

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK DÜZGÜN UZUN DALGA DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ
DENEME DENKLEM VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METOTLARI
İLE ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
EREN CÜVELEK

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Doç. Dr. Hasan BULUT

ELAZIĞ-2016

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİMETRİK DÜZGÜN UZUN DALGA DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ
DENEME DENKLEM VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METOTLARI
İLE ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
EREN CÜVELEK
(131121104)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı : Uygulamalı Matematik**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :05.02.2016

Tezin Savunulduğu Tarih :24.02.2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan BULUT (Fırat Üniversitesi)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY (İnönü Üniversitesi)
Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (Fırat Üniversitesi)

ŞUBAT – 2016

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü desteği esirgemeyen hocam Doç. Dr. Hasan BULUT'a ayrıca Yrd. Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ ve Matematik Bölümü'nde her zaman desteklerini esirgemeyen hocalarıma teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Eren CÜVELEK

Elazığ-2016

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3.MATERYAL VE METOTLAR.....	9
3.1.Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM).....	9
3.2.Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM).....	11
4. METOTLARIN UYGULANMASI.....	13
4.1.SRLW Denklemine GDDM'nin Uygulanması.....	13
4.2.SRLW Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	22
5. SONUÇ.....	28
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	31

ÖZET

Simetrik Düzgün Uzun Dalga Denkleminin Genişletilmiş Deneme Denklem ve Genelleştirilmiş Kudryashov Metotları ile Çözümlerinin İrdelenmesi

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ele alınan çalışmanın amacı ve literatürdeki yeri belirtildi.

İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, çalışmada kullanılan Genişletilmiş Deneme Denklem ve Genelleştirilmiş Kudryashov Metotlarının genel yapısı tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, tezin esası olarak Simetrik Düzgün Uzun Dalga Denklemine üçüncü bölümde tanıtılan metotlar uygulandı ve rasyonel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon, eliptik fonksiyon çözümleri elde edildi.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

SUMMARY

Explicated of Solutions of Symmetric Regularized Long Wave Equation by Extended Trial Equation and Generalized Kudryashov Methods

This study have five chapters.

In first chapter, study was introduced.

In second chapter, main description was told.

In third chapter, Extended Trial Equation Method and Generalized Kudryashov Method were introduced.

In fourth chapter, methods in third chapter were applied to the Symmetric Regularized Long Wave Equation and rational function, trigonometric function, elliptic function solutions were obtained.

In fifth chapter, corollaries were reviewed.

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.**(4.17) rasyonel fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, \zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.2$ için iki boyutlu grafiği.....15
- Şekil 2.**(4.18) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği.....16
- Şekil 3.**(4.19) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \zeta_0 = -5$, için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği.....16
- Şekil 4.**(4.20) Jacobi elliptic fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5$, ve $\zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği.....17
- Şekil 5.**(4.34) rasyonel fonksiyon çözümünün $c = 0.4, k = 1, \tau_0 = -a_1(\tau_1 + \tau_2), \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2, a_1 = 0.5, \zeta_0 = 0.3, -40 < x < 40, -20 < t < 20$ ve $\zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği.....20
- Şekil 6.**(4.35) üstel fonksiyon çözümünün $c = 1/\sqrt{5}, a_1 = 5, a_3 = 2, \tau_0 = -a_3\tau_1, \tau_1 = -1, \tau_2 = \tau_1^2/2\tau_0, -25 < x < 25, -2 < t < 2$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.35$ için iki boyutlu grafiği.....20
- Şekil 7.**(4.37) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c = 1/3, a_1 = 3, a_3 = 5, a_4 = 2, \tau_0 = 0.2, \tau_1 = -0.1, \tau_2 = \tau_1^2/2\tau_0, -50 < x < 50, -20 < t < 20$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği.....21
- Şekil 8.** $k = 3$ ve $t = 0.01$ için (4.44) hiperbolik fonksiyon çözümünün iki ve üç boyutlu grafiği.....23

Şekil 9. $t = 0.01$ için (4.46) denkleminin kompleks trigonometrik çözümünün üç boyutlu grafiği.....	24
Şekil 10. $t = 0.01$ için (4.46) denkleminin kompleks trigonometrik çözümünün iki boyutlu grafiği.....	24
Şekil 11. $t = 0.01$ için (4.48) denkleminin kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün üç boyutlu grafiği.....	25
Şekil 12. $t = 0.01$ için (4.48) denkleminin kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün iki boyutlu grafiği.....	26
Şekil 13. $k = 3, t = 0.01$ için (4.50) denkleminin kompleks üstel fonksiyon çözümünün üç boyutlu grafiği.....	27
Şekil 14. $k = 3, t = 0.01$ için (4.50) denkleminin kompleks üstel fonksiyon çözümünün iki boyutlu grafiği.....	27

1.GİRİŞ

Günümüzde, birçok fiziksel problem matematiksel modellerle ifade edilmektedir. Elde edilen bu modeller birbirinden farklı fiziksel özelliklere sahiptir. Bu özelliklerin ortaya çıkarılması için farklı metotlara ihtiyaç vardır. Özellikle son yıllarda yeni veya var olan metotların modifiye edilmiş halleri birçok araştırmacı tarafından literatüre sunulmuştur. Geliştirilen bu metotlar matematiksel modellerin farklı fiziksel özelliklerini ortaya çıkarmaktadır.

Örneğin, Yong-Sik Cho ve arkadaşları tsunaminin uzak mesafelere yayılmasının bir matematiksel modeli olan shallow-water denklemini incelemiştir [1]. Helena Sofia Rodrigues ve arkadaşları sivrisineklerin bulaştırdığı dang humması (Dengue Fever) virüsünün matematiksel modelinin farklı özelliklerini ortaya çıkarmışlardır [2]. Dünya Sağlık Örgütü'nün (WHO) 2010 yılında yayınlamış olduğu rapora göre dünyada 8,6 milyon insanın HIV-Tuberküloz virüsü taşıdığı tahmin edilmekte olup, bu önemli virüsün matematiksel modeli ile ilgili Cristiana J. Silva ve arkadaşları kapsamlı bir çalışma yapmışlardır [3]. Anten kablosunun kontrollü hybrid sistemlerinin dinamiklerini gösteren matematiksel modeli Olena V. Mul ve arkadaşları araştırmıştır [4]. Tianran Zhang ve arkadaşları ölümle sonuçlanan salgın kolera hastalığının matematiksel modelinin farklı bir metot kullanarak salınımlı dalga çözümlerini elde etmişlerdir [5].

Günümüzde bu matematiksel modellerin farklı çözümlerini elde etmek için araştırmacılar aşağıdaki metotları literatüre sunmuşlardır. Bu metotlardan bazıları; Dönüşüm Metodu, sine-cosine Metodu, Üstel Fonksiyon Metodu, Standart tanh Metodu, Geliştirilmiş tanh Metodu, Jacobi Eliptik Fonksiyon Metodu, Darboux Dönüşümü Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Sumudu Dönüşüm Metodu, Deneme Denklem Metodu, Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu ve Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodudur [6-23]. Bu metotlardan biri olan Deneme Denklem Metodu ilk kez literatüre C. S. Liu tarafından 2006 yılında sunulmuştur. Liu'nun temel fikri, bir diferansiyel denklem için tam çözümün bir integral alma işlemi ile elde edilecek olmasıdır. Daha sonra Y. Pandir ve arkadaşları tarafından bu yöntemin farklı versiyonları çeşitli matematiksel modellere uygulanmıştır.

Bu çalışmada, temel tanım ve kavramlar verildikten sonra ele alınan metotlardan Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM) ve Genelleştirilmiş Kudryashov Metodunun (GKM) genel yapısı sunuldu. Bu metotlar daha önce literatürde var olan metotların genişletilmiş ve genelleştirilmiş halleridir. Adi, kısmi ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin temsil ettiği matematiksel modellerin analitik üzümlerini elde etmek için etkili bir metot olarak görülmektedir. Özellikle; uygulamalı bilimlerde, mühendislik, fizik, uzay bilimleri, astronomi ve kimya gibi birçok farklı alanda yapılan bilimsel çalışmalarda kullanılabilen yöntemlerdir. Dolayısıyla, uygulandıkları matematiksel modeller için analitik zmler vermektelerler. Elde edilen analitik zmler matematiksel modellerin fiziksel özellikleri hakkında bize bilgi vermektedir. Bu metotların bir diğer önemli özelliği ise yeni parametrelere sahip olmalarıdır. Bu parametrelerin her bir değeri için yeni özellikler ortaya çıkmaktadır.

