tanımlanarak bu operatörlerin Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca her iki operatörün yaklaşım hızı hesabı süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır. Dördüncü bölüm tezin uygulama bölümüdür. Bu bölümde grafik çizimleri ve hata hesabı nümerik olarak verilmiştir. Son bölümde ise tezin sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Korovkin Teoremi, Genelleştirilmiş Bernstein-Schurer Operatörleri, Genelleştirilmiş Bernstein-Schurer-Kantorovich Operatörleri, Süreklilik Modülü.

Bilim Kodu: 403.03.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

APPROXIMATION WITH SOME BERNSTEIN-TYPE OPERATORS DEFINED IN SYMMETRIC INTERVAL

Melis EREN

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Nazmiye GONUL BILGIN

January 2022, 129 pages

In the first part; important theoretical information used are included. In the next section; important properties of the approach with one and two dimensional Bernstein polynomials are given. Then, the basic features of approximation by one and two variable q -Bernstein polynomials and p,q -Bernstein polynomials are given. In third part; generalized Bernstein-Schurer operator and generalized Bernstein-Schurer-Kantorovich operators are defined and it is shown that these operators satisfy the conditions of Korovkin's theorem. In addition, calculation of rate of convergence of both operators was investigated with the help of modulus of continuity. In fourth part is the application part of thesis. In this section, graphic drawings and error calculation are given numerically. In the last chapter, the results are given.

Keywords: Korovkin Theorem, Generalized Bernstein-Schurer Operators, Generalized Bernstein-Schurer-Kantorovich Operators, Modulus of Continuity.

Science Code: 403.03.00



TEŞEKKÜR

Pandemi sürecinin zorlu koşullarına rağmen her an desteğiyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e tezi okuyarak öneri ve görüşleriyle beni yönlendiren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN ve Sayın Doç. Dr. Nejla ÖZMEN hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca desteklerini benden esirgemeyen, hüznün ve sevinçlerimi paylaşarak bugünlere gelmemi sağlayan biricik aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL:	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 $\mathcal{C}[a, b]$ VE $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ UZAYLARI İÇİN YAKLAŞIM TEOREMLERİ	2
1.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ	14
BÖLÜM 2	17
2.1 TEK BOYUTLU BERNSTEIN POLİNOMLARI	17
2.2 İKİ BOYUTLU BERNSTEIN POLİNOMLARI	20
2.3 TEK BOYUTLU q -BERNSTEIN POLİNOMLARI	24
2.4 İKİ BOYUTLU q -BERNSTEIN POLİNOMLARI	33
2.5 (p, q) -BERNSTEIN OPERATÖRÜ	35
BÖLÜM 3	51
3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN-SCHURER OPERATÖRLERİ	51
3.2 GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN-SCHURER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİ	64
BÖLÜM 4	81
BÖLÜM 5	123
5.1 SONUÇLAR	123
5.2 ÖNERİLER	123

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
KAYNAKLAR	125
ÖZGEÇMİŞ.....	129



ŞEKİLLER DİZİNİ

No

Sayfa

Şekil 4.1 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=5$, $m=15$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=7$ (siyah), $n=8$ (turkuaz), $n=10$ (eflatun)).....	81
Şekil 4.2 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=5$, $m=25$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=10$ (kırmızı), $n=15$ (siyah), $n=20$ (turkuaz), $n=25$ (eflatun)).....	83
Şekil 4.3 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=20$, $\xi=10$ ve $\psi=20$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=10$ (siyah), $n=15$ (turkuaz), $n=20$ (eflatun)).....	85
Şekil 4.4 $L_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=40$, $\xi=10$ ve $\psi=17$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=30$ (turkuaz), $n=40$ (eflatun)).....	87
Şekil 4.5 $L_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=65$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=32$ (turkuaz), $n=65$ (eflatun)).....	89
Şekil 4.6 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=5$, $m=15$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=7$ (siyah), $n=8$ (turkuaz), $n=10$ (eflatun)).....	91
Şekil 4.7 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=5$, $m=25$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=10$ (kırmızı), $n=15$ (siyah), $n=20$ (turkuaz), $n=25$ (eflatun)).....	93
Şekil 4.8 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=20$, $\xi=10$ ve $\psi=20$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=10$ (siyah), $n=15$ (turkuaz), $n=20$ (eflatun)).....	95
Şekil 4.9 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=40$, $\xi=10$ ve $\psi=17$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=30$ (turkuaz), $n=40$ (eflatun)).....	97
Şekil 4.10 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($t=10$, $m=65$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=32$ (turkuaz), $n=65$ (eflatun)).....	99



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 (p, q) -Tamsayıya ait formüller (Duran 2016).	38
Çizelge 2.2 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{p,q}$ ifadesinin değerleri.....	41
Çizelge 2.3 (p, q) -Pascal üçgeni.....	41
Çizelge 4.1 $f(x) = x^2$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı.....	101
Çizelge 4.2 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı	105
Çizelge 4.3 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı.....	109
Çizelge 4.4 $f(x) = x^2$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı.....	112
Çizelge 4.5 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı	116
Çizelge 4.6 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı.....	120



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$C[a, b]$: a da soldan b de sağdan da sürekli fonksiyonlar uzayı

$L(f; x)$: Doğrusal pozitif operatörler dizisi

$\|\cdot\|_{C[a, b]}$: $C[a, b]$ uzayında norm

$\check{L}_n(f; x)$: Genelleştirilmiş Bernstein-Schurer operatörü

$\check{K}_n(f; x)$: Genelleştirilmiş Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörü



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşmak, yaklaşım teorisinin temel çalışmalarından biridir. İlk defa 1885’de Weierstrass, kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceğini kanıtlamıştır.

Rus Matematikçi Bernstein 1912 yılında, Weierstrass’ın bu polinomunun nasıl tanımlanabileceği üzerinde çalışmış ve toplam formülüyle bir polinomlar dizisi tanımlamıştır.

1953 yılında Korovkin, doğrusal pozitif operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için üç tane koşulun gerekli ve yeterli olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Bernstein polinomları ile ilgili birçok uygulama ve genelleme yapılmıştır. q -analizin yaklaşım teorisinde klasik analizden daha iyi sonuçlar vermesi nedeniyle literatürdeki birçok operatörün q -genellemesi yapılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bernstein operatörlerinin bir diğer genellemesi de (p, q) -analiz yardımıyla oluşturulmuştur. q -analiz teorisinin temelleri 18. yüzyılda Euler tarafından ortaya konulmuş ve daha sonra q -analizin matematiğin değişik alanlarına uygulamaları yapılarak, bu teori ile ilgili çalışmalar hızla artmıştır.

Bernstein operatörlerinin q -genellemesi ilk defa Lupaş (1987) tarafından çalışılmıştır. Bundan sonra, Phillips (1996) bu operatörün bir genellemesini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

Schurer (1962), negatif olmayan p -tamsayısı yardımıyla, Bernstein operatörlerinin bir genellemesini tanıttı. Daha sonra bu operatörün farklı genellemeleri de oluşturulmuştur.

$C[0,1]$ uzayında tanımlanan Bernstein polinomları, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında yakınsaklık elde edebilmek amacıyla modifiye edilmiştir ve bu modifikasyon ilk defa Kantorovich (1930) tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmanın 3.1 kesiminde sınırları değişken olan bir simetrik aralıkta Bernstein polinomlarını inceleyen Acar ve İzgi'nin (2021) çalışması ile $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Schurer operatörünü inceleyen Keleş ve İzgi'nin (2018) çalışmalarının bir sentezi yapılarak Bernstein-Schurer operatörünün bir genellemesi tanımlanmıştır. Çalışmanın 3.2 kesiminde ise sınırları değişken olan bir simetrik aralıkta Bernstein polinomlarını inceleyen Acar ve İzgi'nin (2021) çalışması ile $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Kantorovich operatörünü inceleyen Kahvecibaşı'nın (2014) çalışmalarını birlikte değerlendirerek Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörünün bir genellemesi verilmiştir.

Tanımlanan operatörlerin; doğrusal pozitifliği, Korovkin teoremi şartlarını sağladığı, $\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ simetrik aralığı üzerinde düzgün yakınsadığı gösterilecektir. Süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Daha sonra bu operatörlerin merkezi momentleri yardımı ile yaklaşımı verilecektir. Son olarak $\tilde{L}_n(f; x)$ ve $\tilde{K}_n(f; x)$ ile gösterilen operatörlerin f fonksiyonuna yaklaşımı grafikler ve nümerik hesap tablosu ile gösterilecektir.

1.1 $C[a, b]$ VE $C(D)$ UZAYLARI İÇİN YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Tanım 1.1.1

$[a, b]$ aralığında tanımlı, aralıkta sürekli olmakla birlikte a da soldan b de sağdan sürekli olan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ de tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı denir. Kısaca $C[a, b]$ şeklinde sembolize edilir (Altomare and Campiti 1994).

Tanım 1.1.2

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Böylece

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.1)$$

ile $C[a, b]$ de bir norm tanımlanır.

Bu durumda $C[a, b]$ uzayı açık bir şekilde normlu doğrusal bir uzaydır (Rudin 1991).

Önerme 1.1.1

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sıfır dizisi olsun. $(f_n) \subset C[a, b]$ fonksiyon dizisi $C[a, b]$ uzayında bir h fonksiyonuna düzgün yakınsar $\Leftrightarrow$ her $x \in [a, b]$ için,

$$|f_n(x) - h(x)| < M \cdot \varepsilon_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısı vardır (Coşkun 1998).

Tanım 1.1.3

Her $f \in X$ için,

$$L(f; x) = h(x) \tag{1.2}$$

olacak şekilde $h \in Y$ varsa L ye X 'den Y 'ye bir operatördür denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.4

X ve Y doğrusal uzay olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in X$ olacak şekilde

X 'den Y 'ye tanımlı L operatörü için,

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x) \tag{1.3}$$

eşitliği sağlanıyorsa X üzerindeki L 'ye doğrusal bir operatör denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.5

$$X^+ := \{f \in X: f(x) \geq 0\} \text{ ve } Y^+ := \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$$

olacak şekilde tanımlanan uzaylar olsun. $L: X \rightarrow Y$ doğrusal operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ koşulunu sağlayan L 'ye doğrusal pozitif operatör denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Örnek 1.1.1

1912 yılında S. Bernstein $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyonlara yakınsayan bir polinom tanımlamıştır. Bu polinom;

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde dir. Açıkça $B_n(f; x)$ pozitif doğrusal bir operatördür. Bu operatör Bernstein operatörü şeklinde adlandırılır (Bernstein 1912).

Uyarı 1.1.1

Pozitif ve doğrusal operatörler negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.1.2

Pozitif ve doğrusal operatörler monotondur (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.1.2

X, Y normlu uzaylar olsun. $L: X \rightarrow Y$ tanımlı, doğrusal pozitif operatörü için

$$|L(f; x)| \leq L_n(|f|; x) \tag{1.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.6

Her $f \in X$ için $L: X \rightarrow Y$ doğrusal bir operatör olsun.

$$\|L(f, x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. L operatörünün normu;

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf\{C: \|L(f; x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X\} \tag{1.5}$$

ile gösterilir (Rudin 1991).

Uyarı 1.1.3

$\|f\|_X \neq 0$ olsun. $L: X \rightarrow Y$ doğrusal operatörü sınırlı olsun. Bu durumda

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \quad (1.6)$$

eşitliği sağlanır (Rudin 1991).

Teorem 1.1.1 (Korovkin Teoremi)

$n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [a, b]$ olsun. $m = 0, 1, 2$ olmak üzere L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0 \quad (1.7)$$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı ve $[a, b]$ aralığında sürekli, a da soldan b de sağdan sürekli olan her f için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0 \quad (1.8)$$

eşitliği sağlanır. (Korovkin 1960).

Kanıt

f 'nin sınırlılığından

$$|f(x)| \leq M$$

koşuluna uygun en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a, b]$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için $x \in [a, b]$, $t \in (-\infty, +\infty)$ ve $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır.

Ayrıca, $[a, b]$ 'nin elemanı olan her x ve $t \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur.

$x \in [a, b]$, $t \notin [a, b]$ olsun. f , a da soldan b de sağdan sürekli olmasından dolayı $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği yine geçerlidir.

$|t - x| \geq \delta$ olursa $1 \leq \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$ elde edilir ve $2M \leq \frac{2M}{\delta^2} |t - x|^2$ eşitsizliği sağlanır.

Üçgen eşitsizliği yardımıyla yukarıdaki eşitsizliklerden her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| < 2M < \frac{2M}{\delta^2} |t - x|^2 + \varepsilon \quad (1.9)$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)L_n(1, x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)[L_n(1, x) - 1]\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)[L_n(1, x) - 1]\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Kabulden ε_n sıfır dizisi için

$$\|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacağından,

$$\|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \|f\|_{C[a,b]} \quad (1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (1.9) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} L_n(f(t) - f(x), x) &\leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 + \varepsilon, x\right) \\ &= L_n\left(\frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2, x\right) + L_n(\varepsilon, x) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) + L_n(\varepsilon, x) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2, x) - L_n(2tx, x) + L_n(x^2, x)) + \varepsilon L_n(1, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2, x) - 2xL_n(t, x) + L_n(1, x)x^2) + \varepsilon L_n(1, x) \\
&= \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2, x) - x^2 + x^2 - 2xL_n(t, x) + 2x^2 - 2x^2 + L_n(1, x)x^2 - x^2 + x^2) \\
&\quad + \varepsilon L_n(1, x) - \varepsilon + \varepsilon \\
&= \frac{2M}{\delta^2} [(L_n(t^2, x) - x^2) + x^2 - 2x(L_n(t, x) - x) - 2x^2 + x^2(L_n(1, x) - x) + x^2] \\
&\quad + \varepsilon(L_n(1, x) - 1) + \varepsilon \\
&\text{eşitsizliği geçerli olup} \\
&\|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |L_n(f(t) - f(x), x)| \\
&\leq \max_{x \in [a,b]} L_n(|f(t) - f(x)|, x) \\
&\leq \max_{x \in [a,b]} \left\{ \frac{2M}{\delta^2} [(L_n(t^2, x) - x^2) + x^2 - 2x(L_n(t, x) - x) - 2x^2 + x^2(L_n(1, x) - x) + x^2] \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon(L_n(1, x) - 1) + \varepsilon \right\} \\
&\leq \frac{2M}{\delta^2} \left[\max_{x \in [a,b]} (L_n(t^2, x) - x^2) - \max_{x \in [a,b]} 2x(L_n(t, x) - x) + \max_{x \in [a,b]} x^2(L_n(1, x) - 1) \right] \\
&\quad + \varepsilon \max_{x \in [a,b]} (L_n(1, x) - 1) + \varepsilon \\
&\leq \frac{2M}{\delta^2} (\|L_n(t^2, x) - x^2\|_{C[a,b]} - 2a\|L_n(t, x) - x\|_{C[a,b]} + b^2\|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]}) \\
&\quad + \varepsilon\|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} + \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (1.10) eşitsizliğinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa;

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \|f\|_{C[a,b]} \\
&\leq \frac{2M}{\delta^2} (\varepsilon_n - 2a\varepsilon_n + b^2\varepsilon_n) + \varepsilon\varepsilon_n + \varepsilon + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $C[a, b]$ 'nin elemanı olan her f için $L_n(f, x)$, f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Teorem 1.1.2 (Volkov Teoremi)

$D = [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere x -eksenindeki $[0, 1]$ aralığı n ardışık parçaya bölünsün.

$$0 = \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \dots < \alpha_{k,n} < \dots < \alpha_{n,n} = 1$$

parçaların uç noktaları olsun. y -eksenindeki $[0, 1]$ aralığı m ardışık parçaya bölünsün.

$$0 = \beta_{1,m} < \beta_{2,m} < \dots < \beta_{j,m} < \dots < \beta_{m,m} = 1$$

parçaların uç noktaları olsun. Her $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $m, n = 0, 1, 2, \dots$ için $P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$, D üzerinde sürekli pozitif fonksiyonlar olsun. D üzerinde sürekli f fonksiyonu için

$$L_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

şeklinde ile tanımlı $(L_{n,m}f)$ doğrusal pozitif operatör dizileri

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} = 0, \quad (1.11)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(D)} = 0, \quad (1.12)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - y \right\|_{C(D)} = 0, \quad (1.13)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} = 0 \quad (1.14)$$

koşulları sağlansın. D bölgesinde sürekli, tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı ve gerçel değerli her f için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} = 0 \quad (1.15)$$

ifadesi sağlanır (Volkov 1957).

Kanıt

$$L_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

olarak tanımlı $L_{n,m}(f; x, y)$ polinomları (1.11) – (1.14) koşullarını sağlasın. $C(D)$ 'nin elemanı olan her f için

$$\begin{aligned} L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - f(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - f(x, y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left((f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)) P_{k,j}^{(n,m)} \right) + f(x, y) \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right) \end{aligned}$$

$$|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left((f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)) P_{k,j}^{(n,m)} \right) + f(x, y) \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} + |f(x, y)| \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in D} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \max_{(x,y) \in D} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} \\ &+ \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)| \max_{(x,y) \in D} \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right| \end{aligned}$$

olduğundan norma geçilerek

$$\begin{aligned} \|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} \right\|_{C(D)} \\ &+ \|f\|_{C(D)} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

olarak tanımlanırsa $M > 0$ için

$$\|f\|_{C(D)} = M \|A_{n,m}\|_{C(D)}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} \right\|_{C(D)} \\ &+ M \|A_{n,m}\|_{C(D)} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} \end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan $f \in C(D)$ olduğundan f fonksiyonu sınırlıdır. O halde her $(x, y) \in D$ için

$$|f(x, y)| \leq M$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})$ noktaları D bölgesi üzerinde olup her $j = 0, 1, \dots, m$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ için

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\vartheta_{k,j} = (\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}), \vartheta = (x, y)$$

$$\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta) = \sqrt{(\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2}$$

eşitlikleri kullanılarak kapalı bir D bölgesi üzerinde sürekli olan f fonksiyonu düzgün sürekli olacaktır. Her $\varepsilon > 0$ için $\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta) < \delta$ iken fonksiyonun düzgün sürekliliği kullanılarak

$$|f(\vartheta_{k,j}) - f(\vartheta)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

$\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta) \geq \delta$ için ise f' 'in sınırlılığından

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M$$

durumu sağlanır.

$$\frac{\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta)}{\delta} \geq 1$$

olduğundan

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M \frac{\sigma^2(\vartheta_{k,j}, \vartheta)}{\delta^2}$$

olacaktır.

O halde $\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta) < \delta$ ve $\sigma(\vartheta_{k,j}, \vartheta) \geq \delta$ durumları birlikte düşünülürse her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| < \varepsilon + 2M \frac{\sigma^2(\vartheta_{k,j}, \vartheta)}{\delta^2}$$

eşitsizliği geçerli olur.

$A_{n,m}$ toplamı için

$$\begin{aligned} A_{n,m} &< \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\varepsilon + 2M \frac{\sigma^2(\vartheta_{k,j}, \vartheta)}{\delta^2} \right) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \sigma^2(\vartheta_{k,j}, \vartheta) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\ &= \varepsilon A'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2} A''_{n,m} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup, norm özellikleri yardımıyla bu eşitsizlik

$$\|A_{n,m}\|_{C(D)} < \varepsilon \|A'_{n,m}\|_{C(D)} + \frac{2M}{\delta^2} \|A''_{n,m}\|_{C(D)} \quad (1.16)$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon A'_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned} \varepsilon A'_{n,m} &= \varepsilon \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + \varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right) + \varepsilon \end{aligned}$$

olarak düşünülürse

$$\varepsilon \|A'_{n,m}\|_{C(D)} \leq \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)} + \varepsilon \quad (1.17)$$

eşitsizliği yazılabilir. σ fonksiyonunun tanımından

$$\sigma^2(\vartheta_{k,j}, \vartheta) = (\beta_{j,m} - y)^2 + (\alpha_{k,n} - x)^2 = (x^2 + y^2) + (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) - 2\beta_{j,m}y - 2\alpha_{k,n}x$$

eşitliği geçerli olur. Böylece $A''_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
A''_{n,m} &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 2x \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&\quad - 2y \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + (x^2 + y^2) \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right] + \left[x - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right] 2x \\
&\quad + 2y \left[y - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|A''_{n,m}\|_{C(D)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} \\
&\quad + \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(D)} 2\|x\|_{C(D)} \\
&\quad + \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - y \right\|_{C(D)} 2\|y\|_{C(D)} \tag{1.18}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(1.16) eşitsizliğinde (1.17) ve (1.18) durumları dikkate alınarak;

$$\|A_{n,m}\|_{C(D)} < \varepsilon + \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(D)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(D)} \\
& + \frac{4M^2}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - x \right\|_{C(D)} + \frac{4M^2}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y \right\|_{C(D)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece hipotezden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \right\|_{C(D)} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

1.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ

Bu kesimde, bir ve iki boyutlu fonksiyonlar için süreklilik modülü ve özellikleri ayrı ayrı verilerek yaklaşım hızı hesabı bölümleri için hazırlık yapılacaktır.

Tanım 1.2.1

$I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ için f ; I da sınırlı ve I kümesinin çapı $d = d(I)$ olsun.

$$w(f, \delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\} \quad (1.19)$$

$w:]0, d] \rightarrow [0, \infty[$ fonksiyonuna I 'daki f fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Natanson 1964).

Süreklilik modülü için bazı özellikler Uyarı 1.2.1 de verilmiştir (Altomare and Campiti 1994).

Uyarı 1.2.1

i. $\delta > 0$ için $w(f, \delta) \geq 0$ dır.

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w(f, n\delta) \leq nw(f, \delta)$$

sağlanır.

iii. $w(f, \delta)$ monoton artandır.

iv. I da sürekli bir f fonksiyonu için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(f, \delta) = 0$$

eşitliği sağlanır.

v. λ pozitif reel sayısı için

$$w(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)w(f, \delta)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 1.2.2

Sınırlı bir $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in K \subset D$ kompakt bir bölgesi için

$$w(f, \delta) = \sup \left\{ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| : x, y \in K, \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \leq \delta \right\} \quad (1.20)$$

ifadesine tam süreklilik modülü denir (Gal and Anastassiou 2000).

Tanım 1.2.3

Sınırlı $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir sınırlı fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bölgesi, $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ için

$$w_1(f, \delta) = \sup \{ |f(x_1, y) - f(x_2, y)| : (x_1, y), (x_2, y) \in K, |x_1 - x_2| \leq \delta \}$$

$$w_2(f, \delta) = \sup \{ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| : (x, y_1), (x, y_2) \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta \}$$

fonksiyonlarına, f 'nin x ile y için kısmi süreklilik modülü adı verilir (Gal and Anastassiou 2000).

