

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA TERS
STURM LİOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut Aylin YILMAZ
(101121118)

Tez Danışmanı : Yrd. Doç.Dr. Münevver TUZ

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA TERS STURM LİOUVILLE
PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Umut Aylin YILMAZ
(101121118)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :21.01.2013

Tezin Savunulduğu Tarih :11.02.2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç.Dr. Münevver TUZ
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI
Yrd. Doç.Dr. Ünal İÇ

ŞUBAT -2013

ÖNSÖZ

Çalışmamı hazırlamamda bana her türlü yardımda bulunan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Münevver Tuz'a, bilgisini ve tecrübesini benden esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya ve de her zaman yanımda olan, benden hiçbir desteğini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal Baş'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Umut Aylin Yılmaz

Elazığ-2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
2. SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA SÜREKSİZ TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ	8
2.1. Öz fonksiyonların Açılımı	8
2.2. Ortogonallik.....	26
3. SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	33
SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42

ÖZET

SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde sıkça kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde süreksiz noktalara sahip Sturm Liouville problemi ele alınmıştır. Süreksiz ve simetrik potansiyel ile verilen Ters Sturm Liouville problemine ait özdeğerler, özfonksiyonlar, normlaştırılmış sayılar ve ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Üçüncü bölümde sonlu bir aralıkta simetrik potansiyel durumunda Ters Sturm Liouville probleminin çözümü incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters problemi, Asimptotik formül, Simetrik potansiyel, Spektral analiz, Özfonksiyon, Tam fonksiyon, Normlaştırıcı sayılar.

SUMMARY

THE INVERSE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH SYMMETRIC POTENTIALS

This study consists of three chapters. In the first chapter, some basic definitions and theories frequently used in spektral theory of differential operators are presented.

In the second chapter, we deal with the Sturm Liouville problem which has discontinuous points. Asymptotical formulas are obtained for eigenvalues and eigenfunctions, normalized numbers to the Sturm Liouville problem with symmetric discontinuous and symmetric potential.

The last chapter, inverse Sturm Liouville problem's solution is examined for finite interval with symmetric potential.

Keyword. Inverse asymptotic formula; symmetric potential; spectral analysis; eigenfunction; normalized numbers.

1.GİRİŞ

Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi v.b.) Lineer cebir problemleri ve Titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli olarak faydalanan bilim adamı ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Tüm bunların sonucu olarak önce ℓ_2 uzayı daha sonra ise genel Hilbert uzayı tanımlanmıştır. Matematikte ℓ_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer Self-adjoint operatörler teorisinin gelişimi hızlanmıştır. XIX. ve XX. yüzyıllarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir, denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir. Discret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Singüler operatörler için spektral teori Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve Self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm Self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm–Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü verilmiştir.

Ters Sturm-Liouville problemi öncelikle bir model problemidir. Genel olarak bir ters problemde, bir salınım sisteminin frekansları incelenerek, bu sistemin bazı fiziksel özellikleri hakkında fikir elde edilebilir.

Bu problemlerin en az dört farklı versiyonu vardır. En iyi bilineni Gelfand-Levitan tarafından çalışılanıdır ki, bu çalışmada potansiyel ve sınır şartları, spektral fonksiyon tarafından tek olarak tanımlanır. Bu durum ayrıca, Marchenko [9], Krein [6] ve Zikov [10] tarafından da ele alınmıştır.

İkinci versiyonda, potansiyel ve sınır şartları iki spektra tarafından tek olarak tanımlanır. Bu durum Marchenko [9], Levitan [3], Gasymov, Levitan [8] ve Zikov [10] tarafından gösterilmiştir. Üçüncü Versiyonda potansiyel, sınır şartları ve iki spektra tarafından tek olarak tanımlanır. Bu durum da Borg [1], Levinson [7] ve Hochstadt [5] tarafından çalışılmıştır.

Son durumda Borg [1], Levinson [7] ve Hochstadt [5], sınır şartları ve bir spektrum verilirse, potansiyelin çift fonksiyon olduğunu ve aralığın ortası civarında tek olarak tanımlandığını göstermişlerdir. İlk varlık sonucunu bulan Borg, sınır koşulları sabit ve spektrum ℓ_2 uzayında pertürbe edilmiş özdeğerleri veren bir simetrik potansiyelin mevcut olduğu göstermiştir. Sonraki varlık sonuçları ise Gelfand ve Levitan'ın tekniklerine dayanır. Gelfand ve Levitan, regüler Sturm-Liouville operatörü için gerek ve yeter koşulları vermiştir. Krein bu durumu geliştirerek mutlak bir fonksiyonun diferensiyellenebilme özelliğini de göz önüne almıştır. Bu teori daha sonra Marchenko tarafından Self-adjoint olmayan operatörlere genişletilmiştir. Marchenko'nun tekniğini kullanarak Zikov özdeğerler ve normlaştırıcı sabitler için ayrı ayrı gerek ve yeter koşullar vermiştir.

Diğer taraftan verilen aralıkta süreksizliğe sahip sınır değer problemleri matematik, mekanik, fizik ve jeofizik gibi bilim dallarında sıklıkla karşımıza çıkar. Süreksizliğin varlığı operatörlerin incelenmesinde temel niteliksel gelişmeler sağlamıştır. Süreksizliğe sahip sınır değer problemleri için düz ve ters problemlerin çeşitli formülasyonları çalışmalarda ele alınmıştır.

Willis, sadece denklemi değil her iki sınır koşulunu da spektral parametreye bağlı olduğu aralıkta süreksizliğe sahip Sturm-Liouville problemini ele almıştır. Bu probleme karşılık gelen operatör tanımlanmış, bu operatör yardımı ile problemin spektral özellikleri araştırılmıştır.

Ters Sturm-Liouville problemlerini sürekli simetrik potansiyellerle çalışan Hochstadt ve Hald olmuştur.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin problemine **Başlangıç Değer Problemi** denir. Verilen şartlara da **Başlangıç Değer Şartları** denir.

$$y''+2y'=e^x \quad y(\pi)=1, \quad y'(\pi)=2$$

Tanım 1.1.2. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin problemine **Sınır Değer Problemi** denir. Verilen şartlara da **Sınır Değer Şartları** denir.

$$y''+2y'=e^x \quad y(0)=1, \quad y(1)=1$$

iki koşulda $x=0$ ve $x=1$ farklı değerlerinde verilmiştir.

Tanım 1.1.3. Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşüme **Operatör** denir.

Tanım 1.1.4. A sınırlı lineer bir operatör ve x herhangi bir topolojik uzay olsun. $Ax = \lambda x$ eşitliğinde $x \neq 0$ çözümü için elde edilen λ değerlerine A 'nın bir **Özdeğeri** ve x 'e de bir **Özfonksiyon** denir.

Tanım 1.1.5. L herhangi bir elemanlar cümlesi üzerinde tanımlanmış bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y , L operatörünün özfonksiyonu, λ ise özdeğeri olsun.

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad x \in [a, b]$$

şeklinde tanımlı operatöre **Sturm-Liouville operatörü** denir.

Tanım 1.1.6. Her biri $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonların çarpımı,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

şeklindedir. Bir f fonksiyonunun normu:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

şeklindedir. Eğer $\|f\| = 1$ ise $f(x)$ fonksiyonu “**Normalize**” olmuş bir fonksiyondur.

Tanım 1.1.7. $f(x)$ fonksiyonu $(-L, L)$ aralığında tanımlanmış $2L$ periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun. $f(x)$ ’in **Fourier Serisi** veya **Fourier açılımı**;

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

serisinden ibarettir. Burada a_n ve b_n Fourier katsayıları;

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak verilir.

Tanım 1.1.8. $-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y$

diferensiyel denklemi ile,

$$y'(a)\cos\alpha + y(a)\sin\alpha = 0$$

$$y'(b)\cos\beta + y(b)\sin\beta = 0$$

sınır şartları birlikte göz önüne alınırsa, bu probleme **Sturm-Liouville problemi** denir.

Tanım 1.1.9 $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunun her noktasında diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında **Analitik fonksiyon** denir.

Tanım 1.1.10. Kompleks düzlemin her noktasında $f(z)$ fonksiyonu analitikse $f(z)$ fonksiyonuna **Tam fonksiyon** denir.

Tanım 1.1.11. (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna **Düzgün yakınsaktır**

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 'dir.

Teorem 1.1.1.(Rezidü Teoremi): a_k ' lar bir C bölgesinde kutup yerleri olmak üzere

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}_{z=z_k} z f(z)$$

dir. Ayrıca

$$\operatorname{Re} z f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} f(z)(z - a_i)^k \right]_{z=a_i}$$

dir.

Tanım 1.1.12. $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden oluşan $\sum |a_k|$ yakınsak ise $\sum a_k$ serisine **Mutlak yakınsak** denir.

Tanım 1.1.13. λ sayısal bir parametre $f(t)$ ve $K(t, s)$ bilinen fonksiyonlar, $x(t)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere, daralma dönüşümü prensibi yardımıyla ikinci çeşit homojen olmayan

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(x, t)x(s)ds + f(t) \quad t \in a, b$$

integraline **lineer Fredholm integral denklemi** denir.

Tanım 1.1.14. $x(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds + f(t)$ şeklindeki integraline ikinci çeşit

Volterra integral denklemi denir.

Tanım 1.1.15. V bir iç çarpım uzayı, $x, y \in V$ olsun. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

şeklinde tanımlı eşitsizliğe **Cauchy-Schwarz eşitsizliği** denir.