Doğrusal olmayan iyon akustik dalgalarını (nonlinear ion acoustic waves) temsil etmek için kullanılan Simetrik Düzgün Uzun Dalga (SRLW) Denkleminin yeni özelliklerini ortaya çıkarmak için GDDM ve GKM uygulanmıştır.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

Bir bilinmeyenli fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel *denkleme kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 \quad (2.2)$$

olarak yazılır [6,7].

Tanım 2.2.

Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer bir diferansiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir [6,7].

Tanım 2.3.

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. Bu durumda M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir [9].

Tanım 2.4.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . *mertebeden türeve sahip fonksiyonu*

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0 \quad (2.3)$$

ise Φ fonksiyonuna (2.3) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir. Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar ise *sınır şartları* ile tanımlanır [9].

Tanım 2.5.

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktası civarında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \quad (2.4)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x 'in bütün değerleri için Taylor açılımı $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyondur denir [10].

Tanım 2.6.

Jacobi eliptik fonksiyonlar, eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(u, m)$, $dn(u, m)$ ve $sn(u, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2(t)}} dt, \quad 0 < m^2 < 1 \quad (2.5)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar.

Burada $m = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(u, m) = am(u)$ olmak üzere Jacobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(u, m) = am(u, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(u, m)) = sn(u, m) \quad (2.6)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(am(u, m)) = cn(u, m) \quad (2.7)$$

$$\sqrt{1-m^2 sn^2(\varphi)} = \sqrt{1-m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m) \quad (2.8)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$sn(u, 0) = \sin(u), \quad sn(u, 1) = \tanh(u) \quad (2.9)$$

$$cn(u, 0) = \cos(u), \quad cn(u, 1) = \text{sech}(u) \quad (2.10)$$

$$dn(u, 0) = 1, \quad dn(u, 1) = \text{sech}(u) \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jacobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türevler

$$\frac{d}{du}(sn(u)) = cn(u) dn(u) \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{du}(cn(u)) = -sn(u) dn(u) \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{du}(dn(u)) = -m^2 sn(u) cn(u) \quad (2.14)$$

eşitlikleri ile gösterilebilir. Jacobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanısıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1 \quad (2.15)$$

$$m^2 sn(u) + dn^2(u) = 1 \quad (2.16)$$

bağıntıları vardır [9].

Tanım 2.7.

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x ' de, değer kümesi E_y ' de bulunan $y = Ax$ şeklinde tanımlanan A operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa A operatörüne *lineerdir* denir [6,8];

$$\begin{aligned} L1) A(x + y) &= Ax + Ay, \\ L2) A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tanım 2.8.

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [11].

Tanım 2.9.

V boş olmayan, üzerinde vektörel bir toplama ve skalerle (gerçek sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V \text{ için } x + y \in V$$

$$r \in \mathbb{R} \text{ için } rx \in V$$

biçiminde tanımlı olsun. Yani, V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{R}$ (gerçek sayılar kümesi) üzerinde bir *vektör uzayı* denir [12].

$$V_1: \forall x, y \in V \text{ için } x + y = y + x \text{ olmalıdır.}$$

$$V_2: \forall x, y, z \in V \text{ için } (x + y) + z = x + (y + z) \text{ olmalıdır.}$$

$$V_3: \forall x \in V \text{ için } x + 0 = 0 + x = x \text{ olacak şekilde bir } 0 \in V \text{ bulunmalıdır.}$$

$$V_4: \forall x \in V \text{ için } x + y = y + x = 0 \text{ olacak şekilde bir } y \in V \text{ bulunmalıdır.}$$

$$V_5: \forall x, y \in V \text{ ve her } c \in \mathbb{R} \text{ için } c(x + y) = cx + cy \text{ olmalıdır.}$$

$$V_6: \forall x \in V \text{ ve } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ için } (c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x \text{ olmalıdır.}$$

$$V_7: \forall x \in V \text{ ve } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ için } (c_1c_2)x = c_1(c_2x) \text{ olmalıdır.}$$

$$V_8: \forall x \in V \text{ için } 1.x = x \text{ olmalıdır.}$$

Tanım 2.10.

Matematiksel bir terim olarak *iyi tanımlı problem* kavramı ilk olarak Jacques Hadamard tarafından literatüre sunulan bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm karardlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümünün tek olması, mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır.

Eğer başlangıç ya da sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm karardlıdır.

Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Karardlılık: x çözümü daima y 'ya bağılıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [12].

Tanım 2.11. (Lipschitz Şartı)

a, b ve n sabitler ve $f(x, y)$ de $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$ ile tanımlanmış D bölgesinin bütün noktalarında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y(a) = n$ başlangıç koşulu ile verilmiş $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Özel olarak, D bölgesindeki bütün (x, y) noktaları için y 'ye göre sürekli türevler ile işlem yapılır ve ortalama değer teoremi kullanılırsa; $y < \bar{y} < y^*$ olmak üzere

$$f(x, y) - f(x, y^*) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} (y - y^*) \quad (2.18)$$

yazılır. Açıkça görüleceği gibi,

$$L = (x, y) \in D \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \quad (2.19)$$

olarak seçildiğinde eşitlik aşıkarak sağlanır [15,16].

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM)

Bu bölümde, deneme denklem metodunun yeni bir versiyonu olan Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu [18, 19] verilecektir. Bu metodun genel yapısı dört adımda ele alınabilir.

Adım 1. u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı olan bağımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Bunun için dalga dönüşüm denklemini [20];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - ct \quad (3.2)$$

şeklinde olup burada k , c sabit ve $c \neq 0$ dır. (3.1) denkleminde (3.2) dönüşümü uygulanırsa (3.1) kısmi diferansiyel denkleminin

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde dönüştüğü görülür.

Adım 2. (3.3) diferansiyel denklemini için deneme denklem fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i Y^i \quad (3.4)$$

olmak üzere

$$(Y')^2 = \wedge(Y) = \frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)} = \frac{\xi_0 + \xi_1 Y + \dots + \xi_{\theta} Y^{\theta}}{\zeta_0 + \zeta_1 Y + \dots + \zeta_{\varepsilon} Y^{\varepsilon}} = \frac{\sum_{i=0}^{\theta} \xi_i Y^i}{\sum_{j=0}^{\varepsilon} \zeta_j Y^j} \quad (3.5)$$

biçimindedir. Buradan da (3.4) ve (3.5) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$(u')^2 = \frac{\Phi(\Upsilon)}{\Psi(\Upsilon)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Upsilon^{i-1} \right)^2 \quad (3.6)$$

$$u'' = \frac{\Phi'(\Upsilon) \Psi(\Upsilon) - \Phi(\Upsilon) \Psi'(\Upsilon)}{2\Psi^2(\Upsilon)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Upsilon^{i-1} \right) + \frac{\Phi(\Upsilon)}{\Psi(\Upsilon)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1) \tau_i \Upsilon^{i-2} \right) \quad (3.7)$$

Burada $\Phi(\Upsilon)$ ve $\Psi(\Upsilon)$ polinomdur. (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemleri (3.3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\Omega(\Upsilon) = \rho_s \Upsilon^s + \dots + \rho_1 \Upsilon + \rho_0 = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde Υ 'ya bağlı olan $\Omega(\Upsilon)$ polinomu elde edilir. Buradan da balans prensibi gereğince θ, ε ve δ arasındaki matematiksel bağıntı bulunur ve böylece θ, ε ve δ 'nın bazı değerleri de buna göre hesaplanabilir.

Adım 3. (3.8) denklemindeki $\Omega(\Upsilon)$ ifadesinin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\rho_i = 0, \quad i = 0, \dots, s. \quad (3.9)$$

Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\theta$ ve $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\varepsilon$ katsayılarının değerleri belirlenebilir.

