

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

SİMPLEKSEL ÖNDEMETLER
(MATEMATİK)

İsmet YÜKSEL

Ocak 1997
ANKARA

68010

İsmet YÜKSEL tarafından hazırlanan SİMPLEKSEL ÖNDEMETLER adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Doç.Dr. Cemil YILDIZ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç.Dr.Ziya ARGÜN



Üye : Doç.Dr.Cemil YILDIZ



Üye : Yrd.Doç.Dr.Ahmet Ali ÖÇAL



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZ	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
SEMBOLLER.....	v
 GİRİŞ.....	 1
 1. POLİHİDRONLAR.....	 2
1.1 Ön bilgiler.....	2
1.2 Simpleksler	3
1.3 Simpleksel Kompleksler	10
1.4 Polihidronlar	14
1.5 Altbölmeler	19
1.6 Simpleksel Dönüşümler.....	23
1.7. Hücreler ve Hücresel Kompleksler	26
 2. KATEGORİ VE SİMPLEKSEL KÜMELER	 29
2.1 Kategori ve Funktorlar	29
2.2 Kategori Üzerinde Bazı Yapılar	31
2.3 Kategoride Bir Nesnenin Elamanları ve Altnesneleri.....	34
2.4 Kategoride Limit	35
2.5 Simpleksel Kümeler	39
2.6 Kan Kompleksler ve Kan Komplekslerin Komotopisi.....	46
2.7 Realization ve Singüler Funktor	59
 SİMPLEKSEL ÖNDEMETLER	 64
3.1 Grothendieck Topoloji	66
3.2 Lokal Teori	69
 KAYNAKLAR	 91
 ÖZGEÇMİŞ	 93

SİMPLEKSEL ÖNDEMETLER**(Yüksek Lisans Tezi)****İsmet YÜKSEL****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****OCAK 1997****ÖZ**

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur. Cebirsel Topolojide geniş bir yere sahip olan simpleks, kompleks, simpleksel kümeler kategorisi ve simpleksel öndemetlerin bir derlemesi yapılmıştır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız simpleks ve kompleks kavramı ile bunların bazı özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, kategori, simpleksel küme, simpleksel lifleme ile simpleksel kümeler kategorisindeki nesneler arasındaki homotopi verilerek homotopi grupları teşkil edilmiştir. Üçüncü bölümde, Grothendieck topoloji ve site kavramı tanıtılmış ve bu sitede simpleksel öndemet kavramı verilmiştir. Ayrıca simpleksel öndemetlerin kategorisi ve bu kategoride homotopi teorisi için fibrant nesnelerin kategorisi oluşturulmuştur.

Bilim Kodu :403. 04. 01

Anahtar Kelimeler : Simpleksel kümeler, Simpleksel öndemet, simpleksel liflemeler

Sayfa adedi :93

Tez Yöneticisi : Doç.Dr. Cemil YILDIZ

SIMPLICIAL PRESHEAVES**(M.Sc. Thesis)****İsmet YÜKSEL****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 1997****ABSTRACT**

This thesis gives very deep and large survey about the notions of simplex, complex, the category of simplicial sets and simplicial presheaves which are very important area in the algebraic topology. It is divided into three chapters. The first chapter contains the notions of simplex and complex with the some properties of them. The second chapter devoted to category of simplicial sets, the simplicial fibration and the homotopies among the objects in the category of simplicial sets. It also includes the costruction of the homotopy groups. In the third chapter the Grothendieck 's topology and the notion of site are introduced and the notion of simplicial presheaves is given in this notion of site. Besides, the category of the fibrant objects has been constructed for the category of simplicial presheaves and the homotopy theory this category.

Science Code : 403. 04. 01

Key Words : Simplicial sets, Simplicial presheaves, Simplicial
fibration

Page Number : 93

Adviser : Assoc. Prof. Cemil YILDIZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca teşvik ve desteğini esirgemeyen değerli hocam sayın Doç.Dr. Cemil YILDIZ 'a teşekkür ederim.



SEMBOLLER

<u>Sembol</u>	<u>Anlamı</u>
$Co(A)$	A'nın konveks kabuğu
$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$	n-simpleks
Δ_n	Standart n-simpleks
K	Kompleks
C	Kategori
τ	Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar kategorisi
Grp	Gruplar ve homomorfizmler kategorisi
S	Simpleksel kümeler ve simpleksel dönüşümler kategorisi
$\pi_n(K, *)$	K'nın n'yinci homotopi grubu
∂_i	i'yinci yüz dönüşümü
s_i	i'yinci degeneracy dönüşüm
Sin	Singüler fonktor
$ $	Realization fonktor
$Sin X$	X uzayının singular simpleksel kümesi
$\Delta_{n,k}$	Δ_n 'in k'yıncı yüzü çıkarılmış altkompleksi
Δ_1	Standart 1-simpleks veya $I=[0,1]$ aralığı
$\partial\Delta_n$	Δ_n 'nin sınırı
(E, p, B)	Lif uzayı
R	Örtü sivi
C/A	Dilim kategori
$C(-, U)$	C/U dilim kategorisi
J	Grothendieck topoloji
$SPre(C)$	C üzerindeki simpleksel öndemetlerin kategorisi
$SShv(C)$	C üzerindeki simpleksel demetlerin kategorisi
$SPre(C)_f$	$SPre(C)$ 'nin fibrant nesnelerinin kategorisi

GİRİŞ

İlk defa simpleksel kümeler 1950 yılında S. Eilenberg ve J.A. Zilber 'in "Semi-simplicial and singular homology " başlıklı makalesi ile tanımlanmıştır. 1957 yılında simpleksel nesnenin kategorik tanımı D.M. Kan 'nın "On semi-simplicial categories " başlıklı çalışması ile verilmiştir. Bu çalışmadan sonra simpleksel kümeler kategorisi üzerinde homotopi teorisi grup teorisi gibi cebirsel topolojinin önemli konuları çalışılmaya başlanmıştır. Daha sonra cebirsel geometrinin kategoriler üzerinde demete benzeyen nesnelerin çalışılma arzusundan Grothendieck Topoloji kavramı ortaya çıkmıştır. Böylece simpleksel kümeler kategorisi üzerinde yeni çalışma alanları ortaya çıkmıştır. 1986 yılında J. F. Jardine bu kavramları kullanarak simpleksel öndemetler kategorisini "Simplicial Presheaves" makalesinde ele almıştır. Bu çalışmada cebirsel topolojinin önemli konularından olan simpleks, kompleks, kategori , simpleksel öndemet ve simpleksel demet kavramlarının bir derlemesi yapılmıştır.

1. POLİHİDRONLAR

1.1. Önbilgiler

Tanım 1.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer, bir $\varphi: A \times A \rightarrow V$ dönüşümü $\forall P, Q \in A$ noktaları için $(P, Q) \rightarrow \varphi(P, Q) \in V$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir *afin uzay* denir.

$$(i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } \varphi(P, R) = \varphi(P, Q) + \varphi(Q, R)$$

(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\varphi(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 1.2. $\mathbb{R}^m$ afin uzay ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\{a_n - a_0, a_{n-1} - a_0, \dots, a_1 - a_0\}$ kümesi lineer bağımsız ise $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ kümesine *afin bağımsız küme* denir.

Tanım 1.3. $A \subset \mathbb{R}^m$ kümesine *konveks* denir, eğer her $x, y \in A$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ oluyorsa.

Tanım 1.4. $A \subset \mathbb{R}^m$ kümesini içeren bütün konveks kümelerin arakesitine, A nın *konveks kabuğu* denir ve $\text{Co}(A)$ ile gösterilir. Eğer, $A \subset B$ ise $\text{Co}(A) \subset \text{Co}(B)$ dir.

Tanım 1.5. $H \subset \mathbb{R}^m$ olsun. H 'nin farklı noktalarının her çifti için bu iki noktadan geçen doğru H 'nin bir altkümesi oluyorsa H ya bir *afin altuzay* denir.

Tanım 1.6. $A \subset \mathbb{R}^m$ olsun. A 'yı içeren bütün altuzayların arakesitine A 'nın *afin kabuğu* denir ve $H(A)$ ile gösterilir.

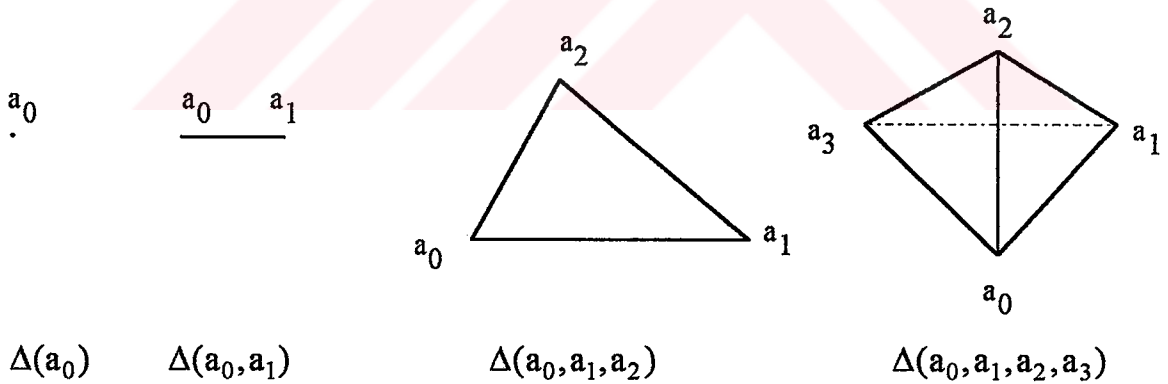
Tanım 1.7. $H \subset \mathbb{R}^m$ kümesi, afin bağımsız $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ noktalarının afin kabuğu olsun. Herhangi $f: H \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü, $\sum_{i=0}^n r_i = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{i=0}^n r_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n r_i f(a_i) \text{ oluyor ise } f \text{ 'ye } \textit{afin transformasyon} \text{ denir.}$$

1-1 ve örten f afin transformasyonunada *afin izomorfizm* denir.

1.2. Simpleksler

Tanım 1.8. $a_0, a_1, \dots, a_n$ ler m -boyutlu $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayın afin bağımsız noktaları olsun. $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ kümesinin konveks kabuğuna köşeleri $a_0, a_1, \dots, a_n$ olan bir n -boyutlu *simpleks* denir (Engelking, R). $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir ve $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n r_i a_i, \forall r_i \geq 0, \sum_{i=0}^n r_i = 1 \right\}$ yazılır. $\Delta(a_0)$ 0-boyutlu simpleks, $\Delta(a_0, a_1)$ 1-boyutlu simpleks, $\Delta(a_0, a_1, a_2)$ 2-boyutlu simpleks, $\Delta(a_0, a_1, a_2, a_3)$ 3-boyutlu simpleks,, $\emptyset$ küme (-1)-boyutlu simpleks olarak kabul edilir.



Tanım 1.9. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\text{Çap } X = \sup \{d(x, y) : x, y \in X\}$ sayısına X metrik uzayının *çapı* denir. $\text{Çap } \emptyset = 0$ dır.

Önerme 1.10. $\text{Çap } \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = \text{Çap } \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ dir.

İspat: Herhangi bir uzayın bir altkümesinin konveks kabuğunun çapı kümenin çapına eşittir. $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} = A$ denirse $\text{Çap} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = \text{Çap} \text{Co}(A)$ olur.

$\text{Çap} A = r$ ve $\text{Çap} \text{Co}(A) = r'$ olsun. $r < \infty$ kabul edilebilir.

$$a \in A \Rightarrow A \subset \overline{B}(a, r)$$

$$\Rightarrow \text{Co}(A) \subset \text{Co}(\overline{B}(a, r)) = \overline{B}(a, r)$$

$$a' \in \text{Co}(A) \Rightarrow d(a', a) < r$$

$$\Rightarrow a' \in \overline{B}(a', r) \text{ dir. Bu durumda } A \subset \overline{B}(a', r) \text{ olur.}$$

$$A \subset \overline{B}(a', r) \Rightarrow \text{Co}(A) \subset \text{Co}(\overline{B}(a', r)) = \overline{B}(a', r) \text{ dir.}$$

$\forall a', a'' \in \text{Co}(A)$ için $d(a', a'') < r \Rightarrow r' \leq r$ ve açık olarak $r \leq r'$ olduğundan $r = r'$ dir.

Sonuç 1.11. Her simpleks sınırlıdır.

Bir kümenin çapı sonlu ise bu küme sınırlıdır. Gerçekten, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ nin çapı sonlu olduğundan, yani $\text{Çap} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) < \infty$ olduğundan sınırlıdır.

Teorem 1.12. Bir $p \in \mathbb{R}^m$ noktası, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin köşesi olması için $\Leftrightarrow \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{p\}$ nin konveks olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $p = a_k$ ve $x, y \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{a_k\}$ olsun.

Bu durumda her $r_i, s_i \geq 0$ için $\sum_{i=0}^n r_i = \sum_{i=0}^n s_i = 1$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=0}^n r_i a_i \quad \text{ve} \quad y = \sum_{i=0}^n s_i a_i \text{ yazılabilir. } t \in [0, 1] = I \text{ alındığında,}$$

$$(1-t)x + ty = (1-t) \sum_{i=0}^n r_i a_i + t \sum_{i=0}^n s_i a_i = \sum_{i=0}^n ((1-t)r_i + ts_i) a_i \text{ ve}$$

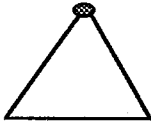
$$\sum_{i=0}^n ((1-t)r_i + ts_i) = (1-t) \sum_{i=0}^n r_i + t \sum_{i=0}^n s_i = 1$$

oldüğundan $(1-t)x + ty \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{a_k\}$ dir.

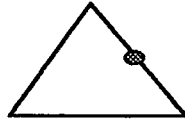
$(\Leftarrow)$ Kabul edelimki $p \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ olsun. Yani p simpleksin köşesi olmasın. Bu durumda,

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{p\}$ dir. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{p\}$ konveks olduğundan $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \subset \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \setminus \{p\}$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde p bir köşe noktasıdır.

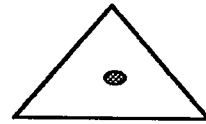
Sonuç 1.13. $p \in \mathbb{R}^m$ noktası $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin köşe noktası olmaması halinde simpleks konveks bir küme değildir.



(a)



(b)



(c)

(a) konveks, (b) ve (c) konveks değildir.

$H(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin köşelerinin kümesiyle tek olarak belirlenen n -boyutlu afin uzay olsun. Açıkça $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \subset H(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dir. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 'yı içeren uzayların en küçüğü $H(a_0, a_1, \dots, a_n)$ olduğundan $H(a_0, a_1, \dots, a_n)$ bir afin kabuktur. Bu afin kabuğa $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin taşıyıcı altuzayı denir. (-1) - boyutlu simpleksin taşıyıcı altuzayı $\emptyset$ kümedir.

Tanım 1.14. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleks olsun. $b = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$ noktasına *merkez* (barycentre) denir. $x \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ için $\sum_{i=0}^n r_i = 1$ olmak üzere $x = \sum_{i=0}^n r_i a_i$ yazılabilir. $(r_0, r_1, \dots, r_n)$ 'e x noktasının *merkezil koordinatları* denir.

Tanım 1.15. $e_0, e_1, \dots, e_n$, $\mathbb{R}^{n+1}$ 'in standart bazı olmak üzere $\Delta(e_0, e_1, \dots, e_n)$ simpleksine *n -boyutlu birim simpleks* veya *standart n -simpleks* denir ve Δ_n ile gösterilir.

Δ_n 'nin taşıyıcı altuzayı $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ olacak şekilde $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ noktalarının kümesidir. Bu durumda $x \in \Delta_n$ nin merkezil koordinatları ile kartezyen koordinatları çakışır. O halde

$$h: H(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow H(e_0, e_1, \dots, e_n), \quad x = \sum_{i=0}^n r_i a_i \rightarrow (r_0, r_1, \dots, r_n)$$

ile tanımlanan h dönüşümü afin izomorfizm olup bu dönüşüm altında $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksi Δ_n birim simpleksine dönüşür. Böylece, aynı boyutlu iki simpleks afin olarak birbirine izomorfdur. Ayrıca her simpleks, taşıyıcı altuzayının kapalı bir altkümesidir.

Tanım 1.16. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin içi; $i=0, 1, \dots, n$ olmak üzere $\left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n r_i a_i, \forall r_i > 0, \sum_{i=0}^n r_i = 1 \right\}$ kümesine denir ve $\text{int}\Delta$ ile gösterilir. Sınırı; $\left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n r_i a_i, \exists r_i = 0, \sum_{i=0}^n r_i = 1 \right\}$ kümesine denir ve $\partial\Delta$ ile gösterilir.

Teorem 1.17. $\mathbb{R}^m$ de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ afin bağımsız bir küme olsun. Bu durumda $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $\mathbb{R}^m$ 'nin kompakt altuzayı olmak üzere $r_0, r_1, \dots, r_n$ merkezil koordinatları, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ' den $I = [0, 1]$ 'e sürekli fonksiyonlardır.

İspat: Δ_n standart n -simpleks ve $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ bir n -simpleks olsun. Δ_n simpleksi tanım 1.8 ve sonuç 1.11'den kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla Δ_n kompaktır.

$f: \Delta_n \rightarrow \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n), x = (r_0, r_1, \dots, r_n) \rightarrow f(x) = r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $f(\Delta_n) = \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ olduğundan örten ve $a_0, a_1, \dots, a_n$ noktalarının afin bağımsızlığından 1-1 dir.

"X bir uzay ve $\prod_{i \in I} Y_i$ 'de Y_i topolojik uzayların çarpımı olsun $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$

dönüşümünün sürekli olması için $\Leftrightarrow$ her $i \in I$ için $p_i \circ f: X \rightarrow Y_i$ dönüşümünün sürekli olmasıdır."

$i = 1, \dots, n+1$ ve p_i ler projeksiyon olmak üzere,

$P_i \circ f: \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}_i$, $(r_0, r_1, \dots, r_n) \rightarrow r_{i-1}$ fonksiyonu sürekli olduğundan f süreklidir.

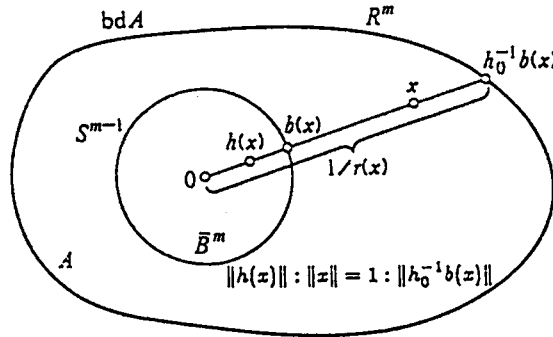
$\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ Hausdorff uzay olduğundan f homeomorfizmdir. Bu durumda, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ kompakt ve f^{-1} süreklidir.

O halde $r_i = f^{-1} \circ p_i$ süreklidir.

Sonuç 1.18. Her afin izomorfizm bir homeomorfizmdir.

İspat: Δ' ve Δ'' , n -boyutlu iki simpleks ve $f: \Delta' \rightarrow \Delta''$ afin izomorfizm olsun. Teorem 1.17 den $h_1: \Delta_n \rightarrow \Delta'$ ve $h_2: \Delta_n \rightarrow \Delta''$ homeomorfizm ise $h_2 \circ h_1^{-1}$ homeomorfizm $\Rightarrow f$ homeomorfizmdir.

