



SİMETRİK VE GENİŞLETİLMİŞ

SİMETRİK HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kazım ORDU

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİMETRİK VE GENİŞLETİLMİŞ
SİMETRİK HALKALAR

Kazım ORDU

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2023

TEZ ONAY SAYFASI

Kazım ORDU tarafından hazırlanan “Simetrik ve Genişletilmiş Simetrik Halkalar” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Noyan Fevzi ER
Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../ 2023 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21.06.2023

Kazım ORDU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK ve GENİŞLETİLMİŞ SİMETRİK HALKALAR

Kazım ORDU

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, konunun tarihsel gelişiminin verildiği giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan kavramların tanımlarına ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; ilk olarak simetrik halka sınıfı tanıtılarak özellikleri incelenmiştir. Daha sonra simetrik halkaların bazı genişlemeleri, özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri araştırılmıştır.

2023, v+48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Simetrik halka, inmiş halka, terslenebilir halka, yarıdeğişmeli halka, polinom halkası, matris halkası, klasik sağ kesir halkası.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SYMMETRIC and EXTENDED SYMMETRIC RINGS

Kazım ORDU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of three main parts. The first chapter is devoted to the introduction, where the historical development of the subject is given. In the second part, the definitions and properties of the concepts that will be used in the thesis study are given. In the third part; firstly the symmetric ring class was introduced and its properties were examined. Then some extensions of symmetric rings, their properties and their relations with other ring classes are investigated.

2023, v+48 pages

Key Words: Symmetric ring, reduced ring, reversible ring, semicommutative ring, polynomial ring, matrix ring, classical right quotient ring.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA'ya, bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren Sayın Prof. Dr. Noyan Fevzi ER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan, bugünlere gelmeme destek olan, bana güvenen aileme, eşim Nergiz ORDU'ya, kızım Neva ORDU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Kazım ORDU

AFYONKARAHİSAR, 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	8
2.1 Temel Tanımlar	8
2.2 Halka Genişlemeleri	13
2.3 Bazı Özel Halkalar	16
3 SİMETRİK HALKALAR	19
3.1 Simetrik Halkaların Özellikleri	19
3.2 Genişletilmiş Simetrik Halkalar	39
4 KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

R	Bir halka
I	Bir ideal
α	Bir R halkasının endomorfizması
$C(R)$	Bir R halkasının merkezi
$r_R(-)$	Bir R halkasında sağ sıfırlayan
$l_R(-)$	Bir R halkasında sol sıfırlayan
$N(R)$	Bir R halkasının tüm nilpotent elemanlarının kümesi
$N_*(R)$	Bir R halkasının alt nilradikali
$N^*(R)$	Bir R halkasının üst nilradikali
$W(R)$	Bir R halkasının Wedderburn radikali
$J(R)$	Bir R halkasının Jacobson radikali
$\sqrt{I}$	Asal radikal
$R[x]$	Bir R halkası üzerindeki tek değişkenli polinomlar halkası
$R[x, x^{-1}]$	Bir R halkası üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x, \alpha]$	Bir R halkası üzerindeki çarpık polinomlar halkası
$M_n(R)$	Bir R halkası üzerindeki $n \times n$ tipindeki dolu matris halkası
(x^n)	x^n tarafından üretilen ideal
$T(R, R)$	Bir R halkasının kendisiyle aşık genişlemesi
Q	Klasik sağ kesir halkası
$GF(p^n)$	p^n elemanlı Galois cismi

1. GİRİŞ

Halka teori, cebir alanının en önemli konularından biri olup merkezi bir rol oynamaktadır. Tarihsel olarak halka teorideki büyük keşiflerden bazıları modern cebir alanının gelişmesine katkı sağlamıştır. Günümüzde halka teori; grup teori (grup halkaları), temsil teori (modüller), fonksiyonel analiz (operatör cebirleri), Lie teori (saran cebirler), cebirsel geometri (sonlu üretilmiş cebirler, diferensiyel operatörler, değişmez teori) ve homolojik cebir (halkaların kohomolojisi, projektif modüller, Grothendieck ve ileri K -grupları) gibi pek çok branş için verimli bir alan konumundadır (Lam 2001).

Halka kavramının ilk aksiyomatik tanımı 1914'te "Halkaların Ayrışımı ve Sıfır Bölenler Üzerine" adlı bir makalesinde Fraenkel tarafından yapılmıştır. Fraenkel'in bu çalışmadaki amacı, Steinitz'in 1910'da cebirler için yaptığını yapmak, yani; değişmeli olan ve değişmeli olmayan halkaların soyut ve kapsamlı bir teorisini vermektir. Fakat hem değişmeli olan hem de değişmeli olmayan halkaların yapısını tek bir teori altında toplamak kolay olmadığı için başarılı olamamıştır. Bu çalışmasında Fraenkel (1914) bir halkayı: boştan farklı bir küme ile adına toplama ve çarpma dediği iki ikili işlemin oluşturduğu bir sistem olarak tanıtmıştır, öyle ki: bu sistem birinci işleme göre bir değişmeli grup, ikinci işlemin birleşme özelliği ile birinci işlem üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Bu tanımda; birinci işleme göre değişme özelliğinin var olduğu açık olup ikinci işleme göre değişme özelliği sağlanmak zorunda değildir. Ayrıca bu makalede "sıfır bölen" ve "düzenli eleman" kavramları da tanıtılmış ve tamlik bölgesi olmayan (sıfır bölenli) halkaların bölünebilirliği incelenmiştir (Kleiner 1998).

Daha sonra 1917'de Sono tarafından; kosetlerin, bölüm halkalarının, maksimum ve minimum ideallerin, basit halkaların, izomorfizm teoremlerinin ve kompozisyon serilerinin incelendiği "Kongrüanslar Üzerine" başlıklı modern ve soyut bir çalışma yapılmıştır. Fraenkel (1914) ve Sono (1917)'nin yaptığı bu çalışmalar sayesinde cebir alanında halka denilen yeni bir kavram ortaya çıkmıştır. 19. yüzyılın başlarında

değişmeli olan ve değişmeli olmayan halka teorisi olarak iki sınıfa ayrılan bu alandaki asıl gelişmeler 20. yüzyılın ilk otuz yılında elde edilmiştir (Kleiner 1998).

Cayley'in 1850 yılında matrislerin toplamı ve çarpımını tanıtmamasının ardından, 1870'li yıllarda Pierce'i, kare matrislerin halka aksiyonlarını sağladığını göstermesi, halka kavramının ilk aksiyomatik örneklerinden biri olmuştur. Ancak değişmeli olmayan halka teorisine en önemli katkı İskoç matematikçi Wedderburn tarafından yapılmıştır. Wedderburn 1905 yılında, sıfırdan farklı her elemanı bir çarpımsal terse sahip olan, bölümlü halkaların sonlu olması durumunda değişmeli olduğunu yani bir cisim olduğunu kanıtlamıştır. Daha sonra Wedderburn, 1907'de önemli bir girişimde bulunarak, halka teorisini radikal (radical) ve yarıbasit (semisimple) olarak iki kısma ayırmıştır. Yarıbasit kısmı sınıflandırmak için matrislerden yararlanmasına rağmen elde ettiği sonuçları halkalar üzerinde değil de hiperkompleks sistemler üzerinde kanıtlamıştır. Daha sonra Wedderburn'un bu teorisi, 1920'li yıllarda geliştirilerek değişmeli olan ve değişmeli olmayan halka teorilerinin doğmasına yol açmış ve günümüze kadar incelenmeye devam etmiştir.

Değişmeli halka teorisi; cebirsel sayı teorisi, cebirsel geometri ve değişmez teoriden ortaya çıkmış bir alandır. Bu konuların gelişiminin merkezinde, cebirsel sayı cisimleri ve cebirsel fonksiyon cisimleri üzerinde tamsayılar halkası ve iki ya da daha fazla değişkenli polinomların halkası yer almaktadır.

Değişmeli olmayan halka teorisi ise, Hamilton'un 1843'te kuaterniyonları keşfine dayanmaktadır. Bu tarihten günümüze kadar, değişmeli halkalar için cevabı bilinen pek çok problem, değişmeli olmayan halkalarda çözülmeye çalışılmış ve dolayısıyla pek çok araştırmacı için zengin bir araştırma sahası ortaya çıkmıştır. Özellikle 1920'li yıllarda Emmy Noether and Emil Artin isimli iki ünlü cebirci sayesinde bu alanda büyük ilerleme kaydedilmiştir.

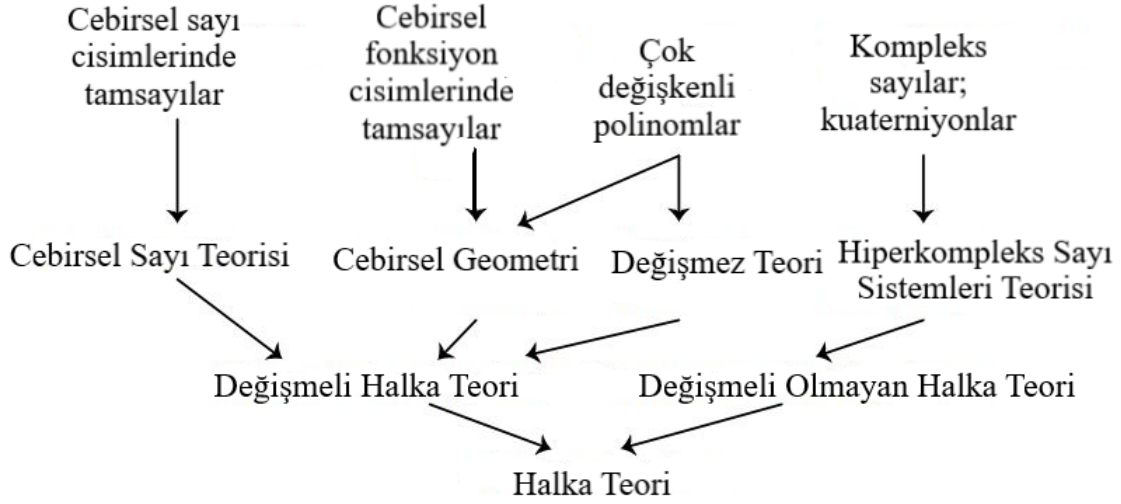
Emmy Noether, 1921 tarihli "Halkalarda İdeal Teori" başlıklı makalesinde, Hilbert, Lasker ve Macauley'in polinom halkalarındaki ilkel ayrışma ilişkin elde ettiği sonuçla-

rın, günümüzde Noether olarak adlandırılan, artan zincir koşuluna sahip herhangi bir halka için de geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca 1927 tarihli “Cebirsel Sayı ve Fonksiyon Cisimleri Üzerinde İdeal Teorinin Soyut Yapısı” adlı makalesinde, sırasıyla cebirsel sayı ve fonksiyon cisimlerinin tamsayı halkaları üzerindeki asal ideallerin tek türlü çarpımı olarak verilen ideallerin ayrışımına ilişkin, Dedekind ve Dedekind-Weber’in elde etmiş olduğu sonuçları keyfi halkalara taşımıştır. Özellikle, sıfırdan farklı her ideali asal ideallerin tek türlü çarpımı olarak yazılan ve Dedekind bölgeler olarak adlandırdığı soyut değişmeli halkaları karakterize etmiştir.

Emil Artin, 1927 yılında, Emmy Noether’in artan zincir koşuluna sahip (değişmeli) halkalar üzerindeki çalışmasından esinlenerek, “Hiper Karmaşık Sayılar Teorisi Üzerine” başlıklı bir çalışma yapmış ve Wedderburn’ün yapı teoremlerini azalan zincir koşuluna sahip (değişmeli olmayan) halkalara genelleştirmiştir. Ayrıca, günümüzde Artin olarak adlandırılan ve radikali sıfır olan bu tür halkaların, bölümlü halkalar üzerindeki matris halkalarına izomorf olan basit halkaların dik toplamaları içinde ayrıştırılabileceğini göstermiştir.

Böylece Fraenkel ve Sono; soyut halka kavramının ortaya çıkmasını sağlarken, Noether ve Artin; soyut halka teorisinin dolayısıyla değişmeli olmayan halka teorisinin temellerini atmıştır. Bu bağlamda, ideal, modül, artan ve azalan zincir koşulları gibi temel cebirsel kavramları tanıtmışlardır. Bu sayede halka teorisi, soyut cebirin temel direklerinden biri olarak o zamana kadar iyice yerleşmiş olan grup ve cisim teorileri arasında hak ettiği yeri almıştır. 1930’larda değişmeli olan ve değişmeli olmayan halka teorileri bir araya gelmiş ve birinin fikirleri diğerini etkilemeye başlamıştır. Örneğin, hem değişmeli olan hem de değişmeli olmayan halkalarda zincir koşulları hemen hemen aynı anda incelenmiştir. Başlangıçta değişmeli halkalar için tanıtılan modüller, değişmeli olmayan halkalar için de incelenmeye başlamıştır.

Tarihsel gelişim süreci yukarı açıklandığı gibi olan halka teori alanlarının, birbiriyle olan ilişkileri aşağıda verilen diagramda açıkça görülebilir.



Değişmeli halkalara; bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}$ tamsayılar, $2\mathbb{Z}$ çift tamsayılar, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar halkası; n pozitif bir tamsayı olmak üzere $\text{mod } n$ 'ye göre toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}_n$ halkası birer örnek olarak verilebilir. Değişmeli olmayan halkalara ise; reel sayılar cismi üzerindeki Hamilton kuaterniyonlarının $\mathbb{H}$ halkası, herhangi bir R halkası üzerine kurulan $n \times n$ tipindeki dolu matrislerin $M_n(R)$ halkası ve üst üçgensel matrislerin $UTM_n(R)$ halkası, α , R 'nin bir endomorfizması olmak üzere herhangi bir R halkası üzerine kurulan çarpık polinomların $R[x, \alpha]$ halkası, abelyan olmayan bir G grubu üzerine kurulan RG grup halkası, G (abelyan) bir grup olmak üzere, bileşensel toplama ve bileşke işlemleriyle bir halka yapısına olan G 'nin tüm endomorfizmlerinin $\text{End}G$ halkası gibi pek çok örnek verilebilir.