Teorem 1.1.2.(Cauchy İntegral Teoremi): $f(x)$ fonksiyonu G bölgesinde ve G 'nin sınırı olan Γ eğrisi üzerinde birebir ve analitik fonksiyon olduğunda,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

dır.

Teorem 1.1.3.(Açılım Teoremi): Sürekli $f(x)$ fonksiyonu için eğer

$$\sum_{n=0}^x a_n V_n(x) \quad , \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x) V_n(x) dx$$

serisi $0, \pi$ aralığında düzgün yakınsaksa

$$f(x) = \sum_{n=0}^x a_n V_n(x)$$

dir.

Tanım 1.1.16. (Cauchy İntegral Formülü): B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı çevre olsun. Eğer a , γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B 'de analitikse

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

2. SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA SÜREKSİZ TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu bölümde, mutlak sürekli fonksiyonların, iki süreksizlik noktasına sahip Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonları açısından genişletilebileceği gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlar, süreksizlik ve simetrik potansiyel ile verilen Ters Sturm-Liouville probleminin süreksizliğini ortaya koyar..

2.1. Özfonksiyonların Açılımı

Teorem 2.1.1.

$$-u'' + q(x)u = \lambda x \quad (2.1.1)$$

$$hu(0) - u'(0) = 0 \quad hu(\pi) + u'(\pi) = 0 \quad (2.1.2)$$

Özdeğer problemini göz önüne alalım. $0 \leq x \leq \pi$ olup $x = d$ ve $x = \pi - d$ simetrik süreksiz noktalarında

$$u(d+) = au(d-), \quad u'(d+) = a^{-1}u'(d-) + bu(d-) \quad (2.1.3)$$

$$u((\pi - d)-) = au((\pi - d)+), \quad u'((\pi - d)+) - bu((\pi - d)+) \quad (2.1.4)$$

simetrik sıçrama şartlarını sağlasın. Burada $(|a-1| + |b| > 0$ ve $0 \leq d < \pi/2)$ dir. Ayrıca özdeğer probleminde u, q, λ, h, a, b yerine $\tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{\lambda}, \tilde{h}, \tilde{a}, \tilde{b}$ alalım. $q(x)$ ve $\tilde{q}(x)$ integrallenebilir ve $0, \pi$ aralığında hemen hemen her yerde $q(x) = q(\pi - x)$ ve $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$ olsun. λ_j ve $\tilde{\lambda}_j$ sırasıyla (2.1.1) ve (2.1.2) özdeğer probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ ise bu taktirde $0, \pi$ aralığında hemen hemen her yerde $a = \tilde{a}, b = \tilde{b}, d = \tilde{d}, h = \tilde{h}$ ve $q = \tilde{q}$ dir.

İspat. u fonksiyonu, (2.1.1), (2.1.3) ve (2.1.4) probleminin $u(0) = 1$ ve $u'(0) = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonu olsun. $x = d$ ve $x = \pi - d$ süreksizlik noktalarında u tanımlı değildir. Çözümünü bulmak ve türevlerini hesaplayabilmek için u 'nun λ ya bağlı $\frac{1}{2}$. dereceden tam fonksiyon olduğunu

gösterelim. Wronskian'ı $\omega(\lambda) = -u'(\pi) - hu(\pi)$ şeklinde tanımlayalım. Bunun kökleri reel ve basittir.

u fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir. (Hald 23 ,Willis 19 , 20).

$$u(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q(t) u(t) dt$$

dir. $0 \leq x < d$ için $u = u_1$, $d < x < \pi - d$ için $u = u_2$, $\pi - d < x \leq \pi$ için $u = u_3$ olsun. u_1 ikinci türden Volterra integral denklemini sağlar. (2.1.1) denkleminde $u = u_1$ yazılıp, $G(x, t)$ fonksiyonuyla çarpılıp ve 0'dan x 'e kadar integral alınarak bu integral denklemi bulunur. Başlangıç koşullarını ve kısmi integrasyonu kullanarak

$$hG(x, 0) - G_t(x, 0)$$

ve

$$-u_1'(x)G(x, x) + u_1(x)G_t(x, x) - \int_0^x G_{tt} u_1 dt + \int_0^x G q u_1 dt = \int_0^x \lambda G u_1 dt$$

elde edilir. $G(x, x) = 0$, $G_t(x, x) = -1$ ve $-G_{tt} = \lambda G$ problemi çözülerek u_1 için Volterra integral denklemi elde edilir.

$$u_1(x) = g_1(x) + \int_0^x G_{11}(x, t) q(t) u_1(t) dt \quad (0 \leq x < d) \quad (2.1.5)$$

$$u_2(x) = g_2(x) + \int_0^d G_{21}(x, t) q(t) u_1(t) dt + \int_d^x G_{22}(x, t) q(t) u_2(t) dt \quad (d < x < \pi - d) \quad (2.1.6)$$

$$u_3(x) = g_3(x) + \int_0^d G_{31}(x, t) q(t) u_1(t) dt + \int_d^{\pi-d} G_{32}(x, t) q(t) u_2(t) dt + \int_{\pi-d}^x G_{33}(x, t) q(t) u_3(t) dt \quad (\pi - d < x \leq \pi) \quad (2.1.7)$$

olup burada,

$$g_1(x) = \cos kx + \frac{h}{k} \sin kx \quad (2.1.8)$$

$$\begin{aligned} g_2(x) = & a \left[\cos kd + \frac{h}{k} \sin kd \right] \cos k(x-d) \\ & + a^{-1} \left[-\sin kd + \frac{h}{k} \cos kd \right] \sin k(x-d) \\ & + \frac{b}{k} \left[\cos kd + \frac{h}{k} \sin kd \right] \sin k(x-d) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned} g_3(x) = & a^{-1} \left[a \cos k(\pi-2d) \cos kd - a^{-1} \sin k(\pi-2d) \sin kd \right. \\ & + \frac{b}{k} \sin k(\pi-2d) \cos kd + \frac{h}{k} a^{-1} \sin k(\pi-2d) \cos kd \\ & + a \cos k(\pi-2d) \sin kd + \frac{b}{k} \sin k(\pi-2d) \sin kd \left. \right] \cos k(x-\pi+d) \\ & + a \left[-a \sin k(\pi-2d) \cos kd - a^{-1} \cos k(\pi-2d) \sin kd \right. \\ & + \frac{b}{k} \cos k(\pi-2d) \cos kd + \frac{h}{k} a^{-1} \cos k(\pi-2d) \cos kd \\ & - a \sin k(\pi-2d) \sin kd + \frac{b}{k} \cos k(\pi-2d) \sin kd \left. \right] \sin k(x-\pi+d) \\ & + \frac{b}{k} \left[a \cos k(\pi-2d) \cos kd - a^{-1} \sin k(\pi-2d) \sin kd \right. \\ & + \frac{b}{k} \sin k(\pi-2d) \cos kd + \frac{h}{k} a^{-1} \sin k(\pi-2d) \cos kd \\ & + a \cos k(\pi-2d) \sin kd + \frac{b}{k} \sin k(\pi-2d) \sin kd \left. \right] \sin k(x-\pi+d) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ve

$$G_{11}(x,t) = G_{22}(x,t) = G_{33}(x,t) = \frac{\sin k(x-t)}{k} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} G_{21}(x,t) = & \frac{1}{k} a \sin k(d-t) \cos k(x-d) \\ & + a^{-1} \cos k(d-t) \sin k(x-d) \\ & + \frac{b}{k} \sin k(d-t) \sin k(x-d) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$G_{31}(x,t) = \frac{1}{k} a^{-1} a \cos k(\pi-2d) \sin k(d-t)$$

$$\begin{aligned}
& +a^{-1} \sin k(\pi - 2d) \cos k(d - t) \\
& + \frac{b}{k} \sin k(\pi - 2d) \sin k(d - t) \cos k(x - \pi + d) \\
& +a -a \sin k(\pi - 2d) \sin k(d - t) \\
& +a^{-1} \cos k(\pi - 2d) \cos k(d - t) \\
& + \frac{b}{k} \cos k(\pi - 2d) \sin k(d - t) \sin(x - \pi + d) \\
& + \frac{b}{k} a \cos k(\pi - 2d) \sin k(d - t) \\
& +a^{-1} \sin k(\pi - 2d) \cos k(d - t) \\
& + \frac{b}{k} \sin k(\pi - 2d) \sin k(d - t) \sin k(x - \pi + d)
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

$$\begin{aligned}
G_{32}(x, t) &= \frac{1}{k} a^{-1} \sin k(\pi - d - t) \cos k(x - \pi + d) \\
& +a \cos k(\pi - d - t) \sin k(x - \pi + d) \\
& + \frac{b}{k} \sin k(\pi - d - t) \sin k(x - \pi + d)
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

olup böylece $u(x)$ 'i ,

$$u(x) = g(x) + \int_0^x G(x, t) q(t) u(t) dt \tag{2.1.15}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $[0, d, d, \pi - d, \pi - d, \pi]$, $g_i(x)$ 'in ($i = 1, 2, 3$) başlangıç değerleri $\varphi_i(x)$ 'i aşağıdaki şekilde ele alalım;

$$\varphi_1(x) = \cos kx \quad (0 \leq x < d) \tag{2.1.16}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{A}{2} \cos kx + \alpha \cos k(x - 2d) \quad (d < x < \pi - d) \tag{2.1.17}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{A^2}{4} \cos kx + \alpha \cos k(x-2d) - \alpha \cos k(x-2\pi+2d) - \alpha^2 \cos k(x-2\pi+4d) \quad (2.1.18)$$

$$(\pi-d < x \leq \pi)$$

Burada $|\alpha| < 1$ olmak üzere $A = (a + a^{-1})$ ve $\alpha = (a - a^{-1}) / (a + a^{-1})$ 'dir. $(0, d), (d, \pi-d), (\pi-d, \pi)$ aralıklarında $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ olur. Ayrıca $q \equiv 0$ olduğunda $g(x)$, (2.1.1), (2.1.3), (2.1.4)'ü sağlar.