Teorem 1.19. Eğer, $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, konveks ve içi boştan farklı olan bir altuzay ise, bu durumda $h(\partial A) = S^{m-1}$ olan bir $h: A \rightarrow \bar{B}^m$ homeomorfizmi vardır.



İspat: Kabul edelimki $0 \in A$ olsun. (Eğer, $0 \notin A$ ise bir dönüşüm ile $0, A$ nın içine dahil edilebilir.) $b: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow S^{m-1}$, $b(x) = x / \|x\|$ şeklinde tanımlı b fonksiyonu süreklidir. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var öyleki $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|b(x) - b(y)\| < \epsilon$ dir. Yani

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|x - y\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| + \frac{1}{\|y\|} \|x - y\| \text{ dir.}$$

$$\left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| < \delta_1, \quad \|x - y\| < \delta_2 \quad \text{olsun.}$$

$$\delta_1 = \min \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3\|y\|} \right\} \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \min \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon\|y\|}{3} \right\} \quad \text{seçilirse} \quad \|b(x) - b(y)\| < \varepsilon$$

olur.

$h_0 = b|_{\partial A}: \partial A \rightarrow S^{m-1}$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. ∂A , A nın kapalı bir altkümesi olduğundan kompakttır. Dolayısıyla h_0 homeomorfizmdir.

$$x \in A \setminus \{0\} \quad \text{için} \quad r(x) = 1/\|h_0^{-1}b(x)\| \quad \text{ise,}$$

$$h(x) = \begin{cases} r(x)x & , x \in A \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanabilir.

$$\|x\| \leq \|h_0^{-1}b(x)\| \quad \text{olduğundan} \quad \text{her } x \in A \setminus \{0\} \quad \text{için} \quad r(x) \leq \frac{1}{\|x\|} \quad \text{dir. Bu}$$

durumda h , A 'dan $\overline{B}^m$ 'e bir dönüşümdür. h süreklidir. Gerçekten, $0 \in \text{ic}A$ ve $x \in A \setminus \{0\}$ için $h_0^{-1}b(x) \in \partial A$ olduğundan $\|h_0^{-1}b(x)\| \geq s$ olacak şekilde bir $s > 0$ reel sayısı vardır. Dolayısıyla $x \in A \setminus \{0\}$ için $r(x) \leq 1/s$ dir. O halde h $x \in A \setminus \{0\}$ için süreklidir. h nın "0" noktasındaki sürekliliği açıktır.

h , bire-bir ve örtendir. Gerçekten, $x \neq 0$ iken $h(x) \neq h(0)$ dir. $x' \neq 0$, $x'' \neq 0$ olmak üzere $h(x') = h(x'')$ alalım.

$$r(x')x' = r(x'')x'' \Rightarrow \frac{x'}{\|h_0^{-1}b(x')\|} = \frac{x''}{\|h_0^{-1}b(x'')\|}$$

$$\Rightarrow b(x') = b(x'') \text{ olduğundan } r(x') = r(x'') \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow x' = x'' \text{ ise } h, 1-1 \text{ dir.}$$

Eğer $y \in \overline{B}^m \setminus \{0\} \Rightarrow r(y) \neq 0$ ve $x = y/r(y)$ alındığında $r(x) = r(y)$ olur. Böylece $x = y/r(x)$ yani $h(x) = y \Rightarrow f$ örtendir. $x \in \partial A$ için $h_0^{-1}b(x) = x$ olduğunda $h|_{\partial A} = b|_{\partial A} = h_0$ olur. Bu durumda h , ∂A 'dan S^{m-1} 'e homeomorfizmdir. A

kompakt, $\overline{B}^m$ Hausdorff ve h bire-bir ve örten olduğundan $h, h(\partial A) = S^{m-1}$ olan homeomorfizmdir.

Sonuç 1.20. Her n -boyutlu simpleks n -boyutlu birim kapalı yuvara, n -boyutlu simpleksin içi n -boyutlu açık birim yuvara ve n -boyutlu simpleksin sınırı $(n-1)$ -boyutlu birim küreye homeomorftur.

Tanım 1.21. $\mathbb{R}^m$ de afin bağımsız olan $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ kümenin bir altkümesi $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$, $0 \leq k \leq n$, olsun. $\Delta(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ simpleksine $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin bir k -boyutlu yüzü (face) denir. (-1) -boyutlu simpleks, her simpleksin bir yüzüdür. Her simpleks kendisinin bütün yüzlerini içerir. Bir simpleksin 0-boyutlu yüzleri köşeler ve 1-boyutlu yüzleri kenarlardır.

Eğer, bir Δ' simpleksi Δ'' simpleksinin bir yüzü ise $\Delta' \leq \Delta''$ yazacağız. $\Delta' \neq \Delta''$ ise Δ', Δ'' 'nün bir öz yüzüdü denir ve $\Delta' < \Delta''$ yazılır.

Teorem 1.22. Her $n \geq 0$ için n -boyutlu simpleksin sınırı, $n-1$ boyutlu yüzlerinin birleşimidir.

İspat: $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ n -boyutlu simpleks olsun.
 $\text{Sınır} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n r_i a_i, \exists r_i = 0, \sum_{i=0}^n r_i = 1 \right\}$ kümesi;
 $r_0 = 0$ olan $x \in \mathbb{R}^m$ noktaları, ..., $r_n = 0$ olan $x \in \mathbb{R}^m$ noktaların oluşturduğu kümeye eşit olduğundan ispat açıktır.

Sonuç 1.23. Her simpleks bütün yüzlerinin geometrik içlerinin ayrık birleşimidir.

1.3. Simpleksel Kompleksler

Tanım 1.24. $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayda, simplekslerin sonlu bir K ailesine *simpleksel kompleks* denir, eğer aşağıdaki şartlar varsa.

(SC1) K ailesindeki her bir simpleksin bütün yüzleri yine K ya aittir.

(SC2) K ailesindeki simplekslerin herhangi ikisinin kesişimi, ikisininde ortak yüzüdür.

K simpleksel kompleksinin boyutu, $\text{boy } K = \max \{ \text{boy } \Delta : \Delta \in K \}$ dır.

Örnek 1.25. K , bir k -boyutlu simpleksin bütün yüzlerinden oluşan bir aile olsun. Bu durumda K , k -boyutlu simpleksel kompleksdir.

Teorem 1.26. $\mathbb{R}^m$ de simplekslerin sonlu bir K ailesinin simpleksel kompleks olması için $\Leftrightarrow$ (SC1) ve (SC2') şartlarının sağlanmasıdır. Burada (SC2') K ailesindeki farklı simplekslerin geometrik içleri ayrıktır.

İspat ($\Rightarrow$): $\Delta', \Delta'' \in K$ ve $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$ olsun. Bu durumda $\Delta \leq \Delta'$ ve $\Delta \leq \Delta''$ dir. Eğer $\Delta' \neq \Delta'' \Rightarrow \Delta < \Delta'$ ve $\Delta < \Delta''$ olur. $\Delta < \Delta' \Rightarrow$ bir simpleksin sınırı öz yüzlerinin birleşimi olduğundan $\Delta \cap \text{iç} \Delta' = \emptyset$ fakat $\text{iç} \Delta' \cap \text{iç} \Delta'' \subset \Delta \cap \text{iç} \Delta' \Rightarrow \text{iç} \Delta' \cap \text{iç} \Delta'' = \emptyset$ olur. Dolayısıyla (SC2') şartı sağlanır.

($\Leftarrow$) $\Delta', \Delta'' \in K$ olsun. $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$ ise (SC2') açıktır. $\Delta' \cap \Delta'' \neq \emptyset$ olsun. Bir $p \in \Delta' \cap \Delta''$ için her simpleks sınırlı olduğundan $\Delta'_1 \leq \Delta'$ ve $\Delta''_2 \leq \Delta''$ olacak şekilde $\Delta'_1, \Delta''_2 \in K$ var öyleki $p \in \text{iç} \Delta'_1 \cap \text{iç} \Delta''_2$ dir. Hipotezden $\Delta'_1 = \Delta''_2$ dir. Böylece $\Delta' \cap \Delta''$ nin her p noktası Δ' ve Δ'' simplekslerinin ortak yüzüne aittir. Bu ortak yüz Δ' ve Δ'' simplekslerinin ortak köşelerinden oluşan simpleksdir.

Tanım 1.27. K bir simpleksel kompleks olsun. K 'nın bir K_0 altkümese *simpleksel altkompleks* denir, eğer K , K_0 daki her simpleksin bütün yüzlerini içeriyorsa.

Tanım 1.28. K , k -boyutlu simpleksel kompleks ve n , $0 \leq n \leq k$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. $K^{[n]} = \{\Delta \in K : \text{boy} \Delta \leq n\}$ ailesine K 'nın *n -boyutlu iskeleti* denir. $K^{[-1]} = \{\emptyset\}$, $K^{[0]} = K$ nın köşelerinin cümlesi ve $k=n$ ise $K^{[k]} = K$ dır.

Tanım 1.29. X bir küme ve $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=0}^k$ ailesi X 'in bir örtüsü olsun. $a_{i_n} \in A_{i_n}$ $0 \leq n \leq k$, olmak üzere, $N = \{\Delta(a_{i_0}, \dots, i_n) : A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset\}$ şeklinde tanımlı N simpleksel kompleksine $\mathcal{A}$ örtüsünün bir *nüvesi* denir. Burada N 'nin köşeleri $a_i \in A_i$ olmak üzere $a_0, a_1, \dots, a_k$ şeklinde düzenlenmiştir.

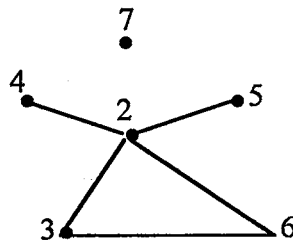
Örnek 1.30. (1) $X = \{2, 3, \dots, 10\}$ ve $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ olmak üzere, A_i , X deki i ile bölünebilen sayıların kümesi olsun.

$A_2 = \{2, 4, 6, 8\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{5, 10\}$, $A_6 = \{6\}$, $A_7 = \{7\}$ dir. $X = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$ dir. Şimdi, $\mathcal{A} = \{A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$ örtüsünün nüvesini bulalım.

$A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_4 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_6 \neq \emptyset$, $A_3 \cap A_6 \neq \emptyset$ ve $A_2 \cap A_3 \cap A_6 \neq \emptyset$. O halde,

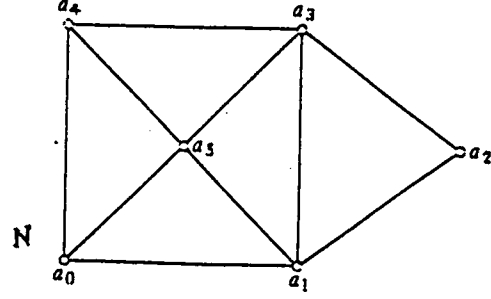
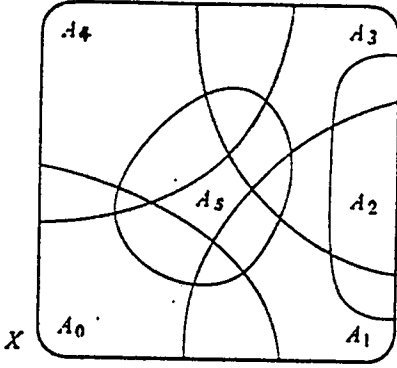
$N = \{\Delta(2), \Delta(3), \Delta(4), \Delta(5), \Delta(6), \Delta(7), \Delta(2, 3), \Delta(2, 4), \Delta(2, 5), \Delta(2, 6), \Delta(2, 3, 6)\}$

dir. Bunu



şekilde çizebiliriz.

(2) X bir topolojik uzay ve $A = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ ailesi X 'in bir örtüsü olsun. Bu durumda N , A örtüsünün bir nüvesidir. Bunu şöyle şekillendirebiliriz.



Önerme 1.31. Eğer, K_1 ve K_2 , K 'nin simpleksel altkompleksleri ise $K_1 \cup K_2$ ve $K_1 \cap K_2$ 'de K 'nin simpleksel altkompleksleridir.

İspat: $K_1 \cup K_2$ 'nin simpleksel kompleks olduğunu gösterelim. $\Delta, K_1 \cup K_2$ 'nin herhangi bir simpleksi olsun. Bu durumda $\Delta \in K_1$ veya $\Delta \in K_2$ dir. Hipotezden dolayı Δ 'nın yüzleri K_1 veya K_2 'ye aittir. Dolayısıyla (SC1) sağlanır.

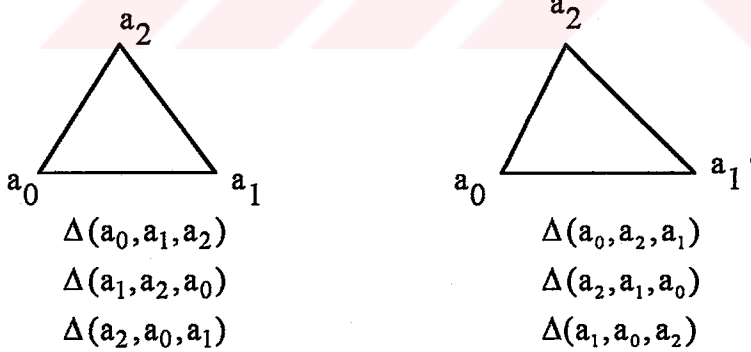
$\Delta', \Delta'' \in K_1 \cup K_2$ ve $\Delta' \neq \Delta''$ olsun. Bu durumda $\Delta' \in K_1$ veya $\Delta' \in K_2$, $\Delta' \in K_2$ veya $\Delta'' \in K_2$ dir. Hipotezden dolayı $\text{int} \Delta' \cap \text{int} \Delta'' = \emptyset$ olur. O halde (SC2') sağlanır.

$K_1 \cap K_2$ nin simpleksel kompleks olduğu benzer şekilde gösterilir.

Tanım 1.32. Bir $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin köşeleri arasında sıra söz konusu ise bu simplekse *sıralı simpleks* denir. Eğer, bir simpleksel kompleksin köşeleri arasında sıralama varsa bu simpleksel komplekse *sıralı simpleksel kompleks* denir.

Tanım 1.33. Bir $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin bir permütasyonu sadece köşelerinin permütasyonundan ibarettir. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ nin permütasyonlarının sayısı $(n+1)!$ dir. İki permütasyona eşdeğerdir denir, eğer ikisinde çift veya tek ise. Aksi halde ters işaretlidir denir. Bu şekilde tanımlanan eşdeğerlik bağıntısı $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin bütün permütasyonlarının sınıfını ayrık iki sınıfa böler. Bu alt sınıflara $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin *yönleri* denir (Uluçay, C). Bu yönlerden herhangi birine sahip olan simplekse *yönlü simpleks* denir. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin yönü pozitif olarak kabul edilirse $\Delta(a_1, a_0, a_2, \dots, a_n)$ simpleksi, $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin permütasyonun tek permütasyonudur ve yönü negatiftir. Bu durumda $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = -\Delta(a_1, a_0, a_2, \dots, a_n)$ yazılır.

Örnek 1.34. $\Delta(a_0, a_1, a_2)$ permütasyonlarının sırasıyla pozitif ve negatif yönleri aşağıdaki gibidir.



Tanım 1.36. $V \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve S de V 'nin altkümelerinin bir ailesi olsun. S 'nin her bir $n+1$ elemanlı bir s elemanı n -simpleks olmak üzere (V, S) ikilisine *soyut simpleksel kompleks* denir (Giblin, P.J), eğer aşadaki şartlar varsa.

$$(1) v \in V \Rightarrow \{v\} \in S$$

$$(2) s \in S, t \subset s \text{ ve } t \neq \emptyset \Rightarrow t \in S$$

Örnek.1.36.

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \text{ ve } S = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$$

olsun. $(V, S) = X$ denilirse, X soyut simpleksel kompleksdir.

1.4. Polihidron

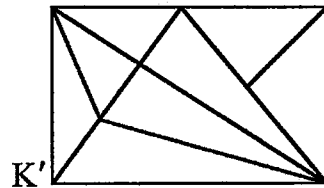
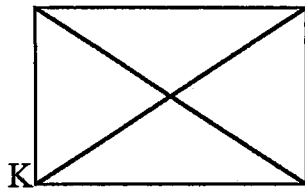
K bir simpleksel kompleks olsun. $\bigcup \{\Delta : \Delta \in K\}$ ailesine K nin altında yatan uzay denir ve $|K|$ gösterilir. K nin farklı simplekslerinin geometrik içleri farklı olduğundan her $p \in |K|$ için $p \in \text{iç}\Delta$ olacak şekilde bir $\Delta \in K$ vardır. K daki bu simplekse p noktasının taşıyıcısı denir.

Tanım 1.37. $X \subset \mathbb{R}^m$ ve K simpleksel kompleks olmak üzere $|K| = X$ ise X 'e bir *polihidron* denir. Bu durumda K ya X 'in bir *üçgenlemesi* denir. X 'in bir çok üçgenlemeleri vardır (Engelking, R).

Örnek 1.38. (1) Her simpleks bir polihidronudur. Çünkü Δ simpleksinin bütün yüzlerinin ailesi Δ 'nın bir üçgenlemesini oluşturur.

(2) $\mathbb{R}^m$ in her sonlu X altkümesi bir polihidronudur. Burada X 'in noktaları 0-simpleksler olarak alınmıştır.

(3) X bir uzay olsun. X 'in farklı iki üçgenlemesi K ve K' olsun. $X = |K| = |K'|$ dir.



Önerme 1.49. Her polihidron bir kompakt uzaydır.

İspat: X bir polihidron olsun. $X=|K|$ olacak şekilde X 'in bir K üçgenlemesi olsun. K simpleksel kompleks olduğundan $|K|$ sınırlı ve kapalıdır. $\mathbb{R}^m$ nin sınırlı ve kapalı her altkümesi kompakt olduğundan X kompaktır.

Tanım 1.40. K simpleksel kompleksine *bağlantılı* denir, eğer K 'nın $\text{boy } K_1 \geq 0$, $\text{boy } K_2 \geq 0$ ve $K_1 \cap K_2 = \{\emptyset\}$ olacak şekilde K_1 ve K_2 altkomplekslerinin birleşimi olarak yazılamıyorsa.

Önerme 1.41. Bir K simpleksel kompleksinin bağlantılı olması için $\Leftrightarrow \forall a, b \in K$ köşe çiftleri için $a_0, a_1, \dots, a_k \in K$ köşelerinden oluşan bir dizi var öyleki $a_0 = a$, $a_k = b$ ve $j = 1, 2, \dots, k$ için $\Delta(a_{j-1}, a_j) \in K$ ise.