Yukarıda verilen örneklerden de görüldüğü gibi değişmeli olmayan halkalar değişmeli halkaları öz olarak kapsayan çok geniş bir sınıf oluşturmaktadır. Değişmeli halkalarda geçerli bir özellik değişmeli olmayan halkalarda gerçekleştiğinde, bu özelliğe sahip olan halkalara bir isim verilerek, yeni bir halka sınıfının ortaya çıkması sağlanır. Yeni bir halka sınıfı tanımlanmadan önce, o sınıfın varlığına dair, bir örnek verilir. Daha sonra o halka sınıfıyla ilgili soyut bir tanım yapılarak özellikleri incelenir ve bilinen halka sınıflarıyla ilişkileri araştırılır. Tez çalışmasında incelenecek olan simetrik ve genişletilmiş simetrik halka sınıfları da bu doğrultuda ele alınacak olup aksi belirtilmedikçe R halkası birimli ve değişmeli olmayan bir halka olacaktır.

Değişmeli bir halkada, tüm nilpotent elemanların kümesi ile tüm asal ideallerin arakesiti çakışık olup bir ideal yapısına sahiptir. Bu özelliği, temel bir teorem olarak, ispatlayan ilk kişi 1928’de Wolfgang Krull olmuştur. Birkenmeier vd. (1993) değişmeli olmayan bir halkanın bu özelliğe sahip olması durumunda o halkayı *2-ilkel* (*2-primal*) olarak adlandırırken, Hirano bu halkalar için *N-halka* (*N-ring*) gösterimini kullanmıştır. Aslında Gooyong Shin, 2-ilkel halkalara bu isim verilmeden önce, bu halka sınıfını incelemiştir. Shin (1973) bir R halkasının 2-ilkel olmasının onun her minimal $\mathfrak{p}$ asal (prime) idealinin tamamen asal (completely prime) ideal, yani; $R/\mathfrak{p}$ ’nin bir bölge (domain), olmasını gerek ve yeter koşul olarak kanıtlamıştır. Böylece 2-ilkel halkalar, değişmeli olan ve değişmeli olmayan halkalar arasında bir tür köprü görevi görmüştür (Marks 2003). Bir halkanın değişmeliliğini genelleştiren çeşitli halka-teoritik özellikler yardımıyla, Uyarı 3.1.7’de görüleceği gibi 2-ilkel halkalar ile değişmeli halkalar arasında kalan ve değişmeli olmayan, bazı halka sınıfları tanımlanmıştır. Tez çalışmasında bu halka sınıflarından biri olan simetrik halkalar ve onların bazı genişletilmiş versiyonları tanıtılacaktır.

Değişmeli bir halkada her sağ (sol) idealin bir iki-yanlı ideal olduğu açıktır. Değişmeli olmayan bir halkanın her sağ (sol) ideali, bir iki-yanlı ideal oluyorsa bu halka (Feller 1958) tarafından *sağ ikili* (*right duo*) (*sol ikili* (*left duo*)) olarak adlandırılmıştır. Tek-yanlı bir ikili halkanın her asal ideali tamamen asal olduğundan, her sağ (sol) ikili halkanın 2-ilkel olduğu açıktır. Fakat (Marks 2003) gereğince bu ifadenin karşıtı doğru değildir. Simetrik halkaların sağ (sol) ikili halkalarla ilişkisi Uyarı 3.1.7’deki diyagramda gösterilmiştir.

Değişmeli halka sınıfı ile 2-ilkel halka sınıfı arasında kalan ve Cohn (1999) tarafından tanımlanan diğer bir halka sınıfı da terslenebilir halkalardır. Bir R halkası $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ özelliğine sahipse *terslenebilir* (*reversible*) olarak adlandırılır (Cohn 1999). Bu halka sınıfı bazı yazarlar tarafından farklı isimler altında incelenmiştir. Bu halka sınıfı için; Krempa ve Niewiecerzal (1977) C_0 gösterimini, Mason (1981) *tamamen yansımali* (*completely reflexive*) adını, Habeb (1990) *sıfır*

değişmeli (*zero commutative*) diyerek, kısaca *zc* gösterimini ve Anderson ve Camillo (1999) *sıfırda çarpımlar değişir* (*zero product commute*) adı altında ZC_2 gösterimini kullanmıştır. Değişmeli bir halkanın bu özelliğe sahip olduğu açıktır. Fakat değişmeli olmayan terslenebilir halkalar vardır. Terslenebilir halkaların önemli özelliklerinden biri, 1930’da bir Alman matematikçi Gottfried Köthe tarafından sorulan ve ”Köthe Varsayımı” (Köthe Conjecture) olarak bilinen günümüzde hala kesin bir çözümü bulunmamış olan problemi sağlıyor olmasıdır. Farklı ifadeleri bulunan ve “ R sıfırdan farklı nil ideali bulunmayan bir halka ise, bu durumda R ’nin sıfırdan farklı bir tek-yanlı nil ideali yoktur” biçiminde de ifade edilebilen Köthe Varsayımı, 2-ilkel halkalar için doğru ve tüm terslenebilir halkalar da 2-ilkel olduğundan, terslenebilir halkalarda geçerli bir ifadedir. Bundan başka birimli simetrik bir halkanın terslenebilir olduğu ancak birimsiz halkalar için bu ifadenin doğru olmadığı Marks (2002) tarafından kanıtlanmış olup bu iki halka sınıfı arasındaki ilişki Uyarı 3.1.7’de gösterilmiştir.

Simetrik halkaların ilişkili olduğu bir diğer halka sınıfı da yarıdeğişmeli halkalardır. (Bell 1970)’e göre; R bir halka ve I , R ’nin bir tek-yanlı ideali olmak üzere $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $aRb \subseteq I$ oluyorsa, I *çarpan ekleme prensibine* (*insertion-of-factors-principle*) ya da kısaca *IFP*’ye sahip denir. Sıfır ideali IFP’ye sahip olan bir R halkası *IFP halka* olarak adlandırılır. (Shin 1973) tarafından IFP-halkalar için *SI* gösterimi kullanılırken, (Narbonne 1982) tarafından bu halkalar *yarıdeğişmeli* (*semi-commutative*) adı altında çalışılmıştır. (Tuganbaev 1998)’de bu özelliğe sahip halkalara *sıfırda değişmeli* (*commutative at zero*) adını vermiştir. Bu halkalar (Habebe 1990) tarafından *zero insertive* (ya da *zi*) adı altında incelenmiştir. Simetrik ve yarıdeğişmeli halkaların birbiryle ilişkisi Uyarı 3.1.7’de görülebilir.

Sıfırdan farklı nilpotent eleman bulundurmeyen bir halka *inmiş* (*reduced*) olarak adlandırılır. Değişmeli olmayan inmiş halkalar var olduğundan, değişmeli ve inmiş halkaların bir genellemesi olan ve tez çalışmasının temel konusunu oluşturan simetrik halkalar Lambek (1971) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa bir R halkası *simetrik* (*symmetric*) olarak adlandırılır. Lambek (1971); Grothendieck ve Dieudonné tarafından kanıtlanan “her değişmeli halka

yerel halkaların bir demetinin kesirlerinin halkasına izomorftur ”sonucunu simetrik halkalara şu şekilde genellemiştir: bir halkanın simetrik olması için gerek ve yeter koşul her bir sapı, tüm sıfır bölenlerini içeren bir asal ideale sahip, simetrik bir halka olan bir demetin kesirlerinin halkasına izomorftur. Anderson ve Camillo (1999) bu halka sınıfı için ZC_3 gösterimini kullanmıştır. Ayrıca ”bir R halkasının simetrik olması için gerek ve yeter koşul n herhangi bir pozitif tamsayı, $a_i \in R$ ve σ , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ iken $a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)} = 0$ olmasıdır” ifadesi Lambek (1971) ve Anderson ve Camillo (1999) tarafından birbirinden bağımsız biçimde kanıtlanmıştır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde simetrik halkaların özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri verilmiştir. Ayrıca bir halkanın simetriklik özelliğinin; bölüm halkası, polinomlar halkası, Laurent polinomlar halkası, çarpık polinomlar halkası, klasik sağ kesir halkası, aşıkâr genişlemesi, çarpık aşıkâr genişlemesi, Dorroh genişlemesi gibi genişlemelerine taşıyıp taşınmadığı incelenmiş ve aksi durumlar için örnekler verilerek hangi koşullar altında simetrikliğin halka genişlemelerine taşındığı araştırılmıştır. Dördüncü bölümde ise, son yıllarda çalışılan; α -simetrik, zayıf simetrik, merkezi simetrik, ideal-simetrik, birim-simetrik, J -simetrik, nil-simetrik, güçlü simetrik, güçlü σ -simetrik gibi bazı simetrik halka genişlemelerine dair tanımlar ve temel özelliklere yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak tez çalışmasında kullanılan halka teorisinin bazı temel kavramları tanıtılacaktır. Daha sonra, herhangi bir halka yardımıyla tanımlanan ve o halkanın genişlemeleri olarak adlandırılan halkalar incelenecektir. Son olarak simetrik halkalarla ilişki olan bazı halka sınıfları ve özellikleri verilecektir. (Hungetford 1974), (Goodearl ve Warfield 1989), (Lam 2001), (Dummit ve Foote 2004), (Malik vd. 2007) temel kaynak olarak kullanılacaktır.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bir R halkası (*ring*), adına toplama ve çarpma işlemleri denilen $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleriyle birlikte aşağıdaki aksiyonları sağlayan bir $(R, +, \cdot)$ sistemidir:

- (i) $(R, +)$ bir abel grup,
- (ii) R 'de çarpmanın birleşme özelliği vardır: Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (iii) R 'de dağılma özellikleri sağlanır: Her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Uyarı 2.1.2 Bir R halkasının toplamsal birimi için 0 , bir a elemanının toplamsal tersi için $-a$ ve $a, b \in R$ için $a \cdot b$ yerine ab gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.1.3 Bir R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı varsa, yani her $a \in R$ için $a1 = 1a = a$ olacak şekilde $1 \in R$ varsa, R *birimli halka* (*ring with unity*) olarak adlandırılır. Tez çalışmasında tüm halkalar birimli olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.4 Bir R halkasında çarpma işleminin değişme özelliği varsa, yani her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R 'ye *değişmeli* (*commutative*) halka denir. Tez çalışmasında değişmeli olmayan halkalar üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.1.5 Birimli bir R halkasında sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi varsa, R 'ye *bölümlü halka* ya da *çarpık cisim* (*division ring* ya da *skew field*) denir. Değişmeli bir bölümlü halka ise bir *cisim* (*field*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.6 $n \geq 1$ bir tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere p^n elemanlı bir cisme *Galois cismi* (*Galois field*) ya da *sonlu cisim* (*finite field*) adı verilir ve $GF(p^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması durumunda $GF(p)$ 'nin elemanları $\text{mod } p$ 'ye göre tam-sayılar, yani; $GF(p) = \mathbb{Z}_p$ dir. $n > 1$ olması durumunda ise, $g(x)$; katsayıları $GF(p)$ 'den gelen n .dereceden bir indirgenmez polinom olmak üzere, $GF(p^n)$ 'nin elemanları $GF(p)[x]$ 'in $\langle g(x) \rangle$ idealine göre bölüm halkasının elemanlarıyla aynıdır. Bu elemanlar seçilen $g(x)$ polinomuna göre değişir. Fakat bu şekilde belirlenen tüm $GF(p^n)$ cisimleri birbirine izomorftur.

Tanım 2.1.7 R bir halka olsun. $0 \neq a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $b = 0$ oluyorsa a 'ya *sol sıfır bölen* (*left zero divisor*) denir. Benzer olarak sağ sıfır bölen tanımlanır. Bir a elemanı, ne sol ne de sağ sıfır bölen değilse a 'ya *düzenli eleman* (*regular element*) adı verilir. Sıfır bölensiz birimli bir halka bir *bölge* (*domain*), değişmeli bir bölge ise bir *tamlık bölgesi* (*integral domain*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8 R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ varsa, a 'ya *von Neumann düzenli* (*von Neumann regular*) eleman denir. Her elemanı von Neumann düzenli olan bir halka *von Neumann düzenli* (*von Neumann regular*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.9 Bir R halkasındaki $e^2 = e$ şartını sağlayan bir e elemanı *eşgüçlü* (*idempotent*) olarak adlandırılır. Halkasının sıfırı ve birimi olan 0 ve 1 elemanlarına *aşık eşgüçlü* (*trivial idempotent*) denir.

Tanım 2.1.10 Bir R halkasının bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekildeki en küçük pozitif n tamsayısının var olması durumunda a 'ya *sıfırgüçlü* (*nilpotent*), n tamsayısına da *nilpotentlik indeksi* (*nilpotency index*) denir. R 'nin tüm sıfırgüçlü elemanlarının kümesi $N(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11 Bir R halkasının bir althalkası R 'nin çarpma işlemi altında kapalı bir altgrubu olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle bir R halkasının toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olan boştan farklı bir S altkümesine *althalka* (*subring*) adı verilir ve $S \leq R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12 R bir halka, $I \subseteq R$ ve $r \in R$ olsun.

- (1) $rI = \{ra \mid a \in I\}$ ve $Ir = \{ar \mid a \in I\}$ ile tanımlıdır.
- (2) Aşağıdaki özellikler sağlanırsa I 'ya R 'nin bir *sol ideali* (*left ideal*) denir:
- (i) I , R 'nin bir alt halkası,
 - (ii) I , R 'nin elemanlarıyla soldan çarpma işlemi altında kapalı, yani her $r \in R$ için $rI \subseteq I$.

Benzer şekilde, yukarıdaki (i) şartını ve aşağıdaki (ii)' şartını sağlayan I 'ya R 'nin bir *sağ ideali* (*right ideal*) adı verilir:

- (ii)' I , R 'nin elemanlarıyla sağdan çarpma işlemi altında kapalı, yani her $r \in R$ için $Ir \subseteq I$.
- (3) I hem bir sol ideal hem de bir sağ ideal ise, I 'ya R 'nin bir *iki-yanlı ideali* (*two-sided ideal*) denir.

Uyarı 2.1.13 Değişmeli halkalarda sol, sağ ve iki-yanlı ideal kavramları çakışmıştır. Fakat tez çalışmada değişmeli olmayan halkalar üzerinde çalışılacağı için bu kavramlar birbirinden farklı anlama gelecektir.

Tanım 2.1.14 Bir R halkasının her elemanı ile değişmeli olan elemanlarının oluşturduğu küme R 'nin *merkezi* (*center*) denir ve

$$C(R) = \{a \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } ar = ra\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.15 Bir R halkasının bir sol (sağ veya iki-yanlı) I idealinin her elemanı sıfırgüçlü ise, I 'ya *nil ideal* denir. $I^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa I 'ya *sıfırgüçlü* (*nilpotent*) *ideal* denir. Her nilpotent idealin bir nil ideal olduğu açıktır.

Tanım 2.1.16 R bir halka ve M ; R 'nin $M \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. $M \subseteq J \subseteq R$ özelliğini sağlayan her J ideali için $J = M$ ya da $J = R$ oluyorsa M 'ye bir *maksimal* (*maximal*) ideal denir.