Teorem 1.2.1 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

X iç çarpım uzayında $x, y \in X$ olsun. O zaman

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

dir. Eşitlik geçerlidir ancak ve ancak $\alpha \in \mathbb{F}$ için $y - \alpha x = 0$ dır (Rudin 1991).

Teorem 1.2.2

$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathbb{F}^k$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^k |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^2 \right)^{1/2} \quad (1.21)$$

ifadesi geçerlidir. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Rudin 1991).

BÖLÜM 2

Bu bölümde bir ve iki boyutlu Bernstein polinomlarının önemli özellikleri tanıtılacaktır. Öncelikle klasik Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri verildikten sonra q -Bernstein ve (p, q) -Bernstein polinomlarına ilişkin genel özelliklerden bahsedilecektir.

2.1 TEK BOYUTLU BERNSTEIN POLİNOMLARI

1912 de S. Bernstein; $[0,1]$ aralığında verilen sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinomları tanıtmıştır.

Tanım 2.1.1

$0 \leq x \leq 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için Bernstein polinomu;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n}\right) (1-x)^{n-k} \quad (2.1)$$

toplamıyla gösterilir (Bernstein 1912).

Uyarı 2.1.1

$x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f; x)$ pozitif doğrusal bir operatördür.

Önerme 2.1.1

Bernstein polinomu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Bernstein 1912).

$$\text{i. } B_n(1; x) = 1, \quad (2.2)$$

$$\text{ii. } B_n(t; x) = x, \quad (2.3)$$

$$\text{iii. } B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}. \quad (2.4)$$

Kanıt

i. $f(t) = 1$ için

$$B_n(1; x) = \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= (1-x+x)^n$$

$$= 1$$

olur.

ii. Benzer şekilde $f(t) = t$ için

$$B_n(t; x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^n x^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k}$$

olur. k yerine $k+1$ dönüşümü yapılırsa;

$$B_n(t; x) = x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \binom{n-1}{k} (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x$$

eşitliğine ulaşılır.

iii. Son olarak $f(t) = t^2$ için;

$$B_n(t^2; x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} x^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= x \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} x^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n x^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n x^{k-2} \binom{n-2}{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n x^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Sağ tarafta $k \rightarrow k+1$, sol tarafta $k \rightarrow k+2$ dönüşümleriyle;

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^k \binom{n-2}{k} (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \binom{n-1}{k} (1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 (1+x-x)^{n-2} + \frac{x}{n} (1+x-x)^{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \\
&= \frac{x-x^2}{n} + x^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $C[0,1]$ 'nin elemanı olan her f için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0 \quad (2.5)$$

ifadesi geçerlidir (Bernstein 1912).

Kanıt

(2.2), (2.3), (2.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

olacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x^2 - x^2 + \frac{x - x^2}{n} \right\|_{C[0,1]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x - x^2}{n} \right|$$

olacağından maksimum hesabı için $x = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n}$$

$$= 0$$

eşitliği sağlanır.

Korovkin teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği her $f \in C[0,1]$ için elde edilmiş olur.

2.2 İKİ BOYUTLU BERNSTEIN POLİNOMLARI

İki boyutlu Bernstein polinomları Martinez (1989) tarafından tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.2.1

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $f \in D$ sürekli bir fonksiyon ve $(x, y) \in D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere iki boyutlu Bernstein polinomları;

$$B_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) \quad (2.6)$$

olarak tanımlıdır (Martinez 1989).

Uyarı 2.2.1

$B_{n,m}(f; x, y)$ polinomunun doğrusallığı ve pozitifliği tek değişkenli Bernstein polinomlarının özelliklerinden kolayca görülür (Martinez 1989).

Teorem 2.2.1

Karesel D bölgesi üzerinde sürekli f fonksiyonu için

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|B_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} = 0 \quad (2.7)$$

ifadesi sağlanır (Martinez 1989).

Kanıt

İlk olarak $B_{n,m}(f; x, y)$ 'nin Volkov teoreminin koşullarını sağlayıp sağlamadığı araştırılmalıdır.

$$\begin{aligned} B_{n,m}(1; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m \\ &= (1-x+x)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned} B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k}{n}\right) x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right) x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right) x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} = x$$

eşitliği sağlanır.

$$B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{j}{m} x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{j}{m} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j}$$

$$\sum_{j=0}^m \binom{j}{m} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} = y$$

olduğundan

$$B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) = \left(\sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \right) y$$

$$= (1-x+x)^n y$$

$$= y$$

bulunur.

$$B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m x^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} \right)^2 (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} \right)^2 (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} \right)^2 (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m$$

$$B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) = \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} \right)^2 (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m x^k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{m}\right)^2 (1-x)^{n-k} y^j \binom{m}{j} (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m y^j \binom{m}{j} \left(\frac{j}{m}\right)^2 (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^m y^j \binom{m}{j} \left(\frac{j}{m}\right)^2 (1-y)^{m-j} \\ &= y^2 + \frac{y - y^2}{m} \end{aligned}$$

olup

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \left(\frac{y - y^2}{m} + y^2 \right)$$

bulunur ve

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = (1-x+x)^n \left(\frac{y - y^2}{m} + y^2 \right) = \left(\frac{y - y^2}{m} + y^2 \right)$$

eşitliği gösterilmiş olur. Sonuçta

$$B_{n,m}(1; x, y) = 1, \tag{2.8}$$

$$B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) = x, \tag{2.9}$$

$$B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) = y, \tag{2.10}$$

$$B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) = \frac{x - x^2}{n} + x^2, \tag{2.11}$$

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = \frac{y - y^2}{m} + y^2 \tag{2.12}$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıdaki (2.8), (2.9), (2.10) den

$$\|B_{n,m}(1; x, y) - 1\|_{C(D)} = 0,$$

$$\|B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) - x\|_{C(D)} = 0,$$

$$\|B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) - y\|_{C(D)} = 0$$

ifadeleri sağlanır. Böylece (2.11), (2.12)'den her iki tarafın maksimumu $(x, y) \in D$ üzerinden alınırsa

$$\|B_{n,m}((f_{0,2} + f_{2,0}); x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(D)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $n, m \rightarrow \infty$ için

$$\|B_{n,m}((f_{0,2} + f_{2,0}); x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(D)} = 0$$

eşitliği bulunur.

2.3 TEK BOYUTLU q -BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 2.3.1

q pozitif gerçel sayı olsun. Negatif olmayan bir k sayısının q -genellemesi

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{1 - q^k}{1 - q}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır (Andrews, Askey and Roy 1999).

Gösterim 2.3.1

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ için $[k]_q$ tamsayısı sembolik olarak

$$[k]_q = \{1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \dots, 1 + q + \dots + q^{n-1}\}$$

şeklinde gösterilir (Andrews, Askey and Roy 1999).

Tanım 2.3.2

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \quad (n \geq k \geq 0) \quad (2.14)$$

ifadesine q -binom katsayısı denir (Andrews, Askey and Roy 1999).

Tanım 2.3.3

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q, & k = 1, 2, \dots \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

ifadesine q -faktöriyel denir (Andrews, Askey and Roy 1999).

Teorem 2.3.1 (q -pascal kuralı)

$$1 \leq j \leq n-1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

q -binom katsayıları için (2.16) ve (2.17) sağlanır (Goodman, Oruc and Phillips 1999).

Teorem 2.3.2

$yx = qxy$, $xq = qx$, $yq = qy$ eşitliklerini sağlayan komütatif q -Binom formülü aşağıdaki şekilde verilir (Goodman, Oruc and Phillips 1999).

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q y^{n-j} x^j \quad (2.18)$$

Sonuç 2.3.1

Bir q parametresi için

$$yx = qxy, \quad xq = qx, \quad yq = qy$$

olsun. Böylece

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad (2.19)$$

ve

$$(x + xy)^n = (1 + y)(1 + qy) \dots (1 + q^{n-1}y)x^n \quad (2.20)$$

eşitlikleri sağlanır (Goodman, Oruc and Phillips 1999, Çetinkaya 2018).

Uyarı 2.3.1

$q > 0$ için

$$(1 - x)^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \quad (2.21)$$

eşitliği geçerlidir (Goodman, Oruc and Phillips 1999).

Sonuç 2.3.2

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = 1 \quad (2.22)$$

eşitliği doğrudur (Goodman, Oruc and Phillips 1999).

Tanım 2.3.4

$x \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda q -Bernstein polinomu

$$B_n(f; q; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır (Phillips 1996).

Önerme 2.3.1

(2.23) eşitliği ile tanımlı q -Bernstein polinomları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Phillips 1996).

$$\text{i. } B_n(1; q; x) = 1, \quad (2.24)$$

$$\text{ii. } B_n(t; q; x) = x, \quad (2.25)$$

$$\text{iii. } B_n(t^2; q; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \quad (2.26)$$

Kanıt

i. Sonuç 2.3.2'den açıkça

$$B_n(1; q; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = 1$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

ii. Benzer şekilde operatörün tanımından

$$\begin{aligned} B_n(t; q; x) &= \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \frac{[k]_q}{[n]_q} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada k yerine $k + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
B_n(t; q; x) &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} \frac{[n-1]_q!}{[n-k-1]_q! [k]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^s x) \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^s x) \\
&= x
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

iii. Son olarak

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; q; x) &= \sum_{k=0}^n x^k \frac{[k]_q^2}{[n]_q^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan burada $q[k-1]_q + 1 = [k]_q$ eşitliği kullanılarak

$$B_n(t^2; q; x) = \sum_{k=1}^n x^k \frac{q[k-1]_q + 1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; q; x) &= \sum_{k=1}^n x^k \frac{q[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&+ \sum_{k=1}^n x^k \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^n x^k \frac{q[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q [n-2]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q [k-2]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&+ \sum_{k=1}^n x^k \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=2}^n x^k \frac{[n-2]_q!}{[n-k]_q! [k-2]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&+ \sum_{k=1}^n x^k \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q! [k-1]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Sırasıyla toplamda k yerine $k+2$ ve $k+1$ dönüşümleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; q; x) &= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-2} x^{k+2} \frac{[n-2]_q!}{[n-k-2]_q! [k]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-3} (1 - q^s x) \\
&+ \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} \frac{[n-1]_q!}{[n-k-1]_q! [k]_q!} \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^s x) \\
&= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^k \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-3} (1 - q^s x) + \frac{1}{[n]_q} x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^s x) \\
&= x^2 \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} + x \frac{1}{[n]_q} \\
&= x^2 \frac{[n]_q - 1}{[n]_q} + x \frac{1}{[n]_q} \\
&= \left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) x^2 + \frac{x}{[n]_q} \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Önerme 2.3.1'in sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.3

$0 < q_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olsun. Bu durumda q -Bernstein polinomlarının $B_n(f; q; x)$ polinomlar dizisi, $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı olan $|f(x)| \leq M_f$ koşuluna uygun f fonksiyonuna düzgün yakınsar (Philips 1996, Almesbahi 2017).

Kanıt

Bu teoremin sağlanabilmesi için ilk olarak $B_n(f; q; x)$ in doğrusallığı ve pozitifliği araştırılmalıdır.

Doğrusallık:

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
 B_n(af(t) + bg(t); q; x) &= \sum_{k=0}^n \left(af \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) + bg \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
 &= \sum_{k=0}^n (af) \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) + \sum_{k=0}^n (bg) \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
 &= a \sum_{k=0}^n f \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) + b \sum_{k=0}^n g \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
 &= aB_n(f(t); q; x) + bB_n(g(t); q; x)
 \end{aligned}$$

olduğundan $B_n(f; q; x)$ polinomlar dizisi doğrusaldır.

Pozitiflik:

$k = 0, 1, \dots; n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \geq 0$$

olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n(f; q; x) \geq 0$ olur. Yani $B_n(f; q; x)$ polinomlar dizisi pozitifdir.

$|f(x) - B_n(f; q; x)|$ farkını hesaplayabilmek için aşağıdaki hazırlıklar yapılacaktır.

Önerme 2.3.1 den

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right)^2 [n]_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = \sum_{k=0}^n \frac{[k]_q^2}{[n]_q^2} [n]_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
& - 2x \sum_{k=0}^n [n]_q \frac{[k]_q}{[n]_q} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) + x^2 \sum_{k=0}^n [n]_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
& = B_n(t^2; q; x) - 2B_n(t; q; x) + x^2 B_n(1; q; x) \\
& = \frac{x - x^2}{[n]_q}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada açıkça $\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta$ eşitsizliği $\frac{1}{\delta^2} \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right)^2 \geq 1$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta} x^k [n]_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right)^2 x^k [n]_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
& \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right)^2 x^k [n]_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
& = \frac{x(1-x)}{[n]_q \delta^2} \\
& \leq \frac{1}{4[n]_q \delta^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca, her x için $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ olduğundan

$$\sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta} [n]_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \leq \frac{1}{4[n]_q \delta^2} \quad (2.27)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 2.3.2'den

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f(x) \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f; q; x)| &= \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \right| x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &= \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \right| x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &\quad + \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \right| x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan açıkça sınırlıdır. Tanımdan her $x \in [0,1]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır öyleki herhangi iki $\alpha, \beta \in [0,1]$ değeri için $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq 2M$ eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan, $x \in [0,1]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta$ vardır öyleki $|x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur. Böylece, bu hesap ve (2.27)'de bu δ 'nın kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f; q; x)| &\leq \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &\quad + \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \right| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\ &\leq \varepsilon \sum_{\left| \frac{[k]_q}{[n]_q} - x \right| < \delta} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) + \frac{2M}{4[n]_q \delta^2} \end{aligned}$$

$$= \varepsilon + \frac{M}{[n]_q \delta^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde yeterince büyük n 'ler için $|f(x) - B_n(f; q; x)| \leq 2\varepsilon$ ifadesi geçerlidir. ε , keyfi bir sabittir.

Dolayısıyla $[0,1]$ kapalı aralı üzerinde sürekli olan bu f fonksiyonu düzgün süreklidir. Bu durumda, yukarıdaki eşitsizlik x 'in seçiminden bağımsız olarak geçerli olur. Sonuç olarak, operatör $[0,1]$ kapalı aralı üzerinde $f(x)$ 'e düzgün yakınsar.

2.4 İKİ BOYUTLU q -BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 2.4.1

$0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ olmak üzere iki değişkenli q -Bernstein polinomu

$$B_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2; x, y) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) x^{k_1} y^{k_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} \\ \times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y) \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır (Barbosu 2000).

Tanım 2.4.2

$I^2 = [0,1] \times [0,1]$, $\mathbb{R}^{I^2} = \{f | f: I^2 \rightarrow \mathbb{R}\}$ olsun. $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ olmak üzere her $f \in \mathbb{R}^{I^2}$ için

$$B_{n_1}^x(f; q_1, ; x, y) = \sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, y\right) x^{k_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \quad (2.29)$$

ve

$$B_{n_2}^y(f; q_2, ; x, y) = \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) y^{k_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y) \quad (2.30)$$

tanımlamaları yapılabilir (Barbosu 2000).

Teorem 2.4.1

$B_{n_1}^x, B_{n_2}^y \in C(I^2)$ üzerinde (2.29) ve (2.30) da tanımlanan polinom dizilerinde her $f \in C(I^2)$ için $B_{n_1, n_2}: C(I^2) \rightarrow C(I^2)$ iki değişkenli q-Bernstein polinomu yardımıyla

$$B_{n_1}^x B_{n_2}^y = B_{n_2}^y B_{n_1}^x = B_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2; x, y) \quad (2.31)$$

eşitliği geçerlidir (Barbosu 2000, Çetinkaya 2018).

Önerme 2.4.1

$i, j = 0, 1, 2$ olmak üzere $e_{i,j}: I^2 \rightarrow I^2$, $e_{i,j}(x, y) = x^i y^j$ test fonksiyonları olsun.

Her $(x, y) \in I^2$ için

- i. $B_{n_1, n_2}(e_{0,0}; q_1, q_2; x, y) = e_{0,0}(x, y),$
- ii. $B_{n_1, n_2}(e_{1,0}; q_1, q_2; x, y) = e_{1,0}(x, y),$
- iii. $B_{n_1, n_2}(e_{0,1}; q_1, q_2; x, y) = e_{0,1}(x, y),$
- iv. $B_{n_1, n_2}(e_{2,0}; q_1, q_2; x, y) = e_{2,0}(x, y) + \frac{x(1-x)}{[n_1]_{q_1}},$
- v. $B_{n_1, n_2}(e_{0,2}; q_1, q_2; x, y) = e_{0,2}(x, y) + \frac{y(1-y)}{[n_2]_{q_2}}$

eşitlikleri geçerlidir (Barbosu 2000).

Teorem 2.4.2

I^2 üzerinde $0 < q_{n_1} < 1$ ve $0 < q_{n_2} < 1$ ile $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1} = 1$, $\lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2} = 1$ olmak üzere her $f \in C(I^2)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I^2} |B_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2; x, y) - f(x, y)| = 0$$

eşitliği sağlanır (Barbosu 2000).

2.5 (p, q) -BERNSTEIN OPERATÖRÜ

Bu kesimde ilk olarak (p, q) -analizle ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Daha sonra Mursaleen ve diğerleri tarafından tanıtılan (p, q) -Bernstein operatörünün temel yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.5.1

Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $p, q > 0$ için bir (p, q) -tamsayısı

$$[n]_{p,q} = p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{p^n - q^n}{p - q}, & \text{if } p \neq q \neq 1; \\ np^{n-1}, & \text{if } p = q \neq 1 \\ [n]_q, & \text{if } p = 1; \\ n, & \text{if } p = q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $[n]_q$ her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için q -tamsayısını ifade etmektedir (Chakrabarti and Jagannathan 1991).

Örnek 2.5.1

(p, q) -sayılara birkaç örnek şu şekilde verilebilir (Chakrabarti and Jagannathan 1991).

$$[0]_{p,q} = 0, \quad [1]_{p,q} = 1, \quad [2]_{p,q} = p + q, \quad [3]_{p,q} = p^2 + pq + q^2.$$

Aşağıdaki önermede (p, q) -sayılar için toplam, fark, çarpım ve bölüm için bazı önemli eşitlikler verilecektir.

Önerme 2.5.1

$[n + m]_{p,q}$, $[n - m]_{p,q}$, $[nm]_{p,q}$ ve $\left[\frac{n}{m}\right]_{p,q}$ ifadeleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Castellani and Wess 1996, Duran 2016).

i. $[n + m]_{p,q} = [m]_{p,q}p^n + [n]_{p,q}q^m$

ii. $[n - m]_{p,q} = q^{-m}([n]_{p,q} - [m]_{p,q}p^{n-m})$

iii. $[nm]_{p,q} = [n]_{p,q}[m]_{p^n,q^n}$

iv. $\left[\frac{n}{m}\right]_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}}{[m]_{\frac{n}{p^m}, \frac{n}{q^m}}}$

Kanıt

i. (p, q) -tamsayı tanımı gereği

$$\begin{aligned} [n + m]_{p,q} &= \frac{p^{n+m} - q^{n+m}}{p - q} \\ &= \frac{p^{n+m} - p^n q^m + p^n q^m - q^{n+m}}{p - q} \\ &= [m]_{p,q}p^n + [n]_{p,q}q^m \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [n + m]_{p,q} &= \frac{p^{n+m} - q^{n+m}}{p - q} \\ &= \frac{p^{n+m} - p^m q^n + p^m q^n - q^{n+m}}{p - q} \\ &= [n]_{p,q}p^m + [m]_{p,q}q^n \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

ii. Fark formülü $m \rightarrow -m$ yazılarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$[n - m]_{p,q} = [-m]_{p,q}p^n + [n]_{p,q}q^{-m}$$

eşitliği ya da aşağıdaki eşitlikler kullanılarak

$$[-n]_{p,q} = -[n]_{p,q}(pq)^{-n}$$

$$[n - m]_{p,q} = ([n]_{p,q} - [m]_{p,q}p^{n-m})q^{-m}$$

formülü yazılabilir. Benzer şekilde, diğer fark formülü için

$$[n - m]_{p,q} = ([n]_{p,q} - [m]_{p,q}q^{n-m})p^{-m}$$

eşitliği geçerlidir.

iii. Çarpım kuralı (p, q) -tamsayı tanımı yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}$$

$$[nm]_{p,q} = \frac{p^{nm} - q^{nm}}{p - q}$$

$$= \frac{p^n - q^n}{p - q} \frac{p^{nm} - q^{nm}}{p - q}$$

$$= [n]_{p,q} [m]_{p^n, q^n}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$[nm]_{p,q} = [m]_{p,q} [n]_{p^m, q^m}$$

eşitliği yazılabilir.

iv. Son olarak bölüm kuralı şu şekilde elde edilir:

$$\left[\frac{n}{m} \right]_{p,q} = \frac{p^{\frac{n}{m}} - q^{\frac{n}{m}}}{p - q}$$

$$= \frac{p^{\frac{n}{m}} - q^{\frac{n}{m}}}{p^{\frac{1}{m}} - q^{\frac{1}{m}}} \frac{p^{\frac{1}{m}} - q^{\frac{1}{m}}}{p - q}$$

$$= \frac{[n]_{\frac{1}{p^m}, \frac{1}{q^m}}}{[m]_{\frac{1}{p^m}, \frac{1}{q^m}}}$$

eşitliği geçerlidir ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{m}\right]_{p,q} &= \frac{p^{\frac{n}{m}} - q^{\frac{n}{m}}}{p - q} \\ &= \frac{p^{\frac{n}{m}} - q^{\frac{n}{m}}}{p^{\frac{1}{m}} - q^{\frac{1}{m}}} \frac{p^{\frac{1}{m}} - q^{\frac{1}{m}}}{p - q} \\ &= \frac{[n]_{p,q}}{[m]_{\frac{n}{p^m}, \frac{n}{q^m}}} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

Yukarıdaki önermede verilen eşitlikler aşağıda bir tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 2.1 (p, q) -Tamsayıya ait formüller (Duran 2016).