İspat: $(\Rightarrow)$ Bağlantılı K kompleksinin bir köşesi a olsun. K kompleksinin b köşelerinin kümesi K_1^0 ile gösterilmiş olsun. Bu durumda $a_0, a_1, \dots, a_k \in K$ köşelerinin dizisi vardır öyleki $a_0 = a$, $a_k = b$ ve $j = 1, 2, \dots, k$ için $\Delta(a_{j-1}, a_j) \in K$ dir. K_1^0 'e ait olmayan K kompleksinin köşelerinin kümesi K_2^0 olsun. Bu durumda K 'nın her simpleksinin sahip olduğu bütün köşeler tamamıyla K_1^0 veya K_2^0 'da dir. Bu K_1^0 ve K_2^0 kümeleri K 'nın K_1 ve K_2 altkomplekslerinin köşelerinin kümesidir öyleki $K_1 = K_1^0 \cup K_2^0$ ve $K_1 \cap K_2 = \{\emptyset\}$ dir. $a \in K_1$ ve K bağlantılı olduğundan K_2^0 hiçbir köşeye sahip değildir.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelimki K bağlantılı olmasın. Yani $\text{boy } K_1 \geq 0$ ve $\text{boy } K_2 \geq 0$ ve $K_1 \cap K_2 = \{\emptyset\}$ olmak üzere $K = K_1 \cup K_2$ dir. Ayrıca kabul edelimki $a_0, a_1, \dots, a_k \in K$ köşelerin bir dizisi ve $a_0 \in K_1$ ve $a_k \in K_2$ olsun. $\exists j \in \{1, 2, \dots, k\}$ var $\ni a_j \in K_2$ dir. Bu durumda

$a_{j-1} \in K_1$ ve hipotezden $\Delta(a_{j-1}, a_j) \in K$ dir. $K = K_1 \cup K_2$ olduğundan $\Delta(a_{j-1}, a_j) \in K_1$ veya $\Delta(a_{j-1}, a_j) \in K_2 \Rightarrow a_{j-1} \in K_1 \cap K_2$ veya $a_j \in K_1 \cap K_2$ dir.

Bu ise kabule tezat olduğundan, K bağlantılıdır.

Teorem 1.42. $|K|$ polihidronunun bağlantılı olması için $\Leftrightarrow K$ nın bağlantılı olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ $|K|$ bağlantılı olsun. Kabul edelimki K bağlantılı olmasın. $\text{boy } K_1 \geq 0$, $\text{boy } K_2 \geq 0$ ve $K_1 \cap K_2 = \{\emptyset\}$ olmak üzere $K = K_1 \cup K_2$ yazılabilir. Bu durumda $|K_1| \neq \emptyset$, $|K_2| \neq \emptyset$ ve $|K_1| \cap |K_2| = \emptyset$ iken $|K| = |K_1 \cup K_2|$ dir. Bu ise $|K|$ 'nın bağlantılı olması ile çelişir. Bu durumda K bağlantılıdır.

$(\Leftarrow)$ K bağlantılı ve $a, b \in K$ olsun. Bu durumda a ve b $|K|$ da bir eğri ile birleştirilebilir. Çünkü her simpleks konveksdir.

Teorem 1.43. K' ve K'' simpleksel komplekslerinin altında yatan uzaylar $|K'|$, $|K''|$ ve $|K'| \subset |K''|$ bağıntısını sağlıyorsa $\text{boy } K' \leq \text{boy } K''$ dir.

İspat: Aksini kabul edelim $\text{boy } K'' = k'' < \text{boy } K' = k'$ olsun. $\text{boy } \Delta' = k'$ olan bir $\Delta' \in K'$ alalım. $k'' < k'$ olduğundan $\forall \Delta'' \in K''$ için $\Delta' \cap \Delta''$ kesişimi Δ' 'de boş içe sahiptir. Böylece $\Delta' \setminus |K''| \neq \emptyset$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\text{boy } K' \leq \text{boy } K''$ dir.

Sonuç 1.44. $|K'| = |K''|$ ise $\text{boy } K' = \text{boy } K''$ dir.

Sonuç 1.45. X' ve X'' polihidron olsun. $X' \subset X''$ ise $\text{boy } X' \leq \text{boy } X''$ dir.

K simpleksel kompleksinin bütün köşeleri $a_0, a_1, \dots, a_k$ ve $\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$ simpleksi de, $p \in |K|$ noktasının taşıyıcısı

olsun. $r_0, r_1, \dots, r_k$ sayıları, $j \neq j_0, j_1, \dots, j_n$ için $r_j = 0$ olduğunda $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_n}$ ler $\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$ simpleksinde p noktasının merkezil koordinatları olup bunlara $|K|$ 'nın üçgenlemesi olan K ya göre *merkezil koordinatlar* denir. Bu durumda $r_j \geq 0$ ve $\sum_{j=0}^k r_j = 1$ olmak üzere $p \in |K|$ noktasını, $p = \sum_{j=0}^k r_j a_j$ şeklinde yazabiliriz.

$\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) \in K$ olduğunda Δ_k standart simpleksinin $\Delta(e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ yüzlerinden oluşan simpleksel kompleksi $\bar{K}$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.46. $|K|$ polihidronun her bir noktasını, K üçgenlemesine göre merkezil koordinatlarına dönüştüren bir h dönüşümü, $|K|$ polihidronundan, $|\bar{K}|$ polihidronuna homeomorfizmdir.

İspat: $h: |K| \rightarrow |\bar{K}|$, $p = \sum_{i=0}^k r_i a_i \rightarrow h(p) = (r_0, r_1, \dots, r_k)$ şeklinde tanımlanan h dönüşümü afin izomorfizmdir. Gerçekten $p, q \in |K|$ öyleki $p = \sum_{i=0}^k r_i a_i$, $q = \sum_{i=0}^k s_i a_i$ olsun.

$$\begin{aligned} h(p) = h(q) &\Rightarrow (r_0, r_1, \dots, r_k) = (s_0, s_1, \dots, s_k) \\ &\Rightarrow \forall i = 0, 1, \dots, k \text{ için } r_i = s_i \end{aligned}$$

$\Rightarrow p = q$ ise h , bire-bir dir.

h 'nın örtenliği açıktır. O halde h^{-1} var ve $h^{-1}: |\bar{K}| \rightarrow |K|$, $(r_0, r_1, \dots, r_k) \rightarrow h^{-1}(r_0, r_1, \dots, r_k) = \sum_{i=0}^k r_i a_i$ dir

Lineer dönüşümlerin sürekliliğinden h^{-1} süreklidir. " Kompakt bir uzaydan Hausdorff uzayına sürekli bijektif bir dönüşüm homeomorfizmdir." Dolayısıyla h homeomorfizmdir.

Tanım 1.48. Bir K simpleksel kompleksinin her a köşesi için $U\{\text{iç } \Delta: a, \Delta \in K \text{ nın köşesi}\}$ kümesine a köşesinin *starı*,

$U\{\Delta: a, \Delta \in K \text{ nın köşesi}\}$ kümesinede *a köşesinin kapalı starı* denir ve $st a$ ile gösterilir.

O halde şu önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.48. K nın köşelerinin kapalı starları $|K|$ polihidronunun bir örtüsünü oluşturur.

İspat: $|K| = U\{\Delta: \Delta \in K\} = U\{\text{iç } \Delta: \Delta \in K\} = \bigcup_{a \in K} st a.$

Önerme 1.49. $a_0, a_1, \dots, a_k \in K$ 'nın farklı noktaları olsun. $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_k) \in K$ olması için $\Leftrightarrow st a_0 \cap st a_1 \cap \dots \cap st a_k \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_k) \in K$ olsun. Açık olarak, $\emptyset \neq \text{iç } \Delta(a_0, a_1, \dots, a_k) \subset st a_0 \cap st a_1 \cap \dots \cap st a_k \Rightarrow st a_0 \cap st a_1 \cap \dots \cap st a_k \neq \emptyset$ dır.

$(\Leftarrow)$ $st a_0 \cap st a_1 \cap \dots \cap st a_k \neq \emptyset$ olsun. $\Rightarrow p \in st a_0 \cap st a_1 \cap \dots \cap st a_k$ vardır.

Δ simpleksi p noktasının taşıyıcısı olsun. Bu durumda $a_0, a_1, \dots, a_k, \Delta$ nın köşeleridir. O halde $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_k) \in K$ dır.

Sonuç 1.50. K simpleksel kompleks olsun. K , K 'nın köşelerinin starlarıyla oluşturulan $|K|$ polihidronun örtüsünün nüvesidir.

Teorem 1.51. Eğer, K_0, K_1 ve K_2 simpleksel komplekslerinin bir altkompleksi ve $|K_1| \cap |K_2| = |K_0|$ ise $K_1 \cup K_2$ bir simpleksel kompleksdir.

İspat: (SC1) Δ , $K_1 \cup K_2$ 'nin bir simpleksi olsun. $\Delta \in K_1$ veya $\Delta \in K_2$ dir. K_1 ve K_2 simpleksel kompleks olduğundan Δ nın bütün yüzleri $K_1 \cup K_2$ 'de dir.

(SC2) $\Delta_1 \in K_1$ ve $\Delta_2 \in K_2$ olsun. Bu durumda,
 $\text{iç}\Delta_1 \cap \text{iç}\Delta_2 \subset |K_1| \cap |K_2| = |K_0|$ ve $\exists \Delta_0 \in K_0$ var öyleki $\Delta_0 = \text{iç}\Delta_1 \cap \text{iç}\Delta_2$ dir.

1.5. Altbölmeler

Tanım 1.52. K' ve K , bir X topolojik uzayının iki üçgenlemesi olsun. K' ne, K nın bir *altbölmesi* denir, eğer aşağıdaki şartlar varsa

$$(1) |K'| = |K| = X$$

(2) Her $\Delta' \in K'$ için $\exists \Delta \in K$ var öyleki $\Delta' \subset \Delta$ dir.

Altbölmelerin oluşturulmasının, polihidronlar teorisinde önemli bir yeri vardır. Bunu açıklamak maksadıyla aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 1.53. Bir afin bağımsız küme oluşturan $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ noktaları ve $j=0, 1, \dots, n$ için b_j , $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_j)$ simpleksinin merkezi olsun. Bu durumda $b_0, b_1, \dots, b_n$ noktaları bir afin bağımsız küme oluşturur.

İspat: $\sum_{j=0}^n s_j = 0$ olduğunda $\sum_{j=0}^n s_j b_j = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\sum_{j=0}^n \frac{s_j}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h = 0 \quad \text{dır.} \quad h=0, 1, \dots, n \quad \text{için} \quad r_h = \sum_{j=h}^n \frac{s_j}{j+1} \quad \text{alındığında}$$

$$\sum_{h=0}^n r_h = \sum_{h=0}^n \sum_{j=h}^n \frac{s_j}{j+1} = \sum_{j=0}^n s_j = 0 \quad \text{olduğundan} \quad \sum_{h=0}^n r_h a_h = 0 \quad \text{alınabilir.}$$

$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ kümesi afin bağımsız olduğundan $h=0, 1, \dots, n$ için $r_h = 0$ dır.

Dolayısıyla $j=0, 1, \dots, n$ için $s_j = 0$ dır.

Bu önermeden dolayı aşağıdaki not açıktır.

Not 1.54. Eğer, $\emptyset \neq \Delta_0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_q$ ise bu durumda Δ_q simpleksinin $a_0, a_1, \dots, a_n$ köşelerinin yeniden bir düzenlenmesi vardır $\ni \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_q$ simpleksleri $\Delta(a_0), \Delta(a_0, a_1), \dots, \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dizisinin bir altdizisini oluşturur.

Not ve önerme birlikte düşünüldüğünde şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.55. Kabul edelimki $\emptyset \neq \Delta_0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_q$ ve $h = 0, 1, \dots, q$ için b_h, Δ_h simpleksinin merkezi olsun. Bu durumda $b_0, b_1, \dots, b_q$ bir afin bağımsız küme oluşturur.

Teorem 1.56. $h = 0, 1, \dots, q$ için, $b_h, \Delta_h \in K$ simpleksinin merkezi ve $\emptyset \neq \Delta_0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_q$ olduğunda $\Delta(b_0, b_1, \dots, b_q)$ şeklindeki bütün simplekslerin K' ailesi K kompleksinin bir altbölmesidir.

İspat: Not 1.54 den $\Delta' \in K'$ olması için $\Leftrightarrow K$ kompleksinin bazı $a_0, a_1, \dots, a_n$ köşelerinin bir düzenlenmesi vardır öyleki $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \in K$ ve $\Delta' = \Delta(b_{j_0}, b_{j_1}, \dots, b_{j_q})$ dir. Burada $j = 0, 1, \dots, n$ için $b_j = \frac{1}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h$ ve $0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_q \leq n$ dir. Buradan K' 'nin (SC1) şartını sağladığı açıktır.

Gösterelimki (SC2') şartı sağlanır. Eğer, $x \in \text{ic}\Delta(b_{j_0}, b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$ ise $j=0, 1, \dots, n$ için $s_j \geq 0$ ve $\sum_{j=0}^n s_j = 1$ olmak üzere $x = \sum_{j=0}^n s_j b_j$ dir. Ayrıca $s_j > 0$ olması için $\Leftrightarrow j \in \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ olmasıdır. Bu durumda $x = \sum_{j=0}^n \frac{s_j}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h$ dir ve $h=0, \dots, n$ için $r_h = \sum_{j=h}^n \frac{s_j}{j+1}$ alındığında $r_h \geq 0$ olmak üzere $x = \sum_{h=0}^n r_h a_h$ elde edilir. Böylece $\sum_{h=0}^n r_h = \sum_{h=0}^n \sum_{j=h}^n \frac{s_j}{j+1} = \sum_{j=0}^n s_j = 1$ dir. Üstelik; $h=0, 1, \dots, n-1$ için $r_h - r_{h+1} = \frac{s_h}{h+1}$ olduğundan $r_{h+1} \leq r_h$ alabiliriz. Burada $r_{h+1} < r_h$ olması için $\Leftrightarrow$

$h \in \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ olmasıdır ve $0 < r_n$ olması için $\Leftrightarrow n \in \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ olmasıdır.

(Bu durumda, $x \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ noktasının merkezil koordinatlarını büyükten küçüğe doğru sıralayarak) $\{j_0, j_1, \dots, j_n\}$ indis sistemi tek olarak belirlenir.

Genelliği bozmaksızın $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksi minimal boyutlu alındığında $j_q = n$ sonucunu çıkarabiliriz. Böylece $0 < r_n$ dir. Bu durumda $h=0, 1, \dots, n$ için

$0 < r_n$ dir. Yani $x \in \text{ic}\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dir. K 'nın farklı simplekslerinin geometrik

içleri farklı olduğundan K' ailesi (SC2') şartını sağlar. Dolayısıyla K' bir simpleksel kompleksdir. Açık olarak $|K'| \subset |K|$ dir. $x \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \in K$

olsun. Bu durumda $h=0, 1, \dots, n$ için $r_h \geq 0$ ve $\sum_{h=0}^n r_h = 1$ olmak üzere $x = \sum_{h=0}^n r_h a_h$

yazılır. Köşelere uygun bir permütasyon alındığında $h=0, 1, \dots, n-1$ için $r_{h+1} \leq r_h$

alabiliriz. $j=0, 1, \dots, n-1$ için $s_j = (j+1)(r_j - r_{j+1})$ ve $s_n = (n+1)r_n$ olsun. Bu

durumda $j=0, 1, \dots, n$ için $s_j \geq 0$ ve $\sum_{j=0}^n s_j = \sum_{h=0}^n r_h = 1$ dir. Ayrıca,

$$x = \sum_{h=0}^n r_h a_h = \sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \sum_{h=0}^j a_h + r_n \sum_{h=0}^n a_h = \sum_{j=0}^n s_j b_j \text{ dir.}$$

O halde $x \in \Delta(b_0, b_1, \dots, b_n)$ dir. Burada $j=0, 1, \dots, n$ için $b_j = \frac{1}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h$

dir.

Burada elde edilen K' ailesine K 'nın *merkezil altbölmesi* denir.

Sonuç 1.57. Eğer, K' , K 'nın merkezil altbölmesi ise $\text{boy } K' = \text{boy } K$ dir.

Önerme: 1.58. $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ noktaları bir afin bağımsız küme ve $j=0, \dots, n$ için b_j , $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ simpleksinin merkezi olsun. Bu durumda

$$\text{Çap}\Delta(b_0, b_1, \dots, b_n) \leq \frac{n}{n+1} \text{Çap}\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) \text{ dir.}$$

İspat: $\Delta(b_0, b_1, \dots, b_n)$ simpleksinin çapı için $0 \leq j \leq k \leq n$ olmak üzere

$$b_j - b_k = \sum_{h=0}^j \frac{1}{j+1} a_h - \sum_{h=0}^k \frac{1}{k+1} a_h$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{k+1} \right) \sum_{h=0}^j a_h - \frac{1}{k+1} \sum_{h=j+1}^k a_h \\
&= \frac{k-j}{k+1} \left(\frac{1}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h - \frac{1}{k-j} \sum_{h=j+1}^k a_h \right) \\
&\frac{1}{j+1} \sum_{h=0}^j a_h \in \Delta(a_0, a_1, \dots, a_j) \text{ ve } \frac{1}{k-j} \sum_{h=j+1}^k a_h \in \Delta(a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_k)
\end{aligned}$$

olduğundan $|b_j - b_k| \leq \frac{k-j}{k+1} \text{Çap} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dir. $\frac{k-j}{k+1} \leq \frac{k}{k+1} \leq \frac{n}{n+1}$ ve

önerme 1.10 dan, $\text{Çap} \Delta(b_0, b_1, \dots, b_n) \leq \frac{n}{n+1} \text{Çap} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dir.

Sonuç 1.59. Eğer, K' n -boyutlu K simpleksel kompleksinin bir merkezli altbölmesi ise $\text{Çap} K' \leq \frac{n}{n+1} \text{Çap} K$ dır.

İspat: K , n -boyutlu simpleksel kompleks ise en az bir $\Delta \in K$ var öyleki boy $\Delta = n$ dir. Önerme 1.58 dan $\text{Çap} K' \leq \frac{n}{n+1} \text{Çap} K$ olduğu açıktır.

Tanım 1.60. K bir simpleksel kompleks ve p negatif olmayan bir tamsayı olsun. K nın p defa merkezli altbölmelerine ayrılmasına *p mertebeli merkezli altbölme* denir ve $K^{(p)}$ ile gösterilir. K nın 0-mertebeli merkezli altbölmesi $K^{(0)} = K$ dır.

Sonuç 1.61. Eğer, $K^{(p)}$, n -boyutlu simpleksel kompleks K nın p mertebeli merkezli altbölmesi ise, $\text{Çap} K^{(p)} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \text{Çap} K$ dır.

Sonuç 1.62. Eğer, $K^{(p)}$, bir K kompleksinin merkezli altbölmesi ise $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{Çap} K^{(p)} = 0$ dır.

1.6. Simpleksel Dönüşümler

Tanım 1.63. K ve L simpleksel kompleksler olsun. K ve L nin sırası ile köşelerinin kümeleri K_0 ve L_0 olsun. $K_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ olmak üzere $\varphi_0: K_0 \rightarrow L_0$ dönüşümüne *köşelerin simpleksel dönüşümü* denir, eğer $\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) \in K$ simpleksini belirleyen $a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}$ köşelerinin her kümesi için $\varphi_0(a_{j_0}), \varphi_0(a_{j_1}), \dots, \varphi_0(a_{j_n})$ noktaları $\Delta(\varphi_0(a_{j_0}), \varphi_0(a_{j_1}), \dots, \varphi_0(a_{j_n})) \in L$ simpleksini belirtiyorsa.

Yukarıda tanımlanan dönüşüm bire-bir ve örten ise bu dönüşüme *simpleksel izomorfizm*, simpleksel komplekslerde *simpleksel izomorfik* denir.

Örnek 1.64. (1) Her n -boyutlu simpleksel kompleks, $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayındaki bir simpleksel komplekse simpleksel olarak izomorfiktir.

K , köşeleri $a_0, a_1, \dots, a_k$ olan bir n -boyutlu simpleksel kompleks olsun. $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayında genel durumlu bir küme $\{b_0, b_1, \dots, b_k\}$ 'yi (Yani $\{b_0, b_1, \dots, b_k\}$ kümesinin en azından $2n+2$ elamanını içeren her altkümesi afin bağımsız) düşünelim.