Değişmeli olan ve değişmeli olmayan halkalarda asal ideal kavramı farklı tanımlanır. Aşağıda her iki tanıma da yer verilmiştir.

Tanım 2.1.17 R değişmeli bir halka P ; R 'nin $P \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ oluyorsa P 'ye bir *asal (prime)* ideal denir. Değişmeli olmayan keyfi halkalarda ise asal ideal tanımı şöyledir: P ; R 'nin $P \neq R$ olacak şekilde bir ideali olsun. $A, B \in R$ idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ ya da $B \subseteq R$ oluyorsa P 'ye bir *asal (prime)* ideal denir.

Eğer $a \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $aRa \in P$ iken $a \in P$ oluyorsa P 'ye bir *yarıasal (semiprime)* ideal adı verilir. 0 ideali sırasıyla asal ve yarıasal olan bir R halkası *asal (prime)* ve *(yarıasal (semiprime))* olarak adlandırılır.

Şimdi maksimal ve asal ideallerle bağlantılı olan radikal kavramını verelim.

Tanım 2.1.18 Bir R halkasının tüm maksimal sol (sağ) ideallerinin arakesitine R 'nin *Jacobson radikali (Jacobson radical)* denir ve $J(R)$ ile gösterilir. $J(R) = 0$ olması durumunda R halkası *yarıbasit (semisimple)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.19 R değişmeli bir halka ve I , R 'nin bir ideali olmak üzere $a \in R$ ve $n \geq 1$ için $a^n \in I$ iken $a \in I$ oluyorsa I 'ya *radikal ideal* denir. Değişmeli halkalarda bir I idealinin radikal ideal olması için gerek ve yeter koşul I 'nın tüm asal ideallerin arakesiti olmasıdır. Herhangi bir I ideali için, I 'yı kapsayan tüm asal ideallerin arakesiti olan bir tek ideal vardır ve

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \text{uygun bir } n \geq 1 \text{ için } r^n \in I\}$$

ile tanımlıdır. Özel olarak, R 'nin tüm sıfırgüçlü elemanlarının kümesi olan $\sqrt{0}$ idealine R 'nin *Baer alt nilradikali (Baer's lower nilradical)* ya da *Baer-McCoy radikali* veya *asal radikal (prime radical)* adı verilir ve $N_*(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.20 Bir R halkasının tüm nil ideallerinin toplamına R 'nin *üst nilradikali (upper nilradical)* denir ve $N^*(R)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle; $a \in N^*(R)$ olması için gerek ve yeter koşul a 'nın sıfırgüçlü elemanların bir (sonlu) toplamı olarak yazılabilesidir. $N^*(R)$; R 'deki en geniş nil idealdir.

Tanım 2.1.21 Bir R halkasının tüm nilpotent ideallerinin toplamına R 'nin *Wedderburn radikali* denir ve $W(R)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.22 Herhangi bir R halkasında

$$W(R) \subseteq N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R) \text{ ve } N^*(R) \subseteq J(R)$$

durumları vardır. R halkasının değişmeli olması durumunda ise

$$N_*(R) = N^*(R) = J(R)$$

olur.

Tanım 2.1.23 R bir halka ve I R 'nin bir ideali olsun. $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ kümesi; her $r, s \in R$ için

$$(r + I) + (s + I) = (r + s) + I \text{ ve } (r + I) \cdot (s + I) = (rs) + I$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir halkadır. Bu halkaya R 'nin I idealine göre *bölüm halkası* (*quotient ring*) denir.

Tanım 2.1.24 R ve S birer halka olmak üzere, her $a, b \in R$ için

$$\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$$

$$\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$$

özelliklerini sağlayan bir $\alpha : R \rightarrow S$ fonksiyonu bir *halka homomorfizması* (*ring homomorphism*) olarak adlandırılır. Bir $\alpha : R \rightarrow R$ homomorfizmasına bir *endomorfizma* (*endomorphism*) adı verilir.

Tanım 2.1.25 R bir halka ve S , R 'nin bir alt kümesi olsun. $\text{ann}_l(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$ kümesi R 'nin bir sol ideali olup bu kümeye S 'nin R 'deki *sol sıfırlayıcı* (*left annihilator*) adı verilir. Benzer şekilde $\text{ann}_r(S) = \{r \in R \mid Sr = 0\}$ kümesi R 'nin bir sağ ideali olup bu kümeye S 'nin R 'deki *sağ sıfırlayıcı* (*right annihilator*) denir.

2.2. Halka Genişlemeleri

Bu bölümde, bir R halkası yardımıyla tanımlanan ve o halkanın genişlemeleri (extensions) olarak adlandırılan yeni halkalar tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1 R birimli bir halka, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ ve $a_i \in R$ olmak üzere $k > n$ iken $a_k = 0$ olacak şekilde tüm sonsuz $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ dizilerinin kümesi $R[x]$ olsun. $R[x]$ kümesi;

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için $c_j = \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i}$ olmak üzere

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

ile tanımlı işlemlerle, toplamsal birimi $(0, 0, 0, \dots)$ ve çarpımsal birimi $(1, 0, 0, \dots)$ olan, birimli bir halkadır. Özel olarak, *değişken* (*indeterminate*) olarak adlandırılan $x = (0, 1, 0, \dots)$ elemanı ve *katsayılar* (*coefficient*) olarak adlandırılan $a_0, a_1, \dots, a_n$ elemanlarıyla birlikte $R[x]$ 'in bir $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ elemanı $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ biçiminde yazılır ve bir *polinom* (*polynomial*) olarak adlandırılır. $R[x]$ 'e tek değişkenli polinomlar halkası denir.

Tanım 2.2.2 Bir R halkası üzerindeki x değişkenli *Laurent polinomlar halkası* (*Laurent polynomial ring*); k, n negatif olabilen tamsayılar ve $a_i \in R$ olmak üzere bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte tüm formal $\sum_{i=k}^n a_i x^i$ toplamlarından oluşur ve $R[x, x^{-1}]$ ile gösterilir.

Uyarı 2.2.3 R 'nin elemanları sabit polinomlar olarak gözönüne alınırsa R halkası, $R[x]$ polinomlar halkasının bir althalkasıdır. $R[x]$ polinom halkası da $R[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasının bir althalkasıdır.

Tanım 2.2.4 R bir halka ve $\alpha : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması olsun. R üzerindeki polinomların kümesi, bilinen toplama işlemi ve her $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte yeni bir halka yapısına sahiptirler. Bu halkaya R 'nin *endomorfizma tipinin Ore genişlemesi* (*Ore extension of endomorphism type*) ya da *çarpık polinomlar halkası* (*skew polynomial ring*) denir ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 R herhangi bir halka ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere, i . satır j . sütun bileşenleri R 'nin a_{ij} elemanları olan $n \times n$ tipindeki $[a_{ij}]$ matrislerinin kümesi,

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$[a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]$$

ile tanımlı matris toplamı ve matris çarpımı işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *matris halkası* (*matrix ring*) denir ve $M_n(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 R herhangi bir halka olmak üzere $M_n(R)$ 'de $i > j$ iken $a_{ij} = 0$ özelliğini sağlayan matrislere *üst üçgensel matris* (*upper triangular matrix*) denir. Tüm üst üçgensel matrislerin kümesi $M_n(R)$ 'nin bir althalkası olup $T_n(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7 R herhangi bir halka ve $n \geq 2$ olsun.

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R \right\}.$$

kümesi $T_n(R)$ 'nin bir althalkasıdır.

Tanım 2.2.8 R birimli bir halka, M toplamsal bir abel grup olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan ve *modül çarpımı* olarak adlandırılan bir $\cdot : M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu varsa M 'ye bir *sağ R -modül* denir ve M_R ile gösterilir: Her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için

$$(i) \quad (m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r;$$

$$(ii) \quad m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2;$$

$$(iii) \quad m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2;$$

$$(iv) \quad m \cdot 1_R = m$$

Bir *sol R-modül* benzer olarak tanımlanır ve ${}_R M$ ile gösterilir. R ve S birer halka olmak üzere, M hem bir sol R -modül, hem de bir sağ S -modül ve her $r \in R, s \in S, m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$ oluyorsa M 'ye bir (R, S) -bimodül denir ve ${}_R M_S$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9 R birimli bir halka ve M bir R - R -bimodül olsun. Her $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in T(R, M)$ için

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ile tanımlı işlemlerle bir halka olan $T(R, M) = R \oplus M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$ kümesine R 'nin M ile *aşıkarak genişlemesi* (*trivial extension*) denir. Bu halka, $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin kümesine izomorftur.

Tanım 2.2.10 R değişmeli bir halka, α ; R 'nin bir endomorfizması ve M bir R -modül olsun. $i = 1, 2$ olmak üzere $r_i \in R$ ve $m_i \in M$ için

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, \alpha(r_1)m_2 + r_2 m_1)$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir halka olan $N = R \oplus M$ kümesine R 'nin M ve α ile *çarpık aşıkarak genişlemesi* (*skewtrivial extension*) denir.

Tanım 2.2.11 S değişmeli bir halka ve R, S üzerinde bir cebir olsun. $i = 1, 2$ olmak üzere $r_i \in R$ ve $s_i \in S$ için

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir halka olan $D = R \times S$ kümesine R 'nin S ile *Dorroh genişlemesi* (*Dorroh extension*) denir.

Tanım 2.2.12 X bir R halkasının çarpımsal kapalı altkümesi olsun. Her bir $x \in X$ ve $r \in R$ için $ry = xs$ olacak şekilde $y \in S$ ve $s \in R$ var ise, yani; $rX \cap xR \neq \emptyset$

oluyorsa X kümesi sağ Ore koşulunu sağlar (X satisfies the right Ore condition) denir. Sağ Ore koşulunu sağlayan bir çarpımsal kapalı kümeye sağ Ore küme (right Ore set) adı verilir. Sol Ore küme benzer olarak tanımlanır ve hem sağ hem de sol Ore bir küme bir Ore küme (Ore set) olarak adlandırılır. $a, b \in R$ elemanları için b düzenli olmak üzere $ab_1 = ba_1$ olacak şekilde b_1 düzenli olmak üzere $a_1, b_1 \in R$ elemanları varsa R 'ye sağ Ore halka (right Ore ring) adı verilir.

Tanım 2.2.13 Bir R halkasının düzenli elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı bir küme X olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $S \supseteq R$ üsthalkasına R 'nin X 'e göre sağ kesir halkası (right quotient ring of R with respect to X) adı verilir:

- (i) X 'in her elemanı S 'de tersinirdir.
- (ii) S 'nin her elemanı uygun $r \in R$ ve $x \in X$ için rx^{-1} biçiminde yazılır.

Benzer biçimde $x^{-1}r$ biçimindeki kesirler kullanılarak sol kesirler halkası tanımlanır. Halkanın değişmeli olması durumunda sol ya da sağ ayrımı yapmaya gerek yoktur.

Sağ kesirler halkası, Ore ve Asano tarafından 1930'lu yıllarda aşağıdaki biçimde karakterize edilmiştir.

Teorem 2.2.14 R bir halka ve X , R 'nin düzenli elemanlarının çarpımsal kapalı bir altkütmesi olsun. R 'nin X 'e göre sağ kesir halkasının var olması için gerek ve yeter koşul X 'in bir sağ Ore küme olmasıdır. Bir R halkasının tüm düzenli elemanlarının kümesine göre sağ kesir halkasına klasik sağ kesir halkası (classical right quotient ring) adı verilir ve Q ile gösterilir. Bir R halkasının Q klasik sağ kesirler halkasının var olması için gerek ve yeter koşul R 'nin bir sağ Ore halka olmasıdır.

2.3. Bazı Özel Halkalar

Bu bölümde simetrik halkalarla ilişkili olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 α , R 'nin bir endomorfizması olsun. $r \in R$ için $r\alpha(r) = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa α 'ya katı (rigid) endomorfizma denir (Krempa 1996). Bir R halkasının bir katı α endomorfizması varsa R halkası α -katı (α -rigid) olarak adlandırılır (Hong vd. 2000). Herhangi bir katı endomorfizmanın birebir olduğu açıktır.

Tanım 2.3.2 Bir R halkasının sıfırdan farklı sıfırgüçlü elemanı yoksa R 'ye *inmiş* (*reduced*) halka denir. Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ için $a^2 = 0$ iken $a = 0$ olmasıdır.

Uyarı 2.3.3 Hong vd. (2000)'de α -katı bir halkanın inmiş olduğunu belirtmiş fakat bu ifadenin karşınının her zaman doğru olmadığına dair bir örnek vermiştir. Bunun yanısıra inmiş bir R halkasının herhangi $r \in R$ için $\alpha(r) = u^{-1}ru$ olacak şekilde tersinir bir $u \in R$ elemanı ile tanımlanan α iç otomorfizmasının katı olduğu yani R 'nin α -katı olduğu ifade edilmiştir.

Tanım 2.3.4 R bir halka ve $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x]$ olsun. $f(x)g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkası Rege and Chhawchharia (1997) tarafından *Armendariz* olarak adlandırılmıştır.

Tanım 2.3.5 R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkası; Krempa ve Niewieczermal (1977) tarafından C_0 , Habeb (1990) tarafından *sıfır değişmeli* (*zero commutative*, kısaca *zc*), Mason (1981) tarafından *tamamen yansımali* (*completely reflexive*), Anderson ve Camillo (1999) tarafından ZC_2 , Cohn (1999) tarafından *terslenebilir* (*reversible*) olarak adlandırılmıştır. Değişmeli bir halkanın terslenebilir olduğu açıktır. Ayrıca inmiş bir R halkasında $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $bab = 0$ ve buradan $(ba)^2 = 0$ olup $ba = 0$ bulunur. Böylece inmiş halkalar da terslenebilirdir.

Tanım 2.3.6 Bell (1970)'e göre; R bir halka ve I , R 'nin bir tek-yanlı ideali olmak üzere $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $aRb \subseteq I$ oluyorsa, I *çarpan ekleme prensibine* (*insertion-of-factors-principle*) ya da kısaca *IFP*'ye sahip denir. Sıfır ideali IFP'ye sahip olan bir R halkası *IFP halka* olarak adlandırılır. Shin (1973) tarafından IFP-halkalar için *SI* gösterimi kullanılırken, Narbonne (1982) tarafından bu halkalar *yarıdeğişmeli* (*semicommutative*) adı altında çalışılmıştır. Tuganbaev (1998) bu özelliğe sahip halkalara *sıfırda değişmeli* (*commutative at zero*) adını vermiştir. Bu halkalar Habeb (1990) tarafından *zero insertive* (ya da *zi*) adı altında incelenmiştir.