Lemma 2.1.2.

$$u(x) - \int_a^x G(x, t) q(t) u(t) dt = f(x) \quad (2.1.19)$$

integral denklemini göz önüne alalım. Burada f ve G sürekli, q integrallenebilirdir. Burada,

$$M(x) = \max_{a \leq t \leq x} |f(t)|, \quad L(x) = \max_{a \leq t \leq x} |G(x, t)| \quad \text{ve} \quad \rho(x) = \int_a^x |q(t)| dt$$

olmak üzere sürekli bir u çözümüne sahiptir.

$$|u(x)| \leq M(x) e^{L(x)\rho(x)} \quad (2.1.20)$$

dir.

Lemma 2.1.3. u_1, u_2, u_3 fonksiyonları sırasıyla (2.1.5), (2.1.6) ve (2.1.7) denklemlerinin çözümleri olsunlar. $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\tau$, $c = \max(|b|, |h|, \int_0^\pi |q(t)| dt)$ ve $A = a + a^{-1}$ eşitliklerini alalım. Bu takdirde u_1, u_2 ve u_3 $\frac{1}{2}$. dereceden λ 'nın tam fonksiyonudur. Böylece,

$$|u_1(x, \lambda)| \leq (1 + c\pi) e^{cx + |\tau|x} \quad (0 \leq x < d) \quad (2.1.21)$$

$$|u_2(x, \lambda)| \leq A(1+c\pi)^3 e^{cx+|\tau|x} \quad (d < x < \pi - d) \quad (2.1.22)$$

$$|u_3(x, \lambda)| \leq A^2(1+c\pi)^5 e^{cx+|\tau|x} \quad (\pi - d < x \leq \pi) \quad (2.1.23)$$

şeklinde olur. Willis 19

Lemma 2.1.4. u_1, u_2, u_3 fonksiyonları sırasıyla (2.1.5), (2.1.6) ve (2.1.7) integral denklemlerinin çözümleri olsunlar. $k = \sqrt{\lambda} = \sigma + i\tau$, $A = a + a^{-1}$ ve

$c = \max(|b|, |h|, \int_0^\pi |q| dt)$ eşitliklerini alalım. Eğer $|k| \geq 3c$ ise, bu takdirde

$$|u_1(x)| \leq 2e^{|\tau|x} \quad (2.1.24)$$

$$|u_1(x) - \varphi_1(x)| \leq 3 \frac{c}{|k|} e^{|\tau|x} \quad (0 \leq x < d) \quad (2.1.25)$$

$$|u_2(x)| \leq 3Ae^{|\tau|x} \quad (2.1.26)$$

$$|u_2(x) - \varphi_2(x)| \leq 5 \frac{c}{|k|} Ae^{|\tau|x} \quad (2.1.27)$$

$$|u_2'(x) - \varphi_2'(x)| \leq 5cAe^{|\tau|x} \quad (d < x < \pi - d) \quad (2.1.28)$$

$$|u_3(x)| \leq 11A^2 e^{|\tau|x} \quad (2.1.29)$$

$$|u_3(x) - \varphi_3(x)| \leq 28 \frac{c}{|k|} A^2 e^{|\tau|x} \quad (2.1.30)$$

$$|u_3'(x) - \varphi_3'(x)| \leq 24cA^2 e^{|\tau|x} \quad (\pi - d < x \leq \pi) \quad (2.1.31)$$

olur.

Lemma 2.1.4'ün ispatı, Lemma 2.1.1 ile Lemma 2.1.3'ün sonuçlarından faydalanılarak özfonksiyonlar için Volterra integral denklemi kullanılarak elde edilir. Bu yaklaşım ilk olarak Willis 19, Hald 23, Borg 17 tarafından kullanılmıştır.

Trigonometrik eşitsizlikten faydalanılarak,

$$|\cos kx|, |\sin kx|, \left| \frac{\sin kx}{kx} \right| \leq e^{|\tau|x} \quad (2.1.32)$$

Willis (2.1.32) ve (2.1.30)'u kullanarak,

$$\int_0^d |q(t)| \leq \int_0^x |q(t)| \leq c \quad (2.1.33)$$

ve

$$\int_{\pi-d}^{\pi} |q(t)| \leq \int_0^{\pi} |q(t)| \leq c \quad (2.1.34)$$

hesaplamalarını yapmıştır. Ayrıca simetrik problem için,

$$\int_0^{d_1} |q(t)| = \int_{d_2}^{\pi} |q(t)| \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |q(t)| \leq \frac{1}{2} c \quad (2.1.35)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$|u_3(x)| \leq 5A^2 e^{|\tau|x} \quad (2.1.36)$$

$$|u_3(x) - \varphi_3(x)| \leq 10 \frac{|c|}{|k|} A^2 e^{|\tau|x} \quad (2.1.37)$$

$$|u_3'(x) - \varphi_3'(x)| \leq 9cA^2 e^{|\tau|x} \quad (2.1.38)$$

elde edilir.

Lemma 2.1.5. u fonksiyonu, (2.1.1) , (2.1.3) , (2.1.4) denkleminin çözümü olsun ayrıca $u(0)=1, u'(0)=h$ ve $\omega(\lambda)=-u'(\pi)-hu(\pi)$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde ω fonksiyonu, $\frac{1}{2}$.dereceden λ için bir tam fonksiyondur ayrıca kökleri basit ve reeldir.

$$\bar{\alpha} = 2|\alpha| + |\alpha^2| \quad \text{ve} \quad k = \sqrt{\lambda} = \sigma + i\tau \quad \text{olsun.} \quad \text{Eğer} \quad \bar{\alpha} < 1,$$

$$n > \max (1 + \bar{\alpha}) / (1 - \bar{\alpha}), (840c) / (1 - \bar{\alpha}) \quad \text{ise} \quad c = \max(|b|, |h|, \int_0^{\pi} |g| dt) \quad \text{olup bu takdirde}$$

Γ_n çevresi üzerinde tüm λ noktaları için

$$|\omega(\lambda)| \geq \frac{A^2 |k|}{24} e^{|\tau|/\pi} (1 - \bar{\alpha}) \quad (2.1.39)$$

elde edilir. Burada $|\sqrt{\lambda_n} - n| < \frac{1}{2}$ dir.

Lemma 2.1.6. u fonksiyonu , (2.1.1) , (2.1.4) probleminin çözümü olsun. Burada $u(0)=1$ ve $u'(0)=h$ 'dır. $\lambda = k^2$ ve φ , (2.1.16) ve (2.1.18) denkleminin 1. dereceden terimleri olmak üzere u fonksiyonunu

$$u(x, k) = \varphi(x, k^2) + \int_0^x G(x, t) \cos ktdt \quad (2.1.40)$$

şeklinde ifade edebiliriz. $G(x, t)$ sınırlı bir fonksiyondur. Öyle ki eğer $t < 0$ ve $t > x$ ise $G(x, t) = 0$ dir.

Teorem 2.1.7. $0 < x < \pi$ olmak üzere

$$-u'' + q(x) = \lambda u \quad (2.1.1)$$

$$hu(0) - u'(0) = 0 \quad hu(\pi) + u'(\pi) = 0 \quad (2.1.2)$$

simetrik sınır koşullarını sağlayan özdeğer problemini göz önüne alalım. $x = d_1 = d$ ve

$x = d_2 = \pi - d, 0 < d_1 < \frac{\pi}{2}$ iki simetrik süreksizliğinde

$$u(d_1+) = au(d_1-), \quad u'(d_1+) = a^{-1}u'(d_1-) + bu(d_1-) \quad (2.1.42)$$

$$u(d_2-) = au(d_2+), \quad u'(d_2-) = a^{-1}u'(d_2+) - bu(d_2+) \quad (2.1.43)$$

şartlarını sağlasın.

Burada $q, 0 \leq x \leq \pi, a > 0$ ve $|a-1| + |b| > 0$ olmak üzere integrallenebilirdir.

$A = a + a^{-1}$, $\alpha = (a - a^{-1}) / (a + a^{-1})$, $\bar{\alpha} = 2|\alpha| + |\alpha^2| < 1$ ve λ_j , (2.1.1)' in özdeğeri olsun. Ayrıca

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = h \quad (2.1.44)$$

$$v(\pi)=1 \quad , \quad v'(\pi)=-h \quad (2.1.45)$$

koşullarını sağlamak üzere u_j ve v_j fonksiyonları, (2.1.44) ve (2.1.45) sınır koşullarını sağlayan (2.1.1) denkleminin çözümleri olsunlar.

f fonksiyonu, $(0,d)$, $(d,\pi-d)$ ve $(\pi-d,\pi)$ aralıkları ve $0,\pi$ aralığında C^1 sınıfından olacak şekilde

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j \int_0^x u_j f dy + u_j \int_x^{\pi} v_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \quad (2.1.46)$$

dir.