$\begin{aligned} [n + m]_{p,q} &= [m]_{p,q}p^n + [n]_{p,q}q^m \\ &= [n]_{p,q}p^m + [m]_{p,q}q^n \end{aligned}$	(p, q) -toplam formülü
$\begin{aligned} [n - m]_{p,q} &= ([n]_{p,q} - [m]_{p,q}p^{n-m})q^{-m} \\ &= ([n]_{p,q} - [m]_{p,q}q^{n-m})p^{-m} \end{aligned}$	(p, q) -fark formülü
$[nm]_{p,q} = [n]_{p,q}[m]_{p^n, q^n} = [m]_{p,q}[n]_{p^m, q^m}$	(p, q) -çarpım kuralı
$\left[\frac{n}{m}\right]_{p,q} = \frac{[n]_{\frac{1}{p^m}, \frac{1}{q^m}}}{[m]_{\frac{1}{p^m}, \frac{1}{q^m}}} = \frac{[n]_{p,q}}{[m]_{\frac{n}{p^m}, \frac{n}{q^m}}}$	(p, q) -bölüm kuralı

Tanım 2.5.2

Her $n \in \mathbb{N}$ için (p, q) -faktöriyel kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} [n]_{p,q}[n-1]_{p,q} \cdots [2]_{p,q}[1]_{p,q}, & n \geq 1 \text{ ise} \\ 1, & n = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.32)$$

(p, q) -faktöriyelini tanımlanarak (p, q) -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k]_{p,q}!} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_{p,q} \quad (2.33)$$

eşitliği ile tanımlanır (Chakrabarti and Jagannathan 1991, Corcino 2008).

Uyarı 2.5.1

(p, q) -binom katsayıları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Jagannathan and Rao 2005, Corcino 2008).

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,p}, \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_{p,q},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{i=0}^k \frac{p^{n-i+1} - q^{n-i+1}}{p - q} \quad (p \neq q),$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{i=0}^k \frac{q^{n-i+1} - p^{n-i+1}}{q - p} \quad (p \neq q),$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} \frac{[n]_{p,q}}{[k]_{p,q}}.$$

Teorem 2.5.1

(p, q) -binom katsayıları için aşağıdaki iki eşitlik sağlanır;

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} q^{n-k+1} \quad (2.35)$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{n-k+1} \quad (2.36)$$

Burada $k > n$ için $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} = 1$ ve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = 0$ koşulları geçerlidir (Corcino 2008, Duran 2016).

Kanıt

$0 < k < n$ olsun. $[n+1]_{p,q}$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} [n+1]_{p,q} &= p^n + p^{n-1}q + \dots + p^k q^{n-k} + p^{k-1} q^{n-k+1} + \dots + pq^{n-1} + q^n \\ &= (p^{n-k} + p^{n-k-1}q + \dots + q^{n-k})p^k + (p^{k-1} + p^{k-2}q + \dots + q^{k-1})q^{n-k+1} \\ &= [n-k+1]_{p,q} p^k + [k]_{p,q} q^{n-k+1} \end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} &= \frac{[n+1]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k+1]_{p,q}!} \\ &= \frac{[n+1]_{p,q} [n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k+1]_{p,q}!} \\ &= \frac{([n-k+1]_{p,q} p^k + [k]_{p,q} q^{n-k+1}) [n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k+1]_{p,q}!} \\ &= \frac{[n-k+1]_{p,q} [n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k+1]_{p,q}!} p^k + \frac{[k]_{p,q} [n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k+1]_{p,q}!} q^{n-k+1} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} q^{n-k+1} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla (2.35) eşitliği elde edilmiş olur. (2.36) denkleminin kanıtı için (2.34) eşitliğinin özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{q,p} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,p} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{q,p} p^{n-k+1}, \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{n-k+1} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

$p = 1$ için, (2.36) ifadesi

Uyarı 2.5.3

$$\begin{aligned} \text{i. } \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} q^{n-k-1} \\ &+ \left[\begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{2(k+1)} q^{n-k-2} + \left[\begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{3(k+1)} \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur.

ii. (2.35) eşitliğinin $(n - k)$ kez uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} q^{n-k-1} + \left[\begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{2(k+1)} q^{n-k-2} \\ &+ \left[\begin{matrix} n-3 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{3(k+1)} q^{n-k-3} + \dots + \left[\begin{matrix} k \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{(n-k)(k+1)} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Corcino 2008, Duran 2016).

Kanıt

i. (p, q) -binom katsayı tanımından kolayca

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} &= \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} \\ &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} q^{n-k-1} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{2(k+1)} \\ &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} q^{n-k-1} + \left[\begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{2(k+1)} q^{n-k-2} + \left[\begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{3(k+1)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ii. (2.35) eşitliğinin $(n - k)$ kez uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} &= \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} \\ &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} q^{n-k} + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{k+1} q^{n-k-1} + \left[\begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{2(k+1)} q^{n-k-2} \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} n-3 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{3(k+1)} q^{n-k-3} + \dots + \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{(n-k)(k+1)}$$

eşitliğine ulaşılır.

Önerme 2.5.2

(p, q) -binom katsayıları için aşağıdaki

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{j=k}^{n-k} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{(n-k)(k+1)} q^{j-k}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \begin{bmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{-(j+1)(n-k) + \binom{j+1}{2}} q^{jk + \binom{j+1}{2}}$$

bağıntıları geçerlidir (Corcino 2008).

Örnek 2.5.2

Yukarıdaki iki rekürans bağıntı kullanılarak $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{p,q}$ aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{p,q} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{p,q} p^{(3-2)(2+1)} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{p,q} p^{(3-3)(2+1)} q^{3-2} \\ &= p^3 + p^2 q + p q^2 + q^3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{p,q} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{p,q} p^{-1} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}_{p,q} p^{-1} q^4 \\ &= p^{-1}(p^4 + p^3 q + p^2 q^2 + p q^3 + q^4) - p^{-1} q^4 \\ &= p^3 + p^2 q + p q^2 + q^3 \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur (Corcino 2008, Duran 2016).

Teorem 2.5.2

(p, q) -binom katsayıları için horizontal üreteç fonksiyonu

$$\prod_{j=0}^{n-1} (p^j + xq^j) = \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} x^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \quad (2.37)$$

şeklindedir (Corcino 2008).

Kanıt

$$1 + x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q}$$

$$(1 + x)(p + qx) = p + x(p + q) + x^2q$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} p + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{p,q} qx^2$$

ve

$$(1 + x)(p + qx)(p^2 + q^2x) = p^3 + (p^2 + pq + q^2)px + (p^2 + pq + q^2)qx^2 + q^3x^3$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} p^3 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q} px + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{p,q} qx^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{p,q} q^3x^3$$

eşitlikleri geçerlidir.

Her $n = 1, 2, 3$ için üreteç fonksiyonu yukarıdaki eşitliği sağlar. Böylece her $n \geq 1$ için (2.37) denklemi doğrudur. Dolayısıyla (2.35) özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} (p^j + xq^j) &= (p^n + xq^n) \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} x^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} x^k p^{\binom{n-k}{2}+n} q^{\binom{k}{2}} + \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} x^{k+1} p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}+n} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ [n]_{p,q} p^{\binom{n-k}{2}+n} q^{\binom{k}{2}} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-k+1}{2}} q^{\binom{k-1}{2}+n} \right\} x^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n p^{\binom{n-k+1}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ p^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} \right\} x^k$$

eşitliği yazılabilir. Böylece

$$\prod_{j=0}^{n-1} (p^j + xq^j) = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k p^{\binom{n-k+1}{2}} q^{\binom{k}{2}}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 2.5.3

(p, q) -binom katsayıları için

$$\sum_{j=i}^n (-1)^{n-j} p^{\binom{n-j}{2}} q^{\binom{j-i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} p^{\binom{j-i}{2}} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_{p,q} = \delta_{ni}$$

ortogonallık bağıntısı geçerlidir (Corcino 2008).

Teorem 2.5.4

(p, q) -binom katsayıları için aşağıdaki

$$p^{\binom{n}{2}} x^n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-j}{2}} \sum_{r=0}^{n-1} (q^r + x p^r)$$

eşitliği doğrudur (Corcino 2008).

Mursaleen ve diğerleri (2015); Bernstein operatörlerinin (p, q) -analizini ilk olarak aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Kang ve diğerleri (2016) yılındaki çalışmalarında; Bernstein operatörünün (p, q) -analoğunun konvekslik ve monotonluk özellikleriyle operatör için bazı nümerik hesaplamalara yer vermişlerdir.

Mursaleen ve diğerleri (p, q) -Bernstein tanımlamalarından sonra birçok operatörün (p, q) -genellemesi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları şu şekildedir. Bernstein-Stancu operatörü

Mursaleen ve diğerleri (2015) tarafından tanımlanarak bu operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Mursaleen ve diğerleri 2015 yılında (p, q) -Bernstein-Schurer operatörünün yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Gonul Bilgin ve Eren (2021) de iki değişkenli (p, q) -Bernstein-Stancu operatörüne ait bir genelleme tanımlamıştır.

Bu bölümde Mursaleen ve diğerleri (2015) tarafından tanımlanan (p, q) -Bernstein operatörleri ve bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.5.3

$x \in [0,1]$ ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, (p, q) -Bernstein operatörü

$$B_{n,p,q}(f; x) = \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_{p,q}}{p^{k-n}[n]_{p,q}}\right) [n]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) \quad (2.38)$$

olarak tanımlanır (Mursaleen, Ansari and Khan 2016).

Teorem 2.5.5

Her $x \in [0,1]$ ve $0 < q < p \leq 1$ için

- i. $B_{n,p,q}(1; x) = 1,$
- ii. $B_{n,p,q}(t; x) = x,$
- iii. $B_{n,p,q}(t^2; x) = \frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}} x + \frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}} x^2$

eşitlikleri geçerlidir (Mursaleen, Ansari and Khan 2016).

Kanıt

Operatörün tanımından kolayca

$$i. B_{n,p,q}(1; x) = \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) = 1$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\text{ii. } B_{n,p,q}(t; x) &= \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n [n]_{p,q} [k]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) \frac{[k]_{p,q}}{p^{k-n} [n]_{p,q}} \\
&= \frac{1}{p^{\frac{n(n-3)}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^{k+1} p^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x) \\
&= \frac{x}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x) \\
&= x
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Son olarak t^2 operatörde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\text{iii. } B_{n,p,q}(t^2; x) &= \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n \frac{[k]_{p,q}^2}{p^{2k-2n} [n]_{p,q}^2} [n]_{p,q} [k]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) \\
&= \frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[k+1]_{p,q}}{[n]_{p,q}} [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^{k+1} p^{\frac{(k+1)(k-4)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x) \\
&= \frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}} [n]_{p,q}} \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + q[k]_{p,q}) [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^{k+1} p^{\frac{(k+1)(k-4)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x) \\
&= \frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}} [n]_{p,q}} \sum_{k=0}^{n-1} [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^{k+1} p^{\frac{k^2-k-4}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x) \\
&\quad + \frac{q[n-1]_{p,q}}{p^{\frac{n(n-5)}{2}} [n]_{p,q}} \sum_{k=0}^{n-2} [n-2]_{p,q} [k]_{p,q} x^{k+2} p^{\frac{(k+2)(k-3)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-3} (p^s - q^s x) \\
&= \frac{p^{n-1} x}{[n]_{p,q}} \frac{1}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} [n-1]_{p,q} [k]_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-2} (p^s - q^s x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q[n-1]_{p,q} x^2}{[n]_{p,q}} \frac{1}{p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}} \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{s=0}^{n-k-3} (p^s - q^s x) \\
& = \frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}} x + \frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}} x^2
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 2.5.6

$0 < q_n < p_n \leq 1$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için $B_{n,p_n,q_n}(f; x)$ dizisi $[0,1]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar (Mursaleen, Ansari and Khan 2016).

Kanıt

Kanıt için Korovkin tipli teoremin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir. Dolayısıyla $m = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p_n,q_n}(t^m; x) - x^m\|_{C[0,1]} = 0$$

koşullarının gösterilmesi gerekir.

Açıkça Teorem 2.5.5 i. ve ii. den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p_n,q_n}(1; x) - 1\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p_n,q_n}(t; x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitlikleri geçerlidir.

Son olarak

$$q_n[n-1]_{p_n,q_n} = [n]_{p_n,q_n} - p_n^{n-1}$$

eşitliği ve Teorem 2.5.5 iii. kullanılarak

$$\begin{aligned}
|B_{n,p_n,q_n}(t^2; x) - x^2|_{C[0,1]} &= \left| \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} x + \left(\frac{q_n[n-1]_{p_n,q_n}}{[n]_{p_n,q_n}} - 1 \right) x^2 \right| \\
&\leq \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} x + \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} x^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa

$$\|B_{n,p_n,q_n}(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} \leq \frac{2p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p_n,q_n}(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

olması demektir. Bu ise kanıtı tamamlar.



BÖLÜM 3

BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN İKİ FARKLI GENELLEMESİ

Bu bölümde, Bernstein-Schurer ve Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörleri ile yaklaşım simetrik aralıklar üzerinde tanımlanarak her iki operatörün yaklaşım hızları ile ilgili teoremler verilecektir.

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN-SCHURER OPERATÖRLERİ

Bu kesimde; Bernstein polinomlarını sınırları değişken olan bir simetrik aralıkta inceleyen Acar ve İzgi'nin (2021) çalışması ile $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Schurer operatörünü inceleyen Keleş'in (2018) çalışmasından esinlenerek tanımlanan; genelleştirilmiş Bernstein-Schurer operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Bunun için ilk olarak Keleş'in (2018) tanımladığı operatör verilecektir.

Tanım 3.1.1

$x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$, $u \in \mathbb{N}$ olsun.

$$G_m(f; x) = \frac{1}{2^{m+u}} \sum_{s=0}^{m+u} f\left(\frac{2s}{m} - 1\right) \binom{m+u}{s} (1+x)^s (1-x)^{m+u-s}$$

şeklinde tanımlı doğrusal pozitif operatöre Bernstein-Schurer tipli bir operatör denir ve $G_m(f; x)$ ile gösterilir (Keleş 2018).

Tanım 3.1.2

Her $\xi, \psi, t \in \mathbb{N}$ için $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ ve $f \in C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ olsun.

$$\tilde{N}_{n,k}(x) = \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k}$$

olmak üzere

$$\check{L}_n(f; x) = \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} f \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \check{N}_{n,k}(x) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı operatöre genelleştirilmiş Bernstein-Schurer operatörü adı verilir.

Uyarı 3.1.1

Açıkça $\check{L}_n(f; x)$ operatörü doğrusal ve pozitif bir operatördür.

Kanıt

Doğrusallık:

Her $f, g \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \check{L}_n(c_1 f + c_2 g; x) &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} (c_1 f + c_2 g) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \\ &\times \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \left[\sum_{k=0}^{n+t} c_1 f \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \right. \\ &\times \left. \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{n+t} c_2 g \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \left[c_1 \sum_{k=0}^{n+t} f \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \right. \\ &\times \left. \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \right. \\ &+ \left. c_2 \sum_{k=0}^{n+t} g \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} f \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&+ c_2 \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} g \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&= c_1 \check{L}_n(f; x) + c_2 \check{L}_n(g; x)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olur. Dolayısıyla $\check{L}_n$ doğrusal bir operatördür.

Pozitiflik:

Her $k, n \in \mathbb{N}$ olsun. $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için

$$\binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla her $f \geq 0$ için

$$\check{L}_n(f; x) \geq 0$$

eşitsizliği geçerli olur.

Böylece tanımlanan $\check{L}_n(f; x)$ operatörünün doğrusal pozitif bir operatör olduğu görülür.

Önerme 3.1.1

Her $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için Tanım 3.1.2 de verilen operatör

- i. $\check{L}_n(1; x) = 1,$
- ii. $\check{L}_n(t; x) = x,$
- iii. $\check{L}_n(t^2; x) = \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n+t} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$

eşitliklerini sağlar.

Kanıt

Operatörün tanımından açıkça

$$\begin{aligned} \text{i. } \check{L}_n(1; x) &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \text{ii. } \check{L}_n(t; x) &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right) \binom{n+t}{k} \\ &\quad \times \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \frac{k}{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\quad - \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\quad - \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} \\ &= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{k+1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k-1} \\ &\quad - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t-1} - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
&= \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) = x
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned}
\text{iii. } \check{L}_n(t^2; x) &= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \right)^2 \check{N}_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \left(\frac{4k^2}{(n+t)^2} - \frac{4k}{n+t} + 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \check{N}_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \frac{k^2}{(n+t)^2} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad - \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \frac{k}{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{(n+t)(n+t-1)}{(n+t)^2} \sum_{k=2}^{n+t} \frac{k(k-1)}{(n+t)(n+t-1)} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \\
&\quad \times \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{n+t}{(n+t)^2} \sum_{k=1}^{n+t} \frac{k}{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad - \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{n+t}{n+t} \sum_{k=1}^{n+t} \frac{k}{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{(n+t-1)}{(n+t)} \sum_{k=2}^{n+t} \binom{n+t-2}{k-2} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&+ \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&- \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&+ \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{(n+t-1)}{(n+t)} \sum_{k=0}^{n+t-2} \binom{n+t-2}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{k+2} \\
&\times \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k-2} \\
&+ \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{k+1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k-1} \\
&- \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{k+1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k-1} \\
&+ \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{(n+t-1)}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 2^{n+t-2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t-2} \\
&+ \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t-1} \\
&- \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t-1} \\
&+ \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+t-1)}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + 2 \frac{1}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
&\quad - 2 \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&= \frac{(n+t-1)}{n+t} x^2 + 2 \frac{(n+t-1)}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + \frac{(n+t-1)}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{n+t} - 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + 2 \left(\frac{1}{n+t} - 1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&= \frac{(n+t-1)}{n+t} x^2 + 2 \left(\frac{(n+t-1)}{n+t} + \frac{1}{n+t} - 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x \\
&\quad + \left(\frac{(n+t-1)}{n+t} + \frac{2}{n+t} - 2 + 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n+t} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece istenilen eşitlikler gösterilmiş olur.

Teorem 3.1.1

Gerçel eksenin tamamında sınırlı $C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ uzayının elemanı olan her f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{L}_n(f; x) - f(x) \right\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt

Kanıt için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

Açıkça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{L}_n(1; x) - 1 \right\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\check{L}_n(t; x) - x\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\check{L}_n(t^2; x) - x^2\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]}$$

limitini hesaplamak için norm tanımı kullanılarak, öncelikle ifadenin maksimum değerini araştırmak için türevden yararlanılacaktır. Daha sonra aralığın uç noktaları kullanılarak maksimum değeri incelenecektir.

$$|\check{L}_n(t^2; x) - x^2| = \left| \left(1 - \frac{1}{n+t}\right)x^2 + \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 - x^2 \right|$$

$$(\check{L}_n(t^2; x) - x^2)' = -2 \frac{1}{n+t} x$$

$$(\check{L}_n(t^2; x) - x^2)' = 0$$

durumu $x = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $x = 0$, $|\check{L}_n(t^2; x) - x^2|$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$|\check{L}_n(t^2; 0) - 0| = \left| \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right|$$

eşitliği bulunur. Son olarak

$$\max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{L}_n(t^2; x) - x^2| = \left| \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right|$$

eşitliği yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{L}_n(t^2; x) - x^2| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right| = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Şimdi de aralığın uç noktası $|\check{L}_n(t^2; x) - x^2|$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \left| \check{L}_n(t^2; x) - x^2 \right| \\
& = \left| -\frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+t} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right| = 0
\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} \left| \check{L}_n(t^2; x) - x^2 \right| = 0$$

olduğundan aranan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \check{L}_n(t^2; x) - x^2 \right\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Böylece Korovkin teoremin koşulları sağlandığından her $f \in C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \check{L}_n(f; x) - f(x) \right\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 3.1.2

$\check{L}_n(f; x)$ operatörünün ilk üç momenti için

- i. $\check{L}_n((t-x)^0; x) = 1,$
- ii. $\check{L}_n((t-x)^1; x) = 0,$
- iii. $\check{L}_n((t-x)^2; x) = -\frac{1}{n+t} x^2 + \left(\frac{1}{n+t} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

Açıkça

i. $\check{L}_n((t-x)^0; x) = \check{L}_n(1; x) = 1.$

Benzer şekilde

ii. $\check{L}_n((t-x)^1; x) = \check{L}_n(t; x) - x\check{L}_n(1; x) = 0$

eşitliği kolayca elde edilir.

iii. Kanıt için $\check{L}_n(t^2; x)$ ve $\check{L}_n(t; x)$ için Önerme 3.1.1 de bulunan eşitlikler kullanılırsa

$$\check{L}_n((t-x)^2; x) = \check{L}_n(t^2; x) - 2x\check{L}_n(t; x) + x^2\check{L}_n(1; x)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+t}\right)x^2 + \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 - 2x^2 + x^2$$

$$= -\frac{1}{n+t}x^2 + \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2$$

ifadesi elde edilir.

Uyarı 3.1.2

Aşağıdaki teorem için gerekli olan

$$x \in \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \check{L}_n((t-x)^2; x)$$

ifadesi burada hesaplanacaktır.

$$\check{L}_n((t-x)^2; x) = -\frac{1}{n+t}x^2 + \left(\frac{1}{n+t}\right)\left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2$$

ifadesinin maksimumunu bulmak için öncelikle $\check{L}_n((t-x)^2; x)$ 'nin türevi alınmalıdır. Türev

$$\left(\check{L}_n((t-x)^2; x)\right)' = -\frac{2}{n+t}x$$

şeklindedir. Türevin

$\left(\check{L}_n((t-x)^2; x)\right)' = 0$ olması $x = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x = 0$ değeri $\check{L}_n((t-x)^2; x)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\check{L}_n((t-0)^2; 0) = \left(\frac{1}{n+t}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2$$

bulunur. Bu ifade

$$t_n^1 := \left| \left(\frac{1}{n+t}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right|$$

olarak tanımlansın.

Diğer taraftan aralığın uç noktası $\check{L}_n((t-x)^2; x)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \left| \check{L}_n((t-x)^2; x) \right| \\ &= \left| -\frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+t}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right| = 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu ifade de

$$t_n^2 := 0$$

olarak tanımlanırsa

$$x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \left| \check{L}_n((t-x)^2; x) \right| = \begin{cases} t_n^1, & \text{türev yardımıyla bulunan} \\ t_n^2, & \text{aralığın uç noktasından bulunan} \end{cases} \quad (3.2)$$

eşitliği yazılabilir.

Tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla Tanım 3.1.2’de tanımlanan operatör için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.1.2

$C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ uzayının elemanı olan her f için

$$|\check{L}_n(f; x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\right) \omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\delta_n := \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{L}_n((t-x)^2; x)|$$

olarak tanımlıdır.