Adım 4. (3.5) denklemini integre edilerek

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\Upsilon)}} d\Upsilon = \int \sqrt{\frac{\Psi(\Upsilon)}{\Phi(\Upsilon)}} d\Upsilon \quad (3.10)$$

şeklinde temel integral formu ifade edilebilir. Burada $\Omega(\Upsilon)$ 'nın köklerini sağlayan polinomlar için ayırma sistemi göz önüne alınır ve Mathematica programı kullanılırsa (3.10) denklemindeki integraller hesaplanabilir. Burada elde edilen eşitlikler (3.3) diferansiyel denkleminin tam çözümleridir. Böylece (3.1) kesirli mertebeden diferansiyel denklemin tam salınımlı dalga çözümleri bulunabilir.

3.2. Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM)

Nikolay A. Kudryashov'un lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için literatüre sunmuş olduğu Kudryashov metodunun [21] genelleştirilmiş hali olan genelleştirilmiş Kudryashov metodu aşağıdaki gibi dört adımda ele alınabilir [21].

Adım 1. u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı bir bağımlı fonksiyon olmak üzere

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.11)$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.11) için dalga dönüşüm denklemi [21];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - ct \quad (3.12)$$

şeklinde olup burada k, c sabit ve $c \neq 0$ dir. (3.11) denklemine (3.12) dönüşümü uygulanırsa (3.11) kısmi diferansiyel denklemi

$$N(x, t, u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.13)$$

şeklindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. Burada türev η 'ya göre alınır.

Adım 2. (3.13) adi diferansiyel denklemi için Genelleştirilmiş Kudryashov Fonksiyonu aşağıdaki gibi alınır;

$$u(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\eta)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\eta)} = \frac{A[Q(\eta)]}{B[Q(\eta)]} \quad (3.14)$$

burada $Q = \frac{1}{1 \pm e^\eta}$ 'dir. Q fonksiyonu ise

$$Q_\eta = Q^2 - Q \quad (3.15)$$

denkleminin bir çözümüdür [16].

(3.14) denklemi dikkate alınarak, u 'nun η 'ya göre türevleri,

$$u'(\eta) = \frac{A'Q'B - AB'Q'}{B^2} = Q' \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] = (Q^2 - Q) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \quad (3.16)$$

$$u''(\eta) = \frac{Q^2 - Q}{B^2} \left[(2Q-1)(A'B - AB') + \frac{Q^2 - Q}{B} \left[B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2 \right] \right] \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} u'''(\eta) = & (Q^2 - Q)^3 \left[\frac{(A'''B - AB''' - 3A''B' - 3B''A')B + 6B(AB'' + B'A')}{B^3} - \frac{6A(B')^3}{B^4} \right] \\ & + 3(Q^2 - Q)^2 (2Q-1) \left[\frac{B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2}{B^3} \right] \\ & + (Q^2 - Q)(6Q^2 - 6Q + 1) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Adım 3. Genelleştirilmiş Kudryashov metoduna göre (3.13) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranır;

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \dots + a_NQ^N}{b_0 + b_1Q + b_2Q^2 + \dots + b_MQ^M} \quad (3.19)$$

(3.16), (3.17) ve (3.18) denklemleri (3.13)'de yerine yazılarak ve balans prensibinin koşulları dikkate alınarak en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin polinom karşılığındaki en yüksek dereceli terimin dengeleme bağıntısından (3.19) denkleminin dereceleri olan M ve N değerleri hesaplanır.

Adım 4. (3.14) denklemi (3.13) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yazılırsa Q 'ya bağlı $R(Q)$ diferansiyel denklemi elde edilir. $R(Q)$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$ katsayıları belirlenir. Böylece (3.11) kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri elde edilmiş olur.

4.METOTLARIN UYGULANMASI

4.1 SRLW Denklemine GDDM'nin Uygulanması

Aşağıda verilen SRLW denklemini [20]

$$u_{tt} + u_{xx} + uu_{xt} + u_x u_t + u_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

ele alalım. (3.2) dönüşümü göz önüne alınarak (4.1) denkleminin

$$(k^2 - c^2)u - \frac{ck}{2}u^2 + c^2 k^2 u'' = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel formunu elde ederiz. Balans prensibine göre u^2 ve u'' terimlerini göz önüne alırsak

$$\theta = \varepsilon + \delta + 2 \quad (4.3)$$

buluruz.

Durum 1: Eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\theta = 3$ alınarak, (3.4) denklemi (3.7) denkleminde yeniden yazılırsa:

$$u = \sum_{i=0}^1 \tau_i \Gamma^i = \tau_0 + \tau_1 \Gamma \quad (4.4)$$

$$u'' = \frac{(3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} \tau_1 \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi_3 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$, $\tau_1 \neq 0$. Denklem (4.4) ile (4.5), (4.2) de yazılırsa, Γ yı içeren bir denklem oluşturulur. Γ 'nın kuvvetlerine göre katsayılarından oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Mathematica 9 programı ile çözülürse aşağıdaki katsayılar bulunur:

$$c = c, \quad \xi_0 = \xi_0, \quad \xi_1 = \frac{\zeta_0 \tau_0 (2(c-k)(c+k) + ck\tau_0)}{c^2 k^2 \tau_1}, \quad (4.6)$$

$$\xi_2 = \frac{\zeta_0 (c^2 - k^2 + ck\tau_0)}{c^2 k^2}, \quad \xi_3 = \frac{\zeta_0 \tau_1}{3ck}, \quad \zeta_0 = \zeta_0, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1$$

(4.6) katsayıları (3.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{dY}{\sqrt{B + C\Gamma + D\Gamma^2 + \Gamma^3}} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada $A = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_3}}, B = \frac{\xi_0}{\xi_3}, C = \frac{\xi_1}{\xi_3}, D = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ dir. Mathematica 9 programı

kullanılarak (4.7) integrali hesaplanırsa:

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A}{\sqrt{\Gamma - a_1}}, a_1 = a_2 = a_3 \quad (4.8)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{a_2 - a_1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\Gamma - a_2}}{\sqrt{a_2 - a_1}}\right), a_1 = a_2 \neq a_3 \quad (4.9)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{a_1 - a_2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\Gamma - a_1}}{\sqrt{a_1 - a_2}}\right), a_1 \neq a_2 = a_3 \quad (4.10)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A}{\sqrt{a_2 - a_1}} \text{ellipticF}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{\Gamma - a_1}}\right), \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2}\right], a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad (4.11)$$

elde edilir. Buradaki a_1, a_2 ve a_3 'ler

$$B + C\Gamma + D\Gamma^2 + \Gamma^3 = 0 \quad (4.12)$$

denkleminin kökleridir. Böylece (4.1) SRLW denkleminin GDDM kullanılarak elde edilen analitik çözümleri a_1, a_2 ve a_3 köklerinin durumlarına göre,

$$u_1(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_1 + \frac{4A^2}{(\eta - \eta_0)^2} \right), a_1 = a_2 = a_3 \quad (4.13)$$

$$u_2(\eta) = \tau_0 + \tau_1 a_1 + \tau_1 (a_2 - a_1) \sec^2\left(\frac{\sqrt{a_2 - a_1}(\eta - \eta_0)}{2A}\right), a_1 = a_2 \neq a_3 \quad (4.14)$$

$$u_3(\eta) = \tau_0 + \tau_1 a_2 + \tau_1 (a_1 - a_2) \sec^2\left(\frac{\sqrt{a_1 - a_2}(\eta - \eta_0)}{2A}\right), a_1 \neq a_2 = a_3 \quad (4.15)$$

$$u_4(\eta) = \tau_0 + \tau_1 n s^2 \left[\frac{\sqrt{a_2 - a_1}(-\eta + \eta_0)}{2A}, \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \right] \times \left(a_2 - a_1 c n^2 \left[\frac{\sqrt{a_2 - a_1}(-\eta + \eta_0)}{2A}, \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \right] \right), a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Basitlik açısından (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) denklemlerinde $\eta_0 = 0$ ve $\eta = kx - ct$ alınarak yeniden düzenlenirse SRLW denkleminin rasyonel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon ve Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