İspat

Sturm-Liouville denkleminin çözümlerini ve onların asimptotik açılımlarını göz önüne alalım. Burada $0 < d < \frac{\pi}{2}$ durumunu ele alalım. $\lambda = k^2$ ve $k = \sigma + i\tau$ olmak üzere Volterra integral denklemini kullanarak, u ve v fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik açılımlar elde edilir.

$$u(x, \lambda) = \cos kx + O \left| k \right|^{-1} e^{|\tau|x}$$

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{4} A^2 \left[\cos k(\pi - x) - \alpha \cos k(\pi + x - 2d) + \alpha \cos k(\pi - x - 2d) - \alpha^2 \cos k(\pi + x - 4d) \right]$$

$$+ O \left| k \right|^{-1} e^{|\tau|(\pi-x)} \quad , \quad (0 < x < d)$$

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2} A \cos kx + \alpha \cos k(x - 2d) + O \left| k \right|^{-1} e^{|\tau|x}$$

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{2} A \cos k(\pi - x) + \alpha \cos k(\pi - x - 2d) + O \left| k \right|^{-1} e^{|\tau|(\pi-x)} \quad , \quad (d < x < \pi - d)$$

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{4} A^2 \left[\cos kx + \alpha \cos k(x - 2d) - \alpha \cos k(x - 2\pi + 2d) - \alpha^2 \cos k(x - 2\pi + 4d) \right]$$

$$+O \left| k \right|^{-1} e^{|r|x}$$

$$v(x, \lambda) = \cos k(\pi - x) + O \left| k \right|^{-1} e^{|r|(\pi - x)}, \quad (\pi - d < x < \pi)$$

dir. u ve v fonksiyonları

$$u(x, \lambda) = u_0 + O \left| k \right|^{-1} e^{|r|x}$$

$$v(x, \lambda) = v_0 + O \left| k \right|^{-1} e^{|r|\pi - x}$$

şeklindedir. Burada u_0 , u öz fonksiyonunun ilk terimini, v_0 da v 'nin ilk terimini temsil eder. Şimdi Wronskian determinantını göz önüne alacak olursak

$$\omega(\lambda) = -hu(\pi, \lambda) - u'(\pi, \lambda) \quad (2.1.47)$$

olur. Burada λ , (2.1.1) denkleminin öz değeridir. ω için bir asimptotik açılım u 'nun Volterra integral denkleminin diferensiyellenmesinden elde edilir. Bu sonuçlar Willis 19, 20 tarafından

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{4} k A^2 \left[\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi - 2d) - \alpha^2 \sin k(-\pi + 4d) \right] \quad (2.1.48)$$

verilmiştir.

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\int_0^x u f dy + \int_x^\pi v f dy}{\omega(\lambda)} \quad (2.1.49)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. u ve v (2.1.44) ve (2.1.45) sınır şartlarına göre (2.1.1) denkleminin çözümleridir. λ -düzleminde Γ bölgesi boyunca Φ integrallenebilir, $k = \sqrt{\lambda}$ ve k -düzlemindeki çevreyi göz önüne aldığımızda

$$L_1 : (n + \frac{1}{2}) + it$$

$$L_2 : (n + \frac{1}{2}) - 2t + i(n + \frac{1}{2})$$

$$L_3 : -(n + \frac{1}{2}) + i \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - t \right]$$

oluşur. Burada $0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{2} \right)$ 'dır. Γ , λ -düzlemine karşılık gelsin. Bu durumda $n \rightarrow \infty$

iken rezidü teoreminden $(0, d), (d, \pi - d), (\pi - d, \pi)$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(x, \lambda) d\lambda \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j \int_0^x u_j f dy + u_j \int_x^{\pi} v_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \quad (2.1.50)$$

elde edilir. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $(0, d), (d, \pi - d), (\pi - d, \pi)$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(x, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \int_0^{\pi} \frac{v_0(x, \lambda) u_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} f(y) dy d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_x^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{u_0(x, \lambda) v_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} f(y) dy d\lambda \\ &\rightarrow f(x) \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

göstereceğiz. Burada $\omega_0(\lambda)$, Wronskian determinantının baştaki terimini gösterir.

$$\omega_0(\lambda) = \frac{1}{4} k A^2 \left[\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi - 2d) + \alpha^2 \sin k(\pi - 4d) \right] \quad (2.1.52)$$

şeklindedir. v ve u özfonksiyonlarının ilk terimleri v_0 ve u_0 dır.

(2.1.51) deki ilk ifadeyi ispatlayacak olursak Φ 'nin tanımından $(0, d), (d, \pi - d), (\pi - d, \pi)$ de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(x, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^x \frac{v(x, \lambda) u(y, \lambda)}{\omega(\lambda)} f(y) dy d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_x^{\pi} \frac{u(x, \lambda) v(y, \lambda)}{\omega(\lambda)} f(y) dy d\lambda$$

olur. u, v ve ω fonksiyonları düşük dereceli terimler ile yüksek dereceli terimlerin toplamı olarak yazılır yani $u = u_0 + u_L$, $v = v_0 + v_L$ ve $\omega = \omega_0 + \omega_L$ dir.

$$\begin{aligned} \frac{u \cdot v}{\omega} &= \frac{u_0 \cdot v_0}{\omega} + \frac{u_0 \cdot v_L}{\omega} + \frac{u_L \cdot v}{\omega} \\ &= (u_0 \cdot v_0) \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} \right) + \frac{u_0 \cdot v_0}{\omega_0} + \frac{u_0 \cdot v_L + u_L \cdot v}{\omega} \\ &= \frac{u_0 \cdot v_0}{\omega_0} - \frac{u_0 \cdot v_0 (\omega - \omega_0)}{\omega \cdot \omega_0} + \frac{u_0 \cdot v_L + u_L \cdot v}{\omega} \\ &= \frac{u_0 \cdot v_0}{\omega_0} - \frac{u_0 \cdot v_0 \cdot \omega_L}{\omega \cdot \omega_0} + \frac{u_0 \cdot v_L + u_L \cdot v}{\omega} \\ &= \frac{u_0 \cdot v_0}{\omega_0} + E \end{aligned}$$

olup, burada E ,

$$E = -\frac{u_0 \cdot v_0 \cdot \omega_L}{\omega \cdot \omega_0} + \frac{u_0 \cdot v_L + u_L \cdot v}{\omega}$$

dir. Şimdi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^x E f(y) dy d\lambda \rightarrow 0 \quad (2.1.53)$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_x^{\pi} E f(y) dy d\lambda \rightarrow 0 \quad (2.1.54)$$

olduğunu göstereceğiz. İspatı $0 < x < d$, $d < x < \pi - d$ ve $\pi - d < x < \pi$ aralıklarında 3 farklı durum olarak incelenir. (2.1.1)-(2.1.2) problemi $0 < x < d$ aralığında simetrikliktir. Biz burada sadece ilk iki durumu göz önüne alacağız.

$0 < x < d$ iken (2.1.53) integralini göz önüne alalım. $(0, x - \delta)$ ve $(x - \delta, x)$ aralığındaki integrali analiz edecek olursak burada $x - \delta < d$ ve $x - \delta > 0$ dır. Lemma 2.1.4'ün sınırlılığı kullanılarak ve Lemma 2.1.5'den $(0, x - \delta)$ da büyük n 'ler için

$$|E| \leq \frac{432984c}{|k|^2} \cdot \frac{e^{|\tau|y} e^{|\tau|(\pi-x)}}{e^{|\tau|\pi} (1-\bar{\alpha})^2}$$

şeklindedir. Burada $c/|k| < 1/3$ olduğunu varsayalım. f fonksiyonu, C^1 sınıfından olup M sabit olmak üzere $|f(x)|, |f'(x)| \leq M$ $(0, d), (d, \pi - d)$ ve $(\pi - d, \pi)$ aralığındadır. Bu nedenle

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^{x-\delta} E f(y) dy d\lambda \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{432984cM}{|k|^2} \cdot \frac{(e^{|\tau|(x-\delta)} - 1) e^{|\tau|(\pi-x)}}{e^{|\tau|\pi} (1-\bar{\alpha})^2} |d\lambda|$$

büyük n 'ler için yukarıdaki integral $n \rightarrow \infty$ iken 0'a yakınsar. Dolayısıyla $(x - \delta, x)$ 'de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_{x-\delta}^x \frac{432984cM}{|k|^2 (1-\bar{\alpha})^2} |dy| |d\lambda|$$

integrali sınırlıdır. Bu ifade seçilen keyfi δ için sağlanır. İspat için (2.1.54) integralini göz önüne alalım $(x, x + \delta)$ ve $(x + \delta, \pi)$ aralıklarında da yukarıdaki teknikler kullanılacaktır. (2.1.51)'deki 2.kısımının ispatı için benzer şekilde üç durum göz önüne alınacaktır. Bunların ilki $0 < x < d$, ikincisi $d < x < \pi - d$, sonuncusu $\pi - d < x < \pi$ dir. Bizim problemimiz $0 < x < d$ aralığı için bir simetriklik olduğundan sadece ilk iki durumu göz önüne almamız gerekir ve ispat yukarıdakine benzerdir.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^x \frac{v_0(x, \lambda) u_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} f(y) dy d\lambda \quad (2.1.55)$$