Kanıt

Süreklilik modülünün tanımı kullanılarak

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right) \omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği yazılabilir. Operatörün doğrusallığı yardımıyla

$$\begin{aligned} |\check{L}_n(f; x) - f(x)| &\leq \left(\check{L}_n(1; x) + \frac{1}{\delta_n} \check{L}_n(|t-x|; x) \right) \omega(f; \delta_n) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\check{L}_n((t-x)^2; x)} \right) \omega(f; \delta_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\delta_n := \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{L}_n((t-x)^2; x)| \tag{3.3}$$

tanımlaması yapılırsa $\check{L}_n((t-x)^2; x)$ ifadesi aşağıda yerine yazılarak

$$\begin{aligned} |\check{L}_n(f; x) - f(x)| &\leq \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\check{L}_n((t-x)^2; x)} \right) \omega(f; \delta_n) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\delta_n} \right) \omega(f; \delta_n) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \right) \omega(f; \delta_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.3

$\rho \in (0,1]$ ve $\theta, x \in I$ olsun. Bu durumda tek değişkenli fonksiyonlar için $Lip_M(\rho)$ ile gösterilen Lipschitz sınıfından fonksiyonlar

$$|f(\theta) - f(x)| \leq M|\theta - x|^\rho$$

eşitsizliğini sağlar (Alkhawagah and Madjid 2017)

Aralık yardımıyla üretilen operatör için Lipschitz sınıfının elemanları $Lip_\rho \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 3.1.3

$x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ olsun. Bu durumda her $f \in Lip_\rho \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ ve $\rho \in (0,1]$ için

$$\| \check{L}_n(f; x) - f(x) \|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} \leq M(\delta_n)^\rho$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt

Operatörün tanımı ve mutlak değer özelliklerinden

$$\begin{aligned} | \check{L}_n(f; x) - f(x) | &\leq \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \left| f \left(\left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - f(x) \right| \\ &\times \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\leq \frac{M}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \left| \left(\frac{2k}{n+t} - 1 \right) \frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right|^\rho \\ &\times \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada Hölder eşitsizliğinden

$$\check{L}_n((t-x)^\rho; x) \leq \left(\check{L}_n((t-x)^2; x) \right)^{\frac{\rho}{2}}$$

olacağından

$$|\check{L}_n(f; x) - f(x)| \leq M \{ \check{L}_n((t-x)^2; x) \}^{\frac{\rho}{2}}$$

ifadesi bulunur. Böylece (3.3)'den

$$\| \check{L}_n(f; x) - f(x) \|_{C[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}]} \leq M(\delta_n)^\rho$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

3.2 GENELLEŞTİRİLMİŞ BERNSTEIN-SCHURER-KANTOROVICH OPERATÖRLERİ

Bu kesimde; sınırları değişken olan bir simetrik aralıkta Bernstein polinomlarını inceleyen Acar ve İzgi'nin (2021) çalışması ile $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Kantorovich operatörünü inceleyen Kahvecibaşı'nın (2014) çalışmaları birlikte değerlendirilerek tanımlanan genelleştirilmiş Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Daha sonra süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır.

Tanım 3.2.1

$x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ olsun.

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

$$K_n(f; x) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^n \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+p}-1}^{2\frac{k+1}{n+p}-1} f(t) dt$$

şeklinde tanımlı doğrusal pozitif operatöre $K_n(f; x)$ operatörü denir (Kahvecibaşı, 2014).

Tanım 3.2.2

Her $\xi, \psi, t \in \mathbb{N}$ ve $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ için $f \in C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ olsun.

$$\check{b}_{n,k}(x) = \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k}$$

olmak üzere

$$\check{K}_n(f; x) = \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} f(u) du \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlı operatöre genelleştirilmiş Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörü adı verilir.

Uyarı 3.2.1

Açıkça $\check{K}_n(f; x)$ operatörü doğrusal ve pozitif bir operatördür.

Kanıt

Doğrusallık:

Her $f, g \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \check{K}_n(c_1 f + c_2 g; x) &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} (c_1 f + c_2 g)(u) du \\ &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t+1} \left[c_1 \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} f(u) du \right. \\ &\quad \left. + c_2 \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} g(u) du \right] \\ &= c_1 \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} f(u) du \end{aligned}$$

$$+c_2 \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}-1}\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}-1}\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}} g(u) du$$

$$= c_1 \check{K}_n(f; x) + c_2 \check{K}_n(g; x)$$

eşitliği geçerli olur. Dolayısıyla $\check{K}_n$ doğrusal bir operatördür.

Pozitiflik:

Her $k, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için

$$\binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla her $f \geq 0$ için

$$\int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}-1}\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}-1}\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}} f(u) du \geq 0$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\check{K}_n(f; x) \geq 0$$

olur. Böylece tanımlanan $\check{K}_n(f; x)$ operatörünün doğrusal pozitif bir operatör olduğu sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.2.1

Tanım 3.2.2’de verilen operatör her $x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için

i. $\check{K}_n(1; x) = 1,$

ii. $\check{K}_n(t; x) = x + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right),$

iii. $\check{K}_n(t^2; x) = \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) x^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$

eşitliklerini sağlar.

Kanıt

Operatörün tanımından açıkça

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \check{K}_n(1; x) &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(2\frac{k}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} 1 du \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\left(2\frac{k+1}{n+t} - 1 \right) \frac{n+\xi}{n+\psi} - \left(2\frac{k}{n+t} - 1 \right) \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\left(\frac{2}{n+t} \right) \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1-1} \left(\frac{2}{n+t} \right) \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t} \left(\frac{2}{n+t} \right) 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $\check{K}_n(t; x)$ için tanım kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \check{K}_n(t; x) &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(2\frac{k}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} u du \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \frac{u^2}{2} \Big|_{\left(2\frac{k}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left[\left(2\frac{k+1}{n+t} - 1 \right)^2 - \left(2\frac{k}{n+t} - 1 \right)^2 \right] \\
 &= \frac{n+t}{2^{n+t+2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\frac{2}{n+t} \right) \left(\frac{4k+2}{n+t} - 2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\frac{4k+2}{n+t} - 2 \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n+t} \right) + \frac{1}{2^{n+t}} \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+t}} \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&\quad - \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \sum_{k=0}^{n+t} \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\
&= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k-1} \\
&\quad + \frac{1}{2^{n+t}} \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} - \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} \\
&= \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t-1} + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
&= \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
&= x + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde t^2 operatörde yerine yazılırsa;

$$\text{iii. } \check{K}_n(t^2; x) = \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}-1}\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} u^2 du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \frac{u^3}{3} \Big|_{\left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}}^{\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^{\frac{n+\xi}{n+\psi}}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left[\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^3 - \left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^3 \right] \\
&= \frac{1}{3} \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left\{ \left(2\frac{k+1}{n+t}-1 - 2\frac{k}{n+t} + 1\right) \right. \\
&\quad \times \left[\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^2 + \left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right) \left(2\frac{k}{n+t}-1\right) + \left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^2 \right] \Big\} \\
&= \frac{1}{3} \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left\{ \left(\frac{2}{n+t} \right) \right. \\
&\quad \times \left[\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^2 + \left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right) \left(2\frac{k}{n+t}-1\right) + \left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^2 \right] \Big\} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\
&\quad \times \left[\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^2 + \left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right) \left(2\frac{k}{n+t}-1\right) + \left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^2 \right] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
&\left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right)^2 + \left(2\frac{k+1}{n+t}-1\right) \left(2\frac{k}{n+t}-1\right) + \left(2\frac{k}{n+t}-1\right)^2 \\
&= \left(2\frac{k+1}{n+t}\right)^2 - 4\frac{k+1}{n+t} + 1 + \frac{4k(k+1)}{(n+t)^2} - 2\frac{k+1}{n+t} - 2\frac{k}{n+t} + 1 \\
&\quad + \left(2\frac{k}{n+t}\right)^2 - 4\frac{k}{n+t} + 1 \\
&= 4 \left(\frac{k^2 + 2k + 1 + k^2 + k + k^2}{(n+t)^2} \right) - 6\frac{k+1}{n+t} - 6\frac{k}{n+t} + 3
\end{aligned}$$

$$= \frac{12k^2 + 12k + 4}{(n+t)^2} - \frac{12k + 6}{n+t} + 3$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik (3.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \check{K}_n(t^2; x) &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\frac{12k^2 + 12k + 4}{(n+t)^2} - \frac{12k + 6}{n+t} + 3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \left(\frac{3k^2 + 3k + 1}{(n+t)^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \frac{2k+1}{n+t} + \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \frac{k^2}{(n+t)^2} \check{b}_{n,k}(x) + \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \frac{k}{(n+t)^2} \check{b}_{n,k}(x) \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{(n+t)^2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) - \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \frac{k}{n+t} \\ &\quad - \frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) + \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{n+t-1}{n+t} \sum_{k=2}^{n+t} \binom{n+t-2}{k-2} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t-2} \frac{1}{(n+t)^2} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^{n+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \sum_{k=1}^{n+t} \binom{n+t-1}{k-1} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k} \\
& -\frac{1}{2^{n+t-1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t} + \frac{1}{2^{n+t}} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t-2} 2^{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t} \\
& = \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \frac{(n+t-1)}{n+t} \sum_{k=0}^{n+t-2} \binom{n+t-2}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{k+2} \\
& \times \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k-2} \\
& + \frac{2}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{k+1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k-1} \\
& + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \\
& - \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \sum_{k=0}^{n+t-1} \binom{n+t-1}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{k+1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x\right)^{n+t-k-1} \\
& - \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \\
& = \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \frac{(n+t-1)}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 2^{n+t-2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t-2} \\
& + \frac{1}{2^{n+t-3}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \frac{1}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t-1} \\
& + \left(\frac{4}{3(n+t)^2} - \frac{2}{n+t} + 1\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \\
& - \frac{1}{2^{n+t-2}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi}\right)^{n+t-2} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right) 2^{n+t-1} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^{n+t-1} \\
& = \frac{n+t-1}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 + \frac{4}{n+t} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{4}{3(n+t)^2} - \frac{2}{n+t} + 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) \left(x^2 + 2x \frac{n+\xi}{n+\psi} + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right) + \left(\frac{4}{n+t} - 2 \right) \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \\
& + \left(\frac{4}{3(n+t)^2} - \frac{2}{n+t} + 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& = x^2 + 2x \frac{n+\xi}{n+\psi} + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 - \frac{x^2}{n+t} - \frac{2x}{n+t} \frac{n+\xi}{n+\psi} - \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& + \left(\frac{4x}{n+t} + \frac{4}{n+t} \frac{n+\xi}{n+\psi} - 2x - 2 \frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + \left(\frac{4}{3(n+t)^2} - \frac{2}{n+t} + 1 \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& = x^2 + 2x \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 - \frac{x^2}{n+t} - \frac{2x}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& + \frac{4x}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + \frac{4}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 - 2x \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - 2 \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 - \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \\
& = \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) x^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 3.2.1

Gerçel eksenin tamamında sınırlı $C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ nin elemanı olan her f için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n(f; x) - f(x) \right\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt

Kanıt için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

Açıkça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n(1; x) - 1 \right\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} = 0$$

eşitliği geçerlidir. Diğer taraftan

$$x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right] \left| x + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - x \right| = \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)$$

eşitliği doğru olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n(t; x) - x \right\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} = 0$$

bulunur. Son olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]}$$

limitini hesaplamak için norm tanımı kullanılarak; öncelikle ifadenin maksimum değerini araştırmak amacıyla türevden yararlanılacaktır. Daha sonra aralığın uç noktaları kullanılarak maksimum değeri incelenecektir.

$$\left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right| = \left| -\frac{1}{n+t} x^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right|$$

$$(\tilde{K}_n(t^2; x) - x^2)' = -2 \frac{1}{n+t} x + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)$$

$$(\tilde{K}_n(t^2; x) - x^2)' = 0$$

olması $x = \frac{n+\xi}{n+\psi}$ durumunu gerektirir. $x = \frac{n+\xi}{n+\psi}$, $\left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right|$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\left| \tilde{K}_n \left(t^2; \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) \right) - \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right|$$

$$= \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$$

bulunur. Böylece

$$x \in \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right| = \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$$

eşitliği yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} \left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de aralığın uç noktası $\left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right|$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & x \in \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right| \\ &= \left| -\frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right| \\ &= \left| \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

bulunur. Burada limite geçilerek

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} \left| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 + \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \right| = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n(t^2; x) - x^2 \right\|_{C \left[\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminin koşulları sağlandığından her $f \in C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\check{K}_n(f; x) - f(x)\|_{C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Önerme 3.2.2

$\check{K}_n(f; x)$ operatörünün ilk üç momenti aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- i. $\check{K}_n((t-x)^0; x) = 1,$
- ii. $\check{K}_n((t-x)^1; x) = \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right),$
- iii. $\check{K}_n((t-x)^2; x) = \left(-\frac{1}{n+t} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2.$

Kanıt

Açıkça

$$i. \check{K}_n((t-x)^0; x) = \check{K}_n(1; x) = 1.$$

Benzer şekilde

$$ii. \check{K}_n((t-x)^1; x) = \check{K}_n(t; x) - x\check{K}_n(1; x) = x + \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) - x = \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)$$

eşitliği kolayca elde edilir.

iii. $\check{K}_n(t^2; x)$ ve $\check{K}_n(t; x)$ için yukarıdaki eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \check{K}_n((t-x)^2; x) &= \check{K}_n(t^2; x) - 2x\check{K}_n(t; x) + x^2\check{K}_n(1; x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+t} \right) x^2 + \frac{2}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) x + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2x^2 - 2x \frac{1}{n+t} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right) + x^2 \\
& = \left(-\frac{1}{n+t} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Uyarı 3.2.2

Aşağıdaki teorem için gerekli olan

$$x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi} \right] \check{K}_n((t-x)^2; x)$$

ifadesi hesaplanacaktır.

$$\check{K}_n((t-x)^2; x) = \left(-\frac{1}{n+t} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$$

ifadesinin maksimumunu bulmak için öncelikli olarak türev alınmalıdır. x 'e göre türev alınır

$$\left(\check{K}_n((t-x)^2; x) \right)' = -\frac{2}{n+t} x$$

bulunur.

$\left(\check{K}_n((t-x)^2; x) \right)' = 0$ olması $x = 0$ olduğunu gösterir. $x = 0$ değeri $\check{K}_n((t-x)^2; x)$ 'de yerine yazılırsa

$$\check{K}_n((t-0)^2; 0) = \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$$

bulunur. Bu ifade

$$k_n^1 := \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2} \right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^2$$

olarak tanımlansın.

Şimdi de aralığın uç noktası $\check{K}_n((t-x)^2; x)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{K}_n((t-x)^2; x)| \\ &= \left| \left(-\frac{1}{n+t}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+t} + \frac{4}{3(n+t)^2}\right) \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \right| \\ &= \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$k_n^2 := \frac{4}{3(n+t)^2} \left(\frac{n+\xi}{n+\psi}\right)^2$$

tanımlaması yapılırsa

$$\max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{K}_n((t-x)^2; x)| = \begin{cases} k_n^1, & \text{türev yardımıyla bulunan} \\ k_n^2, & \text{aralığın uç noktasından bulunan} \end{cases} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki teoremden Tanım 3.2.2’de verilen operatör için yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır.

Teorem 3.2.2

Her $f \in C \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ için

$$|\check{K}_n(f; x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\right) \omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\delta_n := \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\check{K}_n((t-x)^2; x)|$$

olarak tanımlıdır.

Kanıt

Süreklilik modülünün tanımından

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\tilde{\delta}_n}\right) \omega(f; \tilde{\delta}_n)$$

eşitsizliği doğrudur. Operatörün doğrusallığı yardımıyla

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| &\leq \left(\tilde{K}_n(1; x) + \frac{1}{\tilde{\delta}_n} \tilde{K}_n(|t - x|; x) \right) \omega(f; \tilde{\delta}_n) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\tilde{\delta}_n} \sqrt{\tilde{K}_n((t - x)^2; x)} \right) \omega(f; \tilde{\delta}_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada

$$\tilde{\delta}_n := \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} |\tilde{K}_n((t - x)^2; x)| \quad (3.7)$$

olarak tanımlanırsa (3.6)'dan $\tilde{K}_n((t - x)^2; x)$ ifadesi aşağıda yerine yazılarak

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| &\leq \max_{x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\delta}_n} \sqrt{\tilde{K}_n((t - x)^2; x)} \right) \omega(f; \tilde{\delta}_n) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\tilde{\delta}_n} \sqrt{\tilde{\delta}_n} \right) \omega(f; \tilde{\delta}_n) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\delta}_n}} \right) \omega(f; \tilde{\delta}_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3

$x \in \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ olmak üzere $Lip_\rho \left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]$ sınıfının elemanı olan her f fonksiyonu ve her $\rho \in (0, 1]$ için

$$\|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} \leq M(\tilde{\delta}_n)^\rho$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt

Operatörün ve mutlak değerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
 |\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{n+t}{2^{n+t+1}} \left(\frac{n+\psi}{n+\xi} \right)^{n+t+1} \sum_{k=0}^{n+t} \check{b}_{n,k}(x) \int_{\left(\frac{k}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}}^{\left(\frac{k+1}{2^{n+t}}-1\right)\frac{n+\xi}{n+\psi}} |f(u) - f(x)| du \\
 &\times \binom{n+t}{k} \left(x + \frac{n+\xi}{n+\psi} \right)^k \left(\frac{n+\xi}{n+\psi} - x \right)^{n+t-k}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından

$$|f(u) - f(x)| \leq M|t - x|^\rho$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik (3.8)'de yerine yazılırsa Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\tilde{K}_n((t-x)^\rho; x) \leq \left(\tilde{K}_n((t-x)^2; x) \right)^{\frac{\rho}{2}}$$

olacağından

$$|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| \leq M \left\{ \tilde{K}_n((t-x)^2; x) \right\}^{\frac{\rho}{2}}$$

durumu sağlanır. Böylece (3.7)'den

$$\left\| \tilde{K}_n(f; x) - f(x) \right\|_{C\left[-\frac{n+\xi}{n+\psi}, \frac{n+\xi}{n+\psi}\right]} \leq M(\tilde{\delta}_n)^\rho$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.



BÖLÜM 4

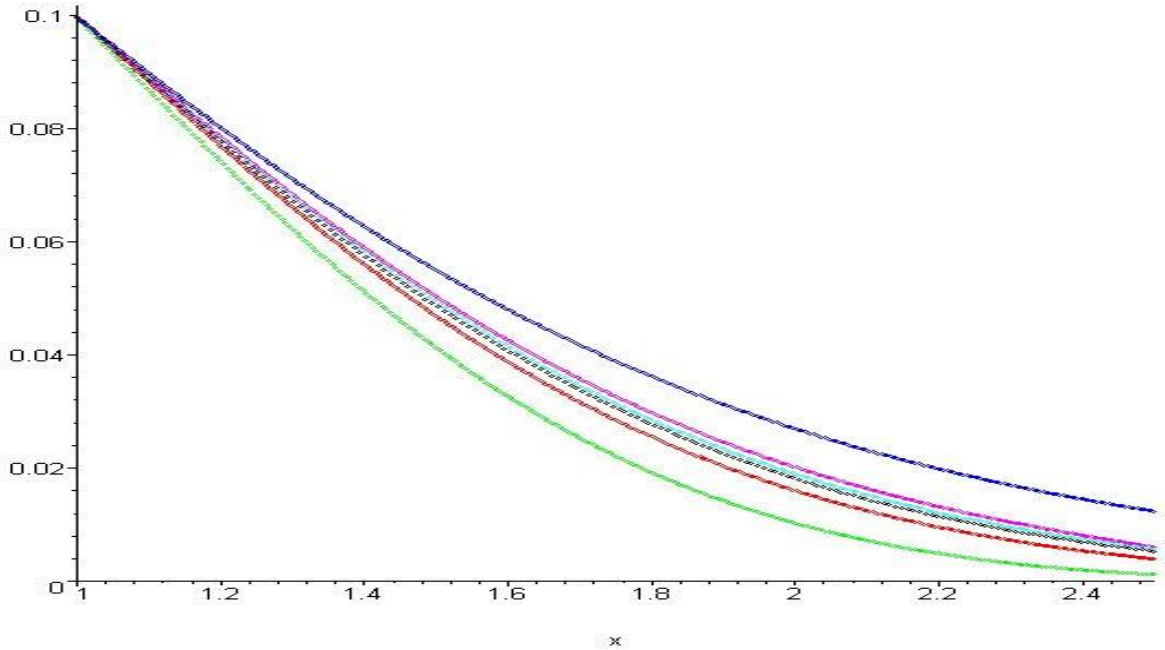
NÜMERİK HESAPLAR VE GRAFİK ÇİZİMİ

Bu bölümde, 3. Bölümde tanımlanan Bernstein tipli operatörlerin genelleştirmelerine ilişkin bazı nümerik hesaplar ve grafik çizimi yapılacaktır. Tanımlanan yeni operatörlerin yaklaşım hızı grafikler yardımıyla karşılaştırılacaktır.

Grafik çizimleri ve nümerik hesaplar için Maple programı kullanılacak olup Maple dilinde yazılan program parçaları da verilecektir.

Örnek 4.1

Şekil 4.1’de; $L_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 5, m = 15, \xi = 5$ ve $\psi = 10$ alınarak elde edilen operatörün $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ e yaklaşımı verilmiştir.