$\mathbb{R}^{2n+1}$ de simplekslerin bir L ailesi, $\Delta(a_{h_0}, a_{h_1}, \dots, a_{h_p}) \in K \Leftrightarrow \Delta(b_{h_0}, b_{h_1}, \dots, b_{h_p}) \in L$ olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi L ailesinin simpleksel kompleks olduğunu gösterelim.

(SC1) Açıktır.

(SC2') $\Delta_1, \Delta_2 \in L$ ve $x \in i\check{\cap}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ olsun. $\sum_{i=0}^k r_i = 1 = \sum_{i=0}^k s_i$ olmak üzere $x = \sum_{i=0}^k r_i b_i$ ve $x = \sum_{i=0}^k s_i b_i$ yazılabilir. r_i ve s_i lerin $n+1$ 'er tanesi sıfırdan farklıdır. $i=0,1,\dots,k$ için $t_i = r_i - s_i$ olsun. $\sum_{i=0}^k t_i = 0$ ve $\sum_{i=0}^k t_i b_i = 0$ dır. $b_0, b_1, \dots, b_k$ noktaları genel durumlu olduğundan $t_i = 0$ dır. Bu ise $i=0,1,\dots,k$ için $r_i = s_i$ demektir. Dolayısıyla $\Delta_1 = \Delta_2$ dir. O halde L ailesi K ailesine simpleksel izomorfiktir.

Bir soyut simpleksel kompleks X 'in somutlaştırması (realization), X 'e izomorfik olan, bir K simpleksel kompleksinin varlığıdır.

(2) Her 1-boyutlu soyut simpleksel kompleks, $\mathbb{R}^3$ de bir somutlaştırmaya sahiptir.

$C = \{(x, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ kümesini düşünelim. C kümesi genel durumlu bir kümedir. Yani, C 'nin her farklı dört P_0, P_1, P_2, P_3 noktası afin bağımsızdır. Bunun için $\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \vec{P_0P_3}$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını, (Vandermonde determinanı)

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2 & (x_1 - x_0)^3 \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)^2 & (x_2 - x_0)^3 \\ x_3 - x_0 & (x_3 - x_0)^2 & (x_3 - x_0)^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

detarmından söyleyebiliriz.

$X=(V,S)$, 1-boyutlu soyut simpleksel kompleks olsun. Eğer $s \in S$ ise $s \subset V$ ve $|s| \leq 2 < 4$ dir. Böylece s 'nin elamanlarına karşılık gelen P ler afin bağımsızdır. Köşeleri P ler olan simplekslerden oluşan bir K ailesi 1-boyutlu simpleksel kompleksdir. Gerçekten;

SC1) K daki her simpleks kendi yüzlerini (Burada P noktaları veya 0-simplekslerdir) içerir.

SC2) K 'nın farklı iki simpleksi (P_0P_1) ve (P_1P_2) olsun (P_1) , 0-simpleksi, hem (P_0P_1) simpleksinin hemde (P_1P_2) simpleksinin bir ortak yüzüdür. O halde K , 1-boyutlu simpleksel kompleksdir. K ile X 'in köşeleri arasında bire-bir dönüşüm olduğundan bunlar simpleksel izomorfiktir.

(3) Her n -boyutlu soyut simpleksel kompleks, $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'de realizationa sahiptir. Ayrıca, aynı soyut simpleksin herhangi iki realizationı izomorfiktir.

Bunun çözümü; (2) inci örnekte C yerine $C = \{(x, x^2, \dots, x^{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi alınarak benzer şekilde yapılır.

$\varphi: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşüm, $K_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ ve $L_0 = \{b_0, b_1, \dots, b_\ell\}$ kümeleri K ile L nin sırasıyla köşelerinin kümesi olsun. φ 'nin oluşturduğu $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$ dönüşümü merkezli koordinatlar yolu ile $|\varphi| \left(\sum_{h=0}^k r_h a_h \right) = \sum_{i=0}^{\ell} s_i b_i$ şeklinde tanımlanmış olsun. Burada $\varphi(a_h) = b_j$ olmak üzere, s_j bütün r_h ların toplamına eşittir. Böylece $j=0,1,\dots,\ell$ için $s_j \geq 0$ ve $\sum_{h=0}^k r_h = 1$ dir. Ayrıca φ simpleksel dönüşüm olduğundan $x \in |K|$ ise $|\varphi|(x) \in L$ dir. Bu durumda aşağıdaki teorimi verebiliriz.

Teorem 1.65. Her $\varphi: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümünden elde edilen, $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Teorem 1.47 den $g: |K| \rightarrow |\overline{K}|$ ve $h: |L| \rightarrow |\overline{L}|$ dönüşümleri homeomorfizmdir. $|\overline{\varphi}|: |\overline{K}| \rightarrow |\overline{L}|$, $(r_0, r_1, \dots, r_k) \rightarrow (s_0, s_1, \dots, s_\ell)$ dönüşümü süreklidir. dolayısıyla $|\varphi| = h^{-1}|\overline{\varphi}|g$ süreklidir.

1.7. Hücreler ve Hücresel Kompleksler

Tanım 1.66 Standart kapalı n -yuvar $\overline{B}^n$ (Standart açık n -yuvar B^n) 'e homeomorf olan $\mathbb{R}^m$ nin bir e altuzayına *kapalı* (açık) *n-hücre* denir. Diğer bir deyimle, $\mathbb{R}^m$ in sonlu sayıda kapalı yarı-düzlemlerin sınırladığı bölgeye bir *hücre* denir.

Örnek 1.67. Her n -boyutlu simpleks bir n -hücredir.

Tanım 1.68. $\mathbb{R}^m$ de hücrelerin sonlu bir K ailesine *hücresel kompleks* denir, eğer aşağıdaki şartlar varsa.

(CC1) Herhangi bir $e \in K$ hücresinin sınırı K ya ait hücrelerin birleşimidir.

(CC2) Her $e_1, e_2 \in K$ için $e_1 \cap e_2 \in K$ dır.

(CC3) K nın farklı hücrelerinin geometrik içleri ayrıktır.

Örnek 1.69. (1) Her simpleks hücresel kompleksdir.

(2) Her simpleksin sınırı hücresel kompleksdir.

(3) Her simpleksel kompleks bir hücresel kompleksdir.

X herhangi bir küme ve $\{A_t\}_{t \in T}$ X 'in altkümelerinin bir ailesi olsun. Kabul edelimki her $t \in T$ için A_t topolojik uzay ve aşağıdaki şartlar sağlasın.

(1) Her $t, t' \in T$ indis çifti için $A_t \cap A_{t'}$ kümesi üzerinde A_t ve $A_{t'}$ 'nın altuzay topolojileri tanımlı ve her ikisinin $A_t \cap A_{t'}$ üzerindeki altuzay topolojileri çakışıktır.

(2) Her $t, t' \in T$ indis çifti için $A_t \cap A_{t'}$ kümesi her iki uzayda, A_t ve $A_{t'}$ 'ünde kapalıdır veya alternatif olarak,

(2') Her $t, t' \in T$ indis çifti için $A_t \cap A_{t'}$ kümesi her iki uzayda, A_t ve $A_{t'}$ 'ünde açıktır.

Kolayca görülebilirki $\tau = \{A \subset X: \forall t \in T \text{ için } A \cap A_t \subset A_t \text{ açık}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

$T_1)$ $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ dir.

$T_2)$ $A, B \in \tau$ olsun.

$A \in \tau \Rightarrow \forall t \in T \text{ için } A \cap A_t, A_t$ 'de açık

$B \in \tau \Rightarrow \forall t \in T \text{ için } B \cap A_t, A_t$ 'de açık

$\Rightarrow \text{Her } t \in T \text{ için } (A \cap A_t) \cap (B \cap A_t) = (A \cap B) \cap A_t, A_t$ 'de açık

$\Rightarrow A \cap B \in \tau$

$T_3)$ $\forall i \in I \text{ için } A_i \in \tau$ olsun.

Bu durumda, $\forall i \in I$ ve $\forall t \in T$ için $A_i \cap A_t, A_t$ 'de açık

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} (A_i \cap A_t) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap A_t, A_t$ de açık $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Bu durumda, (X, τ) ikilisine *zayıf topolojik uzay* denir.

Tanım 1.70. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Birleşimleri X olan X 'in ikişer ikişer ayrık altkümelerinin ailesine X 'in *ayrışımı* denir.

Tanım 1.71. X , bir topolojik uzay olsun. Altuzayları hücreler olan X 'in bir ayrışımına *hücre ayrışımı* denir ve $\mathcal{E}$ ile gösterilir. X 'in bir hücre ayrışımı $(X, \mathcal{E})$ ile gösterilir.

Tanım 1.72. X , Hausdorff uzay olsun. $(X, \mathcal{E})$ hücre ayrışımına bir *CW-kompleks* denir (Janich, Klaus), eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa

(1) (Karakteristik Dönüşümler) Herbir n -hücre $e \in \mathcal{E}$ için $\phi_e: \bar{B}^n \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu vardır $\ni \phi_e|_{B^n}: B^n \rightarrow X$ homeomorfizm ve $\phi_e(S^{n-1}) \subset \mathcal{E}^{n-1}$ dir.

(Burada S^{n-1} ; $n-1$ küre, $\mathcal{E}^{n-1}$; $(n-1)$ -iskelet)

(2) (Kapanışın sonluluğu) Herbir $e \in \mathcal{E}$ için $\bar{e}, \mathcal{E}$ 'nin sonlu sayıda elamanları ile kesişir.

(3) (Zayıf Topoloji) $A \subset X$ kapalıdır $\Leftrightarrow \forall e \in \mathcal{E}$ için $\bar{e} \cap A$ kapalı ise.
CW- kompleks adını (2) ve (3) 'üncü şartların ingilizce baş harflerinden almıştır.

Örnek 1.73. (1) Her simpleksel kompleks bir CW-kompleksdir.

(2) Her hücresele kompleks bir CW-kompleksdir.



2. KATEGORİ VE SİMPEKSEL KÜMELER

2.1. Kategori ve Funktorlar

Tanım 2.1. C kategorisi iki sınıftan oluşan bir sistemdir. Bu sınıflar ise:

- 1) Elamanlarına *nesne* denilen ve ObC ile gösterilen sınıfı,
- 2) Elamanlarına *morfizm* denilen ve $MorC$ ile gösterilen sınıftır öyleki C 'nin her bir morfizmine tanım ve değer bölgesi olarak adlandırılan iki nesne tekabül etmektedir. $X \in ObC$ ve $Y \in ObC$ nesnelerini tanım ve değer bölgesi olarak kabul eden bütün morfizmlerin kümesi $Mor(X, Y)$ yada $C(X, Y)$ ile gösterilir ve $f \in Mor(X, Y)$ ise $f: X \rightarrow Y$ yazılır. C 'de kompozisyon işlemi tanımlıdır öyleki $f \in Mor(X, Y)$, $g \in Mor(Y, Z)$ ise bunların $g \circ f$ (veya gf) kompozisyonu, tanım bölgesi X değer bölgesi Z olan bir morfizmdir. Yukarıda tanımlanan kavramlar aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

KAT1 (Asosyatiflik) Eğer $f \in Mor(X, Y)$ $g \in Mor(Y, Z)$ ve her $h \in Mor(Z, W)$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.

KAT2 (özdeş morfizmin varlığı) Her $X \in ObC$ için öyle bir $1_X \in Mor(X, X)$ vardır, eğer $f \in Mor(Y, X)$ ve $g \in Mor(X, Y)$ ise $1_X \circ f = f$, $g \circ 1_X = g$ dir.

Örnek 2.2. Δ kategoridir öyleki;

i) Δ 'nın nesneleri; $[n] = (0, 1, \dots, n)$, 0 'dan n 'ye kadar tamsayıların kümesi

ii) Δ 'nın morfizmleri; her $[p]$ ve $[q]$ nesneleri için $m: [p] \rightarrow [q]$, $a, b \in [p]$ ve $a \leq b$ için $m(a) \leq m(b)$ özelliğini sağlayan monotonik fonksiyonlar,

iii) Kompozisyon kuralı, fonksiyonların bileşke işlemidir.

Tanım 2.3. C ve D iki kategori olsun. D 'ye C 'nin *altkategorisi* denir (Barr, M.), eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa;

- a) D nin her bir nesnesi C nin nesnesi ise, yani $ObD \subset ObC$
- b) Her $X, Y \in ObD$ için $D(X, Y) \subset C(X, Y)$,
- c) D deki kompozisyon kuralı C deki ile aynıdır.
- d) Her bir $X \in ObD$ için $D(X, X)$ 'in özdeş elamanı $C(X, X)$ 'in özdeş elamanıdır.

Eğer, her $X, Y \in ObD$ için $D(X, Y) = C(X, Y)$ ise D 'ye C nin *tam* (full) *altkategorisi*; Eğer $ObD = ObC$ ise D 'ye C nin *geniş* (Wide) *altkategorisi* denir.

Tanım 2.4. C bir kategori olsun. f ve g C de iki morfizm olmak üzere $g \circ f$ kompozisyonu tanımlı ve $g \circ f = 1$ olsun. Bu durumda g 'ye f 'nin *sol inversi*, f 'ye g 'nin *sağ inversi* denir. Eğer, f 'nin sol ve sağ inversi var ise bunlar çakışıktır. Bu takdirde f 'ye *tersi alınabilir* veya *izomorfizm* denir; f 'nin inversi var ise f^{-1} ile gösterilir.

Örnek 2.5. Kümeler ve fonksiyonlar kategorisi ($\equiv Set$); Gruplar ve homomorfizmler kategorisi ($\equiv Grp$); Topolojik uzaylar ve homeomorfizmler kategorisi ($\equiv \mathcal{T}$) olsunlar. Bunların herbirinde kompozisyon kuralı fonksiyonların bileşkesidir, özdeş morfizmi ise özdeş fonksiyonlardır. Bu kategorilerde izomorfizmler sırasıyla bijeksiyon, izomorfizm ve homeomorfizmlerdir.

Tanım 2.6. C ve D iki kategori olsun. $F : C \rightarrow D$ dönüşümüne (kovaryant) *funktor* denir, eğer C ye ait her bir X nesneye D 'de $F(X)$ nesne ve C ye ait her bir $f : X \rightarrow Y$ morfizmine, D 'de $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmi tekabül etmek üzere aşağıdaki şartları sağlıyorsa.

1. Eğer $1_X: X \rightarrow X$ C 'de özdeş morfizm ise $F(1_X): F(X) \rightarrow F(X)$, D 'de özdeş morfizmdir. Yani $F(1_X) = 1_{F(X)}$ dir.

2. Eğer $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow Z$ C 'de morfizmler ise $F(g.f) = F(g). F(f)$ dir.

Aşıkarak; $1_C: C \rightarrow C$ özdeş fonktor, $F: C \rightarrow D$ ve $G: D \rightarrow E$ iki fonktor olmak üzere $GF: C \rightarrow E$ kompozisyonunu tanımlayabiliriz. Dolayısıyla, nesneleri kategoriler ve morfizmleri fonktörler olan bir kategori oluşturabiliriz. Bu kategoriye *büyük (large) kategori* denir (Barr,1985).

2.2. Kategori Üzerinde Bazı Yapılar

(1) C bir kategori olsun. Bu kategoriden faydalanarak bir C^{op} kategorisi tanımlanabilir öyleki $Ob C^{op} = Ob C$ ve $C^{op}(Y,X) = C(X,Y)$ dir. Yani C 'de $A \rightarrow B$ ise C^{op} 'da $B \rightarrow A$ dır. C^{op} kategoriye C 'nin *oposit* (veya dual) kategorisi denir.

(2) C bir kategori ve $A \in C$ olsun C nin *dilim kategorisi* diye, C/A ile gösterilir, nesneler sınıfı ; A 'yı değer bölgesi kabul eden C nin morfizmlerinin kümesidir ve morfizmler sınıfı ise $f \in Mor(B,A)$ 'dan $g \in Mor(C,A)$ 'ya $h \circ g = f$ olacak şekilde tanımlı $h \in Mor(B,C)$ lerden oluşur.

Bu kategoriye, $Mor(B,A) = Hom(B,A)$ olmak üzere $Hom(-,A): C^{op} \rightarrow Set$ fonktörü olarak düşünebiliriz. Öyleki bu $Hom(-,A)$ fonktörü, her $B \in Ob C$ için Set 'de $Hom(B,A)$ kümesini ve her $f \in C(B,C)$ morfizmine Set 'de

$$Hom(f,A) : Hom(C,A) \rightarrow Hom(B,A)$$

fonksiyonunu karşılık getirmektedir.

Benzer şekilde, C/A nın oposit kategorisinde $\text{Hom}(A, -) : C \rightarrow \text{Set}$ kovaryant fonktoru olarak düşünebiliriz.

(3) Funktorların kategorisi;

Topolojide $f, g: X \rightarrow Y$ fonksiyonları arasındaki homotopi her $x \in X$ için $f(x)$ 'i $g(x)$ 'e birleştiren bir eğridir. Öyleki bu eğriler sürekli bir deformasyondur. Benzer şekilde bir funktordan diğer bir funktora tabii dönüşüm bir deformasyon olarak tanımlanabilir.

$F, G: C \rightarrow D$ iki fonktor olsun. Bu durumda $\lambda: F \rightarrow G$ morfizmine *tabii dönüşüm* denir, eğer λ , her $C \in \text{Ob } C$ için bir tek $\lambda_C : F(C) \rightarrow G(C)$ olmak üzere, λ_C lerin kompozisyonu; her $g: C \rightarrow C'$ için aşağıdaki diagramı komutatif yapıyorsa.

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\lambda_C} & G(C) \\ F(g) \downarrow & & \downarrow G(g) \\ F(C') & \xrightarrow{\lambda_{C'}} & G(C') \end{array}$$

λ_C morfizmlerine λ 'nın *bileşenleri* denir.

λ tabii dönüşümüne *tabii eşdeğerlik* denir, eğer λ 'nın her bileşeni D 'de bir izomorfizm ise.

Dolayısıyla, C ve D kategorileri olmak üzere C 'den D 'ye fonktorların $\text{Func}(C, D)$ ailesi elamanları; fonktorlar ve nesneleri; bu fonktorlar arasındaki tabii dönüşümler olan bir kategori oluşturur. Bu kategoride kompozisyon kuralı, $\lambda: F \rightarrow G$ ve $\mu: G \rightarrow H$ tabii dönüşümler olmak üzere, $\mu \circ \lambda$ kompozisyonu; her

$C \in \text{Ob } C$ için bileşenleri $\mu_C \circ \lambda_C$ olan tabii dönüşümlerdir. $\text{Func}(C, D)$ kategorisine *funktorlar ve tabii dönüşümler kategorisi* denir (Barr, 1985).

Örnek 2.7. C bir kategori, $A \in \text{Ob } C$ sabit nesne olmak üzere $\text{Hom}(A, -): C \rightarrow \text{Set}$ fonktor, $F: C \rightarrow \text{Set}$ keyfi bir fonktor ve $a, F(A)$ 'nın sabit elamanı olsun. Bu durumda $\lambda^a: \text{Hom}(A, -) \rightarrow F$, her $B \in \text{Ob } C$ için

$$\lambda_B^a: \text{Hom}(A, B) \rightarrow F(B), g \rightarrow \lambda_B^a(g) = (F(g))(a)$$

şeklinde tanımlı λ^a dönüşümü bir tabii dönüşümdür (Dold, A). Gerçekten, $f \in C(B, C)$ için,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, f)} & \text{Hom}(A, C) \\ \lambda_B^a \downarrow & & \downarrow \lambda_C^a \\ F(B) & \xrightarrow{F(f)} & F(C) \end{array}$$

$\lambda_C^a \circ \text{Hom}(A, f)(g) = \lambda_C^a(f \circ g) = (F(f \circ g))(a)$ ve
 $(F(f) \circ \lambda_B^a)(g) = F(f)(\lambda_B^a(g)) = F(f)(F(g)(a)) = F(f \circ g)(a)$ dir.
 $\lambda_C^a \circ \text{Hom}(A, f) = F(f) \circ \lambda_B^a$ olduğundan diagram komutatiftir.