integralini göz önüne aldığımızda, $0 < y < d$ olduğundan

$$\frac{v_0(x, \lambda) u_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} = \left[\cos k(\pi - x) - \alpha \cos k(\pi + x - 2d) + \alpha \cos k(\pi - x - 2d) - \alpha^2 \cos k(\pi - 4d + x) \right] \\ \times \frac{\cos ky}{k \left[\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi - 2d) + \alpha^2 \sin k(\pi - 4d) \right]}$$

olur. Farzedelim ki $|\pi + x - 2d|, |\pi - x - 2d|, |\pi - 4d + x| < (\pi - x)$ ve $|\pi - 2d|, |\pi - 4d| < \pi$ dir. (2.1.55) integral denklemini dikkate aldığımızda, $(0, x - \delta)$ ve $(x - \delta, x)$ aralığındadır ve burada $x - \delta < d$ ve $x - \delta > 0$ dır. f , $0, \pi$ aralığında parçalı süreklidir ve bu kısımlar $(0, d), (d, \pi - d)$ ve $(\pi - d, \pi)$ dir. M sabit olmak üzere, bu aralıkların her biri üzerinde $|f(x)|, |f'(x)| \leq M$ dir. $k = \sigma + i\tau$ olsun. Bu durumda kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_0^{x-\delta} \cos ky f(y) dy = \frac{1}{k} \sin ky f(y) \Big|_0^{x-\delta} - \int_0^{x-\delta} \frac{\sin ky}{k} f'(y) dy$$

bulunur. Yukarıdaki ifade de,

$$|\cos kx|, |\sin kx|, \left| \frac{\sin kx}{kx} \right| \leq e^{\tau|x|}$$

trigonometrik eşitsizlikler kullanılarak

$$\frac{M}{|k|} e^{-\tau(x-\delta)} [1 + (x - \delta)]$$

ile sınırlı olduğu bulunur. v_0 sınırlı olduğu için

$$|v_0(x, \lambda)| \leq \frac{A^2}{4} (1 + \bar{\alpha}) e^{|\tau|(\pi-x)}$$

$$|\omega_0(\lambda)| \geq \frac{A^2(1-\bar{\alpha})}{24|k|} e^{|\tau|\pi}$$

Wronskian da sınırlıdır. $(0, x-\delta)$ ' da (2.1.55) integrali,

$$\frac{3M \cdot 1 + (x-\delta) (1+\bar{\alpha})}{\pi(1-\bar{\alpha})} \int_{\Gamma} \frac{1}{|k^2|} e^{-\tau\delta} |d\lambda|$$

olup sınırlıdır.

δ ve x sabitleri için (2.1.55) integrali $n \rightarrow \infty$ iken 0'a yakınsar. $f, (x-\delta, x)$ aralığında C^1 sınıfında olmak üzere

$$\int_{x-\delta}^x \frac{v_0(x, \lambda) u_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} f(y) dy$$

dir. $f(y)$ yerine $f(x)$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} f(x) \frac{v_0(x, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} \int_{x-\delta}^x u_0(y, \lambda) dy &= f(x) \frac{v_0(x, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} \int_{x-\delta}^x \cos ky dy \\ &= f(x) \frac{v_0(x, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} \frac{1}{k} (\sin kx - \sin k(x-\delta)) \end{aligned}$$

dir. v_0 'ı yeniden yazacak olursak

$$v_0 = \cos k(\pi-x) + \sum \beta_i \cos k\eta_i$$

olur. Burada $\sum |\beta_i| = \bar{\alpha} < 1$ ve $|\eta_i| < \pi-x$ dir. Böylece,

$$\sin \theta \cos \tilde{\theta} = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \tilde{\theta}) + \sin(\theta - \tilde{\theta})]$$

eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} v_0 \int_{x-\delta}^x u_0 dy &= \frac{1}{4A^2 k} \left[\sin kx \cdot \cos k(\pi - x) + \sum \tilde{\beta}_i \sin k\tilde{\eta}_i \right] \\ &= \frac{1}{4A^2 k} \left[\frac{1}{2} \sin k\pi + \sum \tilde{\beta}_i \sin k\tilde{\eta}_i \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sum |\tilde{\beta}_i|$ mutlak yakınsak ve $|\tilde{\eta}_i| < \pi$ sınırlıdır.

$\frac{1}{\omega_0}$ 'ı aşağıdaki gibi yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} &= \frac{1}{4A^2} \left[\frac{1}{k \sin k\pi} + \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{k \sin k\pi} \right] \\ &= \frac{1}{4A^2} \left[\frac{1}{k \sin k\pi} + \frac{-2\alpha \sin k(\pi - 2d) - \alpha^2 \sin k(\pi - 4d)}{\omega_0 \sin k\pi} \right] \\ &= \frac{1}{4A^2} \left[\frac{1}{k \sin k\pi} + E_L \right] \end{aligned}$$

Burada $|E_L|$,

$$|E_L| < \frac{\bar{\alpha}}{4A^2 |\omega_0|} e^{\tau(\tilde{\eta} - \pi)}$$

olup sınırlıdır ve $\tilde{\eta} = \max(\pi - 2d), (\pi - 4d)$ dir. Yukarıdaki sonuçlardan,

$$\begin{aligned}
f(x) \frac{v_0}{\omega_0} \int_{x-\delta}^x u_0 dy &= \frac{f(x)}{k^2} \frac{\frac{1}{2} \sin k\pi + \sum \tilde{\beta}_i \sin k\tilde{\eta}_i}{\sin k\pi} + \tilde{E}_L \\
&= \frac{1}{2} \frac{f(x)}{k^2} + \tilde{E}_L
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Burada $|\tilde{E}_L|$, E_L ile bazı terimlerin çarpımından elde edilir ki buda

$$f(x)v_0(x, \lambda) \int_{x-\delta}^x u_0(y, \lambda) dy$$

dir. $|\tilde{E}_L|$ ve $|\tilde{\tilde{E}}_L|$,

$$\begin{aligned}
|\tilde{E}_L| &\leq \frac{|f(x)|}{|k^2|} \bar{\alpha} e^{\tau(\tilde{\eta}-\pi)} \left[\frac{1}{2} + \sum |\tilde{\beta}_i| e^{\tau(\tilde{\eta}_i-\pi)} \right] \\
|\tilde{\tilde{E}}_L| &\leq |\tilde{E}_L| + \frac{|f(x)|}{|k^2|} \sum |\tilde{\beta}_i| e^{\tau(\tilde{\eta}_i-\pi)}
\end{aligned}$$

ile sınırlıdır. $n \rightarrow \infty$ iken $0 < \tilde{\eta}_i, \tilde{\tilde{\eta}} < \pi$ ile sabit x ve sabit δ için

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{|f(x)|}{|k^2|} e^{\tau(\tilde{\eta}_i-\pi)} |d\lambda| &\rightarrow 0 \\
\int_{\Gamma} \frac{|f(x)|}{|k^2|} e^{\tau(\tilde{\tilde{\eta}}-\pi)} |d\lambda| &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x)}{2k^2} d\lambda = \frac{1}{2} f(x)$$

dir. Bu nedenle $(x-\delta, x)$ aralığında (2.1.55) integrali $\frac{1}{2} f(x)$ e yakınsar. $f(x)$ ve

$f(y)$ den, f 'nin $(0, d)$ aralığında C^1 sınıfından olduğunu dikkate alırsak

$f(y) - f(x)$ 'inde C^1 sınıfından olduğu söylenebilir. Dolayısıyla

$$f(y) - f(x) = g(y) - h(y)$$

olup burada $g(y)$ ve $h(y)$ monoton artan fonksiyonlardır ve $y \rightarrow x$ iken 0'a yaklaşır. İkinci ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^x \cos ky g(y) dy &= g(x-\delta) \int_{x-\delta}^x \cos ky dy \\ &= O\left(\frac{g(x-\delta)}{|k|} e^{\tau x}\right) \end{aligned}$$

dir. Bu terim (2.1.55) integralinden, $\delta \rightarrow 0$ iken

$$\int O\left|\frac{g(x-\delta)}{\lambda}\right| |d\lambda| = O(g(x-\delta))$$

dir. Benzer durum diğer terim için de geçerlidir.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_x^\pi \frac{u_0(x, \lambda) v_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} f(y) dy d\lambda \quad (2.1.56)$$

integralini göz önüne alalım. Burada $0 < y < d$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{u_0(x, \lambda) v_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} &= \left[\cos k(\pi - y) - \alpha \cos k(\pi + y - 2d) + \alpha \cos k(\pi - y - 2d) - \alpha^2 \cos k(\pi - 4d + y) \right] \\ &\quad \times \frac{\cos kx}{k \left[\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi - 2d) + \alpha^2 \sin k(\pi - 4d) \right]} \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} d < y < \pi - d \quad \text{için} \quad |\pi + y - 2d|, |\pi - y - 2d|, |\pi - 4d + y| < (\pi - y) \quad \text{ve} \\ |\pi - 2d|, |\pi - 4d| < \pi \quad \text{olsun.} \end{aligned}$$

$$\frac{u_0(x, \lambda)v_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} = \frac{\cos kx + \alpha \cos k(x-2d)}{k} \times \frac{\cos k(\pi-y) + \alpha \cos k(\pi-y-2d)}{\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi-2d) + \alpha^2 \sin k(\pi-4d)}$$

$\pi-d < y < \pi$ için $|x-2d| < x, |\pi-y-2d| < (\pi-y)$ ve $|\pi-2d|, |\pi-4d| < \pi$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{u_0(x, \lambda)v_0(y, \lambda)}{\omega_0(\lambda)} &= \left[\cos kx + \alpha \cos k(x-2d) - \alpha \cos k(x-2\pi+2d) - \alpha^2 \cos k(x-2\pi+4d) \right] \\ &\times \frac{\cos k(\pi-y)}{k \left[\sin k\pi + 2\alpha \sin k(\pi-2d) + \alpha^2 \sin k(\pi-4d) \right]} \end{aligned}$$

dir. Burada $|x-2d|, |x-2\pi+2d|, |x-2\pi+4d| < |x|, |\pi-y-2d| < (\pi-y)$ ve $|\pi-2d|, |\pi-4d| < \pi$ dir. İntegralimizin $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{2}f(x)$ 'e yakınsak olduğunu göstermek için $(x, x+\delta)$ ve $(x+\delta, \pi)$ aralığını gözönüne almalıyız. (2.1.55)'deki integralinin analizine benzer şekilde bunu da elde edebiliriz. (2.1.55) ve (2.1.56) integrallerinin toplamı $n \rightarrow \infty$ iken $f(x)$ 'e yakınsar.