Şekil 4.1 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=5, m=15, \xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=7$ (siyah), $n=8$ (turkuaz), $n=10$ (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

> restart;
> with(plots):
> f:=x->(2*x)/exp(2*x+1);t:=5;m:=15;


$$f:=x \rightarrow \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$$



$$t:=5$$


$$m:=15$$

> xi:=readstat("xi değerini giriniz:");
xi değerini giriniz:5;


$$\xi:=5$$

> psi:=readstat("psi değerini giriniz:");
psi değerini giriniz:10;


$$\psi:=10$$

> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
);

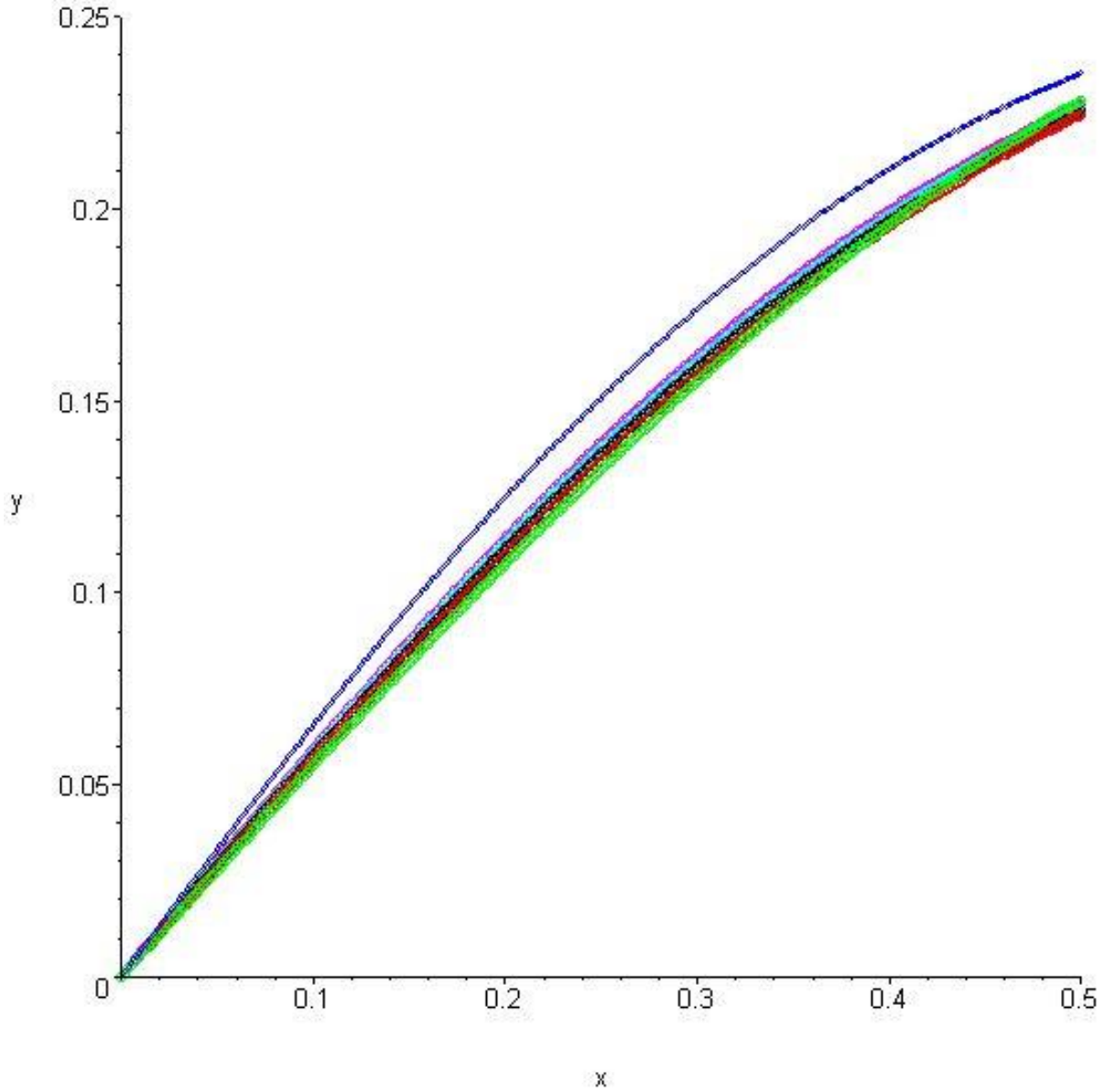
> L[n](f,x):=simplify(evalf(((1/(2^(n+t)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+t)*sum(f(((2*k)/(n+t))-1)*((n+xi)/(n+psi)))^k*N[n](k,x),k=0..n+t))))):
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=1..2.5,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=5):
> M2:=plot(L[2](f,x),x=1..2.5,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=5):
> M3:=plot(L[5](f,x),x=1..2.5,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M4:=plot(L[7](f,x),x=1..2.5,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=180,symbolsize=5):
> M5:=plot(L[8](f,x),x=1..2.5,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=200,symbolsize=5):
> M6:=plot(L[10](f,x),x=1..2.5,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=5):
> display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```


Örnek 4.2

Şekil 4.2’de $L_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 5, m = 25, \xi = 5$ ve $\psi = 10$ alınarak elde edilen

$f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ e yaklaşımı verilmiştir.



Şekil 4.2 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=5, m=25, \xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=10$ (kırmızı), $n=15$ (siyah), $n=20$ (turkuaz), $n=25$ (eflatun))

```

> restart;
> with(plots):
> f:=x->(2*x)/(5*x^2+3);t:=5;m:=25;


$$f:=x \rightarrow \frac{2x}{5x^2+3}$$



$$t:=5$$


$$m:=25$$

> xi:=readstat("xi değerini giriniz:");
xi değerini giriniz:5;


$$\xi:=5$$

> psi:=readstat("psi değerini giriniz:");
psi değerini giriniz:10;


$$\psi:=10$$

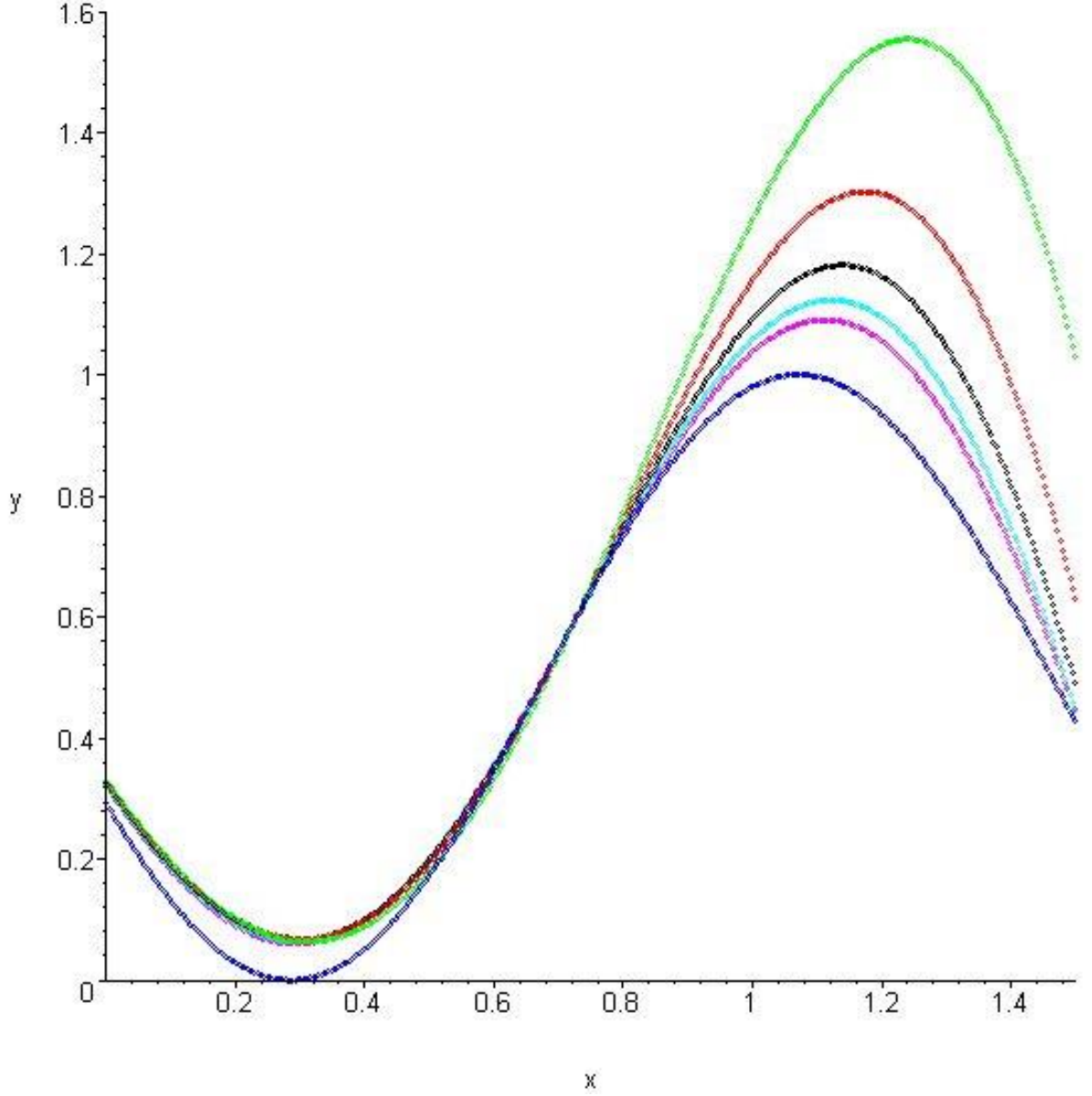
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x^(n+t-k)
):

> L[n](f,x):=simplify(evalf(((1/(2^(n+t)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+t)*sum(f(((2*k)/(n+t))-1)*((n+xi)/(n+psi)))^k*N[n](k,x),k=0..n+t)))):
>
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M2:=plot(L[2](f,x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=9):
> M3:=plot(L[10](f,x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=9):
> M4:=plot(L[15](f,x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=9):
> M5:=plot(L[20](f,x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=9):
> M6:=plot(L[25](f,x),x=0..0.5,y=0..0.25,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=280,symbolsize=9):
> display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```

Örnek 4.3

Şekil 4.3’de $L_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 10, m = 20, \xi = 10$ ve $\psi = 20$ alınarak elde edilen $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ e yaklaşımı verilmiştir.



Şekil 4.3 $L_n(f; x)$ polinomlarıyla $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10$, $m=20$, $\xi=10$ ve $\psi=20$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=10$ (siyah), $n=15$ (turkuaz), $n=20$ (eflatun))

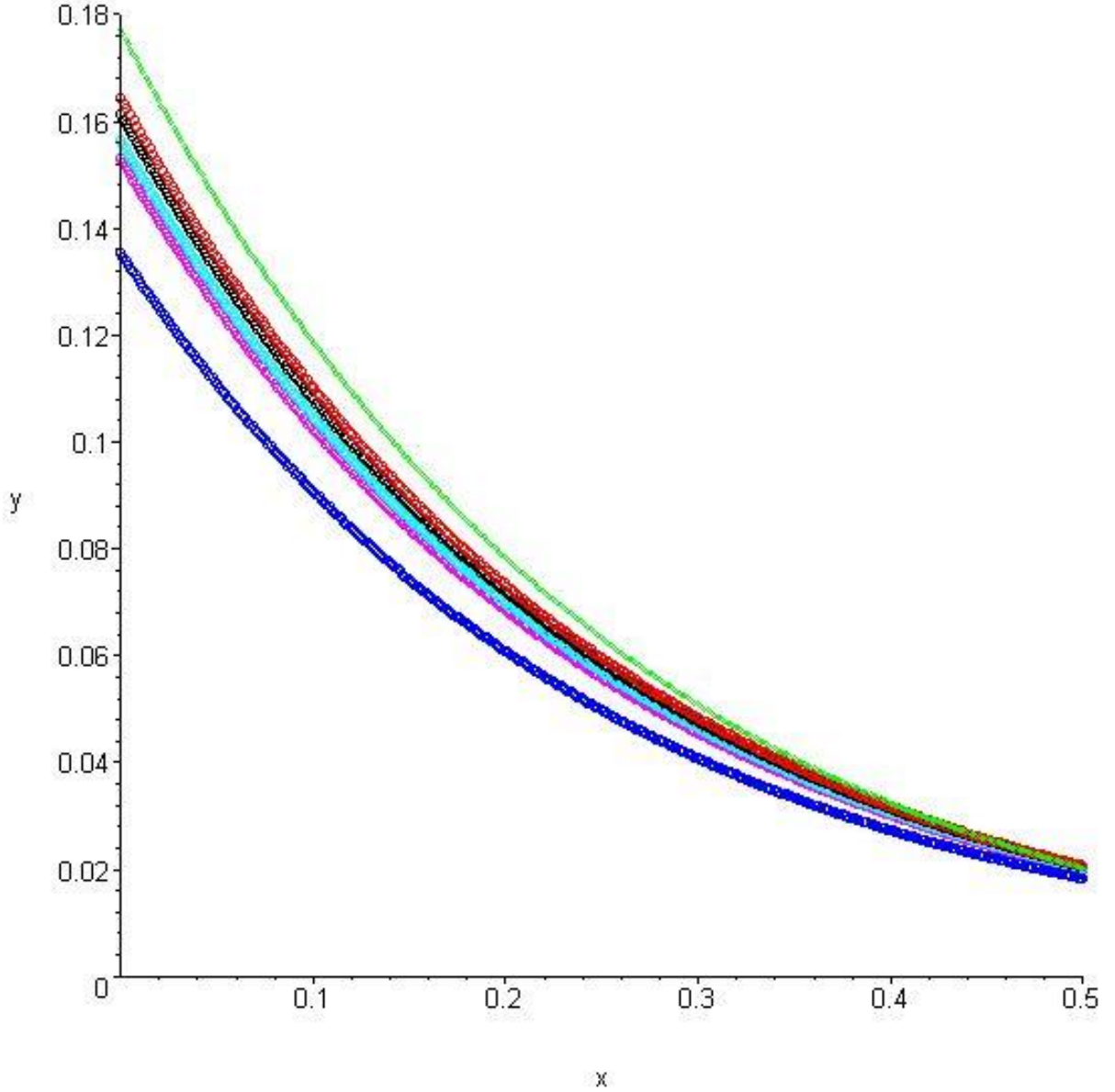
```

> restart;
> with(plots):
> f:=x->(cos(2*x+1))^2;t:=10;m:=20;
                                 $f:=x \rightarrow \cos(2x+1)^2$ 
                                 $t:=10$ 
                                 $m:=20$ 
> xi:=readstat("xi değerini giriniz:");
xi değerini giriniz:10;
                                 $\xi:=10$ 
> psi:=readstat("psi değerini giriniz:");
psi değerini giriniz:20;
                                 $\psi:=20$ 
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
    binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
):
> L[n](f,x):=simplify(evalf(((1/(2^(n+t)))*(n+psi)/(n+xi))^(n+t)*sum(f(((2*k)/(n+t))-1)*((n+xi)/(n+psi)))^k*N[n](k,x),k=0..n+t)))):
>
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> M2:=plot(L[1](f,x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> M3:=plot(L[5](f,x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> M4:=plot(L[10](f,x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> M5:=plot(L[15](f,x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> M6:=plot(L[20](f,x),x=0..1.5,y=0..1.6,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=6):
> display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```

Örnek 4.4

Şekil 4.4’de, $L_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 10, m = 40, \xi = 10$ ve $\psi = 17$ alınmasıyla oluşturulan operatörün $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ e yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 4.4 $L_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10$, $m=40$, $\xi=10$ ve $\psi=17$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=30$ (turkuaz), $n=40$ (eflatun))

```

> restart;
> with(plots):
> f:=x->(1/exp(2*x+1))^2;t:=10;m:=40;


$$f:=x \rightarrow \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$$



$$t:=10$$



$$m:=40$$


> xi:=readstat("xi değerini giriniz");
xi değerini giriniz:10;


$$\xi:=10$$


> psi:=readstat("psi değerini giriniz");
psi değerini giriniz:17;


$$\psi:=17$$

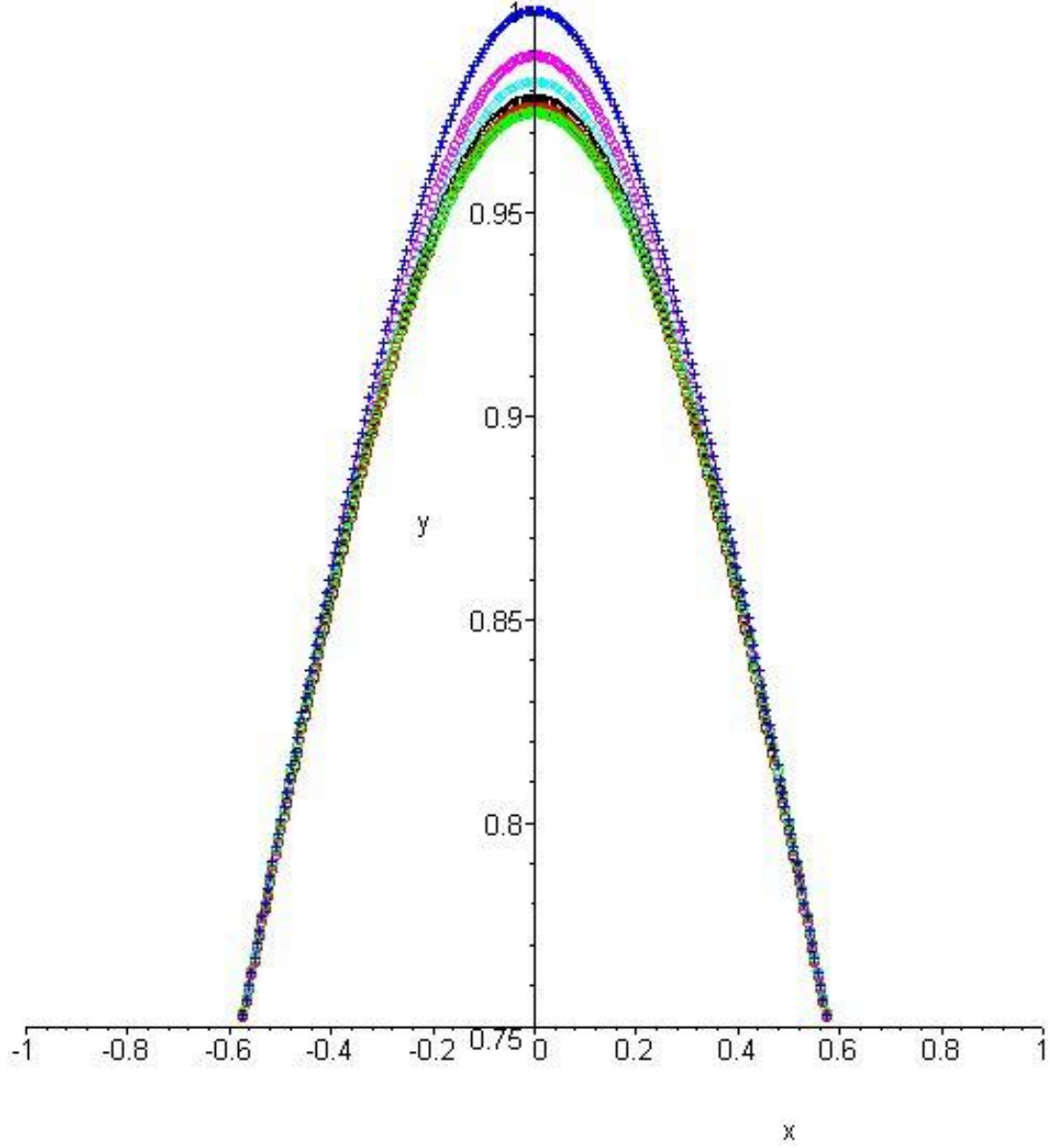

> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
):

> L[n](f,x):=simplify(evalf(((1/(2^(n+t)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+t)*sum(f(((2*k)/(n+t))-1)*((n+xi)/(n+psi)))^k*N[n](k,x),k=0..n+t)))):
>
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M2:=plot(L[1](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M3:=plot(L[15](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=300,symbolsize=8):
> M4:=plot(L[20](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M5:=plot(L[30](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M6:=plot(L[40](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```

Örnek 4.5

Şekil 4.5’de $L_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 10, m = 65, \xi = 5$ ve $\beta = 10$ alınarak operatörün $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e yaklaşımı verilmiştir.



Şekil 4.5 $L_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10$, $m=65$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=32$ (turkuaz), $n=65$ (eflatun))

```

> restart;with(plots):
> xi := 5;psi:=10;t:=10;m:=65;f:=x->1/(x^2+1);
       $\xi := 5$ 
       $\psi := 10$ 
       $t := 10$ 
       $m := 65$ 
      
$$f := x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$$

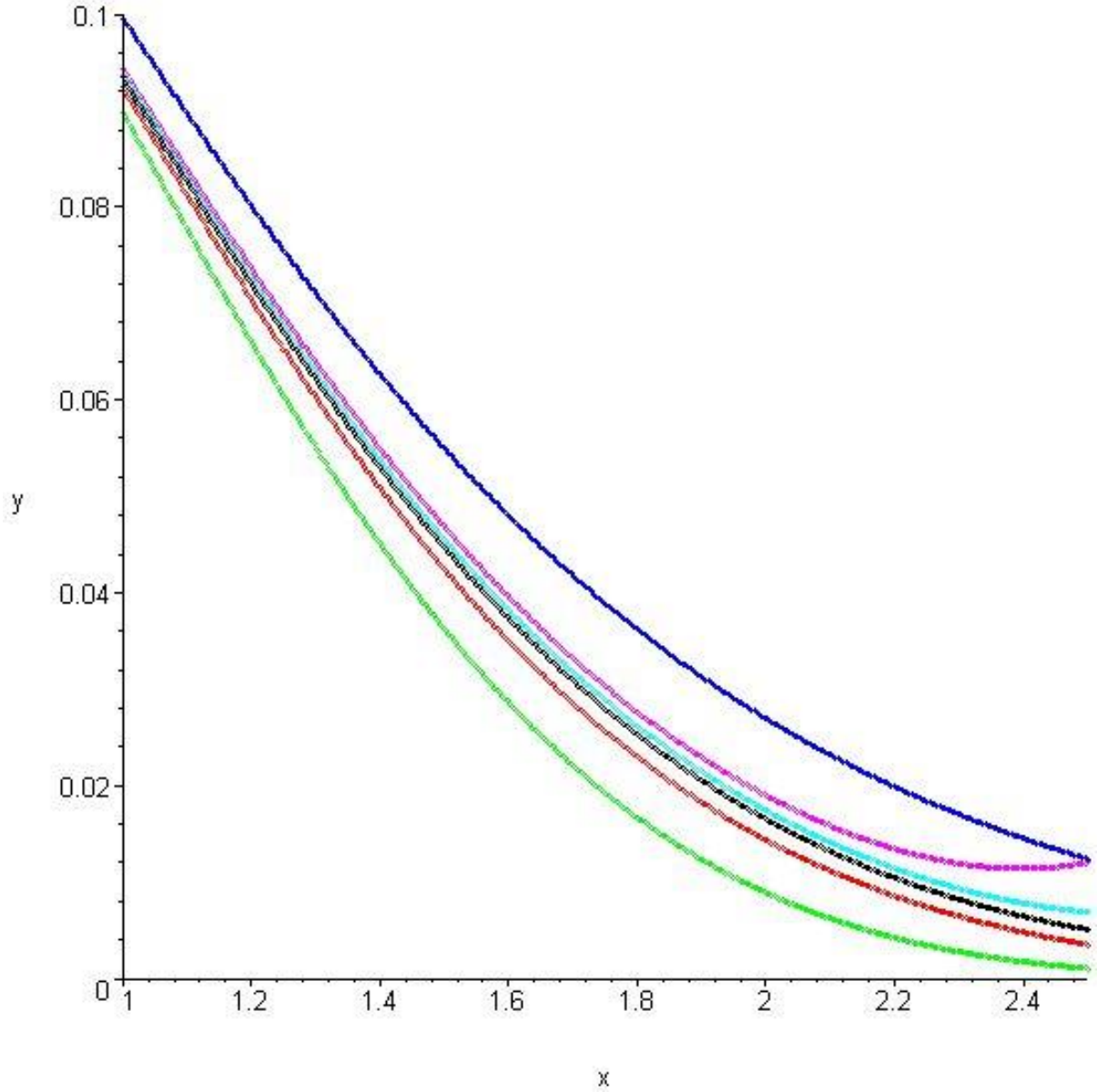
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
):
>
> L[n](f,x):=simplify(evalf(((1/(2^(n+t)))*(n+psi)/(n+xi))^(n+t)*sum(f(((2*k)/(n+t))-1)*((n+xi)/(n+psi))*N[n](k,x),k=0..n+t)))));
> end do:
>
>
> M1:=plot(f(x),x=-1..1,y=0.75..1,color=blue,style=point,symbol=cross,numpoints=380,symbolsize=10):
> M2:=plot(L[1](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M3:=plot(L[15](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=9):
> M4:=plot(L[20](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M5:=plot(L[32](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=cyan,style=point,symbol=diamond,numpoints=280,symbolsize=8):
> M6:=plot(L[65](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```


Aşağıdaki 5 örnekte (3.4) eşitliği ile verilen operatör için yaklaşım hızı hesabı yapılmıştır.