Önerme 2.8. (Yoneda-lemma) C bir kategori olsun. Eğer, $F: C \rightarrow \text{Set}$ herhangi bir fonktor ve $\lambda: \text{Hom}(A, -) \rightarrow F$ bir tabii dönüşüm ise, bu durumda bir tek $a \in F(A)$ var öyleki $\lambda = \lambda^a$, yani $a = \lambda_A(1_A)$ dir.

İspat: λ tabii dönüşüm ise her $g \in \text{Hom}(A, B)$ için;

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, g)} & \text{Hom}(A, B) \\ \lambda_A \downarrow & & \downarrow \lambda_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(g)} & F(B) \end{array}$$

diagramı komutatiftir. Yani,

$$\begin{aligned} (\lambda_B \circ \text{Hom}(A, g))(1_A) &= \lambda_B(\text{Hom}(A, g)(1_A)) = \lambda_B(g) = (F(g))(a) \text{ ve} \\ (F(g) \circ \lambda_A)(1_A) &= F(g)(\lambda_A(1_A)) \text{ ise, } a = \lambda_A(1_A) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tanım 2.8. C bir kategori, $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ bir fonktor ve $A \in \text{Ob } C$ olsun. $F(A)$ 'nın bir a elemanına *ünivarsal eleman* denir, eğer, $\lambda^a : \text{Hom}(A, -) \rightarrow F$ tabii dönüşümü tabii eşdeğerlik ise. Her fonktorun üniversal elemanı olmak zorunda değildir. Üniversal elemana sahip bir F fonktora *representable fonktor* denir (Dold, A).

Tanım 2.9. C ve D kategoriler, $L : C \rightarrow D$ ve $R : D \rightarrow C$ iki fonktor olsun $P, Q : C^{\text{op}} \times D \rightarrow \mathbf{Set}$ fonktörleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P(C, D) = \text{Mor}_D(L(C), D), \quad Q(C, D) = \text{Mor}_C(C, R(D)) \\
 2) \quad & f \in \text{Mor}_{C^{\text{op}}}(C_1, C_2) \text{ (Yani } \text{Mor}(C_1, C_2)) \text{ ve } g \in \text{Mor}_D(D_1, D_2) \text{ olmak üzere.} \\
 & P(f, g) : \text{Mor}_D(L(C_1), D_1) \rightarrow \text{Mor}_C(C_2, R(D_2)) \\
 & \quad p \rightarrow L(f).p.g \\
 & Q(f, g) : \text{Mor}_C(C_1, R(D_1)) \rightarrow \text{Mor}_D(L(C_2), D_2) \\
 & \quad q \rightarrow f.q.R(g)
 \end{aligned}$$

dir. Eğer, P ve Q fonktörleri tabii denk ise (L, R) ye *adjoint fonktörlerin ikilisi* denir. L' ye R' nin *sol*, R' ye L' nin *sağ adjointti* denir.

2.3. Kategoride Bir Nesnenin Elemanları Ve Alt nesneleri

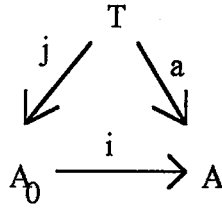
Bir C kategorisinde $x : T \rightarrow A$ morfizmi, A 'nın T üzerinde tanımlı bir elemanı olarak düşünülebilir (Barr, 1985). A 'nın her bir elemanı T üzerinde tanımlı ise T 'ye A 'nın parametrik tanım bölgesi denir. x , A 'nın T üzerinde tanımlı bir elemanı ise " $x \in {}^T A$ " ile gösterilir. Eğer, $x \in {}^T A$ ve $f : A \rightarrow B$ ise $fox \in {}^T B$ dir. Burada fox , $x \in {}^T A$ 'nın f morfizminde aldığı değerdir. Dolayısıyla fox yerine $f(x)$ yazabiliriz.

$f : A \rightarrow B$ morfizmine *monomorfizm* denir, eğer $x, y \in {}^T A$ olmak üzere $fox = foy$ iken $x = y$ ise. Diğer bir deyişle $\text{Hom}(T, f) : (T, A) \rightarrow \text{Hom}(T, B)$ fonksiyonu bire-birdir.

$f:A \rightarrow B$ morfizmine *epimorfizm* denir, eğer $x,y:B \rightarrow T$ morfizmleri için $x \circ f = y \circ f$ iken $x=y$ ise, yani, $\text{Hom}(f,T) \rightarrow \text{Hom}(A,T)$ fonksiyonu bire-bir (örten değil!) ise.

Kategoride altnesne kavramı; altküme, altgrup, altuzay, v.s kavramlarının bir genelleştirmesidir.

$i: A_0 \rightarrow A$ morfizm ve $a: T \rightarrow A$ olsun. a 'ya i üzerinden faktör edilebilir (a factors through i) denir, eğer ,



diagramı komutatatif olacak şekilde bir $j:T \rightarrow A_0$ morfizmi varsa. Bu takdirde A' nin bir a elamanı A_0 'ın bir elamanıdır. Bu durumda aynı elamanlara sahip A_0 ' dan A' ya iki monomorfizm denktir denir. Bu şekilde tanımlanan denklik bağıntısı A_0 'dan A' ya olan morfizmlerin kümesini denklik sınıflarına ayırır. Bu sınıfların herbirine A' 'nın bir *alt nesnesi* denir.

Şimdi funktorlar ve tabii dönüşümler kategorisinde bir funktorun altfunktoru tanımını verelim.

Tanım 2.10. C bir kategori ve $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ e bir funktor olsun. F 'nin *altfunktoru* diye aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir G funktora denir.

- 1) Her $A \in \text{Ob } C$ için $G(A) \subset F(A)$
- 2) Eğer $f \in C(A,B)$ ise $G f (GA) \subset G(B)$ dir.

2.4. Kategoride Limit

Γ grafi, kabaca, köşelerden oluşan noktalar cümlesi ve herhangi iki köşeyi birleştiren kenar diye adlandıran eğriler cümlesinden oluşan bir sistemdir (Giblin,1977). Bunun yanı sıra, her hangi iki kenar, köşe noktaları

dışında kesişmeyecek şekilde alınır. Ayrıca, her bir eğrinin birleştiği köşelerin biri başlangıç, diğeri bitim noktası olarak alınırsa, bu kenarın yönü belirlenmiş olur.

Tanım 2.11. Yönlendirilmiş graf D ,

1) $V=V(D)$ *köşeler* (vertices) kümesi,

2) $E=E(D)$ *kenarlar* (edges) kümesi,

3) *incidence* (etki alanı) $\delta: E \rightarrow V \times V$ dönüşümünden ibarettir. Herhangi bir $x \in E$ için $\delta(x) = (\delta_1(x), \delta_2(x))$ ise $\delta_1(x)$ 'e *çıkış*, $\delta_2(x)$ 'e ise x 'in *varış* köşesi denir (Higgins, 1971) .

$\theta: D \rightarrow B$ graf-dönüşümü, incidence dönüşümünü koruyan $V(\theta): V(D) \rightarrow V(B)$, $E(\theta): E(D) \rightarrow E(B)$ fonksiyonlarının ikilisinden oluşmaktadır. Yani her $x \in E(D)$ için $\delta_i(E(\theta)(x)) = V(\theta)(\delta_i(x))$, $i = 1, 2$ dir.

Düzlemde grafın köşelerini noktalarla, kenarlarını ise çıkış köşesinden varış köşesine oklar ile göstereceğiz. İleride $V(D)$ yerine I yazacağız. Çıkış köşesi i , varış köşesi j olan bütün kenarların kümesini D_{ij} ile göstereceğiz; Yani, $x \in D_{ij} \Leftrightarrow \delta(x) = (i, j)$ dir. Dolayısıyla, $E(D)$ kümesi $i, j \in I$ olmak üzere D_{ij} kümelerinin ayrık birleşimidir. $x \in D_{ij}$ için $x: i \rightarrow j$ yazacağız.

C bir kategori ve D boş olmayan yönlendirilmiş graf olsun. C kategorisi bir C grafını belirtir öyle ki $V(C) = ObC$ ve $i, j \in V(C)$ olmak üzere $C_{ij} = Mor_C(i, j)$ dir. Kabaca C grafını kompozisyon kuralı kaldırılmış C kategori olarak düşünebiliriz. $A: D \rightarrow C$ graf-dönüşümüne C kategorisinde bir diagram denir. Eğer, D 'nin köşeler kümesi I ve kenarlar kümesi E ise A diagramı; C 'nin nesnelerinin $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi ve C 'nin morfizmlerinin $\{a_x\}_{x \in E}$ ailesinden oluşmaktadır. Burada $x: i \rightarrow j$ ise, $a_x: A_i \rightarrow A_j$ dir.

A' , nesneleri A'_i ve morfizmleri a'_x olan C 'de başka bir D -diagram olsun. Her $x \in D_{ij}$ için $f_i a'_x = a_x f_j$ olacak şekilde C 'nin $f_i: A_i \rightarrow A'_i$ morfizmlerinin $f = \{f_i\}_{i \in I}$ ailesine $f: A \rightarrow A'$ diagram-dönüşüm veya D -dönüşüm denir. Özel olarak D bir kategori ve A, A' fonktörler ise bu tabii dönüşüm tanımını verir. Bütün köşelerini C 'nin aynı A nesnesine ve bütün kenarlarını 1_A özdeş morfizme götüren D -diagramına sabit (veya aşık) denir. C 'nin her C nesnesi için sabit diagram bir tek olup $\Gamma(C)$ ile gösterilir. Dolayısıyla, nesneleri C 'deki bütün D -diagramları, morfizmleri ise bütün D -dönüşümler olan bir C^D kategorisini tanımlayabiliriz. Aynı zamanda, her $\alpha \in \text{Mor } C(A, B)$ için bileşenleri $\Gamma(\alpha)$ olan, $\Gamma(\alpha): \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(B)$, D -dönüşümü mevcuttur. O halde $\Gamma: C \rightarrow C^D$ kanonik fonktör elde edilir.

C bir kategori, A, C 'de bir diagram, $L \in \text{Ob } C$ ve $f: A \rightarrow \Gamma(L)$ D -dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.12. Eğer, her $K \in \text{Ob } C$ ve her $g: A \rightarrow \Gamma(K)$ diagram dönüşümü için $g = \Gamma(\beta)f$ (yani, her $i \in I$ için $g_i = \beta f_i$) olacak şekilde C 'nin bir tek $\beta: L \rightarrow K$ morfizmi varsa L nesnesine A diagramının *direkt limiti* (sağ limiti) denir ve $L = \varinjlim A$ ile gösterilir. Benzer şekilde, eğer her $g: \Gamma(K) \rightarrow A$ diagram-dönüşümü; $f: \Gamma(L) \rightarrow A$ dönüşümleri için $g = f\Gamma(\gamma)$ olacak şekilde bir tek $\gamma: K \rightarrow L$ morfizmi varsa L nesnesine A 'diagramının *invers limiti* (sol limiti) denir ve $L = \varprojlim A$ ile gösterilir (Higgins, P.C).

Eğer, C kategorisinde her D -diagramı direkt limite sahip ise C kategorisine *direkt limitleri ihtiva ediyor* denir. Bu taktirde, $\varinjlim C^D \rightarrow C$ fonktörü vardır. Çünkü; $h: A \rightarrow B$ diagram-dönüşüm ise diagram-dönüşümlerin $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma(\varinjlim B)$ kompozisyonu bir tek $\varinjlim h: \varinjlim A \rightarrow \varinjlim B$ morfizmini oluşturur.

Benzer şekilde, eğer C kategorisi D üzerinde invers limitleri ihtiva ediyorsa $\lim_{\leftarrow} C^D \rightarrow C$ bir funktordur. Limitlerin üniversal özelliğini göz önüne

alırsak, şunu söyleyebiliriz: Eğer C , D üzerinde direkt (invers) limitler ihtiva ediyorsa $\lim_{\rightarrow} C^D \rightarrow C$ ($\lim: C^D \rightarrow C$) funktoru $\Gamma: C \rightarrow C^D$ kanonik

funktorun sol (sağ) adjointidir.

Örnek 2.13. (1) D grafin köşeler kümesi I , kenarlar kümesi ise boş olsun. Bu taktirde C kategorisinde D -diagramı sadece C 'nin nesnelerinin $A = \{A_i\}_{i \in I}$

ailesidir. Eğer A 'nın invers limiti mevcut ise buna A_i nesnelerinin C 'de çarpımı denir ve $\prod_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. $p_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ kanonik dönüşümlere

projeksiyon denir. Üniversal özelliği gösteriyorki $q_i: B \rightarrow A_i$ ($i \in I$) dönüşümler ailesi ile $q_i = p_i \circ q$ olacak şekilde $q: B \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ dönüşümler ailesi arasında bire-bir tekabül vardır. I sonlu ise $\prod_{i \in I} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ile gösterilir. Benzer şekilde, A

'nın direkt limiti var ise, buna A_i nesnelerinin C 'de toplamı denir ve $\prod_{i \in I} A_i$ (veya $\sum_{i \in I} A_i$) ile gösterilir.

2) D grafi $1 \rightarrow 0 \leftarrow 2$ şeklinde verilsin. Bu durum da, $A_1 \xrightarrow{a_1} A_0 \xleftarrow{a_2} A_2$ C 'de D -diagramdır. Bu diagramın invers limitine a_1 ve a_2 'nin *pull-back* 'i veya A_1 ve A_2 'nin A_0 üzerinde lif çarpımı denir ve $A_1 \times_{A_0} A_2$ ile gösterilir. Aşağıdaki diagrama C 'de *pull-back kare* denir.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{p_2} & A_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow a_2 \\ A_0 & \xrightarrow{a_1} & A_0 \end{array}$$

Bu diagram komutatiftir ve üniversal özelliğe sahiptir. $g_1 a_1 = g_2 a_2$ şartını sağlayan $g_i: K \rightarrow A_i$ ($i = 1, 2$) morfizmleri için bir tek

$\gamma: K \rightarrow L$ morfizmi vardır $\exists g_1 = P_1 \gamma_1$ ve $g_2 = P_2 \gamma$ dır. Bu diagramın direkt limiti her zaman vardır ve A_0 dır.

3) D grafi $1 \leftarrow 0 \rightarrow 2$ şeklinde verilsin. Bu durumda $A_1 \xleftarrow{a_1} A_0 \xrightarrow{a_2} A_2$ C 'de bir D-diagramdır. Bu diagramın direkt limitine a_1 ve a_2 'nin *push-out* 'u veya A_1 ve A_2 'nin A_0 üzerinde lif koçarpımı (fibred coproduct) denir.

4) D grafi $0 \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \rightarrow \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} 1$ şeklinde verilsin. Bu durumda $A_0 \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \rightarrow \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} A_1$ C 'de bir D-diagramdır. Bu diagramın invers limitine f ve g 'nin *equalizer* 'i direkt limitine ise *coequalzer* 'i denir.

Bundan sonra $Ob C$ ve $Mor C$ yerine sadece C yazacağız.

2. 5. Simpleksel Kümeler

Tanım 2.14. C bir kategori olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \in C$ olmak üzere, $K = \{K_0, K_1, \dots, K_n, \dots\}$ dizisine C 'de bir *simpleksel nesne* (simplicial object) denir (Mac Lane, 1959), eğer $i = 0, 1, \dots, n$ için i - yinci yüz (face) dönüşüm $\partial_i: K_n \rightarrow K_{n-1}$ ve i -yinci *degeneracy* dönüşüm $s_i: K_n \rightarrow K_{n+1}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa

$$I) \partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \quad i < j$$

$$II) s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i \leq j$$

$$III) \partial_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} \partial_i & , i < j \\ id & , i = j, i = j+1 \\ s_j \partial_{i-1} & , i > j+1 \end{cases}$$

Burada $n \geq 0$ için K_n 'nin elemanlarına *n-simpleksler* denir. K_n 'nin bir x elemanı $y \in K_{n-q}$ olmak üzere $x = s_{i_q} \dots s_{i_1} y$ şeklinde yazılabiliyorsa x 'e *degenerate*, aksi halde *non-degenerate* denir.

K ve L simpleksel nesne olsun. Bu durumda $f: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümü, yüz ve degeneracy dönüşümleri komutatatif olan $f_n: K_n \rightarrow L_n$ dönüşümlerinin bir dizisidir.

Tanım 2.15. C bir kategori olsun. Δ kategorisindeki her bir $m: [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonuna karşılık gelen $m^*: K_q \rightarrow K_p$ dönüşümleri ile birlikte $K_0, K_1, \dots$ nesnelerinin bir dizisine C 'de bir *simpleksel nesne* denir. Burada $m_1: [q] \rightarrow [r], m_2: [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonları için $(m_1 \circ m_2)^* = m_2^* \circ m_1^*$ ve $(id)^* = id$ dir.

Bu tanımda bir $f: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümü bütün monotonik m fonksiyonları için $m^* f = f.m^*$ şartı ile karakterize edilir.

Tanım 2.16. C bir kategori olsun. Δ 'den C 'ye bir K kontravaryant funktora C 'de bir *simpleksel nesne* denir.

K ve L böyle iki funktor olsun. Bu durumda, bir $f: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümü K 'dan L 'ye bir tabii dönüşümdür.

Δ kategorisinde özel monotonik fonksiyonlar λ^i ve μ^i aşağıdaki şekilde tanımlıdır. $i = 0, 1, \dots, q$ olmak üzere

$$\lambda^i: [q-1] \rightarrow [q]$$

$$a \rightarrow \lambda^i(a) \quad , \quad \lambda^i(a) = \begin{cases} a & , 0 \leq a < i \\ a+1 & , i \leq a < q \end{cases}$$

$$\mu^i: [q] \rightarrow [q-1]$$

$$a \rightarrow \mu^i(a) \quad , \quad \mu^i(a) = \begin{cases} a & , 0 \leq a \leq i \\ a-1 & , i < a \leq q \end{cases}$$

Bu monotonik fonksiyonların çiftlerinin kompozisyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$I)_* \quad \lambda^j \cdot \lambda^i = \lambda^i \cdot \lambda^{j-1} \quad , \quad i < j$$

$$II)_* \quad \mu^j \cdot \mu^i = \mu^i \cdot \mu^{j+1} \quad , \quad i \leq j$$

$$III)_* \quad \mu^j \cdot \lambda^i = \begin{cases} \lambda^i \cdot \mu^{j-1} & , \quad i < j \\ \text{id} & , \quad i = j \quad , \quad i = j+1 \\ \lambda^{i-1} \cdot \mu^j & , \quad i > j+1 \end{cases}$$

Bu eşitlikler tanım 2.14 deki eşitliklerin dualidir.

Önerme 2.17. Herhangi bir $u: [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonu, v monotonik ve monomorfik , w monotonik ve epimorfik olmak üzere $u = v \cdot w$ olacak şekilde tek olarak yazılır.

İspat: $w: [p] \rightarrow u([p])$ ve $v: u([p]) \rightarrow [q]$, $v(b) = b$ şeklinde tanımlanırsa $u = v \cdot w$ olur ve v w kompozisyonu tektir.