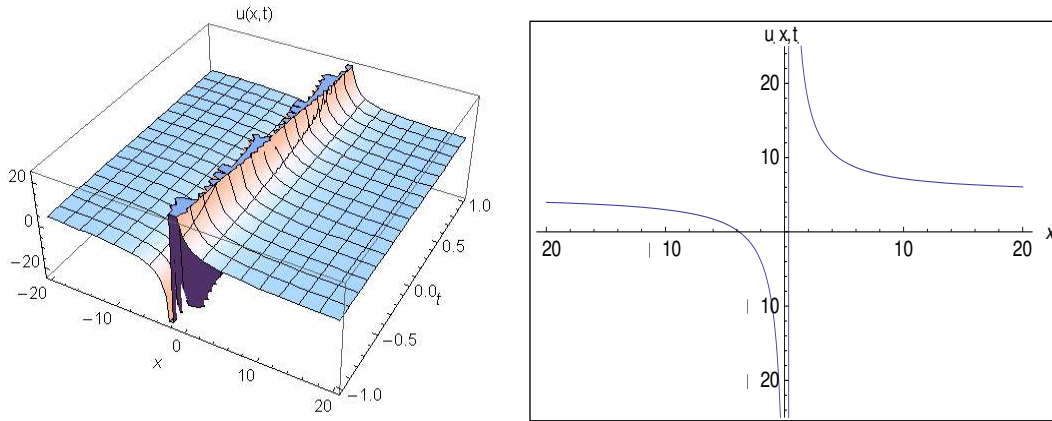
$$u_1(x, t) = \tau_0 + \tau_1 a_1 + \frac{4\tau_1 A^2}{(kx - ct)^2} \quad (4.17)$$

$$u_2(x, t) = \tau_0 + \tau_1 a_1 + \tau_1 (a_2 - a_1) \sec^2 \left(\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{2A} (kx - ct) \right) \quad (4.18)$$

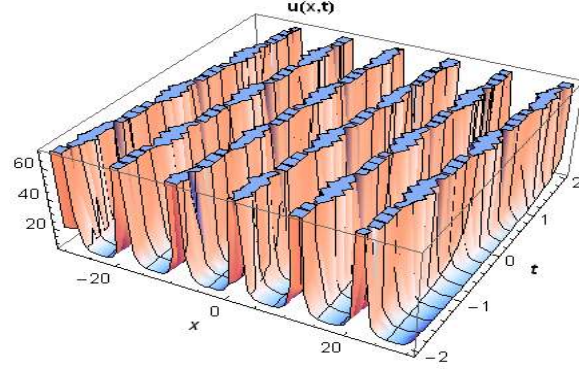
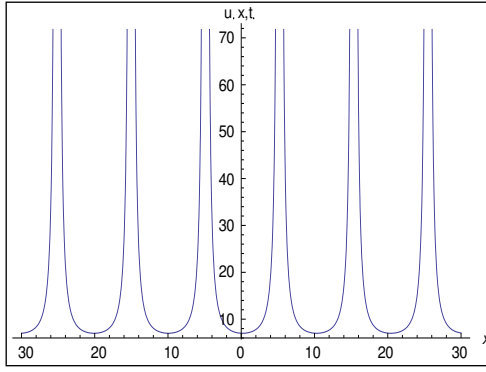
$$u_3(x, t) = \tau_0 + \tau_1 a_2 + \tau_1 (a_1 - a_2) \sec^2 \left(\frac{\sqrt{a_1 - a_2}}{2A} (kx - ct) \right) \quad (4.19)$$

$$u_4(x, t) = \tau_0 + \tau_1 n s^2 \left[\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{2A} (-kx + ct), \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \right] \left(a_2 - a_1 cn^2 \left[\frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{2A} (-kx + ct), \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \right] \right) \quad (4.20)$$

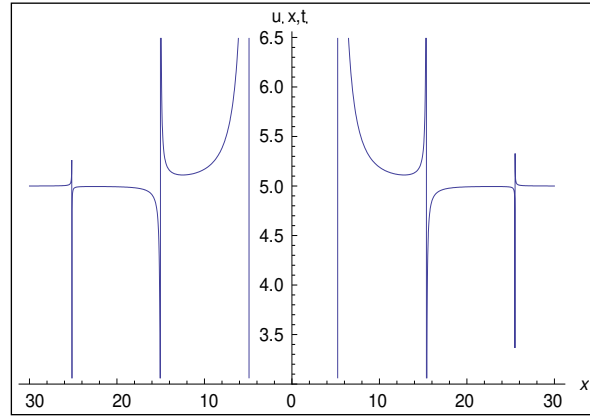
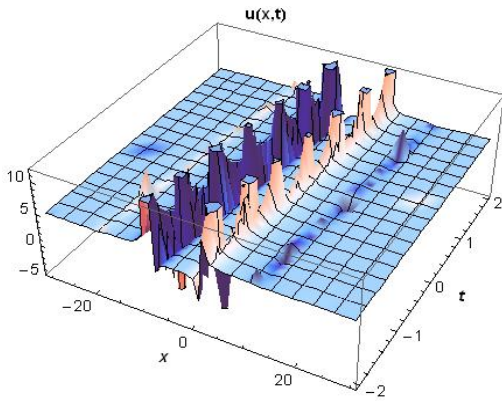
Elde edilen rasyonel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon ve Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerinin uygun parametre değerlerine karşılık gelen iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.



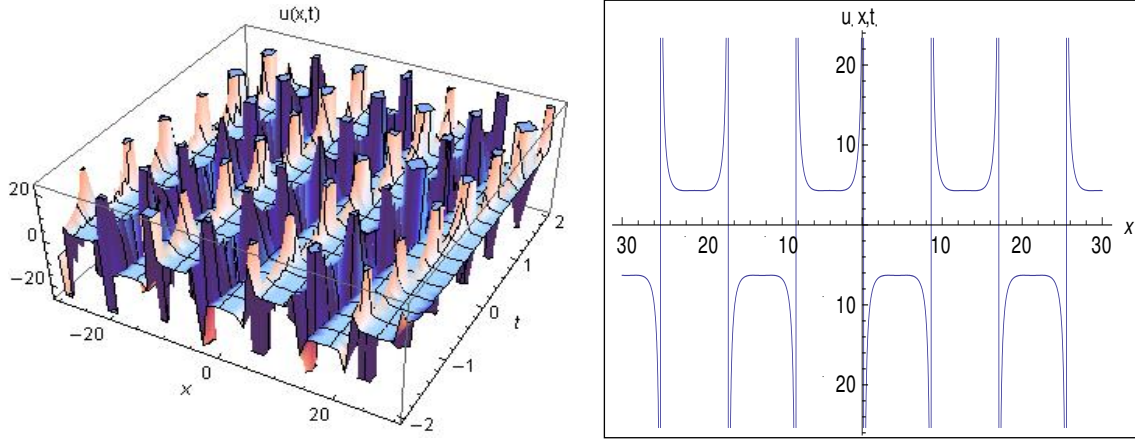
Şekil 1. (4.17) rasyonel fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, \zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.2$ için iki boyutlu grafiği



Şekil 2.(4.18) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği



Şekil 3. (4.19) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, \zeta_0 = -5$, için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği



Şekil 4. (4.20) Jacobi eliptic fonksiyon çözümünün $c = \sqrt{3}, k = 1, \tau_0 = -1, \tau_1 = 2, a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5$, ve $\zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği

Durum 2: Benzer şekilde $\varepsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\theta = 4$ alınarak, (3.4) denklemi (3.7) denkleminde yerine yazılırsa:

$$u = \sum_{i=0}^2 \tau_i \Gamma^i = \tau_0 + \tau_1 \Gamma + \tau_2 \Gamma^2 \quad (4.21)$$

$$u'' = \frac{(4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} (\tau_1 + 2\tau_2 \Gamma) + \frac{(\xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0} 2\tau_2 \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ dir. (4.21) ve (4.22) denklemleri (4.2) de yazılırsa, Γ 'yı içeren denklem elde edilir. Γ 'nın kuvvetlerine göre katsayılarından oluşan bir denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi Mathematica 9 programı ile çözülürse aşağıdaki katsayılar elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\zeta_0 (ck\tau_1^4 - 12(c^2 - k^2 + ck\tau_0)\tau_1^2\tau_2 + 48\tau_0(2(c-k)(c+k) + ck\tau_0)\tau_2^2)}{192c^2k^2\tau_2^3}, \\ \xi_1 &= \frac{\zeta_0\tau_1(-ck\tau_1^2 + 12(c^2 - k^2 + ck\tau_0)\tau_2)}{48c^2k^2\tau_2^2}, \xi_2 = \frac{\zeta_0(ck\tau_1^2 + 4(c^2 - k^2 + ck\tau_0)\tau_2)}{16c^2k^2\tau_2}, \\ \xi_3 &= \frac{\zeta_0\tau_1}{6ck}, c = c, k = k, \tau_0 = \tau_0, \tau_1 = \tau_1, \zeta_0 = \zeta_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

(4.23) katsayıları (3.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{B + C\Gamma + D\Gamma^2 + E\Gamma^3 + \Gamma^4}} \quad (4.24)$$

denklemini elde edilir. Burada $A = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_4}}, B = \frac{\xi_0}{\xi_4}, C = \frac{\xi_1}{\xi_4}, D = \frac{\xi_2}{\xi_4}, E = \frac{\xi_3}{\xi_4}$ dir. Mathematica 9 programı kullanılarak (4.24) integrali hesaplanırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{\Gamma - a_1}, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.25)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{a_1 - a_3} \ln \left(\frac{\Gamma - a_1}{\Gamma - a_3} \right), a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4 \quad (4.26)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A\sqrt{(\Gamma - a_1)(\Gamma - a_2)}}{(a_1 - a_2)(\Gamma - a_2)}, a_1 \neq a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.27)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(a_3 - a_1)(a_1 - a_4)}} \arctan \left(\frac{\sqrt{(\Gamma - a_3)(a_1 - a_4)}}{\sqrt{(a_3 - a_1)(\Gamma - a_4)}} \right), a_1 = a_2 \neq a_3 \neq a_4 \quad (4.28)$$

elde edilir. Buradaki a_1, a_2, a_3 ve a_4 'ler

$$B + C\Gamma + D\Gamma^2 + E\Gamma^3 + \Gamma^4 = 0 \quad (4.29)$$

denkleminin kökleridir. (4.25), (4.26), (4.27) ve (4.28) denklemlerinin Mathematica 9 programı kullanılarak çözülmesiyle (4.1) denkleminin rasyonel, üstel ve trigonometrik fonksiyon analitik çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_5(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_1 + \frac{A}{(-\eta + \eta_0)} \right) + \tau_2 \left(a_1 + \frac{A}{(-\eta + \eta_0)} \right)^2, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.30)$$

$$u_6(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_3 + \frac{a_3 - a_1}{\frac{(a_1 - a_3)(\eta - \eta_0)}{A}} \right) + \tau_2 \left(a_3 + \frac{a_3 - a_1}{\frac{(a_1 - a_3)(\eta - \eta_0)}{A}} \right)^2, a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4 \quad (4.31)$$

$$u_7(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_2 + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A - (a_1 - a_2)(\eta - \eta_0)} + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A + (a_1 - a_2)(\eta - \eta_0)} \right) + \tau_2 \left(a_2 + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A - (a_1 - a_2)(\eta - \eta_0)} + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A + (a_1 - a_2)(\eta - \eta_0)} \right)^2, a_1 \neq a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.32)$$

$$u_8(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(\frac{a_1(a_2 - a_3) + a_3(a_1 - a_2) \sec^2(P(\eta - \eta_0))}{a_2 - a_3 + (a_1 - a_2) \sec^2(P(\eta - \eta_0))} \right) + \tau_2 \left(\frac{a_1(a_2 - a_3) + a_3(a_1 - a_2) \sec^2(P(\eta - \eta_0))}{a_2 - a_3 + (a_1 - a_2) \sec^2(P(\eta - \eta_0))} \right)^2, \quad a_1 = a_2 \neq a_3 \neq a_4 \quad (4.33)$$

burada $P = \frac{\sqrt{(a_2 - a_1)(a_1 - a_3)}}{2A}$ dir. Basitlik açısından (4.30), (4.31), (4.32) ve (4.33)

denklemlerinde $\eta_0 = 0$ ve $\eta = kx - ct$ alınarak yeniden düzenlenirse SRLW denkleminin rasyonel fonksiyon, üstel fonksiyon ve trigonometrik fonksiyon çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur:

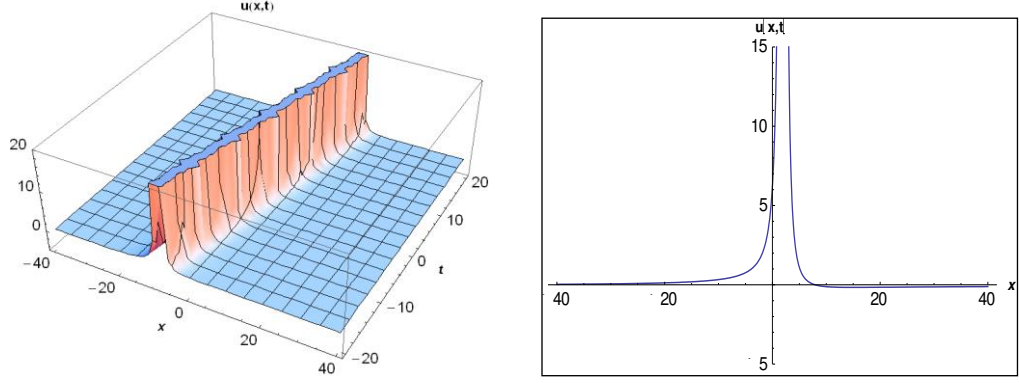
$$u_5(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_1 + \frac{A}{(-kx + ct)} \right) + \tau_2 \left(a_1 + \frac{A}{(-kx + ct)} \right)^2, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.34)$$

$$u_6(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_3 + \frac{a_3 - a_1}{-1 + e^{\frac{(a_1 - a_3)(kx - ct)}{A}}} \right) + \tau_2 \left(a_3 + \frac{a_3 - a_1}{-1 + e^{\frac{(a_1 - a_3)(kx - ct)}{A}}} \right)^2, \quad a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4 \quad (4.35)$$

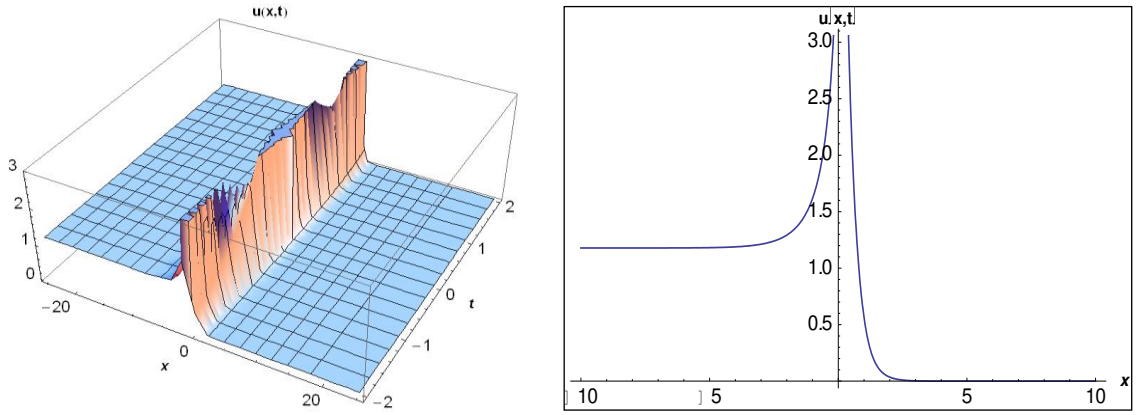
$$u_7(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(a_2 + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A - (a_1 - a_2)(kx - ct)} + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A + (a_1 - a_2)(kx - ct)} \right) + \tau_2 \left(a_2 + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A - (a_1 - a_2)(kx - ct)} + \frac{A(a_1 - a_2)}{2A + (a_1 - a_2)(kx - ct)} \right)^2, \quad a_1 \neq a_2 = a_3 = a_4 \quad (4.36)$$

$$u_8(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(\frac{a_1(a_2 - a_3) + a_3(a_1 - a_2) \sec^2(P(kx - ct))}{a_2 - a_3 + (a_1 - a_2) \sec^2(P(kx - ct))} \right) + \tau_2 \left(\frac{a_1(a_2 - a_3) + a_3(a_1 - a_2) \sec^2(P(kx - ct))}{a_2 - a_3 + (a_1 - a_2) \sec^2(P(kx - ct))} \right)^2, \quad a_1 = a_2 \neq a_3 \neq a_4 \quad (4.37)$$