Tanım 2.3.7 Bir R halkasının her eşgüçlü elemanı merkezi ise, yani $e^2 = e \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $er = re$ oluyorsa, R 'ye abelyan (*abelian*) halka denir. Shin (1973) gereğince IFP halkaların abelyan olduğu açıktır.

Tanım 2.3.8 Sırasıyla her sağ (ya da sol) ideali iki-yanlı ideal olan bir halka *sağ ikili* (ya da *sol ikili*) (*right duo*) (ya da *left duo*) olarak adlandırılır. Sağ ya da sol ikili halkaların yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Ayrıca, her sonlu halkanın sağ ikili olması için gerek ve yeter koşul sol ikili olmasıdır (Xue 1991).

Tanım 2.3.9 Sıfırdan farklı bir değişmeli halkanın bir tek maksimal ideali varsa, o halka *yemel* (*local*) olarak adlandırılır. Değişmeli olmayan durumda ise, R bir halka ve $J(R)$; R 'nin Jacobson radikali olmak üzere $R/J(R)$ bir bölümlü halka ise, R 'ye *yemel* (*local*) halka; $R/J(R)$ yarıbasit halka ise, R 'ye *yarıyemel* (*semilocal*) adı verilir. Yemel halkalar yarıyemeldir ve tüm bölümlü halkaları kapsarlar. Ayrıca yarıyemel halkalar da tüm sol ve sağ artin halkaları kapsarlar.

Tanım 2.3.10 Bir R halkasının asal radikali tüm sıfırgüçlü elemanların kümesini kapsarsa, yani; $N_*(R) = N(R)$ ise, R 'ye *2-ilkel* (*2-primal*) halka denir (Birkenmeier vd. 1992). Her değişmeli halkanın 2-ilkel olduğunu ifade eden bir temel teorem ilk olarak bir Alman matematikçi olan Wolfgang Krull tarafından ispatlanmıştır. Bundan dolayı 2-primal halkalar, değişmeli olan ve değişmeli olmayan halka teorisi arasında bir tür köprü görevi görür. 2-ilkel halka sınıfı ilk olarak Shin (1973) tarafından bu isim verilmeden incelenmiştir. Bir halkanın 2-ilkel olması için gerek ve yeter koşul o halkanın minimal asal ideallerinin her birinin tamamen asal olması, yani; ona karşılık gelen asal çarpan halkasının bir bölge olması (Shin 1973)'te gösterilmiştir.

3. SİMETRİK HALKALAR

Bu bölümde, Marks (2003) ve Huh vd. (2005) temel kaynak olarak kullanılarak, simetrik halkaların özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkisi incelenecektir. Simetrik halkalar, değişmeli ve inmiş halkaları kapsayan yeni bir halka sınıfı olarak Lambek (1971) tarafından tanıtılmıştır.

3.1. Simetrik Halkaların Özellikleri

Tanım 3.1.1 Anderson ve Camillo (1999) tarafından ZC_3 adı altında incelenen simetrik halkalar, Lambek (1971) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (*symmetric*) olarak adlandırılır.

Değişmeli ve inmiş halkaların simetrik olduğu açıktır. Bu ifadenin karşıtının doğru olmadığını gösteren, yani simetrik olan fakat değişmeli ve inmiş olmayan bir halka örneği Marks (2003) tarafından şu şekilde verilmiştir: $p \in \mathbb{N}$ bir asal sayı, F karakteristiği p olan bir cisim ve G devirli bir p -grup olmak üzere $R = FG$ grup halkasının aşıkâr olmayan bir σ otomorfizmasıyla birlikte $R[x; \sigma]$ çarpık polinomlar halkası simetriktir fakat değişmeli ve inmiş değildir.

Uyarı 3.1.2 Anderson ve Camillo (1999) tarafından bağımsız olarak ispatlanan “bir R halkasının simetrik olması için gerek ve yeter koşul n herhangi bir pozitif tamsayı, $a_i \in R$ ve $\sigma, \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ iken $a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)} = 0$ olmasıdır” ifadesi Lambek (1971) tarafından kanıtlanmıştır.

Shin (1973) tarafından inmiş halkaların simetrik olduğu aşağıda gösterilmiştir.

Lemma 3.1.3 Bir R halkası inmiş ise simetriktir.

İspat. R inmiş bir halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu durumda $c(abc)ab = 0$ olup $cab = 0$ bulunur. Buradan $aba(cab)ac = 0$ olup $abac = 0$ elde edilir. Böylece $bacb(abac)ba = 0$ ve buradan $bacba = 0$ olur. Son eşitlikten $ac(bacba)cb = 0$ olup $acb = 0$ olduğundan R simetrik olur. Bu ifadenin karşıtının doğru olmadığını gösteren halka örnekleri vardır. Bunlardan biri olan $\mathbb{Z}_{n^l}$ ($n, l \geq 2$) halkası inmiş olmayan simetrik bir halkadır. $\square$

Aşağıda; Shin (1973) tarafından tanımlanan, neredeyse simetrik ve sözde simetrik olarak adlandırılan iki halka sınıfının tanımları ve bu halkaların simetrik halkalarla ilişkisi verilmiştir.

Tanım 3.1.4 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir R halkası *neredeyse simetrik* (*almost symmetric*) olarak adlandırılır:

(SI) Her bir $a \in R$ için, $\text{ann}_r(a)$ sağ sıfırlayıcı R 'nin bir idealidir.

(SII) $a, b, c \in R$ olmak üzere herhangi bir pozitif n tamsayısı için $a(bc)^n = 0$ ise, herhangi bir pozitif m tamsayısı için $ab^m c^m = 0$ 'dır.

Shin (1973) bu çalışmasında (SI) ve (SII) koşullarının birbirinden bağımsız olduğunu örnek vererek göstermiştir. Aynı zamanda simetrik halkaların neredeyse simetrik olduğunu kanıtlayarak aksinin doğru olmadığına dair örnek vermiştir. Ayrıca Tanım 2.3.6'da verilen yarıdeğişmeli halka tanımı ile Tanım 3.1.4'de ifade edilen (SI) koşulunun aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Tanım 3.1.5 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir R halkası *sözde simetrik* (*pseudo symmetric*) olarak adlandırılır:

(PSI) $I = 0$ veya R bir a elemanı için I ; aR 'nin sağ sıfırlayıcı iken, $\text{rad}(R/I)$ asal radikali R/I halkasının tüm sıfırgüçlü elemanlarının kümesidir.

(PSII) $a, b, c \in R$ olmak üzere herhangi bir pozitif n tamsayısı için $aR(bc)^n = 0$ ise, herhangi bir pozitif m tamsayısı için $a(RbR)^m c^m = 0$ 'dır.

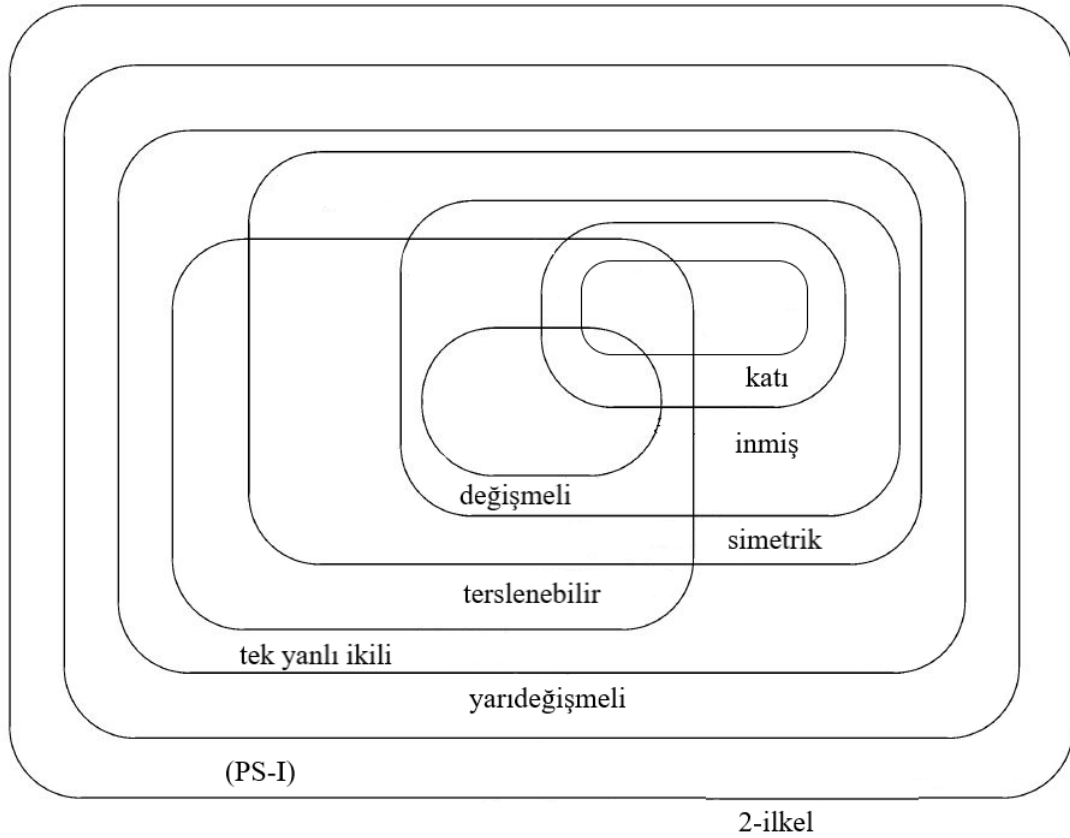
Shin (1973); neredeyse simetrik halkaların sözde simetrik olduğunu kanıtlamış fakat sözde simetrik halkaların neredeyse simetrik olması gerekmediğine örnek vermiştir. Böylece simetrik halkaların, neredeyse simetrik ve sözde simetrik halkaları, kesin artan bir sıralamayla kapsadığını ifade etmiştir. Fakat (SI) ve (PSI) özelliklerini sağlayan yarıasal bir halka üzerinde “simetrik”, “neredeyse simetrik” ve “sözde simetrik” olma özelliklerinin birbirine denk olduğunu kanıtlamıştır.

Uyarı 3.1.6 Birimli simetrik halkaların terslenebilir olduğu açıktır. Fakat birimsiz halkalar için bu ifadenin doğru olmadığı (Marks 2002) tarafından verilen şu örnekte

gösterilmiştir: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ iki elemanlı bir cisim ve $S = \{a, b\}$ kümesi, $a^2 = ab = a$ ve $b^2 = ba = b$ ile tanımlı çarpma işlemine göre, bir yarıgrup olsun. Birimsiz ve dört elemandan oluşan $T = \mathbb{F}_2 S$ kümesi simetriktir fakat terslenebilir değildir.

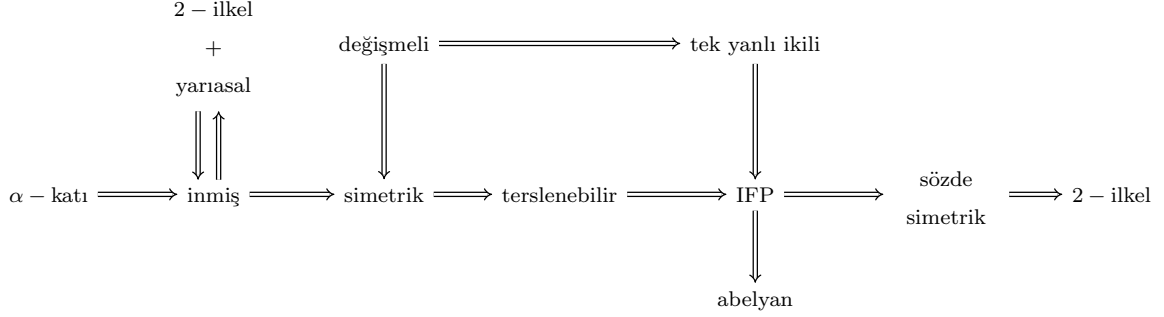
Uyarı 3.1.7 Bir R halkası simetrik ise, $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $abr = 0$ olup buradan $arb = 0$ elde edilir. Böylece R yarıdeğişmeli bir halka olur. Böylece simetrik halkalar yarıdeğişmelidir. Fakat bu ifadenin karşınının doğru olmadığı (Marks 2003)'te gösterilmiştir.

Simetrik halkaların dışında, tanımları 2.Bölümde verilen, farklı halka sınıfları vardır. Bu halka sınıflarının birbirleriyle ilişkisi (Marks 2003) tarafından aşağıdaki Venn şemasında gösterilmiştir.



Yukarıda şema halinde verilen halka sınıfları arasındaki ilişki, aşağıda gerektirmeler

yardımla ifade edilmiş olup bu gerektirmelerin karşılıkları doğru değildir.



Aşağıda ispatsız olarak verilen iki lemmada simetrik halkaların bazı karakterizasyonları ve özellikleri verilmiştir.

Lemma 3.1.8 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) R simetriktir.
- (ii) n herhangi bir pozitif tamsayı, $r_i \in R$ ve $\sigma; \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere $r_1 r_2 \dots r_n = 0$ iken $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} \dots r_{\sigma(n)} = 0$ dır.
- (iii) R 'nin herhangi A, B, C altkümeleri için $ABC = 0$ iken $ACB = 0$ dır.
- (iv) Her i için $\emptyset \neq A_i \subseteq R$ ve herhangi bir pozitif n tamsayısı için $\sigma; \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere $A_1 A_2 \dots A_n = 0$ iken $A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \dots A_{\sigma(n)} = 0$
- (v) R ; asal burulmasız simetrik halkaların bir demetinin kesir halkasına izomorf-tur.
- (vi) $r, s, t \in R$ olmak üzere $rst = 0$ iken $srt = 0$ dır.
- (vii) R 'nin herhangi A, B, C altkümeleri için $ABC = 0$ iken $BAC = 0$ dır.
- (viii) $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken herhangi pozitif m, n, l tamsayıları için $a^m c^n b^l = 0$ dır.
- (ix) $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken herhangi pozitif m, n, l tamsayıları için $b^m a^n c^l = 0$ dır.

(x) $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ iken herhangi pozitif m, n, l tamsayıları için $(RaR)^m(RcR)^n(RbR)^l = 0$ dır.