Herhangi bir u monotonik fonksiyonu λ^i ve μ^i özel monotonik fonksiyonların kompozisyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir. $u(i) = u(i+1)$ olacak şekilde $i \in [p]$ sayılarının kümesini $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ sırasında, $u([p])$ de olmayan $j \in [q]$ sayılarının kümesini ters sırada $j_1 > j_2 > \dots > j_t$ olarak yazıldığında $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq p$, $q > j_1 > j_2 > \dots > j_t \geq 0$ ve $q - t + s = p$ olmak üzere $u = \lambda^{j_1} \dots \lambda^{j_t} \cdot \mu^{i_1} \dots \mu^{i_s}$ şeklinde yazılır. Bu kompozisyona u nun *kanonik formu* denir. Benzer şekilde $u^* : K_q \rightarrow K_p$ dönüşümünde $u^* : s_{i_1} \dots s_{i_t} \cdot \partial_{j_1} \dots \partial_{j_s}$ olarak ifade edilir.

Teorem 2.18. Yukarıda verilen simpleksel nesnenin üç tanımı (i) 2.14 , (ii) 2.15 ve (iii) 2.16 birbirine denktir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii)

K bir simpleksel nesne olsun. Herhangi bir $u : [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonuna karşılık gelen u^* dönüşümü ; $u = \lambda^{j_1} \dots \lambda^{j_t} \cdot \mu^{i_1} \dots \mu^{i_s}$ olmak üzere $u^* : s_{i_1} \dots s_{i_t} \cdot \partial_{j_1} \dots \partial_{j_s} : K_q \rightarrow K_p$ şeklinde tanımlanır. Burada $m_1 : [q] \rightarrow [r]$, $m_2 : [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonlar ise $(m_1 \circ m_2)^* = m_2^*$. m_1^* ve $(id)^* = id$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Herhangi bir $u : [p] \rightarrow [q]$ monotonliğine karşılık gelen $u^* : K_q \rightarrow K_p$ dönüşümü ile K simpleksel nesnesi verilsin. Bu durumda,

$$(1) \text{ Her } [p] \in \Delta \text{ için } K([p]) = K_p$$

$$(2) \text{ Her } u \in \Delta \text{ morfizmi için } K(u) = u^*$$

$$(3) u_1 : [p] \rightarrow [q] \text{ ve } u_2 : [q] \rightarrow [r] \text{ monotonik fonksiyonları için } K(u_2 \circ u_1) = K(u_1) K(u_2)$$

şartları sağlanır. Dolayısıyla $K : \Delta \rightarrow C$ 'ye bir kontravaryant funktordur.

iii) $\Rightarrow$ (i) $K: \Delta \rightarrow C'$ 'ye bir kontravaryant fonktor olsun. $K_0=K([0]$, $K_1=K([1])$,..., $K_q=K([q])$,... dizisi ile birlikte $i = 0,1,...,q$ olmak üzere i -yinci yüz dönüşüm $\partial_i=K(\lambda^i) : K_q \rightarrow K_{q-1}$ ve i -yinci degeneracy dönüşüm $s_i=K(\mu^i) : K_{q-1} \rightarrow K_q$ alındığında (i) elde edilir.

Tanım 2.19. Eğer C kategorisi set kategorisi ise C deki her bir simpleksel nesneye *simpleksel küme* denir (May,1967).

Örnek 2.20. (a) V sonlu bir küme ve S, V 'nin sonlu altkümelerinin bir ailesi olmak üzere $X=(V,S)$ simpleksel kompleksi verilsin. Bundan yararlanarak K ile gösterilen bir simpleksel küme oluşturalım. K 'nın bir n - simpleksi, V 'nin elemanlarının bir $(a_0,a_1,...,a_n)$ dizisidir öyleki bazı $m \leq n$ için $\{a_0,a_1,...,a_m\}$ kümesi K 'nın bir m -simpleksidir. Bu şekilde oluşturulan n -simplekslerinin ailesi K_n olsun. K 'nın yüz ve degeneracy dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır. $i = 0,...,n$ için

$$\partial_i: K_n \rightarrow K_{n-1}, \quad \partial_i(a_0,a_1,...,a_n) = (a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n)$$

$$s_i: K_n \rightarrow K_{n+1}, \quad s_i(a_0,a_1,...,a_n) = (a_0,...,a_i,a_i,...,a_n)$$

dır.

(b) X bir topolojik uzay ve Δ_n standart n -simpleks olsun. $SinX$ ile gösterilen bir simpleksel küme oluşturalım. $SinX$ 'in bir n -simpleksi, $f: \Delta[n] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonudur. n -simplekslerin cümlesi $(SinX)_n = S_n(X) = \{f: \Delta[n] \rightarrow X \text{ sürekli}\}$ dir. Bu durumda $SinX = \{S_0(X),...,S_n(X),...\}$ dizisi aşağıda tanımlanan yüz ve degeneracy dönüşümlerle bir simpleksel kümedir.

$i = 0, 1,..., n$ için;

$$\partial_i: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \quad f \rightarrow \partial_i f(t_0,...,t_{n-1}) = f(t_0,...,t_{i-1},0,t_i,...,t_{n-1})$$

$$s_i: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X), \quad f \rightarrow s_i f(t_0,...,t_{n+1}) = f(t_0,...,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},...,t_{n+1})$$

dir.

(c) Δ_r standart r - simpleks olsun. Tanım 2.16 ya göre Δ_r simpleksel kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i) Her $[n] \in \Delta$ nesnesi için $\Delta_r([n]) = \{u \mid u: [n] \rightarrow [r] \text{ monotonik}\}$

ii) Her bir $m: [p] \rightarrow [q]$ monotonliğine karşılık,

$$\Delta_r(m) = m^* : \Delta_r([q]) \rightarrow \Delta_r([p]), u \rightarrow m^*(u) = u \cdot m$$

iii) Kompozisyon kuralı bileşke işlemidir.

(i) - (iii) şartlarına göre $\Delta_r : \Delta \rightarrow \text{Set}$ kontravaryant funktordur. Gerçekten,

$$1) \Delta_r(1_{[n]}): \Delta_r([n]) \rightarrow \Delta_r([n])$$

$$u \rightarrow \Delta_r([n])(u) = u \cdot 1_{[n]} = u$$

$$\Rightarrow \Delta_r(1_{[n]}) = 1_{\Delta_r([n])}$$

2) $m_1: [q] \rightarrow [n]$ ve $m_2: [p] \rightarrow [q]$ monotonik fonksiyonlar olsun. $\Delta_r(m_1 \circ m_2): \Delta_r([n]) \rightarrow \Delta_r([p])$ dir $u \in \Delta_r([n])$ için

$$\Delta_r(m_1 \circ m_2)(u) = u(m_1 \circ m_2)$$

$$= (u \cdot m_1) \cdot m_2$$

$$= \Delta_r(m_2)(u \cdot m_1)$$

$$= (\Delta_r(m) \Delta_r(m_1))(u)$$

$$\Rightarrow \Delta_r(m_1 \circ m_2) = \Delta_r(m_2) \cdot \Delta_r(m_1)$$

dir.

Bu örnek Tanım 2.14'e göre aşağıdaki şekilde yapılır. Her $q \geq 0$ için

$\Delta_r([q]) = \{f \mid f: [q] \rightarrow [r] \text{ monotonik}\}$ $i = 0, 1, \dots, q$ için yüz ve degeneracy dönüşümler;

$$\partial_i: \Delta_r([q]) \rightarrow \Delta_r([q-1]), f \rightarrow \partial_i(f) = f \circ \lambda^i \text{ ve}$$

$$s_i: \Delta_r([q]) \rightarrow \Delta_r([q+1]), g \rightarrow s_i(g) = g \circ \mu^i$$

olarak tanımlanır.

Δ_n simpleksel kümesinin 0-simplekslerinin ailesi $\{0, 1, \dots, n\}$ dir.

$(0, 1, \dots, n) \in \Delta_n([n])$ simpleksi (0-simpleksler hariç) bir tek non-degenerate

simpleksdir. Bu eleman id_n ile gösterilir. K bir simpleksel küme ve $x \in K_n$ olsun. Bu durumda $f_x(\text{id}_n) = x$ olacak şekilde $f_x: \Delta_n \rightarrow K$ simpleksel dönüşüm vardır.

Tanım 2.21. K bir simpleksel küme olsun. $L \subset K$ kümesine K 'nın *altsimpleksel kümesi* denir, eğer her $n \geq 0$ için $L_n \subset K_n$ ve $\partial_i: K_n \rightarrow K_{n-1}$, $s_i: K_n \rightarrow K_{n+1}$ olmak üzere

$\partial_i|_{L_n}: L_n \rightarrow L_{n-1}$, $s_i|_{L_n}: L_n \rightarrow L_{n+1}$ dönüşümleri I, II ve III özelliklerini sağlıyorsa.

Tanım 2.22. K ve L iki simpleksel küme olsun. $K \times L$ çarpımı; $(K \times L)_n = K_n \times L_n$, yüz ve degeneracy dönüşümleri,

$$\begin{aligned} \partial_i: (K \times L)_n &\rightarrow (K \times L)_{n-1}, \quad \partial_i(x, y) = (\partial_i x, \partial_i y) \\ s_i: (K \times L)_n &\rightarrow (K \times L)_{n+1}, \quad s_i(x, y) = (s_i x, s_i y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.23. K ve L iki simpleksel küme olsun. K 'dan L 'ye simpleksel dönüşümlerin ailesi L^K (veya $\text{Hom}(K, L)$ ile gösterilir) nın simpleksel kümesi;

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (L^K)_n &= \text{Hom}(K \times \Delta_n, L), \quad n \geq 0 \\ \text{(ii)} \quad \partial_i: (L^K)_n &\rightarrow (L^K)_{n-1}, \quad \partial_i f = f(1 \times \lambda^i) \text{ ve} \\ s_i: (L^K)_n &\rightarrow (L^K)_{n+1}, \quad s_i f = f(1 \times \mu^i) \end{aligned}$$

dir. Burada $1 = 1_K$ dir.

Lemma 2.24. K, L, M simpleksel kompleksler olsun. Bu durumda $\text{Hom}(K \times L, M)$ ile $\text{Hom}(K, \text{Hom}(L, M))$ kümeleri birbirine tabii denktir.

İspat $\phi: \text{Hom}(K \times L, M) \rightarrow \text{Hom}(K, \text{Hom}(L, M))$

$$f \rightarrow \phi(f): K \rightarrow \text{Hom}(L, M)$$

Tanım 2.23 den $\text{Hom}(L, M)_n = \text{Hom}(L \times \Delta_n)$ olduğundan $\phi(f)$; her $x \in K_n$ için $y \in L_n$ ve $u \in \Delta_n$ olmak üzere

$$\phi(f)(x): L \times \Delta_n \rightarrow M$$

$$(y, u) \rightarrow \phi(f)(x)(y, u) = f(u \cdot (x), y)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\psi: \text{Hom}(K, \text{Hom}(L, M)) \rightarrow \text{Hom}(K \times L, M)$$

$$g \rightarrow \psi(g): K \times L \rightarrow M$$

$x \in K_n$, $y \in L_n$ olmak üzere $\psi(g)(x, y) = g(x)(y, \text{id}_n)$ şeklinde tanımlanırsa

$\psi \circ \phi = 1$ ve $\phi \circ \psi = 1$ elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(g)(x, y) &= \phi(\psi(g)(x, y)) \\ &= \phi(g(x)(y, \text{id}_n)) \\ &= g(\text{id}_n \cdot (x), y) \\ &= g(x, y) \end{aligned}$$

ise $\phi \circ \psi = 1$ dir.

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(f)(x)(y, u) &= \psi(\phi(f)(x)(y, u)) \\ &= \psi(f(u \cdot (x), y)) \\ &= f(x)(y, u) \end{aligned}$$

ise $\psi \circ \phi = 1$ dir.

Sonuç olarak, $L \in \mathcal{S}$ 'nin bir nesnesi,
 $-xL: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

$$L \rightarrow -xL(K) = K \times L$$

ve $\text{Hom}(L, -): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

$$K \rightarrow \text{Hom}(L, -)(K) = \text{Hom}(L, K)$$

olmak üzere $-xL$ fonktörünün $\text{Hom}(L, -)$ fonktörüne adjoint olduğunu söyleyebiliriz.

2. 6. Kan Kompleksler ve Kan Komplekslerin Homotopisi

Tanım 2.25. Bir K simpleksel kümesine *genişleme şartını sağlıyor* denir, eğer $0 \leq i, j, k \leq n+1$, $i \neq k$, $j \neq k$ ve $i < j$ olmak üzere, $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ uyumluluk şartını

sağlayan n -simplekslerin her $n+1$ kolleksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ için bir x $(n+1)$ - simpleks vardır öyleki $i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ ise.

Tanım 2.26. Genişleme şartını sağlayan bir simpleksel kümeye *Kan kompleks* denir.

Örnek 2.27. (1) Örnek 2.20'de verilen *SinX* simpleksel kümesi bir Kan kompleksdir.

Gerçekten Δ_{n+1} standart simplekslerin n -simplekslerden oluşan yüzlerinin birleşimi Δ_{n+1} 'in bir gerçekmesidir. Böyle bir birleşim üzerinden herhangi bir sürekli fonksiyon Δ_{n+1} üzerine genişler.

(2) Δ_1 , standart 1-simpeksel küme Kan kompleks değildir. Gerçekten,

$$\Delta_1 ([0]) = \{(0), (1)\} , \Delta_1 ([1]) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$$

$$\Delta_1 ([2]) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}, \dots$$

Δ_1 'in 1-simpleksleri $(0,0), (0,1)$ ve $(1,1)$ dir. $k = 0$ olsun Bu durumda

$(1,1), (0,1)$ simpleksleri; $i = 1, j = 2$ için

$$\partial_1(0,1) = (0), \partial_1(1,1) = (1) \text{ dir. } (0) \neq (1) \text{ olduğundan uyumluluk}$$

şartı sağlanmaz. Benzer şekilde $k = 1$ ve $k = 2$ için de sağlanmadığı görülür.

Dolayısıyla genişleme şartı sağlanmaz.

Tanım 2.28. K bir simpleksel küme olsun. K 'nın x ve x' iki n -simpleksine *homotopiktir* denir ($x \sim x'$ yazılır), eğer $0 \leq i \leq n$ için $\partial_i x = \partial_i x'$ iken bir $y \in K_{n+1}$ simpleks var öyleki $\partial_n y = x$, $\partial_{n+1} y = x'$ ve $0 \leq i < n$ için $\partial_i y = \partial_i s_n x = \partial_i s_n x'$ ise. Burada y simpleksine x den x' ne bir homotopi denir.

Önerme 2.29. Eğer, K bir Kan kompleks ise bu durumda, $n \geq 0$ için $\sim$ bağıntısı K 'nın n -simpleksler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat : $x, x', x'' \in K_n$ olsun.

1) Yansıma özelliği: $0 \leq i \leq n$ için $\partial_i x = \partial_i x$ dir. $y = s_n x \in K_{n+1}$ olarak aldığımızda $\partial_n y = \partial_n s_n x = x$, $\partial_{n+1} y = \partial_n s_n x = x$, ve $0 \leq i < n$ için $\partial_i y = \partial_i y = \partial_i s_n x = \partial_i s_n x$ olduğundan $y = s_n x$ simpleksi x den x' 'e bir homotopidir.

2) Simetri ve geçişme özelliği: Kabul edelimki $x \sim x'$ ve $x \sim x''$ olsun.

$x \sim x' \Rightarrow \exists y' \in K_{n+1} \ni \partial_n y' = x, \partial_{n+1} y' = x'$ ve $0 \leq i < n$ için $\partial_i y' = s_{n-1} \partial_i x'$

$x \sim x'' \Rightarrow \exists y'' \in K_{n+1} \ni \partial_n y'' = x, \partial_{n+1} y'' = x''$ ve $0 \leq i < n$ için $\partial_i y'' = s_{n-1} \partial_i x''$

Bu durumda $n+2$ tane $n+1$ -simpleksler;

$\partial_0 s_n s_n x', \dots, \partial_{n-1} s_n s_n x', y', y''$ uyumluluk şartını sağlar. Bir z ($n+2$) -simpleks var öyleki $0 \leq i < n$ için $\partial_i z = \partial_i s_n s_n x', \partial_n z = y', \partial_{n+1} z = y''$ ve $0 \leq i < n$ için $\partial_i \partial_{n+2} z = s_{n-1} \partial_i x'$ dir.

$\partial_n \partial_{n+2} z = x', \partial_{n+1} \partial_{n+2} z = x'' \Rightarrow x' \sim x''$ dir.

Tanım 2.30. L, K nın bir altkompleksi (veya altsimpleksel küme) olsun. $n > 0$ için x ve x' iki n -simpleksi L ye göre homotopiktir denir, eğer $1 \leq i \leq n$ için $\partial_i x = \partial_i x'$ ve L de $\partial_0 x \sim \partial_0 x'$ iken bir $y \in L_{n-1}$ simpleksi $\partial_0 x$ den $\partial_0 x'$ ne homotopi ve bir $w \in K_{n+1}$ simpleksi var öyleki $\partial_0 w = y, \partial_n w = x, \partial_{n+1} w = x'$ ve $1 \leq i < n$ için $\partial_i w = s_{n-1} \partial_i x = s_{n-1} \partial_i x'$ şartları sağlanıyorsa. Bu durumda w simpleksine x den x' ne L ye göre homotopi denir ve $x \sim x'$ rel L ile gösterilir.

Notasyon: K bir kompleks ve $* \in K_0$ olsun. K 'nın herhangi bir n -boyutta, sadece $s_{n-1} \dots s_0 *$ simpleksine sahip bir altkompleksini üretir. Bu altkompleksi veya simpleksi $*$ ile göstereceğiz. Eğer K, K_n kompleks ise $(K, *)$ ikilisine bir *Kan çift* denir.

Tanım 2.31. $(K, *)$ bir Kan çift olsun. $n \geq 0$ ve $0 \leq i \leq n$ olmak üzere $\partial_i x = *$ olan bütün $x \in K_n$ lerin kümesi $\tilde{K}_n$ olsun. Bu durumda, $\pi_n(K, *) = \tilde{K}_n / (\sim)$

tanımlanır. $\pi_0(K, *)$ 'a K 'nın *eğri bileşenleri kümesi* denir. Eğer $\pi_0(K, *) = *$ ($*$, $*$ 'ın eşdeğerlik sınıfı) ise K bağlantılı ve eğer, $\pi_n(K, *) = *$ ise K n -*bağlantılıdır* denir.

Tanım 2.32. $(K, *)$ bir Kan çifti ve $n \geq 1$ için $\alpha, \beta \in \pi_n(K, *)$ olsun. x, α 'nın bir temsilci elemanı ($x \in \alpha$ yazacağız) ve $y \in \beta$ olsun. $n+1$ tane n -simplekslerin koleksiyonu $*, \dots, *, x, -, y$ uyumlu olduğundan bir $z \in K_n$ var öyleki $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i z = *$, $\partial_{n-1} z = x$, $\partial_{n+1} z = y$ dir. $[\partial_n z]$ 'ye α ile β 'nin *çarpımı* denir ve $\alpha \cdot \beta = [\partial_n z]$ ile gösterilir.