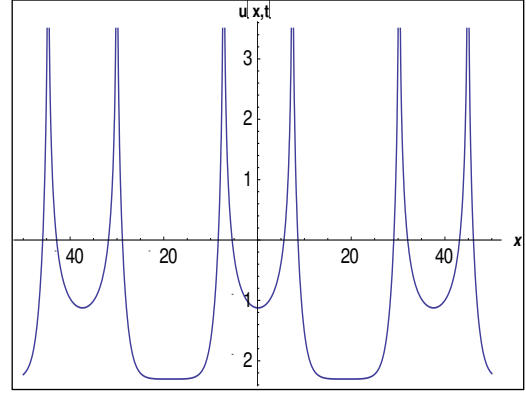
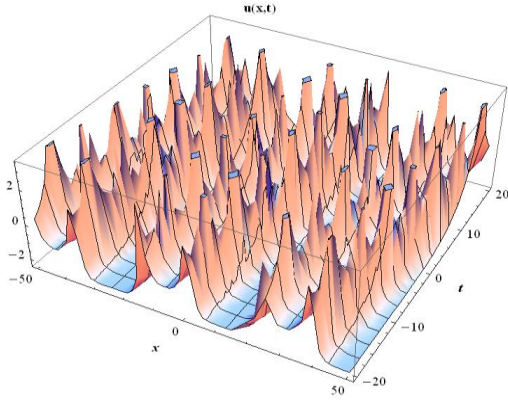
Elde edilen rasyonel fonksiyon, üstel fonksiyon ve trigonometrik fonksiyon çözümlerinin uygun parametre değerlerine karşılık gelen iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica 9 programı kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.



Şekil 5. (4.34) rasyonel fonksiyon çözümünün $c = 0.4, k = 1, \tau_0 = -a_1(\tau_1 + \tau_2), \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2, a_1 = 0.5, \zeta_0 = 0.3, -40 < x < 40, -20 < t < 20$ ve $\zeta_0 = -5$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.1$ için iki boyutlu grafiği



Şekil 6. (4.35) üstel fonksiyon çözümünün $c = 1/\sqrt{5}, a_1 = 5, a_3 = 2, \tau_0 = -a_3\tau_1, \tau_1 = -1, \tau_2 = \tau_1^2/2\tau_0, -25 < x < 25, -2 < t < 2$ için üç boyutlu grafiği ve $t = 0.35$ için iki boyutlu grafiği



Şekil 7.(4.37) trigonometrik fonksiyon çözümünün $c=1/3, a_1=3, a_3=5, a_4=2, \tau_0=0.2, \tau_1=-0.1, \tau_2=\tau_1^2/2\tau_0, -50 < x < 50, -20 < t < 20$ için üç boyutlu grafiği ve $t=0.1$ için iki boyutlu grafiği

4.2. SRLW Denkleminin GKM'nin Uygulanması

Aşağıda verilen SRLW denklemini [20]

$$u_{tt} + u_{xx} + uu_{xt} + u_x u_t + u_{xtt} = 0 \quad (4.38)$$

ele alalım. (3.12) dönüşümü göz önüne alınarak (4.38) denkleminin

$$(k^2 - c^2)u - \frac{ck}{2}u^2 + c^2 k^2 u'' = 0 \quad (4.39)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel formunu elde ederiz. Balans prensibine göre u^2 ve u'' terimlerini göz önüne alırsak

$$N = M - 2 \quad (4.40)$$

buluruz.

Durum 1: Eğer $N = 3$ ve $M = 1$ için (3.14) denklemi ile (3.17) denklemi yeniden yazılırsa

$$u(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\eta)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\eta)} = \frac{A[Q(\eta)]}{B[Q(\eta)]} \quad (4.41)$$

$$u''(\eta) = \frac{Q^2 - Q}{B^2} [(2Q - 1)(A'B - AB') + \frac{Q^2 - Q}{B} [B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2]] \quad (4.42)$$

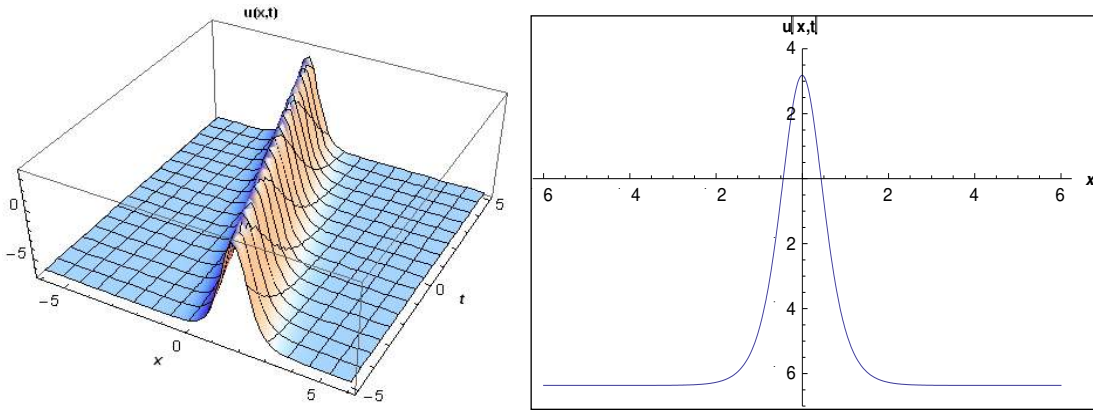
olarak elde edilir. Burada $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ dir. Eğer (4.41) ve (4.42) denklemleri (4.39) denklemiyle düşünülürse Q ya bağlı yeni bir denklem meydana gelir. Bu denklem Mathematica 9 ile çözülürse aşağıdaki katsayılar elde edilir.

Durum 1.1:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2k^2 b_0}{\sqrt{-1+k^2}}, a_1 = \frac{2k^2(6b_0 - b_1)}{\sqrt{-1+k^2}}, \\ a_2 &= \frac{12k^2(-b_0 + b_1)}{\sqrt{-1+k^2}}, a_3 = \frac{12k^2 b_1}{\sqrt{-1+k^2}}, \\ c &= -\frac{k}{\sqrt{-1+k^2}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Eğer (4.43) denklemi (4.41) denkleminde yazılırsa aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_1(x,t) = \frac{k^2(-2 + 3 \operatorname{sech}(\frac{1}{2}k(\frac{t}{\sqrt{-1+k^2}} + x))^2)}{\sqrt{-1+k^2}} \quad (4.44)$$



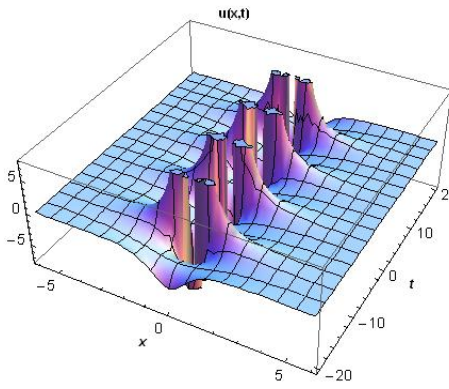
Şekil 8. $k = 3$ ve $t = 0.01$ için (4.44) hiperbolik fonksiyon çözümünün iki ve üç boyutlu grafiği

Durum 1.2:

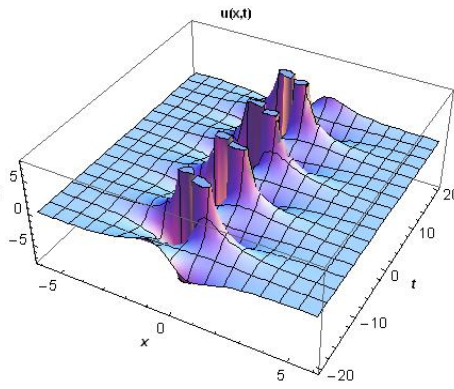
$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = -6i\sqrt{2}b_0, a_2 = 6i\sqrt{2}(b_0 - b_1), \\ a_3 &= 6i\sqrt{2}b_1, k = -1, c = -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Eğer (4.45) denklemi (4.41) denkleminde yazılırsa aşağıdaki kompleks trigonometrik fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_2(x, t) = -\frac{3i\sqrt{2}}{1 + \cos(\frac{t}{\sqrt{2}} + ix)} \quad (4.46)$$

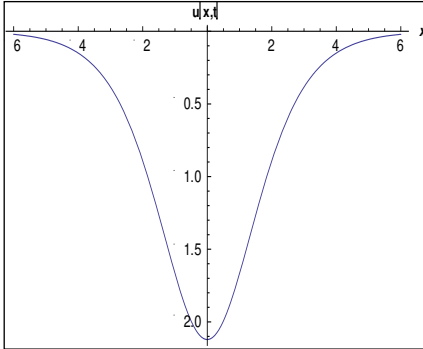


İmajiner Kısım

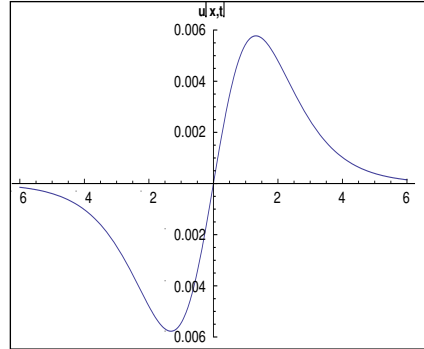


Reel Kısım

Şekil 9. $t = 0.01$ için (4.46) denkleminin kompleks trigonometrik çözümünün üç boyutlu grafiği



İmajiner Kısım



Reel Kısım

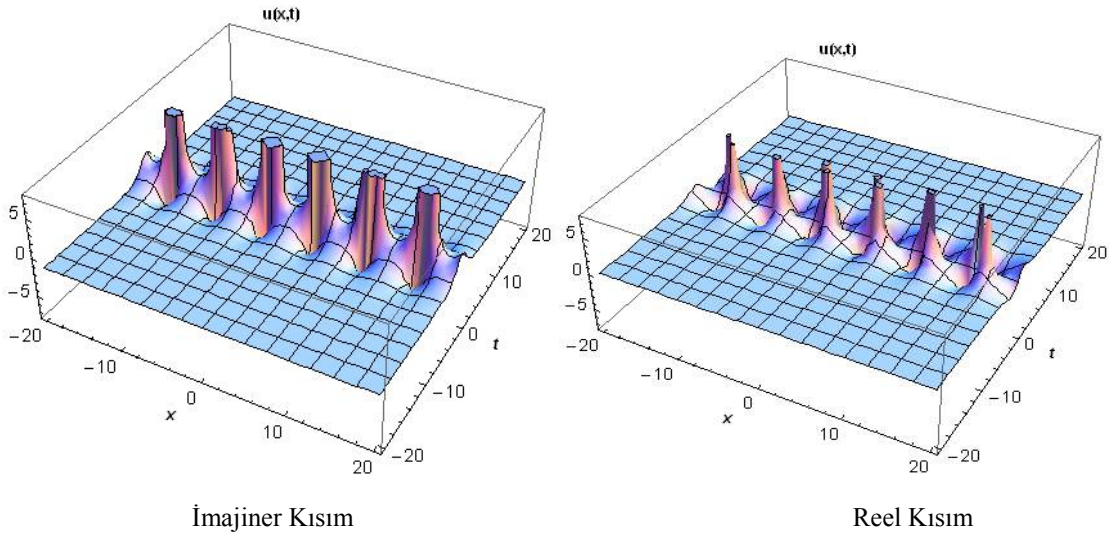
Şekil 10. $t = 0.01$ için (4.46) denkleminin kompleks trigonometrik çözümünün iki boyutlu grafiği

Durum 1.3:

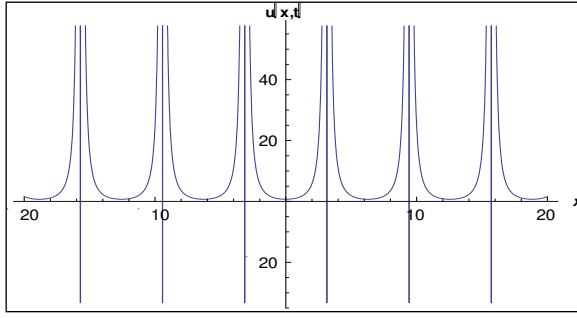
$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, a_1 = -i\sqrt{2}b_1, a_2 = 6i\sqrt{2}b_1, \\
a_3 &= -6i\sqrt{2}b_1, b_0 = 0, k = i, c = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

Eğer (4.47) denklemi (4.41) denkleminde yazılırsa aşağıdaki kompleks hiperbolik fonksiyon çözümü elde edilir.

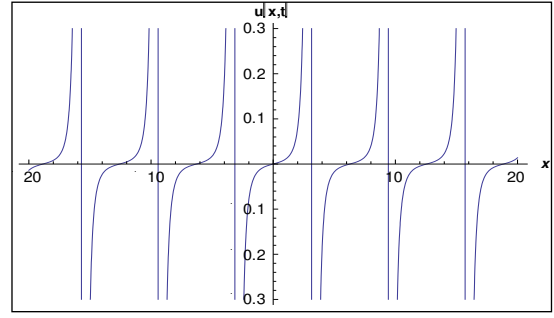
$$u_4(x,t) = \frac{i(-2 + 3 \operatorname{sech}(\frac{1}{4}(\sqrt{2}t + 2ix))^2)}{\sqrt{2}}
\tag{4.48}$$



Şekil 11. $t = 0.01$ için (4.48) denkleminin kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün üç boyutlu grafiği



İmajiner Kısım



Reel Kısım

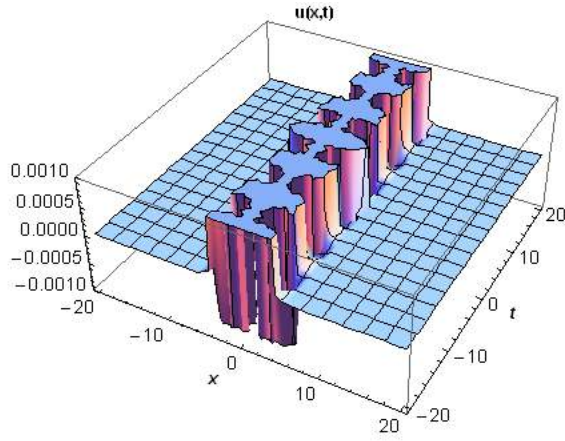
Şekil 12. $t = 0.01$ için (4.48) denkleminin kompleks hiperbolik fonksiyon çözümünün iki boyutlu grafiği

Durum 1.4:

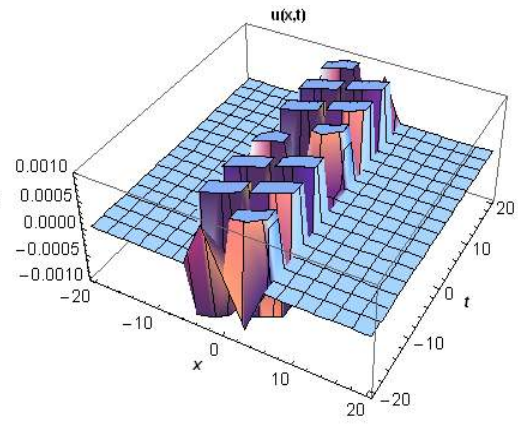
$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = -\frac{12k^2b_0}{\sqrt{-1-k^2}}, a_2 = \frac{12k^2(b_0 - b_1)}{\sqrt{-1-k^2}}, \\ a_3 &= \frac{12k^2b_1}{\sqrt{-1-k^2}}, c = \frac{k}{\sqrt{-1-k^2}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Eğer (4.49) denklemi (4.41) denkleminde yazılırsa aşağıdaki kompleks üstel fonksiyon çözümü elde edilir.