(xi) $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ iken herhangi pozitif m, n, l tamsayıları için $(RbR)^m(RaR)^n(RcR)^l = 0$ dır. (Jung vd. 2014)

Lemma 3.1.9

- (i) Simetrik halkalar (birimli olması gerekmeyen) althalkalar ve direkt çarpımlar altında kapalıdır.
- (ii) R bir IFP halka ise, $W(R) = N_*(R) = N^*(R) = N(R)$ dir.
- (iii) Bir R halkasının yarımükemmel simetrik olması için gerek ve yeter koşul R 'nin yerel simetrik halkaların bir sonlu direkt toplamı olmasıdır. (Huh vd 2005)

Bir R halkasının genişlemelerinden biri olan $R[x]/(x^n)$ halkasının simetriklik özelliğinin R halkasının inmiş olması durumunda sağlandığı Huh vd (2005) tarafından aşağıdaki biçimde kanıtlanmıştır.

Teorem 3.1.10 R bir inmiş halka olsun. $R[x]/(x^n)$ halkası simetriktir.

İspat. R inmiş bir halka olmak üzere

$$S = R[x]/(x^n) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + (x^n) \mid a_i \in R\}$$

olsun. n üzerinde tümevarım uygulayarak S 'nin simetrik olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için $S = \{a_0 + (x) \mid a_0 \in R\} \cong R$ olup simetrik olduğu açıktır.

$n = 2$ için S 'nin simetrik olduğunu gösterelim. $a, b, c, d, e, f \in R$ ve $\alpha(x) = a + bx, \beta(x) = c + dx, \gamma(x) = e + fx \in R[x]$ olmak üzere $\bar{\alpha} = \alpha + (x^2), \bar{\beta} = \beta + (x^2), \bar{\gamma} = \gamma + (x^2) \in S$ için $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \bar{0}$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \bar{0} &\Rightarrow [\alpha + (x^2)][\beta + (x^2)][\gamma + (x^2)] = (x^2) \\ &\Rightarrow \alpha\beta\gamma + (x^2) = (x^2) \\ &\Rightarrow (a + bx)(c + dx)(e + fx) + (x^2) = (x^2) \\ &\Rightarrow ace + (ade + bce + acf)x + (x^2) = (x^2) \\ &\Rightarrow ace + (ade + bce + acf)x \in (x^2). \end{aligned}$$

Buradan $ace = 0$ ve $ade + bce + acf = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $ace = 0$ olması a, c, e 'nin olası tüm çarpımlarının 0 olmasını gerektirir. Şimdi

$$ade + bce + acf = 0 \quad (3.1)$$

diyelim. (3.1) eşitliği kullanılarak $caf + cbe + dae = 0$ olduğunu gösterelim. (3.1) eşitliği sağdan acf ile çarpılırsa $(acf)^2 = 0$ ve buradan $acf = 0$ olur. Bu ifade (3.1)'de yerine yazılırsa

$$ade + bce = 0 \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir. (3.2) eşitliği sağdan ade ile çarpılırsa $(ade)^2 = 0$ ve buradan $ade = 0$ bulunur. Bu ifade (3.2)'de yerine yazılırsa $bce = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $cae = 0, acf = 0, ade = 0$ ve $bce = 0$ eşitlikleri ve bunların olası tüm çarpımları sıfır olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\gamma} &= [\beta + (x^2)][\alpha + (x^2)][\gamma + (x^2)] \\ &= \beta\alpha\gamma + (x^2) \\ &= (c + dx)(a + bx)(e + fx) + (x^2) \\ &= [ca + (cb + da)x](e + fx) + (x^2) \\ &= cae + (caf + cbe + dae)x + (x^2) \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

olup S simetrik bir halka olur.

$n \geq 3$ için S 'nin simetrik olduğunu $n = 2$ durumuna benzer olarak ispatlayalım. S 'de $ABC = 0$ olacak biçimde $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + (x^n)$, $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + (x^n)$, $C = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + (x^n)$ polinomlarını alalım. $u = x + (x^n)$ olarak alınırsa $A = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_{n-1}u^{n-1}$, $B = b_0 + b_1u + b_2u^2 + \dots + b_{n-1}u^{n-1}$, $C = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots + c_{n-1}u^{n-1}$ biçiminde yazılır. Böylece $i + j + k \geq n$ özelliğine sahip tüm i, j, k için $a_i b_j c_k u^{i+j+k} = 0$ olur.

Kabulden $ABC = 0$ olduğundan $\forall i + j + k < n$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a_0 b_0 c_0 = 0 \quad (3.3)$$

$$a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$a_0 b_0 c_2 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_0 + a_2 b_0 c_0 = 0 \quad (3.5)$$

.....

$$a_0 b_0 c_{n-2} + a_0 b_1 c_{n-3} + \cdots + a_{n-3} b_1 c_0 + a_{n-2} b_0 c_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$a_0 b_0 c_{n-1} + a_0 b_1 c_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 c_0 + a_{n-1} b_0 c_0 = 0 \quad (3.7)$$

R 'nin inmiş (dolayısıyla simetrik ve yarıdeğişmeli) olmasını kullanarak ve $i + j + k$ üzerinde tümevarım uygulayarak aşağıdaki hesaplamaları yapalım. (3.4) eşitliği sağdan $b_0 c_0$ ile çarpılırsa $a_1 b_0 c_0 b_0 c_0 = 0$ ve buradan $(a_1 b_0 c_0)^2 = 0$ ve böylece $a_1 b_0 c_0 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.4)'de yerine yazılırsa $a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 = 0$ olup bu eşitlik sağdan b_0 ile çarpılırsa $(a_0 b_0 c_1)^2 = 0$ ve buradan $a_0 b_0 c_1 = 0$ olup $a_0 b_1 c_0 = 0$ elde edilir. Burada elde ettiğimiz eşitliklere

$$a_0 b_0 c_1 = a_0 b_1 c_0 = a_1 b_0 c_0 = 0 \quad (3.8)$$

diyelim. Şimdi (3.5) eşitliği sağdan $b_0 c_0$ ile çarpılarak (3.3) ve (3.8) eşitlikleriyle birlikte gözönüne alınırsa $a_2 b_0 c_0 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.5)'te yerine yazılarak $a_0 b_0 c_2 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_0 = 0$ elde edilir. Bu eşitlik sağdan $b_1 c_0$ ile çarpılarak $a_1 b_1 c_0 = 0$ bulunur. Bu ifade yerine yazılıp kalan terimler $b_0 c_1$ ile çarpılarak $a_1 b_0 c_1 = 0$ bulunur. Bu ifade yerine yazılıp kalan terimler $b_2 c_0$ ile çarpılarak $a_0 b_2 c_0 = 0$ bulunur. Bu ifade yerine yazılıp kalan terimler $b_1 c_1$ ile çarpılarak $a_0 b_1 c_1 = 0$ ve buradan $a_0 b_0 c_2 = 0$ elde edilir. Böylece (3.5) eşitliğindeki tüm terimlerin sıfır olduğu gösterilmiş olur. Tümevarım kabulünden $i + j + k = 0, 1, \dots, n - 2$ için a_i, b_j, c_k terimlerinin olası tüm çarpımlarının 0 olduğunu yani (3.6) eşitliğinde görünen tüm terimlerin sıfır olduğunu kabul edelim. (3.7) eşitliğinde, yukarıda (3.5) eşitliği üzerine uygulanan metod uygulanarak her i, j, k için tüm $a_i b_j c_k$ çarpımları 0 bulunur. Böylece R 'nin inmiş olması kullanılarak her i, j, k için $a_i c_k b_j = 0$ ve buradan $ACB = 0$ olup S 'nin simetrik olduğu ispatlanmış olur. $\square$

Uyarı 3.1.11 Tanım 2.2.9'da M yerine, kendisi üzerinde bimodül yapısına sahip olan, R halkası alınırsa $T(R, R)$ aşıkâr genişlemesinin $R[x]/(x^2)$ halkasına izomorf

olduğu kolayca görülebilir. Böylece Teorem 3.1.10'un direkt bir sonucu ispatsız olarak aşağıda biçimde verilebilir.

Sonuç 3.1.12 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda $T(R, R)$ simetrik bir halkadır.

Sonuç 3.1.12 gözönüne alındığında R halkası simetrik iken, $T(R, R)$ aşikar genişlemenin simetrik olup olmadığı merak edilebilir. Fakat bu ifadenin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.1.13 Reel sayılar cismi üzerindeki Hamilton kuaterniyonlarının $\mathbb{H}$ kümesini gözönüne alalım. $\mathbb{H}$ inmiş olduğundan Sonuç 3.1.12 gereğince $S = T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ simetrik-tir. Fakat

$$AB = \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right) = 0$$

olacak biçimdeki $A, B \in T(S, S)$ elemanları için

$$AT(S, S)B = \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right) \neq 0$$

olduğundan $T(S, S)$ yarıdeğişmeli değildir. Böylece $T(S, S)$ simetrik değildir. (Huh vd.,2005)

İzomorfizma farkıyla bir tek olan ve $2^3 = 8$. mertebeden değişmeli olmayan minimal bir halkanın; Tanım 2.1.6'da verilen $GF(2)$ Galois cismi üzerine kurulan 2×2 tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle Xue (1992)'nin verdiği bir örnekten esinlenerek, izomorfizma farkıyla tek olan, $2^4 = 16$.

mertebeden değişmeli olmayan bir minimal simetrik halka örneği Huh vd. (2005) tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Örnek 3.1.14 $GF(2) = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ olmak üzere katsayıları $GF(2)$ 'den gelen 2. dereceden indirgenmez $g(x) = x^2 + x + 1$ polinomunu seğıelim. Bu durumda $GF(2^2) = \{\bar{a} + \bar{b}x + (g(x)) \mid \bar{a}, \bar{b} \in GF(2)\}$ ile tanımlanır. Burada $u^2 = u + 1$ ve $u^{-1} = u + 1$ olmak üzere $GF(2^2) = \{\bar{0}, \bar{1}, u, u + 1\}$ biçimindedir. şimdi $GF(2^2)$ üzerine kurulan $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin halkasına R diyelim. Bu halkanın aşağıdaki biçimde $2^4 = 16$ tane elemanı vardır.

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in GF(2^2) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & u \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} u & u+1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & u \\ 0 & u \end{pmatrix}, \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ 0 & u \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

R halkasının Jacobson radikali

$$J(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in GF(2^2) \right\}$$

biçiminde olup $R/J(R)$ bölüm halkasının $GF(2^2)$ 'ye izomorf olduğu kolayca görölür. $i = 1, 2, 3$ için $X_1 X_2 X_3 = 0$ olacak şekilde $0 \neq X_i \in R$ elemanlarını alalım. Bu durumda X_i 'lerden en az iki tanesi $J(R)$ 'de kaptanmak zorunda olduğu için $X_1 X_3 X_2 = 0$ bulunur. Sonuç olarak R 'nin 16. mertebeden bir simetrik halka olduğu gösterilmiş olur.

Yukarıda verilen örnek sayesinde 16. mertebeden tüm simetrik halkaların izomorfizma farkıyla tek türlü belirlendiği aşağıdaki teoremdede kanıtlanmıştır.

Teorem 3.1.15 R minimal değişmeli olmayan bir simetrik halka ise, R ; 16. mertebeden ve Örnek 3.1.14'deki halkaya izomorf olan bir halkadır. Ayrıca R bir ikili halkadır. (Huh vd.,2005)

Aşağıdaki önermede Lemma 3.1.10'un karşıtının, halkanın yarıasal olması durumunda doğru olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca halka sınıfları arasındaki ilişkileri gösteren bazı karakterizasyonlar Huh vd. (2005) tarafından aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.1.16 R bir halka olsun.

- (1) R inmiştir $\Leftrightarrow R$ yarıasal ve simetriktir $\Leftrightarrow R$ yarıasal ve yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow R$ yarıasal ve 2-ilkeldir.
- (2) R bir bölgedir $\Leftrightarrow R$ asal ve inmiştir $\Leftrightarrow R$ asal ve simetriktir $\Leftrightarrow R$ asal ve yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow R$ asal ve 2-ilkeldir.
- (3) R sıfırdan farklı her bir sağ ideali sıfırdan farklı bir ideal kapsayan bir yarıasal halka olsun. Bu durumda R inmiştir.
- (4) R bir PI -halka olsun. R 'nin sıfırdan farklı her bir sağ idealinin sıfırdan farklı bir ideal kapsayacak şekilde bir yarıasal halka olması için gerek ve yeter koşul R 'nin inmiş olmasıdır.
- (5) R bir yarıasal PI -halka olsun. Bu durumda R inmiştir $\Leftrightarrow R$ 'nin sıfırdan farklı her bir ideali R 'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar $\Leftrightarrow R$ simetriktir $\Leftrightarrow R$ yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow R$ 2-primaldir.
- (6) R bir asal PI -halka olsun. Bu durumda R bir bölgedir $\Leftrightarrow R$ inmiştir $\Leftrightarrow R$ 'nin sıfırdan farklı her bir ideali R 'nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar $\Leftrightarrow R$ simetriktir $\Leftrightarrow R$ yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow R$ 2-primaldir.
- (7) R bir von Neumann düzenli halka olsun. Bu durumda R sağ (sol) ikili halkadır $\Leftrightarrow R$ inmiştir $\Leftrightarrow R$ simetriktir $\Leftrightarrow R$ yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow R$ abelyandır $\Leftrightarrow R$ 2-primaldir $\Leftrightarrow R$ bölümlü halkaların bir altdirekt çarpımıdır.

Değişmeli (veya inmiş) bir halka üzerine kurulan polinomlar halkasının değişmeli (veya inmiş) olduğu açıktır. Birkenmeier vd. (1993) tarafından bir R halkasının

2-ilkel olması için gerek ve yeter koşul olarak $R[x]$ polinomlar halkasının 2-ilkel olmasını ispatlamıştır. Fakat Huh vd. (2002); yarıdeğişmeli bir halka üzerine kurulan polinomlar halkasının yarıdeğişmeli olmadığını ve Kim ve Lee (2003); terslenebilir bir halka üzerine kurulan polinomlar halkasının terslenebilir olmadığını göstermişlerdir. Buradan hareketle, simetrik bir halka üzerine kurulan polinomlar halkasının simetrik olmadığı Huh vd. (2005) tarafından aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.1.17 Değişmeli olmayan $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ bilinmeyenleriyle birlikte tam sayıların mod2'ye göre kalanlarının $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerine kurulan serbest cebir $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2]$ olsun. $r, r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$ olmak üzere $\mathbb{Z}_2 + A$ halkasının

$$\begin{aligned} & a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, \\ & b_0a_0, b_0a_1 + b_1a_0, b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0, b_1a_2 + b_2a_1, b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2, \\ & (a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2), (b_0 + b_1 + b_2)r(a_0 + a_1 + a_2), r_1r_2r_3r_4 \end{aligned}$$

elemanları tarafından üretilen I idealini gözönüne alalım. $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ halkası simetrik olmasına rağmen $R[x]$ polinomlar halkası (yarıdeğişmeli olmadığı için) simetrik değildir.