Önerme 2.33. Yukarıdaki gösterimlerle, $\alpha \cdot \beta$ çarpımı iyi tanımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki z' , $0 \leq i \leq n-1$ için $\partial_i z' = *$, $\partial_{n-1} z' = x$ ve $\partial_n z' = y$ olsun. Bu durumda $n+2$ tane $n+1$ simpleksler $*, \dots, *, s_n x, -, z, z'$ genişleme şartını sağladığından dolayı $w \in K_{n+2}$ var öyleki $0 \leq i \leq n-2$ için $\partial_i w = *$, $\partial_{n-1} w = s_n \partial_{n-1} z$, $\partial_{n+1} w = z$ ve $\partial_{n+2} w = z'$ dir.

Böylece $\partial_n w$, $\partial_n z$ den $\partial_n z'$ ne bir homotopidir. Dolayısıyla çarpım z 'nin temsilci elemanına bağlı değildir.

Kabul edelim ki $y \sim y'$ iken $0 \leq i < n$ için $\partial_i w = *$, $\partial_n w = y'$ ve $\partial_{n+1} w = y$ olsun. Bir z' seçelim ki $\partial_{n-1} z' = x$, $\partial_{n+1} z' = y$ ve $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i z' = *$ olsun. Bu durumda, $*, \dots, *, s_{n-1} x, z', -, w$ koleksiyonu genişleme şartını sağladığından dolayı bir $u \in K_{n+2}$ var öyleki $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i u = *$, $\partial_{n-1} u = s_{n-1} x$, $\partial_n u = z'$ ve $\partial_{n+2} u = w$ dir. Bu durumda $\partial_n \partial_{n+1} u = \partial_n z'$, $\partial_{n+1} \partial_{n+1} u = y$ ve $\partial_{n-1} \partial_{n+1} u = x$ dir. Böylece çarpım β 'nin temsilci elemanına da bağlı değildir. Benzer şekilde çarpım α 'nın temsilci elemanına bağlı değildir.

Önerme 2.34. Yukarıda tanımlanan çarpma işlemi ile $\pi_n(K, *)$; $n \geq 1$ için bir gruptur.

İspat: 1) Birleşme özelliği: $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_n(K, *)$ ve $x \in \alpha, y \in \beta, z \in \gamma$ olsun.

Genişleme şartından dolayı öyle $w_{n-1}, w_{n+1}, w_{n+2}$ $n+1$ simpleksler seçelim ki

$0 \leq i < n-1$ ve $j=n-1, n+1, n+2$ için $\partial_i w_j = *$, $\partial_{n-1} w_{n-1} = x$, $\partial_{n+1} w_{n-1} = y$,

$\partial_{n-1} w_{n+1} = \partial_n w_{n-1}$, $\partial_{n+1} w_{n+1} = z$, $\partial_{n-1} w_{n+2} = y$ ve $\partial_{n+2} w_{n+2} = z$ olsun.

$*, \dots, *, w_{n-1}, -, w_{n+1}, w_{n+2}$ koleksiyonu genişleme şartını sağladığından bir

$u \in K_{n+2}$ var öyleki $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i u = *$ ve $\partial_{n-1} u = w_{n-1}$, $\partial_{n+1} u = w_{n+1}$,

$\partial_{n+2} u = w_{n+2}$ dir. Bu durumda $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i u = *$, $\partial_{n-1} \partial_n u = x$,

$\partial_{n+1} \partial_n u = \partial_n w_{n+2}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= [\partial_n w_{n-1}] \gamma = [\partial_{n-1} w_{n+1}] \lambda = [\partial_n w_{n+1}] \\ &= [\partial_n \partial_n u] = [\partial_{n-1} \partial_n u] [\partial_{n+1} \partial_n u] \\ &= \alpha [\partial_n w_{n+2}] = \alpha(\beta\gamma) \end{aligned}$$

dir.

2) $\forall \alpha \in \pi_n(K, *)$ için $\alpha * = * \alpha = \alpha$ dır.

$x \in \alpha$ olsun. n -simplekslerin $n+1$ koleksiyonu $*, \dots, *, x, *, *$ genişleme

şartını sağlar. Bu durumda $\exists z \in K_{n+1}$ var öyle ki $0 \leq i < n-1$ için $\partial_i z = *$,

$\partial_{n-1} z = x$, $\partial_n z = *$ ve $\partial_{n+1} z = *$ ise $z = s_{n-1} x$ seçilirse,

$$0 \leq i < n-1 \text{ için } \partial_i z = \partial_i s_{n-1} x = s_{n-2} \partial_i x = s_{n-2} **$$

$$\partial_{n-1} z = \partial_{n-1} s_{n-1} x = x$$

$$\partial_{n+1} z = \partial_{n+1} s_{n-1} x = s_{n-1} \partial_n x = s_{n-1} **$$

$$\Rightarrow \alpha * = \alpha \text{ dır.}$$

Benzer şekilde $* \alpha = \alpha$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla $*$ birim elamandır.

3) $\forall \alpha \in \pi_n(K, *)$ olsun . $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = *$ olacak şekilde $\alpha^{-1} \in \pi_n(K, *)$ var mı?

$x \in \alpha$ ve $[y] \in \pi_n(K, *)$ olsun . n - simplekslerin $n+1$ koleksiyonu

$*, \dots, *, x, *, y$ genişleme şartını sağlar . Bu durumda $\exists z \in K_{n+1}$ var öyleki

$0 \leq i < n-1$ için $\partial_i z = *, \partial_{n-1} z = x$, $\partial_n z = *$ ve $\partial_{n+1} z = y \Rightarrow \alpha \cdot [y] = [\partial_n z] = *$

dir. Benzer şekilde $[y] \cdot \alpha = *$ dır. Dolayısıyla $[y] = \alpha^{-1}$ dir.

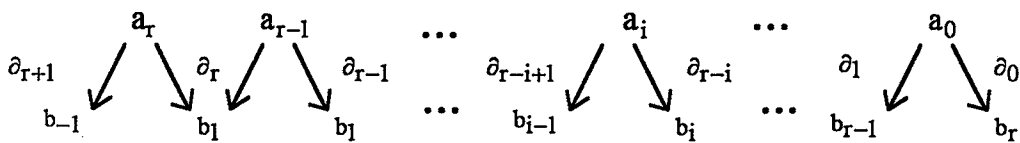
Burada gösterilen $\pi_n(K, *)$ grubuna K 'nın n -yinci homotopi grubu denir.

Tanım 2.35. $f, g : K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümler ve $I = \Delta_1$ simpleksel küme olsun. f, g 'ye *homotopiktir* denir ($f \sim g$ ile gösterilir), eğer $F : K \times I \rightarrow L$ simpleksel dönüşümü var öyleki $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ ise.

Burada $F; F_n : K_n \times I_n \rightarrow L_n$, her $t \in I_n$ için $(F_n)_t(x) = F_n(x, t)$ şeklindeki $(F_n)_t$ 'lerin ailesidir.

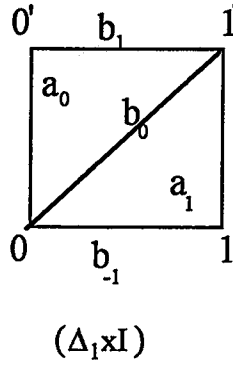
Önerme 2.36. K Kan kompleks , Δ_r standart r -simpleks ve 0 ve 1 I 'nın köşeleri olmak üzere eğer, $f : \partial\Delta_r \times I \cup \Delta_r \times \{1\} \rightarrow K$ simpleksel dönüşüm ise, bu durumda $f, f* : \Delta_r \times I \rightarrow K$ simpleksel dönüşümüne genişletilebilir.

İspat: f 'yi $f* : \Delta_r \times I \rightarrow K$ dönüşümüne genişletmek için $f*$ 'nin $\Delta_r \times I$ 'daki $(r+1)$ -boyutlu non-degenerate simpleksler üzerinde aldığı değerleri belirlemek yeterlidir. $i, j = 0, 1, \dots, r$ olmak üzere, $\Delta_r \times I$ 'nın non-degenerate $(r+1)$ -simpleksleri $a_i = (s_i \text{id}_r) \times (s_r \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_0 \text{id}_1)$ ler ve r -simpleksleri $\partial\Delta_r \times I$ 'nın r -hücreleridir. Bunlar, $b_{-1} = \partial\Delta_r \times \{0\}$, $b_j = (\text{id}_r) \times (s_{r-1} \dots s_{j+1} s_{j-1} \dots s_0 \text{id}_1)$, $b_r = \partial\Delta_r \times \{1\}$ dir. b_j ler $\Delta_r \times I$ çarpım kompleksinin iç r - simpleksleridir. a_i ve a_{i+1} bitişik iki simpleksdir ve bu iki simpleksin ortak yüzü b_i iç r -simpleksidir. Şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.



K Kan kompleks olduğundan $\Delta_{n,k} \rightarrow K$ dönüşümü $\Delta_n \rightarrow K$ dönüşümüne genişler. Bu durumda f sırasıyla $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ ve a_r 'ye uygulanırsa $f*$ genişlemesi elde edilir.

Örnek 2.37. K Kan kompleks ve $f : \partial\Delta_1 \times I \cup \Delta_1 \times \{1\} \rightarrow K$ simpleksel dönüşüm olsun. $f* : \Delta_1 \times I \rightarrow K$ genişlemesini bulalım.



$\Delta_1 \times I$ 'nın non-degenerate 2-simpleksleri ;

$$\begin{aligned} a_0 &= (s_0 \text{id}_1) \times (s_1 \text{id}_1) \\ &= (0, 1, 1) \times (0, 1, 1) = ((0, 0), (0, 1), (1, 1)) = (0, 0', 1') \\ a_1 &= (s_1 \text{id}_1) \times (s_0 \text{id}_1) \\ &= (0, 1, 1) \times (0, 0, 1) = ((0, 0), (1, 0), (1, 1)) = (0, 1, 1') \end{aligned}$$

$\partial \Delta_1 \times I$ 'nın non-degenerate 1-simpleksleri;

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \partial \Delta_1 \times (0) = (0, 1) \times (0) = ((0, 0), (1, 0)) = (0, 1) \\ b_0 &= (\text{id}_1) \times (\text{id}_1) = (0, 1) \times (0, 1) = ((0, 0), (1, 1)) = (0, 1') \\ b_1 &= \partial \Delta_1 \times (1) = (0, 1) \times (1) = ((0, 1), (1, 1)) = (0', 1') \end{aligned}$$

dir. a_0 ile a_1 'in ortak yüzü b_0 dır. K Kan kompleks olduğundan f sırasıyla a_0 ve a_1 'e genişler. Dolayısıyla f 'nin bir f^* genişlemesi vardır.

Teorem 2.38. A, X herhangi iki simpleksel kompleks, $A \subset X$ ve K Kan kompleks olsun. Eğer $f: A \times X \cup X \times (1) \rightarrow K$ simpleksel dönüşüm ise $f, f^*: X \times I \rightarrow K$ dönüşümüne genişler.

İspat: X bir simpleksel küme, A X 'in bir alt kompleksi ve K bir Kan kompleks olsun. $k_n \in X_n$ olmak üzere $k_n \times I$ 'nin elamanları önerme 2.36 da tanımlandı. Tanım 2.21 'den $\partial k_n \in A$ alınabilir. Bu durumda yine önerme 2.36 dan $\partial k_n \times I \cup k_n \times (0) \rightarrow K$ dönüşümü $k_n \times I \rightarrow K$ dönüşümüne genişletilebilir. Bu X_n 'in bütün elamanları için yapılabileceğinden $A \times I \cup X \times (1) \rightarrow K$ dönüşümü $X \times I \rightarrow K$ dönüşümüne genişletilebilir.

Tanım 2.39. $p: E \rightarrow B$ bir simpleksel dönüşüm olsun. p 'ye *Kan lifleme* denir, eğer $i \neq k, j \neq k$ ve $i < j$ olmak üzere uyumluluk şartını sağlayan E 'nin n -

simplekslerinin her $n+1$ koleksiyonu $x_0, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ ve $i \neq k$ için $\partial_i y = p(x_i)$ olan B 'de her $(n+1)$ -simpleks y için E 'de bir $(n+1)$ -simpleks x vardır öyleki $i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ ve $p(x) = y$ ise.

Burada E ' ye total kompleks, B 'ye taban kompleksi ve (E, p, B) üçlüsünede lif uzayı denir. $*$, B 'nin bir köşesi $(*)$ ile üretilen altkompleksi ise $F = p^{-1}(*)$ 'e p 'nin $*$ üzerindeki lifi denir.

Önerme 2.40. K Simpleksel kompleks olsun. K 'nın Kan kompleks olması için $\Leftrightarrow p: K \rightarrow *$ dönüşümünün Kan lifleme olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ K 'nın uyumluluk şartını sağlayan n -simplekslerinin bir $n+1$ koleksiyonu $x_0, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ olsun. K , Kan kompleks olduğundan $\exists x \in K_{n+1} \ni i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ dir. $i \neq k$ için $p(x_i) = *$ dir. O halde $p: K \rightarrow *$ dönüşümü bir Kan liflemedir.

$(\Leftarrow)$ $p: K \rightarrow *$ dönüşümü Kan lifleme olsun. Uyumluluk şartını sağlayan n -simplekslerin bir $n+1$ koleksiyonu $x_0, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ olsun. Hipotezden $x \in K_{n+1} \ni i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ dir. O halde K , Kan kompleksdir.

Önerme 2.41. Eğer (E, p, B) lif uzayı ise, bu durumda B 'nin herhangi bir noktasındaki lifi Kan kompleksdir.

İspat: $*$, B nin bir köşesi ve bunun üzerindeki lif $p^{-1}(*) = F$ olsun. F 'nin Kan kompleks olduğunu göstereceğiz. F 'nin uyumluluk şartını sağlayan n -simplekslerin $n+1$ koleksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, x_{n+1}$ olsun. $i \neq k$ için $p(x_i) = *$ ve p , Kan lifleme olduğundan $\exists x \in E_{n+1}$ var öyleki $i \neq k$ için $p(x) = *$ dir.

Önerme 2.42. (E, p, B) bir lif uzayı olsun. Bu durumda

- a) B Kan kompleks ise, E de Kan kompleksdir.
 b) E Kan kompleks ve p üzerine ise B de Kan kompleksdir.

İspat: a) E 'nin uyumluluk şartını sağlayan n-simplekslerin n+1 kolleksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, x_{n+1}$ olsun. Bu durumda n-simplekslerin n+1 kolleksiyonu $p(x_0), p(x_1), \dots, p(x_{k-1}), p(x_{k+1}), p(x_{n+1})$ B 'de uyumludur. B Kan kompleks olduğundan $\exists y \in B_n$ var öyleki $i \neq k$ için $\partial_i y = p(x_i)$ dir. (E,p,B) lif uzayı olduğundan $\exists x \in E_n$ var öyleki $i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ ve $p(x)=y$ dir. O halde E Kan kompleksdir.

b) B 'nin n-simplekslerinin n+1 kolleksiyonu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_{n+1}$ olsun. p örten olduğundan $\exists y_0 \in E_n$ öyleki $p(y_0)=x_0$, $\exists y_1 \in E_n$ öyleki $p(y_1)=x_1$, $\dots, \exists y_i \in E_n$ öyleki $p(y_i)=x_i$ dir. Böylece $i=0,1,\dots,k-1,k+1,\dots,n$ için $p(y_i)=x_i$ dir. Bu durumda $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, -, y_{k+1}, y_{n+1}$ kolleksiyonu E_n 'de uyumludur. E Kan kompleks olduğundan $\exists y \in E_{n+1}$ var öyleki $i \neq k$ için $\partial_i y = y_i$ dir. (E,p,B) lif uzayı olduğundan $p(y)=x \in B_n$ var öyleki $i \neq k$ için $\partial_i x = x_i$ dir.

Şimdi vereceğimiz teorem ve bunun iki sonucunu ispatsız vereceğiz. Bunların ispatı önerme 2.36 daki gibi yapılabilir.

Teorem 2.43. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- 1) (E,p,B) Kan anlamında bir lif uzayıdır.
- 2) Δ_n standart n-simpleks olsun. id_n, Δ_n 'nin temel hücresi (non-degenerate n-simpleks) ve $0 \leq k \leq n$ için $\partial_0 \text{id}_n, \dots, \partial_{k-1} \text{id}_n, -, \partial_{k+1} \text{id}_n, \dots, \partial_n \text{id}_n$ simpleksleriyle oluşturulan simpleksel küme $\Delta_{n,k}$ olmak üzere ,

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n,k} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

şeklindeki bütün diagramları komutatif yapacak şekilde bir $h: \Delta_n \rightarrow E$ dönüşümü vardır.

3) $p: E \rightarrow B$ simpleksel dönüşüm ve $e=0,1$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_n \times I \cup \Delta_n \times \{e\} & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

şeklindeki bütün diagramları komutatif kılacak şekilde bir $h: \Delta_n \times I \rightarrow E$ dönüşümü vardır.

4) $p: E \rightarrow B$ simpleksel dönüşüm, P ve Q simpleksel kompleks, $P \subset Q$ ve $e=0,1$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} P \times I \cup Q \times \{e\} & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ Q \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

şeklindeki diagramları komutatif kılacak şekilde bir $h: Q \times I \rightarrow E$ dönüşümü vardır (Mac Lane, 1959).

Sonuç 2.44. Eğer (E, p, B) bir lif uzayı ise, bu durumda X simpleksel kompleks ve $e=0,1$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} X \times \{e\} & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

şeklindeki bütün diagramları komutatif kılacak şekilde bir $h: \Delta_n \times I \rightarrow E$ dönüşümü vardır (Mac Lane, 1959).

Sonuç 2.45. Eğer (E, p, B) bir lif uzayı ise, bu durumda $0 \leq k \leq 1$ için

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \times \{0\} \cup \Delta_n \times \{1\} \cup \Delta_{n,k} & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

şeklindeki bütün diagramları komutatif kılacak şekilde bir $h: \Delta_n \times I \rightarrow E$ dönüşümü vardır (Mac Lane, 1959).

Teorem 2.46. (Moore-Cartan) Eğer X simpleksel kompleks ve (E,p,B) bir lif uzayı ise, bu durumda $(\text{Hom}(X,E),\text{Hom}(\text{id},p),\text{Hom}(X,B))$ de bir lif uzayıdır.

İspat: Teoerem 2.43 'ün (4) 'üncü ifadesine göre

$$\begin{array}{ccc} \text{PxI} \cup \text{Qx}(e) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(X,E) \\ i \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\text{id},p) \\ \text{QxI} & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(X,B) \end{array}$$

diagramı komutatatif olsun. Lemma 2.24 'e göre $\text{Hom}(X \times \text{PxI} \cup X \times \text{Qx}(e), E)$ kümesi ile $\text{Hom}(\text{PxI} \cup \text{Qx}(e), \text{Hom}(X,E))$ kümesi ve $\text{Hom}(X \times \text{QxI}, B)$ kümesi ile $\text{Hom}(\text{QxI}, \text{Hom}(X,B))$ kümesi tabii denktir. Bu durumda sonuç 2.44 den dolayı

$$\begin{array}{ccc} X \times \text{PxI} \cup X \times \text{Qx}(e) & \xrightarrow{\psi(f)} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X \times \text{QxI} & \xrightarrow{\psi(g)} & B \end{array}$$

diagramı komutatiftir. (E,p,B) lif uzayı olduğundan bu diagramı komutatif kılacak şekilde $h': X \times \text{QxI} \rightarrow E$ dönüşümü vardır. Tekrar lemma 2.24 'ü uygularsak

$$\begin{array}{ccc} \text{PxI} \cup \text{Qx}(e) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(X,E) \\ i \downarrow & \nearrow \phi(h') & \downarrow \text{Hom}(\text{id},p) \\ \text{QxI} & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(X,B) \end{array}$$

komutatatif diagramı elde edilir. O halde $(\text{Hom}(X,E),\text{Hom}(\text{id},p),\text{Hom}(X,B))$ lif uzayıdır.