Örnek 4.6

Şekil 4.6’da, $K_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 5, m = 15, \xi = 5$ ve $\psi = 10$ alınarak $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ e yaklaşım verilmiştir.



Şekil 4.6 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=5$, $m=15$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=7$ (siyah), $n=8$ (turkuaz), $n=10$ (eflatun))

```

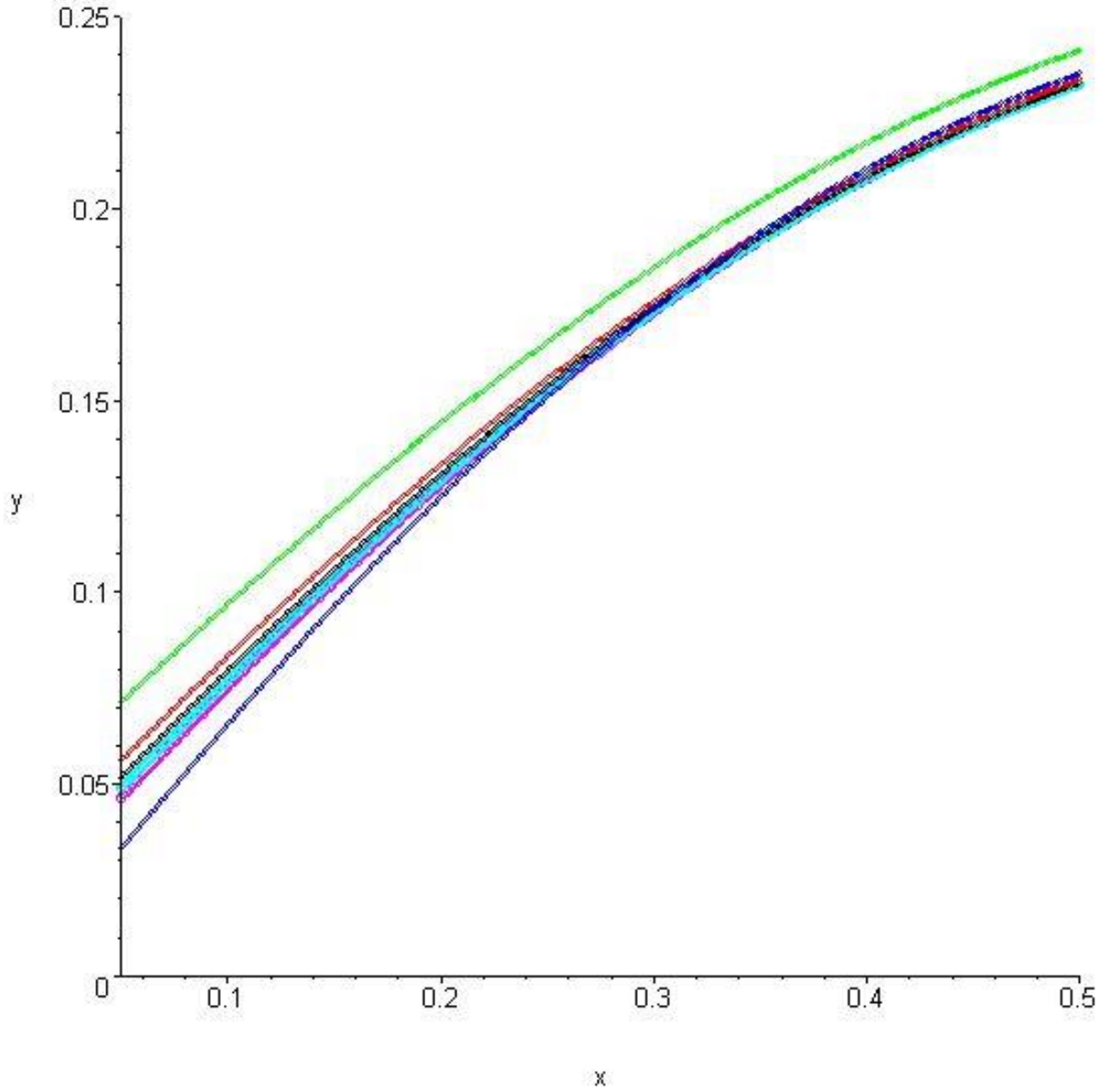
> restart;with(plots):
> xi := 5;psi:=10;t:=5;m:=15;f:=x->(2*x)/exp(2*x+1);
      ξ := 5
      ψ := 10
      t := 5
      m := 15
      
$$f := x \rightarrow \frac{2x}{e^{(2x+1)}}$$

> for n from 1 to m do
> N[n](k,x) :=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k
):
> P:=int((2*u)/exp(2*u+1),u=((2*k)/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi))..((2
*(k+1))/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi));
> K[n](f,x):=simplify(evalf(((n+t)/(2^(n+t+1)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+
t+1)*sum(N[n](k,x)*P,k=0..n+t)));
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=blue,style=point,symbol=cros
s,numpoints=380,symbolsize=7):
> M2:=plot(K[2](f,x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=green,style=point,symbo
l=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M3:=plot(K[5](f,x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=red,style=point,symbol=
circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M4:=plot(K[7](f,x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=black,style=point,symbo
l=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M5:=plot(K[8](f,x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=cyan,style=point,symbol
=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M6:=plot(K[10](f,x),x=1..2.5,y=0..0.1,color=magenta,style=point,sy
mbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):display([M1,M2,M3,M4,M5,M6
]);

```

Örnek 4.7

$K_n(f; x)$ polinomlar dizisinde $t = 5, m = 25, \xi = 5$ ve $\psi = 10$ alınması ile elde edilen operatörün $f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ e yaklaşımı Şekil 4.7’de verilmiştir.



Şekil 4.7 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{2x}{5x^2+3}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=5, m=25, \xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=2$ (yeşil), $n=10$ (kırmızı), $n=15$ (siyah), $n=20$ (turkuaz), $n=25$ (eflatun))

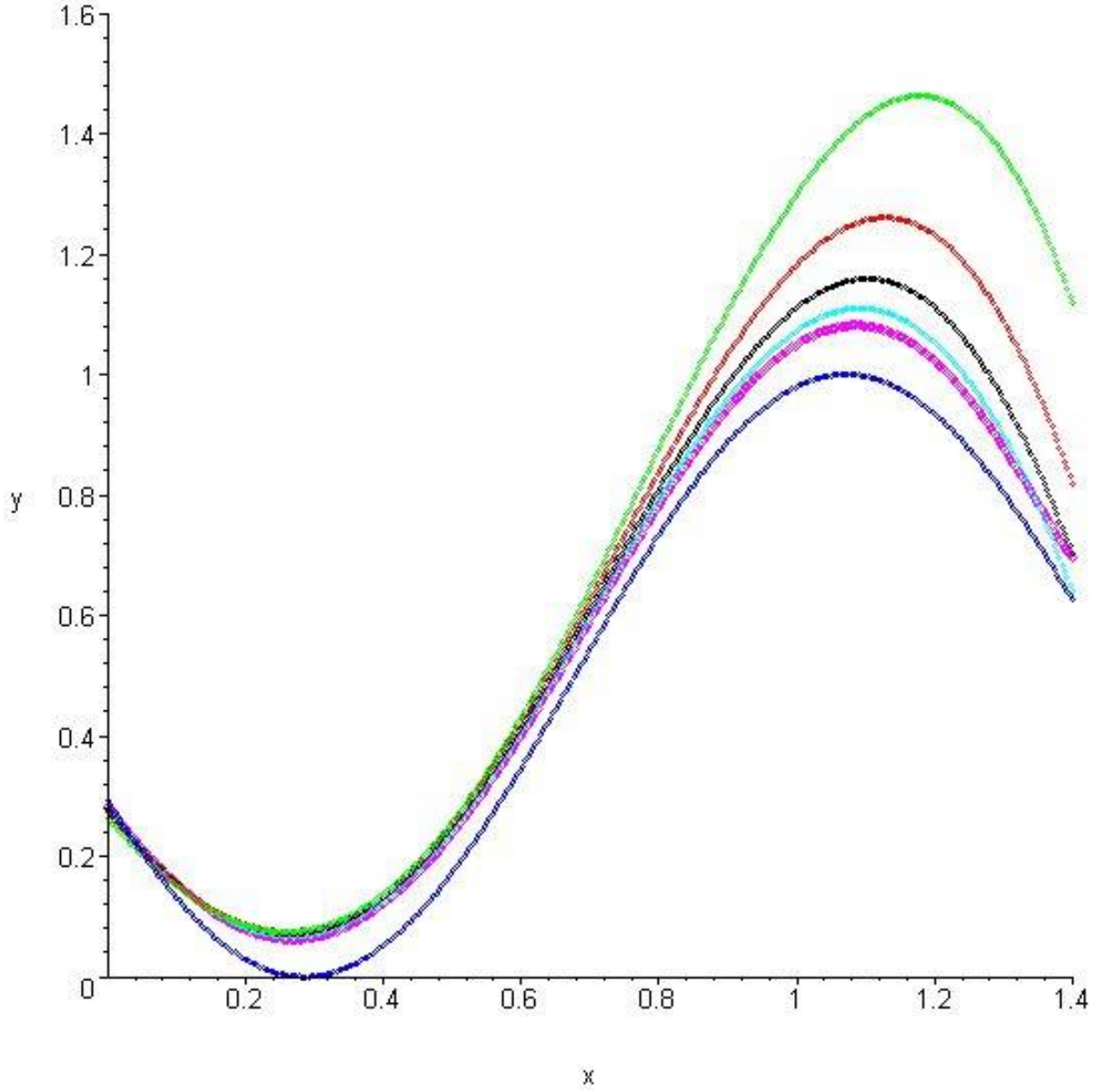
```

> restart;with(plots):
> xi := 5;psi:=10;t:=5;m:=25;f:=(2*x)/(5*x^2+3);
      ξ:=5
      ψ:=10
      t:=5
      m:=25
      f:= $\frac{2x}{5x^2+3}$ 
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k
  ):
> P:=int((2*u)/(5*u^2+3),u=((2*k)/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi))..((2*
  (k+1))/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi));
> K[n](f,x):=simplify(evalf(((n+t)/(2^(n+t+1)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+
  t+1)*sum(N[n](k,x)*P,k=0..n+t)));
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=blue,style=point,symbol=
  circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M2:=plot(K[2](f,x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=green,style=point,s
  ymbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M3:=plot(K[10](f,x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=red,style=point,sy
  mbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M4:=plot(K[15](f,x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=black,style=point,
  symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M5:=plot(K[20](f,x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=cyan,style=point,s
  ymbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M6:=plot(K[25](f,x),x=0.05..0.5,y=0..0.25,color=magenta,style=poin
  t,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=10):display([M1,M2,M3,M4,
  M5,M6]);

```

Örnek 4.8

Şekil 4.8’de, $K_n(f; x)$ polinom dizisinde $t = 10, m = 20, \xi = 10$ ve $\psi = 20$ alınması ile $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ e yaklaşım verilmiştir.



Şekil 4.8 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \cos(2x + 1)^2$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10, m=20, \xi=10$ ve $\psi=20$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=5$ (kırmızı), $n=10$ (siyah), $n=15$ (turkuaz), $n=20$ (eflatun))

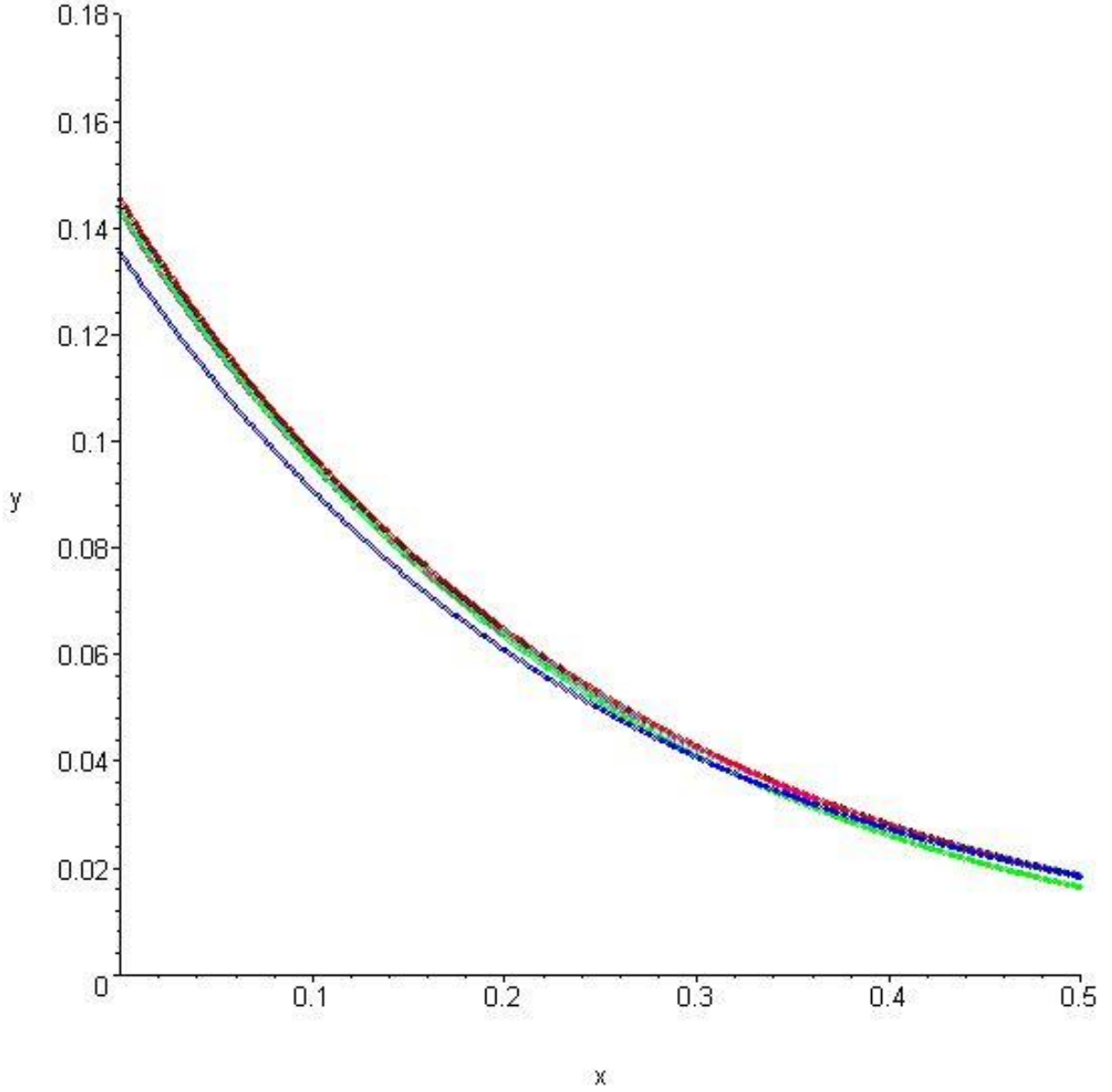
```

> restart;with(plots):
> xi := 10;psi:=20;t:=10;m:=20;f:=x->(cos(2*x+1))^2;
      ξ := 10
      ψ := 20
      t := 10
      m := 20
      f := x → cos(2 x + 1)2
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x):=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi)-x)^(n+t-k
  ):
> P:=int((cos(2*u+1))^2,u=((2*k)/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi))..((2*(
  k+1))/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi));
> K[n](f,x):=simplify(evalf(((n+t)/(2^(n+t+1)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+
  t+1)*sum(N[n](k,x)*P,k=0..n+t)));
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=blue,style=point,symbol=circ
  le,numpoints=380,symbolsize=7):
> M2:=plot(K[1](f,x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=green,style=point,symbo
  l=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M3:=plot(K[5](f,x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=red,style=point,symbol=
  circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M4:=plot(K[10](f,x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=black,style=point,symb
  ol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M5:=plot(K[15](f,x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=cyan,style=point,symbo
  l=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M6:=plot(K[20](f,x),x=0..1.4,y=0..1.6,color=magenta,style=point,sy
  mbol=diamond,numpoints=380,symbolsize=8):display([M1,M2,M3,M4,M5,M
  6]);

```

Örnek 4.9

Şekil 4.9’da, $K_n(f; x)$ polinom dizisinin $t = 10, m = 40, \xi = 10$ ve $\psi = 17$ için $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ e yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 4.9 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10$, $m=40$, $\xi=10$ ve $\psi=17$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=30$ (turkuaz), $n=40$ (eflatun))

```

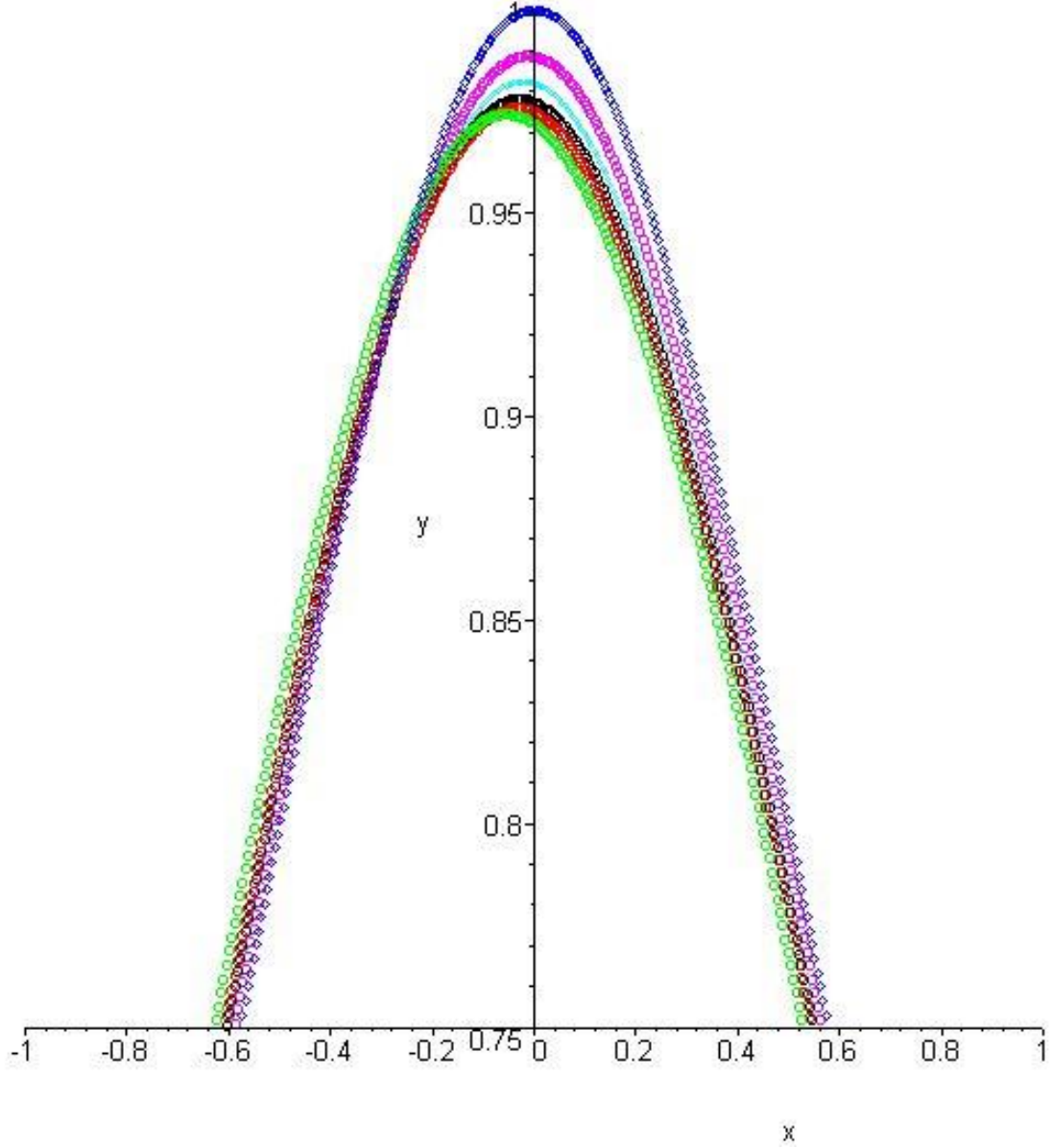
> restart;with(plots):
> xi := 10;psi:=17;t:=10;m:=40;f:=x->(1/exp(2*x+1))^2;
      ξ := 10
      ψ := 17
      t := 10
      m := 40
      
$$f := x \rightarrow \frac{1}{(e^{(2x+1)})^2}$$

> for n from 1 to m do
> N[n](k,x) :=
  binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
  ):
> P:=int((1/exp(2*u+1))^2,u=((2*k)/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi))..((2
  *(k+1))/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi));
> K[n](f,x):=simplify(evalf(((n+t)/(2^(n+t+1)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+
  t+1)*sum(N[n](k,x)*P,k=0..n+t)));
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=blue,style=point,symbol=cir
  cle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M2:=plot(K[1](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=green,style=point,symb
  ol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M3:=plot(K[15](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=red,style=point,symbo
  l=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M4:=plot(K[20](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=black,style=point,sym
  bol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M5:=plot(K[30](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=cyan,style=point,symb
  ol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M6:=plot(K[40](f,x),x=0..0.5,y=0..0.18,color=magenta,style=point,s
  ymbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):display([M1,M2,M3,M4,M5,M
  6]);

```


Örnek 4.10

$K_n(f; x)$ polinom dizisi için $t = 10, m = 65, \xi = 5$ ve $\psi = 10$ alındığında $K_n(f; x)$ 'in $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e yaklaşımı Şekil 4.10'da verilmiştir.