2.2. Ortogonallik

Teorem 2.2.1

(2.1.2) sınır şartları ile $0 \leq x \leq \pi$ aralığında (2.1.1) öz değer problemini göz önüne alalım. $x = d_1$ ve $x = d_2$ süreksizlik noktalarında,

$$u(d_1+) = a_1 u(d_1-) , \quad u'(d_1+) = a_1^{-1} u'(d_1-) + b_1 u(d_1-) \quad (2.1.57)$$

$$u(d_2+) = a_2 u(d_2-) , \quad u'(d_2+) = a_2^{-1} u'(d_2-) + b_2 u(d_2-) \quad (2.1.58)$$

şartları sağlansın. u_j ve v_j fonksiyonları λ_i ve λ_j özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde,

$$\int_0^{\pi} u_i u_j = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (2.1.59)$$

dir.

İspat. L operatörü

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlansın. Biz şimdi

$$\int_0^{\pi} u_i L u_j dx = \int_0^{\pi} u_j L u_i dx \quad (2.1.60)$$

eşitliğini göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} u_i L u_j dx - \int_0^{\pi} u_j L u_i dx &= - \int_0^{\pi} (u_i u_j'' - u_i'' u_j) dx \\ &= - \int_0^{\pi} (u_i' u_j' - u_i' u_j') dx \end{aligned}$$

farkını göz önüne alalım,

$$- \int_0^{\pi} (u_i' u_j' - u_i' u_j') dx = (-u_i' u_j' + u_i' u_j') \Big|_0^{d_1^-} + (-u_i' u_j' + u_i' u_j') \Big|_{d_1^+}^{d_2^-} + (-u_i' u_j' + u_i' u_j') \Big|_{d_2^+}^{\pi}$$

son integral terimi sıfıra gider. Sınır ve sıçrama şartları ilk üç terimin sıfıra gittiğini gösterir. Buda (2.1.60) özdeşliğini verir. (2.1.1) ve (2.1.59) Sturm-Liouville problemlerinde $Lu_i = \lambda_i u_i$ ve $Lu_j = \lambda_j u_j$ den (2.1.60)' ı

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^\pi u_i u_j dx = 0 \quad (2.1.61)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$\int_0^\pi u_i u_j dx = 0 \quad , \quad i \neq j . \quad (2.1.62)$$

Lemma 2.1.9. $q(x)$ simetrik potansiyeli ile Teorem (2.1.1)'de verilen (2.1.1) ve (2.1.4) özdeğer problemini göz önüne alalım. $k_j = (-1)^j$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{k_j}{\omega'(\lambda_j)} = \frac{1}{\|u_j\|_2^2} \quad (2.1.63)$$

dir.

İspat: Teorem (2.1.7) kullanılarak $f = u_i$ alınırsa

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\int_0^x v_j \int_0^x u_j u_i dy + u_j \int_x^\pi v_j v_i dy}{\omega'(\lambda_j)}$$

olur. Problemimizin simetrikliğinden ve $v_j = (-1)^j u_j$ olduğundan, özfonksiyonlar ortogonaldır. Dolayısıyla yukarıdaki ifade

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j u_i \|u_j\|_2^2}{\omega'(\lambda_j)} \cdot \delta_{ij}$$

olur. Bu nedenle $k_j / \omega'(\lambda_j) = 1 / \|u_j\|_2^2$ dir.

Önerme 2.1.10. f , u_j ve v_j fonksiyonları Teorem (2.1.1)'deki gibi tanımlansın ve $\tilde{u}_j$ ile $\tilde{v}_j$ (2.1.1) denkleminde a, b, q, h ve λ_j 'nin yerine $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}, \tilde{h}$ ve $\tilde{\lambda}_j$ alınarak yazılsın. Eğer $j > n$ için $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ ise bu takdirde f fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{v}_j \int_0^x u_j f dy + \tilde{u}_j \int_x^{\pi} v_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \quad (2.1.64)$$

$(0, d_1), (d_1, d_2), (d_2, \pi)$ kompakt alt cümleleri üzerinde açılıma sahiptir.

Önerme 2.1.11. u_j , (2.1.1) ve (2.1.6)'nın özfonksiyonu olsun. f ve f' de $(0, d), (d, \pi - d), (\pi - d, \pi)$ kısımlarında ve $0, \pi$ aralığı üzerinde kısmi süreklidir. Bu takdirde

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(f, \frac{u_j}{\|u_j\|_2} \right) \frac{u_j(x)}{\|u_j\|_2} \quad (2.1.65)$$

dir.

İspat: u_j ve v_j 'nin tanımlarından $u_j = k_j v_j$ olduğu çıkar. Bu takdirde

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j u_j \int_0^x u_j f dy + u_j \int_x^{\pi} k_j u_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j u_j \int_0^{\pi} u_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (f, u_j) \frac{u_j(x)}{\|u_j\|_2^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(f, \frac{u_j}{\|u_j\|_2} \right) \frac{u_j(x)}{\|u_j\|_2}$$

olup, burada $k_j / \omega'(\lambda_j) = 1 / \|u_j\|_2^2 = 1$ dir.

Şu lemmayı gözönüne alalım.

Lemma 2.1.12. (2.1.1) ve (2.1.4) özdeğer problemini gözönüne alalım. ω ile de Wronskian'ı tanımlayalım. İki özdeğer problemi alalım, a, b, q, h, ω ve λ_j yerine $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{\omega}$ ve $\tilde{\lambda}_j$ alınsın. $j > n$ için $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ ise bu takdirde $j \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{\omega'(\lambda_j)}{\tilde{\omega}'(\lambda_j)} \rightarrow 1$$

olur.

İspat: Lemma 2.1.2'den

$$k_j / \omega'(\lambda_j) = 1 / \|u_j\|_2^2 = 1$$

ve

$$k_j / \tilde{\omega}'(\lambda_j) = 1 / \|\tilde{u}_j\|_2^2 = 1$$

öyle ki

$$\begin{aligned} \frac{\omega'(\lambda_j)}{\tilde{\omega}'(\lambda_j)} &= \frac{\|u_j\|_2^2}{\|\tilde{u}_j\|_2^2} \\ &= \frac{\|\varphi_j + u_j - \varphi_j\|_2^2}{\|\tilde{\varphi}_j + \tilde{u}_j - \tilde{\varphi}_j\|_2^2} = \frac{\|\varphi_j\|_2^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|_2^2} + \frac{\|\varphi_j\|_2^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|_2^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\|\varphi_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2} + E$$

dir. Burada E ,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\|\varphi_j + u_j - \varphi_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j + \tilde{u}_j - \tilde{\varphi}_j\|^2} - \frac{\|\varphi_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2} \\ &\leq \frac{2\|\varphi_j\| \cdot \|\tilde{\varphi}_j\|^2 \cdot \|u_j - \varphi_j\| + \|\tilde{\varphi}_j\|^2 \cdot \|u_j - \varphi_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2 \cdot \|\tilde{u}_j\|^2} \\ &\quad + \frac{2\|\varphi_j\|^2 \cdot \|\tilde{\varphi}_j\| \cdot \|\tilde{u}_j - \tilde{\varphi}_j\| + \|\varphi_j\|^2 \cdot \|\tilde{u}_j - \tilde{\varphi}_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2 \cdot \|\tilde{u}_j\|^2} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılmıştır. $\|\cdot\|$, L^2 deki normdur.

Lemma 2.1.4'ün sınırlılığı kullanıldığında

$$\|\varphi\|, \|\tilde{\varphi}\| \leq 11A^2\pi$$

$$\|\varphi\|^2, \|\tilde{\varphi}\|^2 \leq 121A^2\pi^2$$

$$\|u - \varphi\|, \|\tilde{u} - \tilde{\varphi}\| \leq 28A^2\pi \frac{c}{|k|}$$

bulunup $|E|$ 'nin sınırlılığı,

$$|E| \leq \left(\frac{75152A^8c}{|k|} + \frac{23912A^8c^2}{|k|^2} \right) \frac{\pi}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2 \|\tilde{u}_j\|^2}$$

olduğu görülür. Şimdi bütün $\sqrt{\lambda_j} > M$ için $\|\tilde{\varphi}_j\|^2 \cdot \|\tilde{u}_j\|^2 > \text{sabit} > 0$ olduğunu göstereceğiz.