$$u_5(x, t) = -\frac{12e^{\frac{k(\frac{t}{\sqrt{-1-k^2}} + x)}{k^2}}}{(e^{\frac{kt}{\sqrt{-1-k^2}}} + e^{kx})^2 \sqrt{-1-k^2}} \quad (4.50)$$

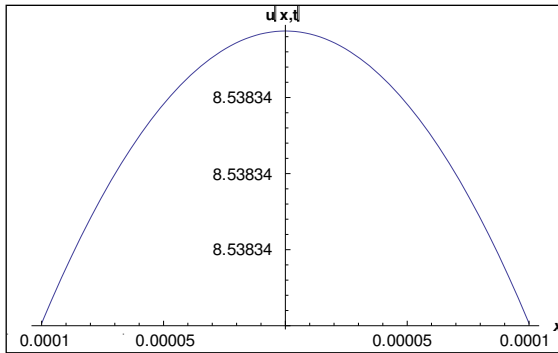


İmajiner Kısım

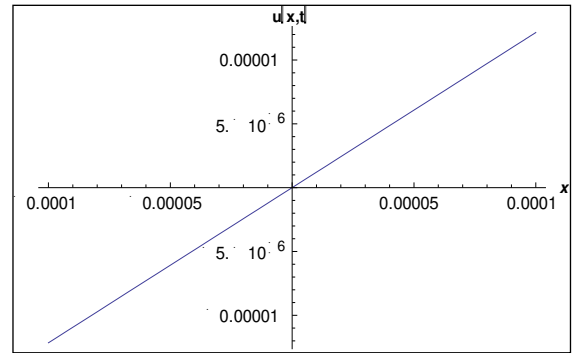


Reel Kısım

Şekil 13. $k = 3, t = 0.01$ için (4.50) denkleminin kompleks üstel fonksiyon çözümünün üç boyutlu grafiği



İmajiner Kısım



Reel Kısım

Şekil 14. $k = 3, t = 0.01$ için (4.50) denkleminin kompleks üstel fonksiyon çözümünün iki boyutlu grafiği

5.SONUÇ

Bu tezde, literatür çalışması yapılarak ele alınan denklem hakkında daha fazla bilgi elde edildi. Daha sonra, bu çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verildi. Genişletilmiş Deneme Denklem Metodunun ve Genelleştirilmiş Kudryashov Metodunun genel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelendi. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden SRLWdenklemine GDDM ve GKM uygulanarak üstel fonksiyon, rasyonel fonksiyon ve kompleks trigonometrik fonksiyon gibi bazı analitik çözümler elde edildi. Elde edilen analitik çözümlerin SRLW denklemini sağlayıp sağlamadığı Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak kontrol edildi. SRLW denkleminin fiziksel özelliklerinin incelenmesi için iki ve üç boyutlu grafikleri parametrelerin uygun fiziksel değerleri göz önüne alınarak çizildi.

Bu çalışmada SRLW denklemi için elde edilen analitik çözümler, bu denklemin temsil ettiği özellikleri ile uyumlu olduğu iki ve üç boyutlu grafiklere bakılarak görülmektedir. SRLW denklemi için elde edilen analitik çözümler, bu denklemin literatürde var olan ve daha farklı özelliklerini ortaya çıkarmıştır.

Ele alınan bu metotların, algoritmalarının rahat yapılması, bilgisayar hesaplamalarının kolay olması ve çok sayıda birbirinden farklı katsayılar vermesi gibi birçok önemli özelliğe sahip olması, bu tür diferansiyel denklemler için güçlü metotlar olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Cho, Y.S., Sohn, D.H., Lee, S.O.**, 2007. Practical modified scheme of linear shallow-water equations for distant propagation of tsunamis, *Ocean Engineering*, 34,1769–1777.
- [2] **Rodrigues, H.S., Monteiro, M.T.T., Torres, D.F.M.**, 2010.Dynamics of Dengue epidemics when using optimal control, *Mathematical and Computer Modelling*, 52, 1667-1673.
- [3] **Silva, C.J., Torres, D.F.M.**, 2014.Modeling TB-HIV syndemic and treatment, arXiv: 1406.0877v1.
- [4] **Mul, O.V., Torres, D.F.M., Kravchenko, V.P.**, 2008. Dynamics of controlled hybrid systems of aerial cable-ways, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2, 431–440.
- [5] **Zhang, T., Gou Q.**, 2014.Traveling Wave Solutions for Epidemic Cholera Model with Disease-Related Death, *The Scientific World Journal*, 2014, Article ID 409730, 14 pages.
- [6] **Baskonus, H. M.**, 2010. Bazı Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Adomian Ayırışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon metodu ile Sayısal çözümleri, *Yüksek lisans Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [7] **Debnath, L.**,2004. Non-linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, *Birkhauser*, USA.
- [8] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V.**, 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, *Graylock Press*, Rochester, USA.
- [9] **Uğurlu, Y.**,2010. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [10] **Yaşar, B. İ.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*, Ankara.
- [11] **Cavlak, E.**,2013. Kesirli Kuvvetlere Sahip Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [12] **Orhun, N.**, 1998. Vektör Uzayları,*Lineer Cebir*, Sayfa: 89-110, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir.
- [13] **Balcı, M.**, 1988. Analiz II, *Balcı Yayınları*, Ankara, Türkiye.

- [14] **Baskonus, H. M.**,2012. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerine Varyasyonel İterasyon Metodunun Uygulanması, *Doktora Semineri*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [15] **Bulut, H.**,1997. Adi Diferansiyel Denklemlerin Tek Adım Metotları ile Nümerik Çözümü İçin Genişletilmiş A-Dengeli ve L-Dengeli Simpson ve Dikdörtgen Kuralı, *Yüksek lisans Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [16] **Atkinson, K.E.**,1989. An Introduction to Numerical Analysis, *John Wiley & Sons*. New York.
- [17] **Sorkun, H.H.**,2008. Volterra integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri, *Yüksek Lisans Tezi*, C.B.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [18] **Belgacem, F. B. M., Bulut, H., Baskonus, H. M., Akturk, T.**, 2013. Mathematical analysis of the generalized Benjamin and Burger-Kdv equations via the extended trialequation method, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, Inpress,
- [19] **Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E.**, 2013. New exact solutions of the time-fractional non-linear Dispersive KdV equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4),349-352.
- [20] **Bulut, H., Baskonus, H.M., Cüvelek, E.**, 2015. On The Prototype Solutions of Symmetric Regularized Long Wave Equation by Generalized Kudryashov Method, *Mathematics Letters* 1(2): 10-16.
- [21] **Demiray, S.T., Pandir, Y., and Bulut, H.**, (2014). Generalized Kudryashov Method For Time-Fractional Differential Equations, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 13 pages,
- [22] **Bulut, H., Belgacem, F.B.M., Baskonus, H.M.**, 2015. Some New Analytical Solutions for the Nonlinear Time-Fractional KdV-Burgers-Kuramoto Equation, *Advances in Mathematics and Statistical Sciences*,118-129.
- [23] **Baskonus, H.M., Bulut, H., Pandir, Y.**, 2014. On The Solution of Nonlinear Time-Fractional Generalized Burgers Equation by Homotopy Analysis Method and Modified Trial Equation Method, *International Journal of Modeling and Optimization*, 4(4), 305-309.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk ve Orta eğitim-öğretimimi Vali Saim Çotur İlköğretim Okulunda ve Lise eğitim-öğretimimi ise Elazığ Atatürk Lisesinde tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladım. 2013 yılında tamamlayarak aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve halen devam etmekteyim.