Aşağıdaki lemmada, bir R halkasının simetrikliği o halkanın merkezi düzenli elemanları yardımıyla karakterize edilmiş ve bunun bir sonucu olarak polinomlar halkasının simetrikliğinin Laurent polinomlar halkasının simetrikliğine denk olduğu gösterilmiştir.

Lemma 3.1.18

- (i) R bir halka ve Δ merkezi düzenli elemanlarının oluşturduğu R 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesi olsun. R simetriktir ancak ve ancak $\Delta^{-1}R$ simetriktir.
- (ii) $R[x]$ simetriktir ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ simetriktir. (Huh vd. 2005)

İspat. (i) ($\Leftarrow$) Lemma 3.1.9(i) gereğince açıktır.

($\Rightarrow$) R simetrik olsun. $\alpha\beta\gamma = 0$ olacak şekilde $a, b, c \in R$ ve $u, v, w \in \Delta$ için $\alpha = u^{-1}a, \beta = v^{-1}b, \gamma = w^{-1}c \in \Delta^{-1}R$ elemanlarını alalım. $\Delta \subseteq C(R)$ olduğundan

$$0 = \alpha\beta\gamma = u^{-1}av^{-1}bw^{-1}c = (u^{-1}v^{-1}w^{-1})abc = (wvu)^{-1}abc$$

olup buradan $abc = 0$ olur. R simetrik olduğundan $acb = 0$ ve böylece

$$0 = acb = (vwu)^{-1}acb = (u^{-1}w^{-1}v^{-1})acb = u^{-1}aw^{-1}cv^{-1}b = \alpha\gamma\beta$$

olup $\Delta^{-1}R$ simetrik olur.

(ii) ($\Leftarrow$) Lemma 3.1.9(i) gereğince açıktır.

($\Rightarrow$) $R[x]$ simetrik olsun. $\Delta = \{1, x, x^2, \dots\}$ kümesi $R[x]$ 'in bir çarpımsal kapalı altkümesidir. Ayrıca $R[x; x^{-1}] = \Delta^{-1}R[x]$ olduğu gözönüne alınırsa (i) şikkından $R[x; x^{-1}]$ 'in simetrik olduğu açıktır. $\square$

Huh vd. (2005) tarafından kanıtlanan aşağıdaki önermede, bir halkanın merkezinin, halkadaki sıfırdan farklı tüm düzenli elemanların sonsuz bir althalkasını kapsamaması durumunda, halkanın simetrikliğinin polinomlar halkasına ve dolayısıyla Laurent polinomlar halkasına taşınabildiği gösterilmiştir.

Önerme 3.1.19 R bir halka olmak üzere $C(R)$ 'nin R 'deki sıfırdan farklı tüm düzenli elemanların sonsuz bir althalkasını kapsadığını kabul edelim. Bu durumda

$$R \text{ simetriktir} \Leftrightarrow R[x] \text{ simetriktir} \Leftrightarrow R[x; x^{-1}] \text{ simetriktir.}$$

İspat. Lemma 3.1.9(i) ve Lemma 3.1.18(ii) gereğince R simetrik iken $R[x]$ 'in simetrik olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $C(R)$ 'nin R 'deki sıfırdan farklı tüm düzenli elemanların sonsuz bir althalkasını kapsamaması $R[x]$ 'in sonsuz sayıda R 'nin bir altdirekt çarpımı biçiminde yazılmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.1.9(i) gereğince $R[x]$ simetrik olur. $\square$

Bir R halkasının simetrikliğinin polinomlar halkasına taşınmasını sağlayan diğer bir koşulun halkanın Armendariz olması olduğu Huh vd. (2005) tarafından aşağıdaki önermede ispatlanmıştır.

Önerme 3.1.20 R Armendariz bir halka olsun.

$$R \text{ simetriktir} \Leftrightarrow R[x] \text{ simetriktir} \Leftrightarrow R[x; x^{-1}] \text{ simetriktir.}$$

İspat. Önerme 3.1.19'un ispatındaki düşünceyle R simetrik iken $R[x]$ 'in simetrik olduğunun gösterilmesi yeterlidir. R 'nin simetrik olduğunu kabul edip $R[x]$ 'den

$fgh = 0$ olacak şekilde $f = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ ve $h = \sum_{k=0}^t c_k x^k$ polinomlarını alalım. R Armendariz olduğundan her bir i, j, k için $a_i b_j c_k = 0$ olur. Kabulden her i, j, k için $a_i c_k b_j = 0$ olup buradan $fhg = 0$ bulunur. $\square$

Örnek 3.1.17’de verilen $R = \frac{\mathbb{Z}_2+A}{I}$ halkası için $\frac{\mathbb{Z}_2+A}{I}[x] \cong \frac{(\mathbb{Z}_2+A)[x]}{I[x]}$ izomorfizması vardır. Bu, aynı zamanda simetrik bir R halkasının her I ideale göre bölüm halkasının simetrik olmadığına da bir örnektir. Aşağıdaki önermede I ideali üzerine bir koşul eklendiğinde halkanın simetrikliğinin bölüm halkasına taşındığı gösterilmiştir.

Önerme 3.1.21 I , simetrik bir R halkasının bir ideali olsun. Eğer I , R ’de bir sıfırlayan ise R/I bölüm halkası simetrik olur. (Huh vd. 2005)

İspat. R simetrik bir halka ve I ; R ’nin bir sıfırlayan ideali olsun. Bu durumda $I = \text{ann}_r(S)$ olacak şekilde bir $S \subseteq R$ vardır. $a, b, c \in R$ için $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{0}$ olacak şekilde $\bar{a} = a + I, \bar{b} = b + I, \bar{c} = c + I \in R/I$ alalım. Bu durumda kabulden $Sabc = 0$ ve R simetrik olduğundan $Sacb = 0$ bulunur. Böylece $acb \in \text{ann}_r(S) = I$ olduğundan $\bar{a}\bar{c}\bar{b} = \bar{0}$ olup R/I simetrik bir halka olur. $\square$

Önerme 3.1.21’de simetrik bir R halkasının bir I idealinin inmiş olması durumunda R/I bölüm halkasının simetrik olup olmadığı merak edilebilir. Fakat Huh vd. (2005) tarafından verilen aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.22 Katsayıları tamsayı olan kuaterniyonlar $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k$ halkasını gözönüne alalım. R bir bölge olduğundan simetrik olduğu açıktır. Goodearl ve Warfield (1989)’a göre, herhangi bir p tek asal sayısı için pR , R ’nin bir maksimal ideali olup inmiştir. Diğer yandan R/pR bölüm halkası $\mathbb{Z}_p$ cismi üzerine kurulan 2×2 tipindeki matrislerin halkasına izomorf olup abelyan olmadığı için simetrik değildir.

Aşağıdaki önermede, Önerme 3.1.21’in karşıtının I idealinin inmiş olması durumunda doğru olduğu ispatlanmıştır.

Önerme 3.1.23 I bir R halkasının bir öz ideali olmak üzere R/I bölüm halkası simetrik ve I (birimsiz bir halka olarak) inmiş ise, R simetriktir. (Huh vd. 2005)

İspat. Kabul edelim ki I bir R halkasının inmiş bir özideali ve R/I simetrik olsun. $i = 1, 2, 3$ için $r_1 r_2 r_3 = 0$ olacak şekilde $r_1, r_2, r_3 \in R$ alalım. Bu elemanların R halkası içinde I 'ya ait olup olmama durumlarına göre ispat yapılır. I öz ideal olduğundan en az bir $r_i \notin I$ olur. Diğer yandan en az bir $0 \neq r_i \in I$ var olmalıdır. (Aksi halde $I = 0$ iken $R/I \cong R$ olup R 'nin simetrik olduğu açıktır). Böylece bu elemanların R/I bölüm halkasındaki kosetleri gözönüne alınırsa R/I 'nın simetrikliğinden dolayı $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(3)} \in I$ olacak şekilde $\{1, 2, 3\}$ kümesinin bir σ permütasyonu vardır. Yani r_i 'lerin olası tüm çarpımları I 'da kalır. Şimdi $r_1 r_2 r_3 = 0$ eşitliği soldan $r_2 r_3$ sağdan r_1 ile çarpılırsa $(r_2 r_3 r_1)^2 = 0$ olup I 'nın inmiş olduğu kullanılarak $r_2 r_3 r_1 = 0$ bulunur. Her iki durumda özel olarak $r_3 = 1$ alınırsa, $r_1 r_2 = 0$ ve $r_2 r_1 = 0$ eşitlikleri elde edilir ve bunlar aşağıdaki hesaplamalarda kullanılacaktır. Şimdi $abc = 0$ olacak şekildeki en az bir tanesi I 'ya düşen $a, b, c \in R$ elemanları için ispatı tamamlayalım.

$$\begin{aligned}
abc = 0 &\Rightarrow a(bc) = 0 \\
&\Rightarrow (bc)a = 0 \\
&\Rightarrow ac(bca)cb = 0 \\
&\Rightarrow (acb)(cacb) = 0 \\
&\Rightarrow (cacb)(acb) = 0 \\
&\Rightarrow (cacbacb)a = 0 \\
&\Rightarrow c(acbacba) = 0 \\
&\Rightarrow (acbacba)c = 0 \\
&\Rightarrow (acbacbac)b = 0 \\
&\Rightarrow (acb)^3 = 0
\end{aligned}$$

olup $acb \in I$ olduğu ve I 'nın inmiş olduğu kullanılırsa $acb = 0$ olup ispat biter. $\square$

Önerme 3.1.23'te I 'nın inmiş olması koşulu yerine I 'nın simetrik olması koşulu getirilirse R halkasının inmiş olabileceği düşünülebilir. Fakat Huh vd. (2005) aşağıdaki örneği vererek bunun doğru olmadığını göstermişlerdir.

Örnek 3.1.24 S inmiş bir halka olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$$

halkasını ve bunun bir

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b, c, d \in S \right\}$$

idealini gözönüne alalım. Bu durumda $R/I \cong S$ ve S inmiş (böylece simetrik) olduğundan R/I simetriktir. Ayrıca I idealinin simetrik olduğu fakat inmiş olmadığı açıktır. Fakat bununla birlikte R halkası Kim ve Lee (2003) gereğince terslenebilir olmadığı için simetrik ve inmiş değildir.

Birimli bir R halkasının bir e eşgüçlü elemanı için $1 - e$ de eşgüçlü bir elemandır. Bu durumda eR ve $(1 - e)R$; R 'nin birimsiz birer althalkası olur. Aşağıdaki önermede, R halkasının abelyan olması durumunda, R 'nin simetriklik özelliğinin bu althalkaların simetrikliği ile karakterize edilebileceği Huh vd. (2005) tarafından ispatlanmıştır.

Önerme 3.1.25 Abelyan bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) R simetriktir.
- (ii) Her $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1 - e)R$ simetriktir.
- (iii) Uygun bir $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1 - e)R$ simetriktir.

İspat. Lemma 3.1.9 gereğince $(iii) \Rightarrow (i)$ gerektirmesini ispatlamak yeterlidir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Uygun bir $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1 - e)R$ 'nin simetrik olduğunu kabul edelim. $abc = 0$ olacak şekilde $a, b, c \in R$ alalım. Eşitliğin her iki tarafı e idempotentiyle çarpılır ve R halkasının abelyan olduğu kullanılırsa $eaebec = 0$ ve $(1 - e)a(1 - e)b(1 - e)c = 0$ olur. Kabulden $eaecbe = 0$ ve $(1 - e)a(1 - e)c(1 - e)b = 0$ olup

$$0 = eaecbe + (1 - e)a(1 - e)c(1 - e)b = eacb + (1 - e)acb = acb$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Bir halkanın sağ Ore olması durumunda Teorem 2.2.14 gereğince o halkanın klasik sağ kesir halkası var olup, aşağıdaki teoremden halkanın simetriklik özelliği klasik sağ kesir halkası kullanılarak Huh vd. (2005) tarafından karakterize edilmiştir.

Teorem 3.1.26 R bir sağ Ore halka ve Q , R 'nin klasik sağ kesir halkası olsun. Bu durumda R 'nin simetrik olması için gerek ve yeter koşul Q 'nun simetrik olmasıdır.

İspat. Bir R sağ Ore halkasının klasik sağ kesir halkası Q olsun. Lemma 3.1.9 gereğince R simetrik iken Q 'nun simetrik olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki R simetrik ve $\alpha = au^{-1}, \beta = bv^{-1}, \gamma = cw^{-1} \in Q$ için $\alpha\beta\gamma = 0$ olsun.

(1) $bu_1 = ub_1$ ve buradan $u^{-1}b = b_1u_1^{-1}$ olacak şekilde u_1 düzenli olmak üzere var olan $b_1, u_1 \in R$ elemanları kullanılarak

$$0 = \alpha\beta\gamma = au^{-1}bv^{-1}cw^{-1} = ab_1u_1^{-1}v^{-1}cw^{-1}$$

elde edilir.

(2) $cv_1 = vc_1$ ve buradan $v^{-1}c = c_1v_1^{-1}$ olacak şekilde v_1 düzenli olmak üzere var olan $c_1, v_1 \in R$ elemanları kullanılarak

$$0 = \alpha\beta\gamma = ab_1u_1^{-1}v^{-1}cw^{-1} = ab_1u_1^{-1}c_1v_1^{-1}w^{-1}$$

elde edilir.

(3) $c_1w_1 = u_1d_1$ ve buradan $u_1^{-1}c_1 = d_1w_1^{-1}$ olacak şekilde w_1 düzenli olmak üzere var olan $d_1, w_1 \in R$ elemanları kullanılarak

$$0 = \alpha\beta\gamma = ab_1u_1^{-1}c_1v_1^{-1}w^{-1} = ab_1d_1w_1^{-1}v_1^{-1}w^{-1}$$

elde edilir. Böylece $ab_1d_1 = 0$ olup R 'nin simetrik olduğu ve (1) kullanılarak

$$0 = ab_1d_1u = aub_1d_1 = abu_1d_1 = abd_1u_1$$

ve buradan $abd_1 = 0$ bulunur. R 'nin simetrik olduğu ve (3) kullanılarak

$$0 = abd_1u_1 = abu_1d_1 = abc_1w_1$$

ve buradan $abc_1 = 0$ bulunur. R 'nin simetrik olduğu ve (2) kullanılarak

$$0 = abc_1v = abvc_1 = abcv_1$$

olup $abc = 0$ ve $acb = 0$ elde edilir.