Şekil 4.10 $K_n(f; x)$ polinom dizisi ile $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım ($t=10$, $m=65$, $\xi=5$ ve $\psi=10$ olmak üzere $n=1$ (yeşil), $n=15$ (kırmızı), $n=20$ (siyah), $n=32$ (turkuaz), $n=65$ (eflatun))

```

> restart;with(plots):
> xi := 5;psi:=10;t:=10;m:=65;f:=x->1/(x^2+1);
      ξ := 5
      ψ := 10
      t := 10
      m := 65
      f := x →  $\frac{1}{x^2 + 1}$ 
> for n from 1 to m do
> N[n](k,x) :=
    binomial(n+t,k)*(x+((n+xi)/(n+psi)))^k*((n+xi)/(n+psi))-x)^(n+t-k)
):
> P:=int(1/(u^2+1),u=((2*k)/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi))..((2*(k+1))/(n+t)-1))*((n+xi)/(n+psi));
> K[n](f,x):=simplify(evalf((n+t)/(2^(n+t+1)))*((n+psi)/(n+xi))^(n+t+1)*sum(N[n](k,x)*P,k=0..n+t));
> end do:
> M1:=plot(f(x),x=-1..1,y=0.75..1,color=blue,style=point,symbol=diamond,numpoints=380,symbolsize=8):
> M2:=plot(K[1](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M3:=plot(K[15](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M4:=plot(K[20](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
> M5:=plot(K[32](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=7):
> M6:=plot(K[65](f,x),x=-1..1,y=0.75..1,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):display([M1,M2,M3,M4,M5,M6]);

```

Bundan sonraki kısımda her iki operatör için hata hesabı yapılacaktır. İlk üç örnekte (3.2) ile verilen operatör, son üç örnekte ise (3.4) operatörü için hata hesabı yapılacaktır.

Örnek 4.11

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.1’de gösterilmiştir.

Maple 13 programına ait program parçası aşağıdaki şekildedir:

```

> restart;
f:=(x)->(x^2);
xi:=5:psi:=6:t:=9:
n:=1:for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
t1:=evalf(simplify(abs((1-(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(2/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));t2:=evalf(simplify(abs((1-
(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
> delta1(n):=evalf(simplify(t1,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> delta2(n):=evalf(simplify(t2,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> omega(f,delta1(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta1(n))));
> omega(f,delta2(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta2(n))));

> errorB:=5*(omega(f,delta1(n)));
errorB:=5*(omega(f,delta2(n)));
end do;

```

Çizelge 4.1 $f(x) = x^2$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata hesabı	
10	1.0058595860	0.5358117440
10^2	0.1825571798	0.0921474446
10^3	0.01981167574	0.009915694365
10^4	0.001998101688	0.0009991506995
10^5	0.0001999810017	0.00009999150070
10^6	0.00001999981000	0.9999915000. 10^{-5}
10^7	0.1999998100. 10^{-5}	0.9999991500. 10^{-6}
10^8	0.1999999810. 10^{-6}	0.9999999150. 10^{-7}
10^9	0.1999999981. 10^{-7}	0.9999999915. 10^{-8}

Bu programa ait program çıktısı ise aşağıdaki gibidir.

```

n := 10
t1 := 0.1017680921
t2 := 0.05550986842
delta1(10) := 0.1017680921

```

$\delta 2(10) \doteq 0.05550986842$
 $\omega(f, 0.1017680921) \doteq 0.2011719173$
 $\omega(f, 0.05550986842) \doteq 0.1071623488$
 $errorB \doteq 1.005859586$
 $errorB \doteq 0.5358117440$
 $n \doteq 100$
 $t1 \doteq 0.01826125723$
 $t2 \doteq 0.009259229018$
 $\delta 1(100) \doteq 0.01826125723$
 $\delta 2(100) \doteq 0.009259229018$
 $\omega(f, 0.01826125723) \doteq 0.03651143596$
 $\omega(f, 0.009259229018) \doteq 0.01842948893$
 $errorB \doteq 0.1825571798$
 $errorB \doteq 0.09214744465$
 $n \doteq 1000$
 $t1 \doteq 0.001981174406$
 $t2 \doteq 0.0009920634882$
 $\delta 1(1000) \doteq 0.001981174406$
 $\delta 2(1000) \doteq 0.0009920634882$
 $\omega(f, 0.001981174406) \doteq 0.003962335147$
 $\omega(f, 0.0009920634882) \doteq 0.001983138873$
 $errorB \doteq 0.01981167574$
 $errorB \doteq 0.009915694365$
 $n \doteq 10000$
 $t1 \doteq 0.0001998101758$
 $t2 \doteq 0.00009992006395$
 $\delta 1(10000) \doteq 0.0001998101758$
 $\delta 2(10000) \doteq 0.00009992006395$
 $\omega(f, 0.0001998101758) \doteq 0.0003996203376$
 $\omega(f, 0.00009992006395) \doteq 0.0001998301399$
 $errorB \doteq 0.001998101688$
 $errorB \doteq 0.0009991506995$
 $n \doteq 100000$

$t1 := 0.00001999810018$
 $t2 := 0.9999200064 \cdot 10^{-5}$
 $\delta 1(100000) := 0.00001999810018$
 $\delta 2(100000) := 0.9999200064 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.00001999810018) := 0.00003999620034$
 $\omega(f, 0.9999200064 \cdot 10^{-5}) := 0.00001999830014$
 $errorB := 0.0001999810017$
 $errorB := 0.00009999150070$
 $n := 1000000$
 $t1 := 0.1999981000 \cdot 10^{-5}$
 $t2 := 0.9999920001 \cdot 10^{-6}$
 $\delta 1(1000000) := 0.1999981000 \cdot 10^{-5}$
 $\delta 2(1000000) := 0.9999920001 \cdot 10^{-6}$
 $\omega(f, 0.1999981000 \cdot 10^{-5}) := 0.3999962000 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.9999920001 \cdot 10^{-6}) := 0.1999983000 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.00001999981000$
 $errorB := 0.9999915000 \cdot 10^{-5}$
 $n := 10000000$
 $t1 := 0.1999998100 \cdot 10^{-6}$
 $t2 := 0.9999992000 \cdot 10^{-7}$
 $\delta 1(10000000) := 0.1999998100 \cdot 10^{-6}$
 $\delta 2(10000000) := 0.9999992000 \cdot 10^{-7}$
 $\omega(f, 0.1999998100 \cdot 10^{-6}) := 0.3999996200 \cdot 10^{-6}$
 $\omega(f, 0.9999992000 \cdot 10^{-7}) := 0.1999998300 \cdot 10^{-6}$
 $errorB := 0.1999998100 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.9999991500 \cdot 10^{-6}$
 $n := 100000000$
 $t1 := 0.1999999810 \cdot 10^{-7}$
 $t2 := 0.9999999200 \cdot 10^{-8}$
 $\delta 1(100000000) := 0.1999999810 \cdot 10^{-7}$
 $\delta 2(100000000) := 0.9999999200 \cdot 10^{-8}$

$$\omega(f, 0.199999981010^{-7}) := 0.399999962010^{-7}$$

$$\omega(f, 0.999999920010^{-8}) := 0.199999983010^{-7}$$

$$errorB := 0.199999981010^{-6}$$

$$errorB := 0.999999915010^{-7}$$

$$n := 1000000000$$

$$t1 := 0.19999998110^{-8}$$

$$t2 := 0.999999992010^{-9}$$

$$\delta1(1000000000) := 0.19999998110^{-8}$$

$$\delta2(1000000000) := 0.999999992010^{-9}$$

$$\omega(f, 0.19999998110^{-8}) := 0.39999996210^{-8}$$

$$\omega(f, 0.999999992010^{-9}) := 0.19999998310^{-8}$$

$$errorB := 0.19999998110^{-7}$$

$$errorB := 0.999999991510^{-8}$$

Örnek 4.12

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.2’de verilecektir.

Maple 13 programına ait program parçası şu şekildedir:

```
> restart;
f:=(x)->(x^2)+(1/2)*x;
xi:=5:psi:=6:t:=9:
n:=1:for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
t1:=evalf(simplify(abs((1-(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(2/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));t2:=evalf(simplify(abs((1-
(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
```

```

> delta1(n):=evalf(simplify(t1,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> delta2(n):=evalf(simplify(t2,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> omega(f,delta1(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta1(n))));

> omega(f,delta2(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta2(n))));

> errorB:=5*(omega(f,delta1(n)));
errorB:=5*(omega(f,delta2(n)));
end do;

```

Çizelge 4.2 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata hesabı	
10	1.260279816	0.6745864150
10^2	0.2282103228	0.1152955172
10^3	0.02476461175	0.01239585308
10^4	0.002497627128	0.001248950859
10^5	0.0002499762522	0.0001249895008
10^6	0.00002499976250	0.00001249989500
10^7	$0.2499997625 \cdot 10^{-5}$	$0.1249998950 \cdot 10^{-5}$
10^8	$0.249999762 \cdot 10^{-6}$	$0.124999895 \cdot 10^{-6}$
10^9	$0.249999976 \cdot 10^{-7}$	$0.124999990 \cdot 10^{-7}$

Bu programa ait program çıktısı ise aşağıdaki gibidir.

```

n := 10
t1 := 0.1017680921
t2 := 0.05550986842
delta1(10) := 0.1017680921
delta2(10) := 0.05550986842
omega(f, 0.1017680921) := 0.2520559633
omega(f, 0.05550986842) := 0.1349172830
errorB := 1.260279816
errorB := 0.6745864150

```

$n := 100$
 $t1 := 0.01826125723$
 $t2 := 0.009259229018$
 $\delta 1(100) := 0.01826125723$
 $\delta 2(100) := 0.009259229018$
 $\omega(f, 0.01826125723) := 0.04564206457$
 $\omega(f, 0.009259229018) := 0.02305910344$
 $errorB := 0.2282103228$
 $errorB := 0.1152955172$
 $n := 1000$
 $t1 := 0.001981174406$
 $t2 := 0.0009920634882$
 $\delta 1(1000) := 0.001981174406$
 $\delta 2(1000) := 0.0009920634882$
 $\omega(f, 0.001981174406) := 0.004952922350$
 $\omega(f, 0.0009920634882) := 0.002479170617$
 $errorB := 0.02476461175$
 $errorB := 0.01239585308$
 $n := 10000$
 $t1 := 0.0001998101758$
 $t2 := 0.00009992006395$
 $\delta 1(10000) := 0.0001998101758$
 $\delta 2(10000) := 0.00009992006395$
 $\omega(f, 0.0001998101758) := 0.0004995254255$
 $\omega(f, 0.00009992006395) := 0.0002497901719$
 $errorB := 0.002497627128$
 $errorB := 0.001248950860$
 $n := 100000$
 $t1 := 0.00001999810018$
 $t2 := 0.9999200064 \cdot 10^{-5}$
 $\delta 1(100000) := 0.00001999810018$
 $\delta 2(100000) := 0.9999200064 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.00001999810018) := 0.00004999525043$

$$\omega(f, 0.9999200064 \cdot 10^{-5}) := 0.00002499790018$$

$$\text{error}B := 0.0002499762522$$

$$\text{error}B := 0.0001249895009$$

$$n := 1000000$$

$$t1 := 0.1999981000 \cdot 10^{-5}$$

$$t2 := 0.9999920001 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta1(1000000) := 0.1999981000 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta2(1000000) := 0.9999920001 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega(f, 0.1999981000 \cdot 10^{-5}) := 0.4999952500 \cdot 10^{-5}$$

$$\omega(f, 0.9999920001 \cdot 10^{-6}) := 0.2499979000 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{error}B := 0.00002499976250$$

$$\text{error}B := 0.00001249989500$$

$$n := 10000000$$

$$t1 := 0.1999998100 \cdot 10^{-6}$$

$$t2 := 0.9999992000 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta1(10000000) := 0.1999998100 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta2(10000000) := 0.9999992000 \cdot 10^{-7}$$

$$\omega(f, 0.1999998100 \cdot 10^{-6}) := 0.4999995250 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega(f, 0.9999992000 \cdot 10^{-7}) := 0.2499997900 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{error}B := 0.2499997625 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{error}B := 0.1249998950 \cdot 10^{-5}$$

$$n := 100000000$$

$$t1 := 0.1999999810 \cdot 10^{-7}$$

$$t2 := 0.9999999200 \cdot 10^{-8}$$

$$\delta1(100000000) := 0.1999999810 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta2(100000000) := 0.9999999200 \cdot 10^{-8}$$

$$\omega(f, 0.1999999810 \cdot 10^{-7}) := 0.4999999525 \cdot 10^{-7}$$

$$\omega(f, 0.9999999200 \cdot 10^{-8}) := 0.2499999790 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{error}B := 0.2499999762 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{error}B := 0.1249999895 \cdot 10^{-6}$$

$$n := 1000000000$$

$$t1 := 0.1999999981 \cdot 10^{-8}$$

$$t2 := 0.9999999920 \cdot 10^{-9}$$

$$\delta 1(1000000000) := 0.1999999981 \cdot 10^{-8}$$

$$\delta 2(1000000000) := 0.9999999920 \cdot 10^{-9}$$

$$\omega(f, 0.1999999981 \cdot 10^{-8}) := 0.4999999953 \cdot 10^{-8}$$

$$\omega(f, 0.9999999920 \cdot 10^{-9}) := 0.2499999979 \cdot 10^{-8}$$

$$errorB := 0.2499999976 \cdot 10^{-7}$$

$$errorB := 0.1249999990 \cdot 10^{-7}$$

Örnek 4.13

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonunun $t = 5, \xi = 1$ ve $\psi = 7$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.3’de verilecektir.

Maple 13 programına ait program parçası şu şekildedir:

```
> restart;
f:=(x)->exp((1/2)*(x^3));
xi:=1:psi:=7:t:=5:
n:=1:for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
t1:=evalf(simplify(abs((1-(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(2/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
> t2:=evalf(simplify(abs((1-(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi)))-(1-
(1/(n+t)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
> delta1(n):=evalf(simplify(t1,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> delta2(n):=evalf(simplify(t2,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> omega(f,delta1(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta1(n))));
> omega(f,delta2(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta2(n))));
> errorB:=5*(omega(f,delta1(n)));
errorB:=5*(omega(f,delta2(n)));
end do;
```

Çizelge 4.3 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonunun $t = 5, \xi = 1$ ve $\psi = 7$ için hata hesabı	
10	0.3605298035	0.2632535455
10^2	0.06767607150	0.04587497400
10^3	0.007419630500	0.004955406500
10^4	0.0007491890000	0.0004995500000
10^5	0.00007499200000	0.00004999600000
10^6	0.7500000000. 10^{-5}	0.5000000000. 10^{-5}
10^7	0.7500000000. 10^{-6}	0.5000000000. 10^{-6}
10^8	0.7500000000. 10^{-7}	0.5000000000. 10^{-7}
10^9	0.7500000000. 10^{-8}	0.5000000000. 10^{-8}

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki gibidir.

```

n := 10
t1 := 0.2410611303
t2 := 0.2131487889
δ1(10) := 0.2410611303
δ2(10) := 0.2131487889
ω(f, 0.2410611303) := 0.2743701789
ω(f, 0.2131487889) := 0.2296715175
errorB := 1.371850894
errorB := 1.148357588
n := 100
t1 := 0.06091195322
t2 := 0.05242628801
δ1(100) := 0.06091195322
δ2(100) := 0.05242628801
ω(f, 0.06091195322) := 0.1380384300
ω(f, 0.05242628801) := 0.1170081452
errorB := 0.6901921500
errorB := 0.5850407260
n := 1000
t1 := 0.006900100292
t2 := 0.005916897389

```

$$\delta 1(1000) := 0.006900100292$$

$$\delta 2(1000) := 0.005916897389$$

$$\omega(f, 0.006900100292) := 0.01691585908$$

$$\omega(f, 0.005916897389) := 0.01448048297$$

$$errorB := 0.08457929540$$

$$errorB := 0.07240241485$$

$$n := 10000$$

$$t1 := 0.0006989911099$$

$$t2 := 0.0005991609051$$

$$\delta 1(10000) := 0.0006989911099$$

$$\delta 2(10000) := 0.0005991609051$$

$$\omega(f, 0.0006989911099) := 0.001727149274$$

$$\omega(f, 0.0005991609051) := 0.001480218113$$

$$errorB := 0.008635746370$$

$$errorB := 0.007401090565$$

$$n := 100000$$

$$t1 := 0.00006998990111$$

$$t2 := 0.00005999160091$$

$$\delta 1(100000) := 0.00006998990111$$

$$\delta 2(100000) := 0.00005999160091$$

$$\omega(f, 0.00006998990111) := 0.0001730754272$$

$$\omega(f, 0.00005999160091) := 0.0001483484821$$

$$errorB := 0.0008653771360$$

$$errorB := 0.0007417424105$$

$$n := 1000000$$

$$t1 := 0.699989900110^{-5}$$

$$t2 := 0.599991600110^{-5}$$

$$\delta 1(1000000) := 0.699989900110^{-5}$$

$$\delta 2(1000000) := 0.599991600110^{-5}$$

$$\omega(f, 0.699989900110^{-5}) := 0.00001731141754$$

$$\omega(f, 0.599991600110^{-5}) := 0.00001483835789$$

$$errorB := 0.00008655708770$$

$$errorB := 0.00007419178945$$

```

n := 10000000
t1 := 0.699998990010-6
t2 := 0.599999160010-6
δ1(10000000) := 0.699998990010-6
δ2(10000000) := 0.599999160010-6
ω(f, 0.699998990010-6) := 0.173115577610-5
ω(f, 0.599999160010-6) := 0.148384780810-5
errorB := 0.865577888010-5
errorB := 0.741923904010-5
n := 100000000
t1 := 0.699999899010-7
t2 := 0.599999916010-7
δ1(100000000) := 0.699999899010-7
δ2(100000000) := 0.599999916010-7
ω(f, 0.699999899010-7) := 0.173115717810-6
ω(f, 0.599999916010-7) := 0.148384901010-6
errorB := 0.865578589010-6
errorB := 0.741924505010-6
n := 1000000000
t1 := 0.699999989910-8
t2 := 0.599999991610-8
δ1(1000000000) := 0.699999989910-8
δ2(1000000000) := 0.599999991610-8
ω(f, 0.699999989910-8) := 0.164872125610-7
ω(f, 0.599999991610-8) := 0.148384913010-7
errorB := 0.824360628010-7
errorB := 0.741924565010-7

```

Örnek 4.14

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.4’de gösterilmiştir.

Maple 13 programına ait program çıktısı aşağıdaki şekildedir:

```
> restart;
f:=(x)->(x^2);
xi:=5:psi:=6:t:=9:
n:=1:for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
k1:=evalf(simplify(abs((1/(n+t))+(4/(3*(n+t)^2)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
k2:=evalf(simplify(abs((4/(3*(n+t)^2))*((n+xi)/(n+psi))^2)));
> delta1(n):=evalf(simplify(k1,x=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi),y=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi)));
> delta2(n):=evalf(simplify(k2,x=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi),y=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi)));
> omega(f,delta1(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi)),y=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi),h=0..delta1(n))));
> omega(f,delta2(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi)),y=-
(n+xi)/(n+psi)..(n+xi)/(n+psi),h=0..delta2(n))));
> errorB:=5*(omega(f,delta1(n)));
errorB:=5*(omega(f,delta2(n)));
end do;
```

Çizelge 4.4 $f(x) = x^2$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata hesabı	
10	0.4763573244	0.03048573068
10^2	0.09067696725	0.001090837806
10^3	0.009899239225	0.00001305752696
10^4	0.0009989842460	$0.1330537576 \cdot 10^{-6}$
10^5	0.00009998983425	$0.1333053376 \cdot 10^{-8}$
10^6	$0.9999898335 \cdot 10^{-5}$	$0.1333305334 \cdot 10^{-10}$
10^7	$0.9999989835 \cdot 10^{-6}$	$0.1333330534 \cdot 10^{-12}$
10^8	$0.9999998985 \cdot 10^{-7}$	$0.1333333054 \cdot 10^{-14}$
10^9	$0.9999999900 \cdot 10^{-8}$	$0.1333333306 \cdot 10^{-16}$

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki gibidir.

```
n := 10
k1 := 0.04950441482
k2 := 0.003246191136
δ1(10) := 0.04950441482
δ2(10) := 0.003246191136
ω(f, 0.04950441482) := 0.09527146488
ω(f, 0.003246191136) := 0.006097146137
errorB := 0.4763573244
errorB := 0.03048573068

n := 100
k1 := 0.009112144765
k2 := 0.0001101165531
δ1(100) := 0.009112144765
δ2(100) := 0.0001101165531
ω(f, 0.009112144765) := 0.01813539345
ω(f, 0.0001101165531) := 0.0002181675611
errorB := 0.09067696725
errorB := 0.001090837806

n := 1000
k1 := 0.0009904179694
k2 := 0.1307051098 10-5
δ1(1000) := 0.0009904179694
δ2(1000) := 0.1307051098 10-5
ω(f, 0.0009904179694) := 0.001979847845
ω(f, 0.1307051098 10-5) := 0.2611505393 10-5
errorB := 0.009899239225
errorB := 0.00001305752696

n := 10000
k1 := 0.00009990341860
k2 := 0.1330670555 10-7
δ1(10000) := 0.00009990341860
```

$\delta 2(10000) := 0.1330670555 \cdot 10^{-7}$
 $\omega(f, 0.00009990341860) := 0.0001997968492$
 $\omega(f, 0.1330670555 \cdot 10^{-7}) := 0.2661075153 \cdot 10^{-7}$
 $errorB := 0.0009989842460$
 $errorB := 0.1330537576 \cdot 10^{-6}$
 $n := 100000$
 $k1 := 0.9999033419 \cdot 10^{-5}$
 $k2 := 0.1333066706 \cdot 10^{-9}$
 $\delta 1(100000) := 0.9999033419 \cdot 10^{-5}$
 $\delta 2(100000) := 0.1333066706 \cdot 10^{-9}$
 $\omega(f, 0.9999033419 \cdot 10^{-5}) := 0.00001999796685$
 $\omega(f, 0.1333066706 \cdot 10^{-9}) := 0.2666106752 \cdot 10^{-9}$
 $errorB := 0.00009998983425$
 $errorB := 0.1333053376 \cdot 10^{-8}$
 $n := 1000000$
 $k1 := 0.9999903334 \cdot 10^{-6}$
 $k2 := 0.1333306667 \cdot 10^{-11}$
 $\delta 1(1000000) := 0.9999903334 \cdot 10^{-6}$
 $\delta 2(1000000) := 0.1333306667 \cdot 10^{-11}$
 $\omega(f, 0.9999903334 \cdot 10^{-6}) := 0.1999979667 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.1333306667 \cdot 10^{-11}) := 0.2666610667 \cdot 10^{-11}$
 $errorB := 0.9999898335 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.1333305334 \cdot 10^{-10}$
 $n := 10000000$
 $k1 := 0.9999990333 \cdot 10^{-7}$
 $k2 := 0.1333330667 \cdot 10^{-13}$
 $\delta 1(10000000) := 0.9999990333 \cdot 10^{-7}$
 $\delta 2(10000000) := 0.1333330667 \cdot 10^{-13}$
 $\omega(f, 0.9999990333 \cdot 10^{-7}) := 0.1999997967 \cdot 10^{-6}$
 $\omega(f, 0.1333330667 \cdot 10^{-13}) := 0.2666661067 \cdot 10^{-13}$
 $errorB := 0.9999989835 \cdot 10^{-6}$


```

errorB:= 0.1333330534 10-12
n := 100000000
k1 := 0.9999999033 10-8
k2 := 0.1333333067 10-15
δ1(100000000) := 0.9999999033 10-8
δ2(100000000) := 0.1333333067 10-15
ω(f, 0.9999999033 10-8) := 0.1999999797 10-7
ω(f, 0.1333333067 10-15) := 0.2666666107 10-15

errorB:= 0.9999998985 10-7
errorB:= 0.1333333054 10-14
n := 1000000000
k1 := 0.9999999903 10-9
k2 := 0.1333333307 10-17
δ1(1000000000) := 0.9999999903 10-9
δ2(1000000000) := 0.1333333307 10-17
ω(f, 0.9999999903 10-9) := 0.1999999980 10-8
ω(f, 0.1333333307 10-17) := 0.2666666611 10-17

errorB:= 0.9999999900 10-8
errorB:= 0.1333333306 10-16

```

Örnek 4.15

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.5’de gösterilmiştir.