Bu takdirde $|j| \rightarrow \infty$ iken $E \rightarrow 0$ 'a gider. Lemma (2.1.4)'den

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\varphi}_j\|, \|\tilde{u}_j\| \geq \|\tilde{\varphi}_j\| - \|\tilde{u}_j - \tilde{\varphi}_j\| \\
& \geq \sqrt{\int_0^d \varphi_1^2} - \sqrt{\int_0^\pi u - \varphi^2} \\
& = \sqrt{\frac{d}{2} + \frac{\sin 2kd}{4k}} - \frac{28\pi\sqrt{\pi}cA^2}{|k|}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi k yı,

$$\sqrt{\frac{d}{2} + \frac{\sin 2kd}{4k}} > \sqrt{\frac{d}{4}}$$

ve

$$\sqrt{\frac{d}{4}} - \frac{28\pi\sqrt{\pi}cA^2}{|k|} > \frac{\sqrt{d}}{4}$$

şeklinde alalım öyle ki $|k| > \frac{1}{d}$ ve $|k| > \frac{112\pi cA^2}{\sqrt{d}}$ dir. Ayrıca $k = \sqrt{\lambda_j}$ ve

$|\sqrt{\lambda_j} - j| < \frac{1}{2}$ olduğu için ve $j \rightarrow \infty$ iken Lemma(1.4) den

$$\frac{\omega' \lambda_j}{\tilde{\omega}' \lambda_j} \rightarrow \frac{\|\varphi_j\|^2}{\|\tilde{\varphi}_j\|^2}$$

elde edilir. Bu nedenle Lemma 1.6'ya göre $a = \tilde{a}$ ve $d = \tilde{d}$ ise $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j$ olur.

Bundan dolayı $j \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{\omega' \lambda_j}{\tilde{\omega}' \lambda_j} \rightarrow 1$$

olur.

3. SİMETRİK POTANSİYEL DURUMUNDA TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde biz sonlu bir aralıkta, simetrik potansiyel durumunda Ters Sturm-Liouville probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Öncelikle Borg tarafından incelenen sınır şartları ve bir spektrum verilmesi durumunda potansiyelin tek olarak tanımlanacağını ele alacağız. Bu potansiyel çift fonksiyon olup verilen aralığın ortası civarında tanımlanır. Ayrıca iki potansiyelin farkı için Hochstadt[5] tarafından verilen metodun bir genişlemesini elde edeceğiz. İspatı için de Hochstadt [5] deki metot kullanılacaktır.

Burada farklı simetrik potansiyeller ile farklı sınır şartlarına sahip iki Sturm-Liouville problemini göz önüne alarak simetrik potansiyellerin, aralığın ortası civarında çift fonksiyonlar olduğunu ispatlayacağız. Ayrıca eğer iki Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin farklarının mutlak değerinin toplamı sonlu ise, böylece potansiyellerin sürekli bir fonksiyondan farklı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.1.1. q ve $\tilde{q}$, $[0, \pi]$ aralığında integrallenebilir olmak ve $0 \leq x \leq \pi$ aralığında hemen hemen her yerde $q(x) = q(\pi - x)$, $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(\pi - x)$ şartlarını sağlamak üzere,

$$-u'' + q(x)u = \lambda u \quad (3.1.1)$$

$$hu(0) - u'(0) = 0 \quad hu(\pi) + u'(\pi) = 0$$

$$-u'' + \tilde{q}(x)u = \tilde{\lambda}u \quad (3.1.2)$$

$$hu(0) - u'(0) = 0, \quad hu(\pi) + u'(\pi) = 0$$

özdeğer problemini göz önüne alalım.

λ_j ve $\tilde{\lambda}_j$ (3.1.1) ve (3.1.2)'nin öz değerleri olsun. $\tilde{u}_j$

$$u'' + \lambda - \tilde{q} u = 0 \quad (3.1.3)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = \tilde{h} \quad (3.1.4)$$

$$v(\pi) = 1, \quad v'(\pi) = -\tilde{h} \quad (3.1.5)$$

probleminin çözümleri olsun ($\lambda = \lambda_j$ olmak üzere).

$\tilde{y}$ fonksiyonunu,

$$\tilde{y}_j = 2 \frac{\tilde{v}_j - k_j \tilde{u}_j}{\omega'(\lambda_j)} \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, $k_j = (-1)^j$ ve $u_j(x)$ 'ler (3.1.1)'in özfonksiyonları, $u_j(0) = 1$ olacak şekilde normalize olmak üzere,

$$k_j / \omega'(\lambda_j) = 1 / \int_0^\pi u_j^2 dx$$

dir. Eğer $\sum_j |\lambda_j - \tilde{\lambda}| < \infty$ ise bu takdirde,

$$h - \tilde{h} = \frac{1}{2} \sum_j \tilde{y}_j(0) \quad (3.1.7)$$

$$q - \tilde{q} = \sum_j (\tilde{y}_j u_j)' \quad (3.1.8)$$

dir.

İspat: $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$, $\tilde{h}$ ve $\tilde{q}$, h ve q ile yerdeğiştirmek üzere (3.1.4) ve (3.1.5) başlangıç şartlı (3.1.3) denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde, u ,

$$u(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) q(t) u(t) dt \quad (3.1.9)$$

Volterra integral denklemini sağlar.

$S = \sigma + i\tau$ olmak üzere $\lambda = s^2$ olsun her bir x için $u(x, \lambda)$, $\frac{1}{2}$. dereceden λ 'nın bir tam fonksiyonudur ve,

$$u(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|}\right) \quad (3.1.10)$$

$$u'(x, \lambda) = -s \sin sx + O(e^{|\tau|x}) \quad (3.1.11)$$

dir.

$q(x) = q(\pi - x)$ olduğundan, $v(x) = u(\pi - x)$ alınırsa (3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerinden v ve v' nin asimptotik açılımları elde edilir.

Wronskian'ı

$$\omega(\lambda) = -hu(\pi, \lambda) - u'(\pi, \lambda) \quad (3.1.12)$$

şeklinde alalım. Eğer $\omega(\lambda) = 0$ ise λ , (3.1.1)' in bir özdeğeridir. (3.1.10) ve (3.1.11) den $\omega(\lambda)$ için asimptotik açılımı,

$$\omega(\lambda) = s \sin s\pi + O(e^{|\tau|\pi})$$

şeklindedir.

f mutlak sürekli bir fonksiyon ve f' karesi integrallenebilir olsun.

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\tilde{v} \int_0^x u f dy + \tilde{u} \int_x^\pi v f dy}{\omega(\lambda)}$$

Meromorfik fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\tilde{u}$ ve $\tilde{v}$, (3.1.4) ve (3.1.5) başlangıç şartlı (3.1.3) denkleminin çözümleridir ayrıca u ve v gibi aynı gösterimlere sahiptir. λ düzleminde büyük bir sınır boyunca Φ fonksiyonu integrallenebilirdir.

S düzleminde $d = n + \frac{1}{2}$ olmak üzere R , $\pm d + id$ ve $\pm d + i0$ kenarlı dikdörtgen

olsun. Γ 'de, $\tau > 0$ için R 'nin noktalarına karşı gelen λ düzleminde bulunsun. u , $\tilde{v}$ ve ω için asimptotik açılımlar kullanılarak

$$\frac{\tilde{v}(x, \lambda)u(y, \lambda)}{\omega(x)} = \frac{\cos s(\pi - x) \cos sy}{s \sin s\pi} + O\left(\frac{e^{\tau y-x}}{|s|^2}\right)$$

olduğunu buluruz. Ayrıca rezidü teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_{x, \lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_0^x \frac{\cos s(\pi - x) \cos sy}{s \sin s\pi} f(y) dy d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \int_x^{\pi} \frac{\cos sx \cos s(\pi - y)}{s \sin s\pi} f(y) dy d\lambda$$

yazılır. Burada son iki teriminin toplamı f cosinüs fonksiyonunun Fourier açılımındaki $(n+1)$. terimidir. f , 2π periyoduna sahip çift fonksiyondur. f' karesi integrallenebilir ve $f(-\pi) = f(\pi)$ olmasından dolayı f için Fourier serileri düzgün yakınsaktır. Rezidü teoremini kullanarak ve $n \rightarrow \infty$ olarak,

$$f(x) = \sum_j \frac{\tilde{v}_j \int_0^x u_j f dy + \tilde{u}_j \int_x^{\pi} v_j f dy}{\omega'(\lambda_j)} \quad (3.1.13)$$

elde ederiz. $\lambda = \lambda_j$ 'ye karşılık gelen (3.1.3) denkleminin çözümleri $\tilde{u}_j$ ve $\tilde{v}_j$ olmak üzere u_j ve v_j aynı öz fonksiyonları gösterir.

$q(x) = q(\pi - x)$ olduğundan $k_j = (-1)^j$ olmak üzere $v_j = k_j u_j$ olduğunu görürüz.