(4) $cu_3 = uc_3$, $bw_3 = wb_3$, $b_3u_4 = u_3b_4$ ve buradan $u^{-1}c = c_3u_3^{-1}$, $w^{-1}b = b_3w_3^{-1}$, $u_3^{-1}b_3 = b_4u_4^{-1}$ olacak şekilde u_3, w_3, u_4 düzenli olmak üzere var olan $c_3, u_3, b_3, w_3, b_4, u_4 \in R$ elemanları kullanılarak

$$\alpha\gamma\beta = au^{-1}cw^{-1}bv^{-1} = ac_3u_3^{-1}w^{-1}bv^{-1} = ac_3u_3^{-1}b_3w_3^{-1}v^{-1} = ac_3b_4u_4^{-1}w_3^{-1}v^{-1}$$

elde edilir. Diğer yandan $acb = 0$ eşitliğinden başlanarak, arka arkaya R 'nin simetrik olduğu ve (4) kullanılarak

$$0 = acb = acbu_3 = acu_3b = auc_3b = ac_3bu$$

$$0 = ac_3b = ac_3bw_3 = ac_3wb_3 = ac_3b_3w$$

$$0 = ac_3b_3 = ac_3b_3u_4 = ac_3u_3b_4 = ac_3b_4u_3$$

dan $ac_3b_4 = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha\gamma\beta = ac_3b_4u_4^{-1}w_3^{-1}v^{-1} = 0$ olup Q 'nun simetrikliği ispatlanmış olur. $\square$

Değişmeli bir S halkası üzerinde bir R cebiri verildiğinde R 'nin S ile Dorroh genişlemesinin simetrik olması için gerek ve yeter koşulun S 'nin bir bölge ve R 'nin simetrik olduğu Huh vd. (2005) tarafından aşağıdaki biçimde gösterilmiştir.

Önerme 3.1.27 R değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir ve D ; R 'nin S ile Dorroh genişlemesi olsun. S bir bölge ve R simetrik ise, D simetriktir.

İspat. S bir bölge ve R simetrik olmak üzere $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2)(r_3, s_3) = 0$ olsun. Bu durumda

$$r_1r_2r_3 + s_1r_2r_3 + s_2r_1r_3 + s_3r_1r_2 + s_1s_2r_3 + s_1s_3r_2 + s_2s_3r_1 = 0 \text{ ve } s_1s_2s_3 = 0 \quad (3.9)$$

bulunur. S bir bölge olduğundan $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ veya $s_3 = 0$ olmalıdır. Bu üç durumu R 'nin simetrikliğini kullanarak ayrı ayrı inceleyelim.

1. *durum:* $s_1 = 0$ ise, (3.9) eşitliğinden $r_1r_2r_3 + s_2r_1r_3 + s_3r_1r_2 + s_2s_3r_1 = 0$ elde

edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= r_1 r_2 r_3 + s_2 r_1 r_3 + s_3 r_1 r_2 + s_2 s_3 r_1 \\
&= r_1 (r_2 + s_2) (r_3 + s_3) \\
&= r_1 (r_3 + s_3) (r_2 + s_2) \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 r_3 s_2 + r_1 s_3 r_2 + r_1 s_3 s_2 \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 r_3 s_2 + r_1 s_3 r_2 + r_1 s_3 s_2 + s_1 r_3 r_2 + s_1 r_3 s_2 + s_1 s_3 r_2
\end{aligned}$$

2. *durum:* $s_2 = 0$ ise, (3.9) eşitliğinden $r_1 r_2 r_3 + s_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 s_3 + s_1 r_2 s_3 = 0$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= r_1 r_2 r_3 + s_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 s_3 + s_1 r_2 s_3 \\
&= (r_1 + s_1) r_2 (r_3 + s_3) \\
&= (r_1 + s_1) (r_3 + s_3) r_2 \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 s_3 r_2 + s_1 r_3 r_2 + s_1 s_3 r_2 \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 s_3 r_2 + s_1 r_3 r_2 + s_1 s_3 r_2 + r_1 r_3 s_2 + r_1 s_3 s_2 + s_1 r_3 s_2
\end{aligned}$$

3. *durum:* $s_3 = 0$ ise, (3.9) eşitliğinden $r_1 r_2 r_3 + s_1 r_2 r_3 + r_1 s_2 r_3 + s_1 s_2 r_3 = 0$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= r_1 r_2 r_3 + s_1 r_2 r_3 + r_1 s_2 r_3 + s_1 s_2 r_3 \\
&= (r_1 + s_1) (r_2 + s_2) r_3 \\
&= (r_1 + s_1) r_3 (r_2 + s_2) \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 r_3 s_2 + s_1 r_3 r_2 + s_1 r_3 s_2 \\
&= r_1 r_3 r_2 + r_1 r_3 s_2 + s_1 r_3 r_2 + s_1 r_3 s_2 + r_1 s_3 r_2 + s_1 s_3 r_2 + r_1 s_3 s_2
\end{aligned}$$

olup her bir durum için $(r_1, s_1)(r_3, s_3)(r_2, s_2) = 0$ olduğundan D simetrik olur. $\square$

Değişmeli bir bölgenin kendisi ve her birebir endomorfizmasıyla çarpıkasikar genişlemesinin simetrik olduğu Huh vd. (2005) tarafından aşağıdaki şekilde kanıtlanmıştır.

Önerme 3.1.28 R bir değişmeli bölge ve σ ; R 'nin bir injektif endomorfizması olmak üzere R 'nin kendisi ve σ ile çarpıkasikar genişlemesi simetriktir.

İspat. R bir değişmeli bölge ve σ ; R 'nin bir birebir endomorfizması olmak üzere R 'nin kendisi ve σ ile çarpıkasikar genişlemesi N olsun. $i = 1, 2, 3$ için $(r_i, m_i) \in N$ olmak üzere $(r_1, m_1)(r_2, m_2)(r_3, m_3) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$r_1 r_2 r_3 = 0 \text{ ve } \sigma(r_1)\sigma(r_2)m_3 + \sigma(r_1)r_3 m_2 + r_2 r_3 m_1 = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. R bir bölge olduğundan $r_1 = 0, r_2 = 0$ veya $r_3 = 0$ değildir. Önerme 3.1.27'nin ispatına benzer olarak üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. *durum:* $r_1 = 0$ ise, (3.10)'dan $r_2 r_3 m_1 = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= (r_1 r_2 r_3, r_2 r_3 m_1) \\ &= (r_1 r_3 r_2, \sigma(r_1)\sigma(r_3)m_2 + \sigma(r_1)r_2 m_3 + r_2 r_3 m_1) \\ &= (r_1, m_1)(r_3, m_3)(r_2, m_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. *durum:* $r_2 = 0$ ise, (3.10)'dan $\sigma(r_1)r_3 m_2 = 0$ olması $\sigma(r_1) = 0, r_3 = 0$ veya $m_2 = 0$ olmasını gerektirir. Herhangi biri sağlandığı takdirde ise $(r_1, m_1)(r_3, m_3)(r_2, m_2) = 0$ elde edilir.

3. *durum:* $r_3 = 0$ ise, (3.10)'dan $\sigma(r_1)\sigma(r_2)m_3 = 0$ olması $\sigma(r_1) = 0, \sigma(r_2) = 0$ veya $m_3 = 0$ olmasını gerektirir. $\sigma(r_1) = 0$ veya $m_3 = 0$ olursa, bu durumda $(r_1, m_1)(r_3, m_3)(r_2, m_2) = 0$ elde edilir. $\sigma(r_1) \neq 0$ ve $m_3 \neq 0$ iken $\sigma(r_2) = 0$ olursa σ birebir olduğundan $r_2 = 0$ olup $(r_1, m_1)(r_3, m_3)(r_2, m_2) = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak N simetriktir. □

Yukarıdaki önermede, R halkası değişmeli inmiş bir halka ya da σ birebir olmayan bir endomorfizma olarak alınırsa, ifadenin sağlanmadığı gösteren iki örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.29 (1) D karakteristiği 0 olan bir bölge olmak üzere bileşensel çarpma işlemiyle birlikte $R = D \oplus D$ olsun. Bu durumda R bir değişmeli inmiş halka olur. $\sigma(a, b) = (b, a)$ ile tanımlı $\sigma : R \rightarrow R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. R 'nin σ ile çarpıkasikar genişlemesi N olmak üzere $((0, 1), (0, 1)), ((1, 0), (0, 1)) \in N$ için

$$((0, 1), (0, 1))((1, 0), (0, 1)) = ((0, 1)(1, 0), \sigma(0, 1)(0, 1) + (1, 0)(0, 1)) = 0$$

dır fakat

$$((1, 0), (0, 1))((0, 1), (0, 1)) = ((1, 0)(0, 1), \sigma(1, 0)(0, 1) + (0, 1)(0, 1)) = ((0, 0), (0, 2)) \neq 0$$

olup N simetrik değildir.

(2) S bir değişmeli bölge ve S üzerindeki x değişkenli polinomların halkası $R = S[x]$ olsun. $\sigma(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı birebir olmayan $\sigma : R \rightarrow R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. R 'nin σ ile çarpıkasikar genişlemesi N olsun. Bu durumda $(x, 1), (0, 1) \in N$ için $(x, 1)(0, 1) = (x.0, \sigma(x).1 + 0.1) = 0$ dır fakat $(0, 1)(x, 1) = (0.1, \sigma(0).1 + x.1) = (0, x) \neq 0$ olduğundan N simetrik değildir. (Huh vd., 2005)

Simetrik bir halka üzerine kurulan tek değişkenli polinomlar halkasının simetrik olmadığı Wang ve Wang (2006) tarafından bir örnek verilerek kanıtlanmıştır. Tanım 3.2.9'da görüleceği gibi, Eltiyeb ve Elshokry (2017) tarafından tek değişkenli polinomlar halkası simetrik olan halkalara güçlü simetrik halka adı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

Simetrik bir halkanın herhangi bir endomorfizmasına göre çarpık polinomlar halkasının simetrik olmadığı Kaynarca ve Akcin tarafından gösterilmiş ve Tanım 3.2.13'de görüleceği gibi, bu özelliğe sahip olan yeni bir halka sınıfı tanımlanmıştır. Böylece hem simetrik hem de güçlü simetrik halkalar bir endomorfizma yardımıyla genelleştirilmiştir.

3.2. Genişletilmiş Simetrik Halkalar

Son yıllarda, simetrik halka sınıfının genişlemesi olan çok sayıda yeni halka sınıfı tanımlanmıştır. Bu bölümde, tarihsel sıralamaya göre bu halka sınıflarıyla ilgili kısa bilgiler verilecek ve simetrik halkalarla ilişkilerine değinilecektir.

Tanım 3.2.1 α bir R halkasının bir endomorfizması ve $a, b, c \in R$ olsun. $abc = 0$ iken $aca\alpha(b) = 0$ (ya da $\alpha(b)ac = 0$) oluyorsa R halkası *sağ α -simetrik* (ya da *sol α -simetrik*) olarak adlandırılır. Bir halka hem sağ α -simetrik hem de sol α -simetrik ise *α -simetrik halka* olarak adlandırılır. α -simetrik halkalar α -katı halkaların bir genişletilmiş ve simetrik halkaların genişlemesi olan yeni bir halka sınıfıdır (Kwak 2007).

Kwak (2007) bu çalışmasında; α -simetrik halkaların althalkalarının α -simetrik olduğunu, herhangi bir R bölgesinin herhangi bir α endomorfizmasına göre α -simetrik olduğunu göstermiştir. Bir halkanın α -simetrik olma özelliğinin sağ ya da sol simetrik olmadığına dair örnekler vermiştir. Bir R halkasının α -katı olması için gerek ve yeter koşul olarak R 'nin sağ α -simetrik ve yarıasal bir halka ve α 'nın bir monomorfizma olduğu kanıtlamıştır. Ayrıca $R[x; \alpha]$ çarpık polinom halkası simetrik olan bir halkanın α -simetrik olduğu ifade etmiştir. Bundan başka R halkasının α -Armendariz olması durumunda $R[x; \alpha]$ 'nin simetrikliği, R 'nin α -simetrikliği, R 'nin sağ α -simetrikliği ve R 'nin simetrikliğinin denk olduğunu ispatlamıştır. R halkası α -simetrik iken $T(R, R)$ aşık genişlemesinin α -simetrik olmadığına dair örnek vermiş, halkanın inmiş ve α -simetrik olması durumunda aşık genişlemesinin α -simetrik olduğunu göstermiştir. R halkası α -katı olsa bile $T_n(R)$ üst üçgensel matris halkasının α -simetrik olmadığına dair bir örnek vermiştir. Halkanın Armendariz olması durumunda sağ α -simetriklik özelliğinin polinom halkasına taşındığı göstermiştir. Bunun dışında bölüm halkası, Dorroh genişlemesi, Laurent polinomlar halkası ve $R[x]/(x^n)$ halkasının α -simetrikliğini incelemiş ve simetrik halkalarla ilgili bilinen sonuçları, kendi teoremlerinin sonuçları olarak basitçe ifade etmiştir.

Tanım 3.2.2 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. $abc \in \text{nil}(R)$ iken $acb \in \text{nil}(R)$ oluyorsa R halkası *zayıf simetrik* (*weak symmetric*) olarak adlandırılır (Ouyang ve Chen 2010).

Ouyang ve Chen (2010) bu çalışmalarında, her simetrik halkanın zayıf simetrik olduğunu göstermiş fakat bu ifadenin karşıtının doğru olmadığına dair bir örnek vermiştir. Bir halkanın zayıf simetrikliği ile o halka üzerine kurulan üst üçgensel matris halkasının zayıf simetrikliğinin birbirine denk olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca, (α, δ) -uyumlu (compatible) halkalarla ilgili bazı özellikleri ifade ettikten sonra terslenebilir ve (α, δ) -uyumlu bir R halkasının zayıf simetrik olması için gerek ve yeter koşulun $R[x; \alpha, \delta]$ Ore genişlemesinin zayıf simetrik olması gerektiğini ispatlamıştır. Daha sonra terslenebilir bir R halkası üzerinde; R 'nin zayıf terslenebilirliğinin $R[x]$ polinomlar halkasının zayıf terslenebilirliğine denk olduğunu, R 'nin α -uyumlu olması durumunda R 'nin zayıf simetrikliğinin $R[x; \alpha]$ çarpık polinomlar halkasının zayıf simetrikliğine denk olduğunu, R 'nin δ -uyumlu olması durumunda R 'nin zayıf simetrikliğinin $R[x; \delta]$ diferensiyel polinomlar halkasının zayıf simetrikliğine denk olduğunu kanıtlamıştır. Bunun bir sonucu olarak; R 'nin bir α endomorfizması ve bir δ α -türevi için R 'nin α -katı olması durumunda zayıf simetriklik özelliğinin $R[x; \alpha, \delta]$ Ore genişlemesine taşındığını ifade etmiştir.