Maple 13 programına ait program parçası aşağıdaki şekildedir:

```

> restart;
f:=(x)->(x^2)+(1/2)*x;
xi:=5:psi:=6:t:=9:
n:=1:for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
k1:=evalf(simplify(abs((1/(n+t))+(4/(3*(n+t)^2)))*((n+xi)/(n+psi))^2)));

```

```

k2:=evalf(simplify(abs((4/(3*((n+t)^2)))*((n+xi)/(n+psi))^2)))));
> delta1(n):=evalf(simplify(k1,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> delta2(n):=evalf(simplify(k2,x=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi))));
> omega(f,delta1(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta1(n))));
> omega(f,delta2(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=-((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),y=-
((n+xi)/(n+psi))..((n+xi)/(n+psi)),h=0..delta2(n))));
> errorB:=5*(omega(f,delta1(n)));
errorB:=5*(omega(f,delta2(n)));
end do;

```

Çizelge 4.5 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun $t = 9, \xi = 5$ ve $\psi = 6$ için hata hesabı	
10	0.6001183615	0.03860120852
10^2	0.1134573292	0.001366129188
10^3	0.01237528415	0.00001632515471
10^4	0.001248742792	$0.1663205216 \cdot 10^{-6}$
10^5	0.0001249874178	$0.1666320052 \cdot 10^{-8}$
10^6	0.00001249987417	$0.1666632000 \cdot 10^{-10}$
10^7	$0.1249998742 \cdot 10^{-5}$	$0.1666663200 \cdot 10^{-12}$
10^8	$0.1249999874 \cdot 10^{-6}$	$0.1666666320 \cdot 10^{-14}$
10^9	$0.1249999988 \cdot 10^{-7}$	$0.1666666632 \cdot 10^{-16}$

Bu programa ait program çıktısı ise aşağıda verilmiştir.

```

n := 10
k1 := 0.04950441482
k2 := 0.003246191136
δ1(10) := 0.04950441482
δ2(10) := 0.003246191136
ω(f, 0.04950441482 ) := 0.1200236723
ω(f, 0.003246191136 ) := 0.007720241705
errorB := 0.6001183615
errorB := 0.03860120852

```

$n := 100$
 $k1 := 0.009112144765$
 $k2 := 0.0001101165531$
 $\delta1(100) := 0.009112144765$
 $\delta2(100) := 0.0001101165531$
 $\omega(f, 0.009112144765) := 0.02269146583$
 $\omega(f, 0.0001101165531) := 0.0002732258376$
 $errorB := 0.1134573292$
 $errorB := 0.001366129188$

$n := 1000$
 $k1 := 0.0009904179694$
 $k2 := 0.1307051098 \cdot 10^{-5}$
 $\delta1(1000) := 0.0009904179694$
 $\delta2(1000) := 0.1307051098 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.0009904179694) := 0.002475056830$
 $\omega(f, 0.1307051098 \cdot 10^{-5}) := 0.3265030942 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.01237528415$
 $errorB := 0.00001632515471$

$n := 10000$
 $k1 := 0.00009990341860$
 $k2 := 0.1330670555 \cdot 10^{-7}$
 $\delta1(10000) := 0.00009990341860$
 $\delta2(10000) := 0.1330670555 \cdot 10^{-7}$
 $\omega(f, 0.00009990341860) := 0.0002497485585$
 $\omega(f, 0.1330670555 \cdot 10^{-7}) := 0.3326410431 \cdot 10^{-7}$
 $errorB := 0.001248742792$
 $errorB := 0.1663205216 \cdot 10^{-6}$

$n := 100000$
 $k1 := 0.9999033419 \cdot 10^{-5}$
 $k2 := 0.1333066706 \cdot 10^{-9}$
 $\delta1(100000) := 0.9999033419 \cdot 10^{-5}$
 $\delta2(100000) := 0.1333066706 \cdot 10^{-9}$

$\omega(f, 0.9999033419 \cdot 10^{-5}) := 0.00002499748356$
 $\omega(f, 0.1333066706 \cdot 10^{-9}) := 0.3332640105 \cdot 10^{-9}$
 $errorB := 0.0001249874178$
 $errorB := 0.1666320052 \cdot 10^{-8}$
 $n := 1000000$
 $k1 := 0.9999903334 \cdot 10^{-6}$
 $k2 := 0.1333306667 \cdot 10^{-11}$
 $\delta1(1000000) := 0.9999903334 \cdot 10^{-6}$
 $\delta2(1000000) := 0.1333306667 \cdot 10^{-11}$
 $\omega(f, 0.9999903334 \cdot 10^{-6}) := 0.2499974834 \cdot 10^{-5}$
 $\omega(f, 0.1333306667 \cdot 10^{-11}) := 0.3333264001 \cdot 10^{-11}$
 $errorB := 0.00001249987417$
 $errorB := 0.1666632000 \cdot 10^{-10}$
 $n := 10000000$
 $k1 := 0.9999990333 \cdot 10^{-7}$
 $k2 := 0.1333330667 \cdot 10^{-13}$
 $\delta1(10000000) := 0.9999990333 \cdot 10^{-7}$
 $\delta2(10000000) := 0.1333330667 \cdot 10^{-13}$
 $\omega(f, 0.9999990333 \cdot 10^{-7}) := 0.2499997484 \cdot 10^{-6}$
 $\omega(f, 0.1333330667 \cdot 10^{-13}) := 0.3333326401 \cdot 10^{-13}$
 $errorB := 0.1249998742 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.1666663200 \cdot 10^{-12}$
 $n := 100000000$
 $k1 := 0.9999999033 \cdot 10^{-8}$
 $k2 := 0.1333333067 \cdot 10^{-15}$
 $\delta1(100000000) := 0.9999999033 \cdot 10^{-8}$
 $\delta2(100000000) := 0.1333333067 \cdot 10^{-15}$
 $\omega(f, 0.9999999033 \cdot 10^{-8}) := 0.2499999749 \cdot 10^{-7}$
 $\omega(f, 0.1333333067 \cdot 10^{-15}) := 0.3333332641 \cdot 10^{-15}$
 $errorB := 0.1249999874 \cdot 10^{-6}$
 $errorB := 0.1666666320 \cdot 10^{-14}$

```

n := 1000000000
k1 := 0.9999999903 10-9
k2 := 0.1333333307 10-17
δ1(1000000000) := 0.9999999903 10-9
δ2(1000000000) := 0.1333333307 10-17
ω(f, 0.9999999903 10-9) := 0.2499999975 10-8
ω(f, 0.1333333307 10-17) := 0.3333333265 10-17
errorB := 0.1249999988 10-7
errorB := 0.1666666632 10-16

```

Örnek 4.16

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonunun $t = 5, \xi = 1$ ve $\psi = 7$ için hata payının hesaplanması Çizelge 4.6'da gösterilmiştir.

Maple 13 programına ait program parçası aşağıda verilmiştir:

```

> restart;
f := (x) -> exp( (1/2) * (x^3) );
xi := 1: psi := 7: t := 5:
n := 1: for i from 1 to 9 do
n := 10*n;
k1 := evalf(simplify(abs((1/(n+t)) + (4/(3*(n+t)^2))) * ((n+xi)/(n+psi))^2)));
>
k2 := evalf(simplify(abs((4/(3*(n+t)^2))) * ((n+xi)/(n+psi))^2)));
> delta1(n) := evalf(simplify(k1, x = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), y = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi))));
> delta2(n) := evalf(simplify(k2, x = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), y = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi))));
> omega(f, delta1(n)) := evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h) -
f(x))), x = -((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), y = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), h = 0 .. delta1(n))));
> omega(f, delta2(n)) := evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h) -
f(x))), x = -((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), y = -
((n+xi)/(n+psi)) .. ((n+xi)/(n+psi)), h = 0 .. delta2(n))));
> errorB := 5*(omega(f, delta1(n)));
errorB := 5*(omega(f, delta2(n)));
end do;

```

Çizelge 4.6 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonuna ait hata payı hesabı

n değeri	$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3}$ fonksiyonunun $t = 5, \xi = 1$ ve $\psi = 7$ için hata hesabı	
10	0.1156502542	0.008962406745
10^2	0.08875591060	0.001096675125
10^3	0.01194332946	0.00001579394788
10^4	0.001232234365	$0.1647240014 \cdot 10^{-6}$
10^5	0.0001236099970	0
10^6	0.00001236529824	0
10^7	$0.1236539840 \cdot 10^{-5}$	0
10^8	$0.1236540842 \cdot 10^{-6}$	0
10^9	$0.8243606280 \cdot 10^{-8}$	0

Bu programa ait program çıktısı ise aşağıdaki gibidir.

```

n := 10
k1 := 0.03039343842
k2 := 0.002481097014
δ1(10) := 0.03039343842
δ2(10) := 0.002481097014
ω(f, 0.03039343842) := 0.02313005084
ω(f, 0.002481097014) := 0.001792481349
errorB := 0.1156502542
errorB := 0.008962406745
n := 100
k1 := 0.008593419686
k2 := 0.0001077544788
δ1(100) := 0.008593419686
δ2(100) := 0.0001077544788
ω(f, 0.008593419686) := 0.01775118212
ω(f, 0.0001077544788) := 0.0002193350250
errorB := 0.08875591060
errorB := 0.001096675125
n := 1000
k1 := 0.0009845073179
k2 := 0.1304415128 10-5

```

$\delta 1(1000) := 0.0009845073179$
 $\delta 2(1000) := 0.130441512810^{-5}$
 $\omega(f, 0.0009845073179) := 0.002388665892$
 $\omega(f, 0.130441512810^{-5}) := 0.315878957510^{-5}$
 $errorB := 0.01194332946$
 $errorB := 0.00001579394788$
 $n := 10000$
 $k1 := 0.00009984350883$
 $k2 := 0.133040419510^{-7}$
 $\delta 1(10000) := 0.00009984350883$
 $\delta 2(10000) := 0.133040419510^{-7}$
 $\omega(f, 0.00009984350883) := 0.0002464468730$
 $\omega(f, 0.133040419510^{-7}) := 0.329448002810^{-7}$
 $errorB := 0.001232234365$
 $errorB := 0.164724001410^{-6}$
 $n := 100000$
 $k1 := 0.999843350910^{-5}$
 $k2 := 0.133304004210^{-9}$
 $\delta 1(100000) := 0.999843350910^{-5}$
 $\delta 2(100000) := 0.133304004210^{-9}$
 $\omega(f, 0.999843350910^{-5}) := 0.00002472199939$
 $\omega(f, 0.133304004210^{-9}) := 0.$
 $errorB := 0.0001236099970$
 $errorB := 0.$
 $n := 1000000$
 $k1 := 0.999984333510^{-6}$
 $k2 := 0.133330400010^{-11}$
 $\delta 1(1000000) := 0.999984333510^{-6}$
 $\delta 2(1000000) := 0.133330400010^{-11}$
 $\omega(f, 0.999984333510^{-6}) := 0.247305964910^{-5}$
 $\omega(f, 0.133330400010^{-11}) := 0.$
 $errorB := 0.00001236529824$

$errorB := 0.$
 $n := 10000000$
 $k1 := 0.9999984333 \cdot 10^{-7}$
 $k2 := 0.1333330400 \cdot 10^{-13}$
 $\delta1(10000000) := 0.9999984333 \cdot 10^{-7}$
 $\delta2(10000000) := 0.1333330400 \cdot 10^{-13}$
 $\omega(f, 0.9999984333 \cdot 10^{-7}) := 0.2473079680 \cdot 10^{-6}$
 $\omega(f, 0.1333330400 \cdot 10^{-13}) := 0.$
 $errorB := 0.1236539840 \cdot 10^{-5}$
 $errorB := 0.$
 $n := 100000000$
 $k1 := 0.999998433 \cdot 10^{-8}$
 $k2 := 0.1333333040 \cdot 10^{-15}$
 $\delta1(100000000) := 0.999998433 \cdot 10^{-8}$
 $\delta2(100000000) := 0.1333333040 \cdot 10^{-15}$
 $\omega(f, 0.999998433 \cdot 10^{-8}) := 0.2473081683 \cdot 10^{-7}$
 $\omega(f, 0.1333333040 \cdot 10^{-15}) := 0.$
 $errorB := 0.1236540842 \cdot 10^{-6}$
 $errorB := 0.$
 $n := 1000000000$
 $k1 := 0.999999843 \cdot 10^{-9}$
 $k2 := 0.1333333304 \cdot 10^{-17}$
 $\delta1(1000000000) := 0.999999843 \cdot 10^{-9}$
 $\delta2(1000000000) := 0.1333333304 \cdot 10^{-17}$
 $\omega(f, 0.999999843 \cdot 10^{-9}) := 0.1648721256 \cdot 10^{-8}$
 $\omega(f, 0.1333333304 \cdot 10^{-17}) := 0.$
 $errorB := 0.8243606280 \cdot 10^{-8}$
 $errorB := 0.$

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 SONUÇLAR

Bu çalışmada 3.1 ve 3.2 kesimde, değişken sınırlı bir aralık üzerinde verilen, doğrusallığı ve pozitifliği gösterilen operatörler tanımlanmıştır. Bu operatörler için test fonksiyonlarındaki eşitlikler hesaplanmıştır. Her iki operatörün Korovkin tipli teoremi sağladığı gösterilmiştir. Tanımlanan aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar yardımıyla süreklilik modülü kullanılarak yaklaşım hızları elde edilmiştir. Yaklaşım hızları grafik üzerinde gösterilerek yaklaşımlar için nümerik hesap içeren tablolar oluşturulmuştur. Grafiklerden de görüleceği üzere n sayısı büyüdükçe tanımlanan operatörler fonksiyona daha iyi yaklaşmaktadır.

5.2 ÖNERİLER

Grafiklere ilişkin program parçalarının ve çıktılarının verildiği çalışmada uygulama kısmının olması ve çizim yapmakta zorlanan araştırmacılar için yol gösterici olacaktır.

Hazırladığımız tez çalışması yardımıyla araştırmacılar; sınırların değişken aralık üzerinde alındığı literatürdeki bazı operatörlerin modifikasyonlarının yaklaşım özelliklerini inceleyebilirler. Ayrıca tanımlanan operatörler iki değişkenli fonksiyonlara uygulanacak şekilde genelleştirilebilir. Son olarak literatürde bu anlamdaki operatörlerin karşılaştırmaları yapılabilir.



KAYNAKLAR

- Acar E and Izgi A** (2021) On Approximation Properties of Generalization of Bernstein Polynomials in Symmetric Range. *NTMSCI*, 9 (1): 52-58.
- Alkhawagah A A and Madjid A A** (2017) On Holder-Lipschitz Condition. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 8 (1): 1905-1909.
- Almesbahi M M** (2017) On Properties of q-Bernstein Polynomials. *Yüksek Lisans Tezi*, Atılım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 45 s.
- Altomare F and Campiti M** (1994) *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. ISBN: 3-11-014178-7, De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 627 pp.
- Andrews G E, Askey R and Roy R** (1999) *Special Functions*. ISBN: 9781107325937 Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 664 pp.
- Barbosu D** (2000) Some Generalized Bivariate Bernstein Operators. *Miskolc Mathematical Notes*, 1(1): 3-10.
- Bernstein S N** (1912) Démonstration du Théorème de Weierstrass Fondée Sur le Calcul Des Probabilités. *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 13 (2): 1-2.
- Castellani L and Wess J (eds.)** (1996) *Quantum Groups and Their Applications in Physics*. ISBN: 978-90-5199-247-2, IOS Press, Amsterdam, 652 pp.
- Chakrabarti R and Jagannathan R** (1991) A (p,q)-Oscillator Realization of Two-Parameter Quantum Algebras. *Journal of Physics A Mathematical and General*, 24: 711-718.
- Corcino R B** (2008) On p,q-Binomial coefficients. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 8: 1-16.
- Coşkun T** (1998) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 47: 175-181.
- Çetin N** (2021) Approximation by α -Bernstein-Schurer Operatör. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50 (3): 732-743.
- Çetinkaya M** (2018) q-Bernstein-Chlodowsky Polinomları ile Yaklaşım. *Yüksek Lisans Tezi*, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 151 s.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Duran U** (2016) Post Quantum Calculus. *Yüksek Lisans Tezi*, Gaziantep Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Gaziantep, 205 s.
- Gal S G and Anastassiou G A** (2000) *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*. ISBN:978-1461271123 Birkhäuser, New York, 538 pp.
- Goodman T N T, Oruç H and Phillips G M** (1999) Convexity and Generalized Bernstein Polynomials. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 42: 179-190.
- Hacısalıhoğlu H ve Hacıyev A** (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 100 s.
- Jagannathan R and Rao K S** (2005) Two-Parameter Quantum Algebras, Twin-Basic Numbers and Associated Generalized Hypergeometric Series. *International Conference on Number Theory and Mathematical Physics*, 20-21 December 2005, Srinivasa Ramanujan Centre, Kumbakonam, India, 1-16.
- Kahvecibaşı İ** (2014) $[-1,1]$ Aralığında Bernstein-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Şanlıurfa, 54 s.
- Kang S M, Rafiq A, Acu A M, Ali F, and Kwun Y C** (2016) Some Approximation Properties of (p,q) -Bernstein Operators. *Journal of Inequalities and Applications*, 169: 1-10.
- Kantorovich L V** (1930) Sur Certains Developments Suivant les Polynomes de la Forms de S. Bernstein I-II. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 563-568, 595-600.
- Keleş G S** (2018) $[-1,1]$ Aralığında Bernstein-Schurer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri ve Yaklaşım Hızı. *Yüksek Lisans Tezi*, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Şanlıurfa, 38 s.
- Korovkin P P** (1953) On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 90: 961-964.
- Korovkin P P** (1960) *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Pub. Corb. Delhi, India, 222 pp.
- Lupaş A** (1987) A q -Analogue of the Bernstein Operator, Babeş-Bolyai University, *Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, 9: 85-92.
- Martinez F L** (1989) Some Properties of Two-Dimensional Bernstein Polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 59 (3): 300-306.
- Mursaleen M, Nasiruzzaman Md and Nurgali A** (2015) Some Approximation Results on Bernstein-Schurer Operators Defined by (p,q) -Integers. *Journal of Inequalities and Applications*, 1: 1-12.

KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- Mursaleen M, Ansari K J and Khan A** (2016) Some Approximation Results by (p,q) -Analogue of Bernstein-Stancu Operators (Revised). *Applied Mathematics and Computation*, 264: 392-402.
- Mursaleen M, Ansari K J and Khan A** (2016) Erratum to On (p,q) -analogue of Bernstein operators. [(2015) *Appl. Math. Comput.* 266: 874-882]. *Appl. Math. Comput.* 278: 70-71.
- Natanson I P** (1964) *Constructive Function Theory, Volume I Uniform Approximation*. Frederick Ungar Publishing Company, New York, 232 pp.
- Phillips G M** (1996) On Generalized Bernstein Polynomials. *Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birthday Volume*, Griffiths D F and Watson G A (Ed.), World Scientific, Singapore, 263-269.
- Rudin** (1991) *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Co, Singapore, 411 pp.
- Schurer F** (1962) *Linear Positive Operators in Approximation Theory*. Math. Inst. Techn. Univ. Delft Report.
- Volkov V I** (1957) On The Convergence of Sequences of Linear Positive Operators in The Space of Two Variables. *Doklady Akad. Nauk, SSSR(N.S.)*, 115: 17-19.
- Weierstrass K** (1885) Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639.



ÖZGEÇMİŞ

Melis EREN

İlk ve orta öğrenimini Akçakoca'da tamamladı. 2010 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenimine başladı. 2017 yılında mezun olduktan sonra 2019 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programına kabul edildi. Halen Özel Akçakoca Doğru Tercih Kişisel Gelişim Kursu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.