Eğer $q = \tilde{q}$ ve $h = \tilde{h}$ ise bu takdirde (3.1.13) Sturm-Liouville açılımına indirgenir ve sonuç

olarak, $\frac{k_j}{\omega'(\lambda_j)} = \frac{1}{\int_0^x u_j^2 dx}$ olur. Şimdi f fonksiyonu (3.1.1)'in u_0 öz fonksiyonuna eşit

olsun. (3.1.13)'ten ve tanım (3.1.6)'dan,

$$u_0 = \tilde{u}_0 + \frac{1}{2} \sum_j y_j \int_0^x u_j u_0 dt \quad (3.1.14)$$

şeklinde yazılır. (3.1.14) denkleminin türevini alırsak teoremden gösterilen sonuçları elde edebiliriz. $f_j = \tilde{y}_j \int_0^x u_j u_0 dt$ olsun. Böylece $f_j(0) = 0$ ve $\tilde{f}_j'(0) = \tilde{y}_j(0)$ olur. u_j ve u_0

(3.1.1) in öz fonksiyonları olup ve y_j , $\lambda = \lambda_j$ şartındaki (3.1.13) denkleminin bir çözümü olduğundan f_j 'yi iki kez türevleyerek ve kısmi integrasyon kullanarak ,

$$f_j'' + (\lambda_0 - \tilde{q})f_j = 2(\tilde{y}_j u_j)' u_0 \quad (3.1.15)$$

şeklinde yazabiliriz. f_j, f_j', f_j'' için ifadeler ise

$$\begin{aligned} f_j &= \tilde{y}_j \int_0^x u_j u_0 dt \\ f_j' &= \tilde{y}_j u_j u_0 + \tilde{y}_j' \int_0^x u_j u_0 dt \\ f_j'' &= 2\tilde{y}_j' u_j u_0 + \tilde{y}_j u_j' u_0 + \tilde{y}_j u_j u_0' + \tilde{y}_j'' \int_0^x u_j u_0 dt \end{aligned}$$

dir. (3.1.15) denkleminin sol tarafını bulmak için yukarıdaki ifadeler yerini yazılırsa,

$$f_j'' + (\lambda_0 - \tilde{q})f_j = 2(\tilde{y}_j u_j)' u_0 + (\lambda_0 - \lambda_j) \tilde{y}_j \int_0^x u_j u_0 dt + [u_j u_0' - u_j' u_0] \tilde{y}_j$$

şeklinde olup integral kısmını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} I &= (\lambda_0 - \lambda_j) \int_0^x u_j u_0 dt \\ &= \int_0^x u_j \lambda_0 u_0 dt - \int_0^x \lambda_j u_j u_0 dt \\ &= \int_0^x u_j [\tilde{q} u_0 - u_0''] dt - \int_0^x [\tilde{q} u_0 - u_0''] u_0 dt \\ &= \int_0^x (u_j'' u_0 - u_0'' u_j) dt \\ &= \int_0^x (u_j' u_0 - u_0' u_j)' dt \end{aligned}$$

olup sonuçta,

$$0 < x < d \quad \text{için,} \quad \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_0^x$$

$$d < x < \pi - d \quad \text{için,} \quad \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_0^{d-} + \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_{d+}^x$$

$$\pi - d < x < \pi \quad \text{için,} \quad \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_0^{d-} + \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_{d+}^{(\pi-d)-} + \left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right] \mathbf{I}_{(\pi-d)+}^x$$

olur. Bu üç durumda da sınır ve sıçrama şartlarını kullanarak gösteririz ki $\mathbf{I}$, $\left[u_j' u_0 - u_0' u_j \right](x)$ 'e eşittir. Şimdi (3.1.7) ve (3.1.8)'i elde edebiliriz. (3.1.14) ve (3.1.15) denklemlerinin türevini alırsak,

$$u_0' - \tilde{u}_0' = \frac{1}{2} \sum f_j'$$

$$u_0'' - \tilde{u}_0'' = (\tilde{q} - \lambda_0)(u_0 - \tilde{u}_0) + \sum (\tilde{y}_j u_j)' u_0$$

birinci denklemde $x=0$ için (3.1.7) denklemini elde ederiz. İkinci denklemde $\tilde{u}_0'' = (q - \lambda_0)\tilde{u}_0$ olduğunu ve u_0 öz fonksiyonunu tüm aralık boyunca pozitif olduğunu kullanırsak (3.1.8) denklemini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

SONUÇ

Bu çözümlerdeki amaç, problemi sonlu lineer olmayan diferensiyel denklemlerin sistemine indirgemektir

Bu çalışmada sonlu aralıkta simetrik potansiyele sahip bir Sturm-Liouville denklemi ele alınarak, bu denklem için ters problem incelenmiştir. Elde edilen en önemli sonuçlardan biri q potansiyeli $0 < x < \pi$ aralığında integrallenebilir ve $q(x) = q(\pi - x)$ şartı sağlanmak üzere bir özdeğer problemi ele alınacak olursa, $q(x)$ bir diğer $\tilde{q}(x)$ simetrik potansiyeli ile yer değiştirirse ayrıca iki potansiyel aynı indirgenmiş spektruma sahipse, bu takdirde $q = \tilde{q}$ olarak bulunmuştur. Yani eğer spektrum indirgenmiş ise potansiyelin hemen hemen her yerde tek olarak tanımlandığı görülmüştür. En küçük özdeğerin ters problemde önemli bir yere sahip olduğu incelenmiştir.

Yine indirgenmiş spektrum potansiyelin aralığın ortası civarında bir çift fonksiyon olup tek olarak tanımlanmıştır. Hald'ın teoreminin önemi sadece sonuçları gözönüne almaya karar vermek değil aynı zamanda simetrik potansiyelli Sturm-Liouville problemini numerik olarak çözmek için bir algoritma oluşturmuştur.

Volterra integral denklemleri, özfonksiyonlar için alt sınırları ile özfonksiyonların en yüksek dereceden terimlerinin bulunması ve Wronskian determinantının özellikleri detaylı bir şekilde verilmiştir.

Ayrıca süreksiz simetriklik durumu söz konusu ise, süreksiz problemler için teklik ispatı Hald ve Willis teknikleri kullanılarak oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR

1. **Kreyszing, E.**, 1978, Introductory functional Analysis with Applications, New York.
2. **Liousternik, L. A. & Sobolev ,V.J.**, 1961, Elements of Functional Analipsis,Frederick Ungar Publishing Company, New York.
3. **Gaysmov, G. M. & Levitan B. M.**, 1968, On Sturm-Liouville differential operators with discrete spectra. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2*, 21-33.
4. **Olver, F. W. J.**, 1974, Introduction to Asymptotics and Special Functions.
5. **Titchmarsh, E.C.**, 1964, Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations I,Oxford, Clarendon Pres.
6. **Titchmarsh, E.C.**, 1958, Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations II,Oxford,Clarendon Pres.
7. **Hochstadt, H.**, 1978, The Functions of Mathematical Physics (*A Series of Pure and Applied Mathematics*), Brooklyn, New-York.
8. **Olver, F.W.J.**, 1974, Introduction to Asymtotics and Spesial Functions, New-York and London, Academic Pres.
9. **Levitan, B. M., & Sargsjan, I. S.**, Intrduction to Spectral Theory:Selfadjoint Ordinary Differential Operatörs, Moscow, Nauka.
10. **Levitan, B. M.**, 1950, Expansions in Characteristic Functions of Differential Equations of the Second Order, GITTL, Moscow.
11. **Coddington, E.A., & Levinson, N.**, 1958, Theory of Ordinary Differential Equations, IL, Moscow.
12. **Marcenko ,V.A.**, 1950, Some problems in the theory of second-order differantial operators, Dqjl. Akad. Nauk SSSR.
13. **Levitan , B. M. & Gaysmov , M. G.**, 1964, Determination of a differantial equations by two of its spectra,Russion Math. Surveys.
14. **Suzuki , T.**, 1982, Inverse problems fort he heat equation, (Japanese) Sugaku.
15. **Agranovich, Z. S. & Marchenko, V. A.**, 1963, The Inverse Problem of Scattering Theory Gordon and Breach.
16. **Barcilon, V.**, 1974, On the Uniqueness of Inverse Eigenvalue Problems,Geophysy,J. R. Astr. Soc. 38:287-298.

17. **Borg, G.**, 1946, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, *Acta Math*, 78:1-96.
18. **Hald, O. H.**, 1984, Discontinuous Inverse Eigenvalue Problems, *Comm Pure Appl Math.*, 37:539-577.
19. **Willis, C.**, 1983, Inverse Eigenvalue Problems with Torsional Modes, PhD thesis, U. C. Berkeley.
20. **Willis, C.**, 1985, Inverse Sturm-Liouville Problems with two Discontinuities. *Inverse Problems*, 1:263-289.
21. **Willis, C.**, 1986, An Inverse Method Using Toroidal Mode Data, *Inverse Problems* 2:111-130.
22. **Gel'fand, I. M. & Levitan, B. M.**, 1955, On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2*, 253-304.
23. **Hald, O. H.**, 1977, Inverse eigenvalue problems for layered media. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 69-94.
24. **Krein, M. G.**, 1951, Solution of the inverse Sturm-Liouville problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S)*, 21-24.
25. **Levinson, N.**, 1949, The inverse Sturm-Liouville problem. *Math. Tidsskr. B.*, 25-30.
26. **Levitan, B. M.**, 1968, On the determination of a Sturm-Liouville equation by two spectra. *Amer. Math. Soc. Transl. Series 2*, 1-20.
27. **Zikov, V. V.**, 1967, On inverse Sturm-liouville problems on a finite segment. *Math. USSR-Izv.* 923-934.
28. **Mei Kobayashi**, 1989, A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials, 767-781.
29. **Mei Kobayashi**, 1988, Discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials, Doctor of Philosophy, Berkeley.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Malatya’da doğdum. İlk, orta öğrenimimi Kocaeli’de ve lise öğrenimimi Malatya’da tamamladım. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladım. 2010 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2010 yılı Güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik de tezli yüksek lisans öğrenimime başladım.