Ayrıca yazarlar bu çalışmada, simetrik halkaların başka genellemeleri olan halka sınıflarını şu şekilde tanıtmıştır: $abc \in \text{nil}(R)$ iken $aca(b) \in \text{nil}(R)$ oluyorsa R 'ye *zayıf α -simetrik*, $abc \in \text{nil}(R)$ iken $ac\delta(b) \in \text{nil}(R)$ oluyorsa R 'ye *zayıf δ -simetrik*, hem zayıf α -simetrik hem de zayıf δ -simetrik olan bir halkaya da *zayıf (α, δ) -simetrik* adını vermişlerdir. α -katı bir halka üzerine kurulan, köşegen bileşenleri aynı olan 3×3 tipindeki üst üçgensel matris halkasının zayıf (α, δ) -simetrik bir halka olduğunu göstermiş ve bir halkanın zayıf (α, δ) -simetriklik özelliğinin o halkanın; üst üçgensel matris halkası, aşıkâr genişlemesi, eR ve $(1-e)R$ althalkaları, bölüm halkası, polinom halkası gibi genişlemelerine taşınıp taşınmadığını incelemiştir.

Tanım 3.2.3 R birimli bir halka ve $C(R)$; R 'nin merkezi olsun. $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $bac \in C(R)$ oluyorsa R halkası *merkezi simetrik* (central symmetric) olarak adlandırılır (Kafkas vd. 2011).

Kafkas vd. (2011) bu çalışmada, simetrik halkaların merkezi simetrik olduğunu fakat bu gerektirmenin karşının doğru olmadığını bir örnek vererek göstermiş ve

hangi koşullar altında karşıtının sağlandığını ifade etmiştir. Merkezi simetrik halkalarının hangi genişlemelerinin merkezi simetrik olduğu incelenmiş aksi durumlar için örnekler verilmiştir. Ayrıca merkezi inmiş, merkezi terslenebilir ve zayıf simetrik gibi bazı halka sınıflarının bu halka sınıfıyla ilişkisi araştırılmıştır. Bundan başka merkezi simetrik halkaların 2-ilkel olduğu, karşıtının ise halkanın yarıasal olması durumunda sağlandığı kanıtlanmıştır.

Tanım 3.2.4 R bir halka olmak üzere R 'nin I, J, K idealleri verilsin. $IJK = 0$ iken $IKJ = 0$ oluyorsa R 'ye *ideal-simetrik* (*ideal-symmetric*) halka denir (Camillo vd. 2013).

Camillo vd. (2013) bu çalışmada, ideal-simetrik halka örnekleri ve bir halkanın ideal-simetrik olması için bazı karakterizasyonlar vermiştir. Yarıasal halkaların ideal-simetrik olduğunu fakat bu ifadenin karşıtının doğru olmadığını, yarıasal bir halkadan yarıasal olmayan bir minimal ideal-simetrik halka örneği inşa ederek göstermiştir. İdeal-simetrik halkaların ilişkili olduğu bazı halka sınıflarıyla ilişkisi ve halka genişlemelerinin ideal-simetrik olup olmadığı incelenmiştir. Bundan başka ideal-simetrik bir halka üzerine kurulan polinom halkasının ideal-simetrik olmadığını kanıtlamıştır. Ayrıca ideal-simetrikliğin Morita değişmez bir özellik olduğunu da göstermiştir.

Tanım 3.2.5 R bir halka $a, b \in \text{nil}(R)$ olsun. Her $c \in R$ için $abc = 0$ ($cab = 0$) iken $acb = 0$ oluyorsa R 'ye *sağ (sol) nil-simetrik* halka adı verilir (Chakraborty and Das 2014).

Chakraborty ve Das (2014) çalışmalarında, bir halkanın simetrik, sağ nil-simetrik ve sol nil-simetrik olma özelliklerinin birbirinden bağımsız olduğunu örnek vererek göstermiştir. İnmiş bir halka üzerine kurulan 3×3 tipindeki köşegen bileşenleri aynı olan üst üçgensel matris halkasının sağ (sol) nil-simetrik olduğunu fakat 4×4 tipindeki köşegen bileşenleri aynı olan üst üçgensel matris halkasının sağ (sol) nil-simetrik olmadığını ispatlamıştır. Her sağ (sol) nil-simetrik halkanın nil-yarıdeğişmeli olduğunu göstermiş ve bu ifadenin karşıtının doğru olmadığına dair örnek vermiştir. Nil-simetrik bir halkanın bazı genişlemelerinin nil-simetrik olup olmadığını inceleyerek,

yanırsal bir halkada nil-simetrik halkaları diğer halka sınıflarıyla karakterize etmiştir. Ayrıca nil-simetrik bir halka üzerine kurulan polinomlar halkasının nil-simetrik olmadığını ispatlanmıştır.

Tanım 3.2.6 R bir halka olsun. Her $a, b, c \in \text{nil}R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *zayıf sağ nil-simetrik* olarak adlandırılır. Eğer $cab = 0$ iken $acb = 0$ özelliği sağlanırsa R 'ye *zayıf sol nil-simetrik halka* denir (Kim vd. 2016).

Kim vd. (2016)'da, sağ (sol) nil-simetrik halkaların zayıf sağ (sol) nil-simetrik olduğu fakat tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca zayıf nil-simetriklik özelliğinin sağ-sol simetrik olmadığını gösteren örnekler verilmiştir. Ayrıca zayıf sağ (sol) nil-simetrik bir halkada alt ve üst nilradikallerin çakışık olduğu kanıtlanmıştır. Bundan başka zayıf sağ (sol) nil-simetrik halkaların özellikleri, genişlemeleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri incelenmiştir.

Aşağıda kısaca tanımları verilen genişletilmiş simetrik halka sınıflarının özellikleri, karakterizasyonları, diğer halka sınıflarıyla ilişkileri ve genişlemelerinin de aynı yapıya sahip olup olmadığı, belirtilen kaynaklarda incelenmiştir.

Tanım 3.2.7 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. $abc = 0$ iken sırasıyla $h, k \geq 1$ için $a^h c b^k = 0$ ve $s, t \geq 1$ için $b^s a c^t = 0$ oluyorsa, R halkası sırasıyla *sağ H -simetrik* ve *sol H -simetrik* olarak adlandırılır. Bir halka hem sağ hem de sol H -simetrik ise, *H -simetrik* olarak adlandırılır. Bundan başka, $abc = 0$ iken sırasıyla $h, k, l \geq 1$ için $a^h c^k b^l = 0$ ve $s, t, u \geq 1$ için $b^s a^t c^u = 0$ oluyorsa, bu halka sırasıyla *sağ π -simetrik* ve *sol π -simetrik* olarak adlandırılır. Bir halka hem sağ π -simetrik hem de sol π -simetrik oluyorsa *π -simetrik* olarak adlandırılır. (Jung vd.2014)

Tanım 3.2.8 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. $abc = 1$ iken $acb = 1$ oluyorsa, R 'ye *birim simetrik* (*identity symmetric*) adı verilir. (Lee 2015)

Tanım 3.2.9 R bir halka olmak üzere $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x)h(x) = 0$ iken $f(x)h(x)g(x) = 0$ oluyorsa R halkası *güçlü simetrik* (*strongly symmetric*) olarak adlandırılır. (Eltiyeb and Elshokry 2017)

Tanım 3.2.10 e bir R halkasının bir eşgüçlü elemanı olmak üzere $abc = 0$ iken $acbe = 0$ ($aceb = 0$) oluyorsa, R halkası (*güçlü*) e -*simetrik* olarak adlandırılır. (Meng ve Wei, 2018)

Tanım 3.2.11 R bir halka ve $J(R)$, R 'nin Jacobson radikali olmak üzere $a, b, c \in R$ olsun. $abc = 0$ iken $bac \in J(R)$ oluyorsa R halkası J -*simetrik* olarak adlandırılır. (Çalcı vd. 2019)

Tanım 3.2.12 R bir halka $P(R)$, R 'nin güçlü sıfırgüçlü elemanlarının kümesi olmak üzere $a, b, c \in R$ olsun. $abc = 0$ iken $bac \in P(R)$ oluyorsa R halkası P -*simetrik* olarak adlandırılır. (Roy ve Subedi 2023)

Tanım 3.2.13 R bir halka ve $R[x; \sigma]$ bu halkanın skew polinomlar halkası olmak üzere, eğer bu $R[x; \sigma]$ halkası simetrik bir halka ise bu halkaya *strongly σ simetrik halka* denir. (Kaynarca ve Akcin -)

4. KAYNAKLAR

- Ali E, Elshokry A, 2019, On Strongly Symmetric Rings, International Journal of Mathematics and its Applications 5(2017), 61–65.
- Anderson D D, Camillo V, 1999, Semigroups and Rings Whose Zero Products Commute, Comm. Algebra, 27(6), 2847–2852.
- Artin E, 1927, Beweis des Allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., Springer-Verlag, 5, 353–363.
- Bell H E, 1970, Near-Rings in Which Each Element is a Power of Itself, Bull. Austral. Math. Soc., 2, 363–368.
- Birkenmeier G F, Heartherly H E, Lee E K, Completely Prime Ideals and Associated Radicals, Proceedings of the Biennial Ohio State-Denison Conference, 1992, Singapore, 102–129.
- Camillo V, Kwak T K, Lee Y, 2013, Ideal-Symmetric and Semiprime Rings, Communications in Algebra, 41(12), 4504–4519.
- Cohn P M, 1999, Reversible Rings, Bull. London Math. Soc., 31(6), 641–648.
- Çalıcı T P, Halicioğlu S, Harmancı A, 2019, Symmetric Property of Rings with Respect to the Jacobson Radical, Commun. Korean Math. Soc., 34, 43–54.
- Chakraborty U S, Das K, 2014, On Nil-Symmetric Rings, Journal of Mathematics, 7, Article number 483784.
- Dummit, D S, Foote R M, 2004, Abstract Algebra, Wiley, 932p, United States.

- Feller E H, 1958, Properties of Primary Noncommutative Rings, University of Wisconsin.
- Fraenkel A, 1914, U"ber die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, Jour. f"ur die Reine und Angew. Math. 139–145, SUB, 176p.
- Goodearl K R, Warfield Jr R B, 1989, Cambridge University, An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, 303p, New York.
- Habeb J M, 1990, A Note On Zero Commutative and Duo Rings, Math. J. Okayama Univ., 32, 73–76.
- Hong C Y, Kim N K, Kwak T K, 2000, Ore Extensions of Baer and P.P.-Rings, Journal of Pure and Applied Algebra, 151(3), 215–226.
- Huh C, Kim H K, Kim N K, Lee Y, 2005, Basic Examples and Extensions of Symmetric Rings, Journal of Pure and Applied Algebra, 202, 154–167.
- Hungerford T W, 1974, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 502p, New York.
- Jung D W, Kwak T K, Lee M J, Lee Y, 2014, Ring properties related to symmetric ring, International Journal of Algebra and Computation, 24(7), 935–967.
- Kafkas G, "Ung"or B, Halicioğlu S, Harmancı A, 2011, Generalized Symmetric Rings, Algebra and Discrete Mathematics , 12(2), 72–84.
- Kaynarca F, Akcin H M T, 2018, On Symmetric Property of Skew Polynomial Rings.
- Kim N K, Lee Y, 2003, Extension of Reversible Rings, Journal of Pure and Applied

Algebra, 185, 207–223.

Kleiner I, 1998, From Numbers to Rings: The Early History of Ring Theory, Elemente der Mathematik, 18–35, Springer-Verlag, 53p.

Krempa J, Niewiecherzal D, 1977, Rings in Which Annihilators are Ideals and Their Application to Semigroup Rings, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci., 25, 851–866.

Krempa J, 1996, Some Examples of Reduced Rings, Algebra Colloq., 3(4), 289–300.

Krull W, 1928, Zweiseitige Ideale in nichtkommutativen Bereichen, Math. Zeit. vol. 28p., Springer-Verlag, 481–503.

Kwak T K, 2007, Extensions of Extended Symmetric Rings, Bull. Korean Math. Soc., 4, 777–788.

Lambek J, 1971, On the Representation of Modules by Sheaves of Factor Modules, Canad. Math. Bull., 14, 359–368.

Lam T Y, 2001, A First Course in Noncommutative Rings, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 385p, New York.

Lee Y, 2015, On Generalizations of Commutativity, Communications in Algebra, 43(4), 1687–1697.

Malik D S, Mordeson J N, Sen M K, 2007, Fundamentals of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies Inc., 636p, New York.

Marks G, 2002, Reversible and Symmetric Rings, Journal of Pure and Applied Algebra, 174, 311–3018.

- Marks G, 2003, A Taxonomy of 2-Primal Rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 266, 494–520.
- Mason G, 1981, Reflexive Ideals, *Communications in Algebra*, 9(17) , 1709–1724.
- Meng F, Wei J, 2018, Some properties of e -symmetric rings, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 2389–2399.
- Ouyang L, Chen Huanyin, 2010, On Weak Symmetric Rings, *Communications in Algebra*, 38(2), 697–713.
- Narbonne L M, 1982, Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les idaux principaux sont idempotents, *Proceedings of the 106th National Congress of Learned Societies*, Paris.
- Noether E, 1921, Idealtheorie in Ringbereichen [The Theory of Ideals in Ring Domains], *Mathematische Annalen* (in German), Springer-Verlag, 1, 24–66.
- Noether E, 1927, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern [Abstract Structure of the Theory of Ideals in Algebraic Number Fields], *Mathematische Annalen* (in German), Springer Verlag, 1, 26–61.
- Rege M B, Chhawchharia S, 1997, Armendariz Rings, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 73, 14–17.
- Roy D, Subedi T, 2023, Symmetricity of Rings Relative to the Prime Radical, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 41, 1–6.
- Shin G, 1973, Prime Ideals and Sheaf Representation of a Pseudo Symmetric Rings, *Transactions of the American Mathematical Society*, 184, 43–60.

Sono M, 1918, On Congruences I–IV, Mem. Coll. Sci., Kyoto.

Steinitz E, 1910, Algebraische Theorie der Körper, Journal Für die Reine und Angewandte Mathematik, De Gruyter , 150p, Berlin.

Tuganbaev A A (Ed.), 1998, Semidistributive Modules and Rings, Springer Science Business Media, 367p.

Xue W, 1991, On strongly Right Bounded Finite Rings, Bull. Austral. Math. Soc., 44, 353–355.

Xue W, 1992, Structure of Minimal Noncommutative Duo Rings and Minimal Strongly Bounded Non-Duo Rings, Communications of Algebra, 20(9), 2777–2788.