Sonuç 2.47. (j.C. Moore) Eğer K bir simpleksel kompleks ise, bu durumda X bir simpleksel kompleks olmak üzere $\text{Hom}(X,K)$ Kan kompleksidir.

İspat: $\text{Hom}(X,K)_n$ 'in uyumluluk şartını sağlayan n -simplekslerinin $n+1$ koleksiyonu $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_{n+1}$ olsun. Tanım 2.23 den her $i=0,1,\dots,n+1$ için $\text{Hom}(X,K)_n = \text{Hom}(X \times \Delta_n, K)$ olduğundan $f_i: X \rightarrow K$ dönüşümleri $f_i: X \times \Delta_n \rightarrow K$ şeklindedir. K Kan kompleks olduğundan önerme 2.36.

gereğince her f_i , bir $f_i': X \times \Delta_{n+1} \rightarrow K$ dönüşümüne genişletilebilir. Bu durumda $\exists f: X \times \Delta_{n+1} \rightarrow K$ dönüşümü var öyleki $\partial_i f = f_i$ dir.

Teorem 2.48. (J. Yao) Eğer $X \neq \emptyset$ simpleksel kompleks ve $(\text{Hom}(X, E), \text{Hom}(\text{id}, p), \text{Hom}(X, B))$ lif uzayı ise, bu durumda (E, p, B) bir lif uzayıdır.

İspat: Teorem 2.43 'ün (4) 'üncü ifadesine göre

$$\begin{array}{ccc} P \times I \cup Q \times (e) & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ Q \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

diagramı komutatif olsun. Bu diagramı komutatif kılan $h: Q \times I \rightarrow K$ simpleksel dönüşümünü bulacağız. π kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} X \times P \times I \cup X \times Q \times (e) & \xrightarrow{\pi} & P \times I \cup Q \times (e) & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & & & \downarrow p \\ X \times Q \times I & \xrightarrow{\pi} & Q \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

diagramını gözönüne alalım. Bu diagrama lemma 2.24 uygulanırsa

$$\begin{array}{ccc} P \times I \cup Q \times (e) & \xrightarrow{\phi(f \circ \pi)} & \text{Hom}(X, E) \\ i \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\text{id}, p) \\ Q \times I & \xrightarrow{\phi(g \circ \pi)} & \text{Hom}(X, B) \end{array}$$

diagramı elde edilir. $(\text{Hom}(X, E), \text{Hom}(\text{id}, p), \text{Hom}(X, B))$ lif uzayı olduğundan bu diagramı komutatif kılacak şekilde bir $h': Q \times I \rightarrow \text{Hom}(X, E)$ dönüşümü vardır. Bu diagrama tekrar lemma 2.24 uygulanırsa

$$\begin{array}{ccc} X \times P \times I \cup X \times Q \times (e) & \xrightarrow{f \circ \pi} & E \\ i \downarrow & \nearrow \psi(h') & \downarrow p \\ X \times Q \times I & \xrightarrow{g \circ \pi} & B \end{array}$$

komutatif diagramı elde edilir.

Şimdi, $X \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x \in X_0$ var öyleki herhangi bir Y kompleksi için $y \in Y_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha: Y &\rightarrow X \times Y \\ y &\rightarrow (s_{n-1} \dots s_0 x, y) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. Bu durumda Y yerine $PxI \cup Qx(e)$ kompleksi alınırsa

$$\begin{array}{ccccc} PxI \cup Qx(e) & \xrightarrow{\alpha} & XxPxI \cup XxQx(e) & \xrightarrow{f \circ \pi} & E \\ i \downarrow & & \downarrow & \nearrow \psi(h') & \downarrow p \\ QxI & \xrightarrow{\alpha} & XxQxI & \xrightarrow{g \circ \pi} & B \end{array}$$

diagramı elde edilir. $\pi \circ \alpha = 1$ olduğundan

$$\begin{array}{ccc} PxI \cup Qx(e) & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow \psi(h') \circ \alpha & \downarrow p \\ QxI & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

diagramı komutatifdir. O halde (E, p, B) lif uzayıdır.

Torem 2.49. (J.C. Moore) X, Y simpleksel kompleksler, $X \subset Y$ ve K Kan kompleks olsun. Bu durumda $(\text{Hom}(Y, K), (\text{Hom}(i, \text{id}), \text{Hom}(X, K)))$ bir lif uzayıdır.

İspat: U, V, V' simpleksel kompleksler, $\gamma: V' \rightarrow V, \sigma: U \times V \rightarrow W, \beta: U \times V' \rightarrow W$ simpleksel dönüşümler olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\sigma} & W \\ 1_X \gamma \uparrow & \nearrow \beta & \\ U \times V' & & \end{array}$$

komutatif diagramını gözönüne alalım. Lemma 2.24 deki ϕ dönüşümü ile oluşturulan

$$\phi: \text{Hom}(U \times V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$$

$$\phi': \text{Hom}(U \times V', W) \rightarrow \text{Hom}(U, \text{Hom}(V', W))$$

dönüşümleri ile

$$\begin{array}{ccc} & \phi(\sigma) & \text{Hom}(V, W) \\ U & \nearrow & \downarrow \text{Hom}(\gamma, \text{id}) \\ & \phi'(\beta) & \text{Hom}(V', W) \end{array}$$

diagramı elde edilir. Teorem 2.43 'ün (4) 'üncü ifadesine göre

$$\begin{array}{ccc}
 PxI \cup xQx(e) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(Y, K) \\
 i \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(i, \text{id}) \\
 QxI & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(X, K)
 \end{array}$$

diagramı komutatif olsun. Bu diagramı komutatif kılan $h: QxI \rightarrow \text{Hom}(Y, K)$ dönüşümünü bulacağız. Bu diagrama lemma 2.24 deki ψ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{array}{ccc}
 YxPxI \cup YxQx(e) & \xrightarrow{\psi(f)} & K \\
 & \nearrow \psi(g) & \\
 XxQxI & &
 \end{array}$$

diagramı elde edilir. $\psi(f)$ ve $\psi(g)$ dönüşümleri yardımıyla

$$F: XxQxI \cup YxPxI \cup YxQx(e) \rightarrow K$$

dönüşümü tanımlanabilir. K Kan kompleks olduğundan F dönüşümü teorem 2.38'e göre $G: XxQxI \rightarrow K$ dönüşümüne genişletilebilir. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc}
 YxPxI \cup YxQx(e) & & \\
 \downarrow & \searrow \psi(f) & \\
 YxQxI & \xrightarrow{G} & K \\
 \uparrow & \nearrow \psi(g) & \\
 XxQxI & &
 \end{array}$$

diagramı elde edilir. Bu diagrama lemma 2.24 deki ϕ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{array}{ccc}
 PxI \cup XxQx(e) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(Y, K) \\
 i \downarrow & \nearrow \phi(G) & \downarrow \text{Hom}(i, \text{id}) \\
 QxI & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(X, K)
 \end{array}$$

diagramı elde edilir. O halde $h = \phi(G)$ dir.

2.7. Realization Ve Singüler Funktor

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \text{ standart } n\text{-simpleks olmak üzere;}$$

$d^i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ ve $s^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ dönüşümleri;

$$d^i(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \text{ ve}$$

$$s^i(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1})$$

ile tanımlanır. Bu dönüşler (I)*, (II)*, (III)* özelliklerini sağlar. Bu durumda her $u_n \in \Delta_n$ noktası, $u_{n-q} \in \Delta_{n-q}$ bir iç nokta ve $0 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ olmak üzere $u_n = d^{i_q} \dots d^{i_1} \dots u_{n-q}$ biçiminde ifade edilir (May, J.P).

$K = \{K_0, K_1, \dots, K_n, \dots\}$ simpleksel küme ve her $n \geq 0$ için K_n diskret topolojiye sahip olsun. $\bar{K} = \bigcup_{n \geq 0} (K_n \times \Delta_n)$ ayrık birleşimi oluşturalım.

Her $(x, u), (y, v) \in \bar{K}$ ve $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ için ;

$$(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} x = y \quad \text{ve} \quad d^{i_k} \dots d^{i_1} v = u, & \begin{cases} x \in K_n, u \in \Delta_n \\ y \in K_{n-k}, v \in \Delta_{n-k} \end{cases} \text{ ise} \\ \text{veya} \\ s_{i_k} \dots s_{i_1} x = y \quad \text{ve} \quad s^{i_1} \dots s^{i_k} v = u, & \begin{cases} x \in K_n, u \in \Delta_n \\ y \in K_{n+k}, v \in \Delta_{n+k} \end{cases} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı $\bar{K}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Curtis, E).

1) Durum: $x \in K_n$ ve $u \in \Delta_n$ olsun. $(x, u) \in \bar{K}$ için eğer, $u \in \Delta_n$ iç nokta ise $x \in K_n$ non-degenerate simpleksdir veya $(x, u) \in \bar{K}$ non-degeneratedir. Bu durumda ; $\bar{K}$ 'nin (x, u) elemanı $s_{i_k} \dots s_{i_1} x = y$ ve $s^{i_1} \dots s^{i_k} v = u$ şeklinde yazılabilen (y, v) elamanları ile bağlantılıdır.

2) Durum : $x \in K_n$ ve $u \in \Delta_n$ olsun. $(x, u) \in \bar{K}$ için eğer $u \in \Delta_n$ iç nokta değilse, $x \in K_n$ degenerate simpleksdir veya $(x, u) \in \bar{K}$ degeneratedir. Bu durumda; $\bar{K}$ 'nin (x, u) elemanı $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} x = y$ ve $d^{i_1} \dots d^{i_k} v = u$ şeklinde yazılabilen (y, v) elamanları ile bağlantılıdır.

Şimdi $\sim$ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

i) Yansıma özelliği: $(x, u) \in \bar{K}$ olsun. $\text{id}(x) = x$, $\text{id}(u) = u$ olduğundan $(x, u) \sim (x, u)$ dir.

ii) $(x, u), (y, v) \in \bar{K}$ ve $(x, u) \sim (y, v)$ olsun.

Eğer $(x, u) \in \bar{K}$ non-degenerate ise,

$s_{i_k} \dots s_{i_1} x = y$ ve $s^{i_1} \dots s^{i_k} v = u$ olacak şekilde yazılabilir

$\Rightarrow \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} (s_{i_k} \dots s_{i_1} x) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} y$ ve dual kompozisyonundan

$$s^{i_1} \dots s^{i_k} (d^{i_1} \dots d^{i_k} v) = d^{i_k} \dots d^{i_1} u$$

$$\Rightarrow x = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} y \quad \text{ve} \quad v = d^{i_k} \dots d^{i_1} u$$

$$\Rightarrow (y, v) \sim (x, u) \text{ dır.}$$

$(x, u) \in \overline{K}$ degenerate ise benzer şekilde yapılır.

iii) $(x, u), (y, v), (z, w) \in \overline{K}$, $(x, u) \sim (y, v)$ ve $(y, v) \sim (z, w)$ olsun.

Eğer $(x, u) \in \overline{K}$ non-degenerate ise, $s_{i_k} \dots s_{i_1} x = y$ ve $s^{i_1} \dots s^{i_k} v = u$

şeklinde yazılabilir. Eğer $(y, v) \in \overline{K}$ nin boyutu (z, w) nin boyutundan küçük ise $k \leq t$ olmak üzere $s_{i_t} \dots s_{i_1} x = z$ ve $s^{i_1} \dots s^{i_t} v = u$ şeklinde yazılabilir.

Eğer $(y, v) \in \overline{K}$ nin boyutu (z, w) nin boyutundan büyük ise $t \leq k$ olmak üzere $s_{i_t} \dots s_{i_1} x = z$ ve $s^{i_1} \dots s^{i_t} v = u$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$(x, u) \sim (z, w)$ dır.

$(x, u) \in \overline{K}$ degenerate ise benzer düşünce ile yapılır.

Dolayısıyla, $\sim$ bağıntısı $\overline{K}$ 'yı ayrık denklik sınıflarına ayırır. $\overline{K}/\sim$ kümesine K 'nın realizationı denir ve $|K|$ ile gösterilir. $x \in K_n$ ve $u \in \Delta_n$ için (x, u) nin $|K|$ 'daki denklik sınıfı $|x, u|$ ile gösterilir.

$|K|$, K 'nın her bir non-degenerate n -simpleksinin bir n -hücre alınmasıyla CW-kompleks olur.

$f: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşüm olsun. f nin oluşturduğu $|f|: |K| \rightarrow |L|$, $|x, u| \rightarrow |f(x), u|$ dönüşümü sürekli fonksiyondur. Bu durumda $|f|: S \rightarrow T$ ya kovaryant funktordur. Bu funktora *realization functor* denir.

$p_1: K \times L \rightarrow K$, $p_2: K \times L \rightarrow L$ projeksiyon dönüşümler ve $\eta: |K \times L| \rightarrow |K| \times |L|$ dönüşümü $\eta = |p_1| \times |p_2|$ şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki teoremi simpleksel homotopiden, topolojik homotopiye geçişte kullanılacağı için ispatsız vereceğiz.

Teorem 2.50. $\eta: |K \times L| \rightarrow |K| \times |L|$ dönüşümü 1-1 ve örtendir. Eğer, $|K| \times |L|$ bir CW-kompleks ise bu durumda η bir homeomorfizmdir (May, J.P).

Önerme 2.51. $f, g: K \rightarrow L$ simpleksel dönüşümler olsun. Eğer, $f \sim g$ ve $F: K \times I \rightarrow L$ simpleksel dönüşümü bunların bir homotopisi ise $|F| \circ \eta^{-1}: |K| \times |I| \rightarrow |L|$ dönüşümü $|f|$ ile $|g|$ nin homotopisidir.

İspat: $|F| \circ \eta^{-1}$ dönüşümü; her $n \geq 0$ için $|F_n| \circ \eta^{-1}$ dönüşümlerinin bir ailesidir.

$|F_n| \circ \eta^{-1} : |K_n| \times |I_n| \rightarrow |L_n|, (|x, u|, t) \rightarrow |F_n(x), t|$ şeklinde tanımlanırsa $|F| \circ \eta^{-1}: |K| \times |I| \rightarrow |L|$ dönüşümü $|f|$ ile $|g|$ nin homotopisi olur.

Singular funktor ise $\mathcal{T}$ 'den $\mathcal{S}$ 'ye bir funktordur öyleki;

i) Her $X \in \mathcal{T}$ nesnesi için $\text{Sin} X$, örnek 2.19 'da tanımlanan simpleksel küme,

ii) $f: X \rightarrow Y \in \mathcal{T}$ sürekli fonksiyon için $\text{Sinf}: \text{Sin} X \rightarrow \text{Sin} Y, x \in S_n(X)$ için $\text{Sinf}(x) = f \circ x$ ile tanımlanan bir simpleksel dönüşüm karşılık getirir.

Önerme 2.52. $| |: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ realization funktoru, $\text{Sin}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ singular funktora adjointtir.

İspat: Tanım 2.9 'da verilen $P, Q: \mathcal{S}^{\text{op}} \times \mathcal{T} \rightarrow \text{Set}$ funktorlarının oluşturduğu, $K \in \mathcal{S}$ ve $X \in \mathcal{T}$ için, $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{Sin} X)$ ile $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(|K|, X)$ kümelerinin tabii denk olduğunu gösterelim.

$\phi: \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{Sin} X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(|K|, X)$ tabii dönüşümü;

$\Phi: | | \circ \text{Sin} \rightarrow 1_{\mathcal{T}}, (\Phi(X): |\text{Sin} X| \rightarrow X, \Phi(X): |k_n, u_n| = k_n(u_n),$

$k_n \in S_n(X)$, $u_n \in \Delta_n$) dönüşümü ile $f \rightarrow \phi(f) = \Phi(X) \circ |f|$ şeklinde tanımlanır öyleki $\phi(f) = \Phi(X) \circ |f| : |K| \rightarrow X$, $|k_n, u_n| \rightarrow \phi(f)|k_n, u_n| = f(k_n)(u_n)$ dir.

ii) $\psi : \text{Hom}_{\tau}(|K|, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{Sin}X)$ tabii dönüşümü

$\Psi : 1_{\mathcal{S}} \rightarrow \text{Sin} \circ | \cdot |$, $(\Psi(K) : K \rightarrow \text{Sin} |X|, \Psi(K)(k_n)(u_n) = |k_n, u_n|)$ tabii dönüşümü ile $g \rightarrow \psi(g) = \text{Sing} \circ \Psi(K)$ biçiminde yazılabilir öyleki $\psi(g) = \text{Sing} \circ \Psi(K) : K \rightarrow \text{Sin}X$, $k_n(u_n) \rightarrow \psi(g)(k_n)(u_n) = g(|k_n, u_n|)$ dir.

i) ve ii) 'den $\phi \circ \psi = 1$ ve $\psi \circ \phi = 1$ dir.

Burada $\Psi(K) : K \rightarrow \text{Sin} |X|$, simpleksel kümelerin dahil etme tasviri ve $\Phi(X) : |\text{Sin}X| \rightarrow X$ dönüşümü ise topolojik uzayların örtenliğidir. O halde, $(\text{Sin} \Phi \circ \Psi \circ \text{Sin})(X) : \text{Sin}X \rightarrow \text{Sin}X$ ve $(\Phi \circ | \cdot | \circ \Psi)(K) : |K| \rightarrow |K|$ birim dönüşümlerdir.

3. SİMPEKSEL ÖNDEMETLER

(X, T) bir topolojik uzay olsun. T bir kategori oluşturur öyleki;

- (i) Nesneleri; T nin elemanları
- (ii) Morfizmleri; $U, V \in T$ ve $V \subset U$ olmak üzere $i: V \rightarrow U$ dahil etme tasvirleridir.
- (iii) Kompozisyon kuralı; bileşke işlemidir.

Tanım 3.1. (X, T) bir topolojik uzay olsun. Bir $P: T^{op} \rightarrow \text{Set}$ funktörüne Set kategorisinde bir *öndemet* denir (Barr, M) . $i: V \rightarrow U$ dahil etme tasvirine karşılık gelen $P(i) = P_V^U: P(U) \rightarrow P(V)$ dönüşümüne *kısıtlama dönüşümü* denir.

Örnek 3.2. (X, T) ve (Y, T') iki topolojik uzay olsun. $\Gamma(-, Y): T^{op} \rightarrow \text{Set}$; her $U \in T$ için Set 'de $\Gamma(U, Y) = \{f | f: U \rightarrow Y \text{ sürekli}\}$ kümesi ve $i: V \rightarrow U \in T$ morfizmi için

$$\begin{aligned} \Gamma(i, Y): \Gamma(U, Y) &\rightarrow \Gamma(V, Y) \\ &\rightarrow \Gamma(i, Y)(f) = f \circ i \text{ şeklinde tanımlanan } \Gamma(-, Y) \end{aligned}$$

funktoru Set 'de bir öndemettir. Gerçekten;

i) $\Gamma(1_U, Y): \Gamma(U, Y) \rightarrow \Gamma(U, Y), f \rightarrow f \circ 1_U = f$ olduğundan $\Gamma(1_U, Y) = 1_{\Gamma(U, Y)}$ dir.

ii) $W \subset V \subset U$ olmak üzere $i: V \rightarrow U, j: W \rightarrow V \in T$ olsun.

$$\begin{aligned} \Gamma(i \circ j, Y)(f) &= f \circ (i \circ j) = (f \circ i) \circ j \\ &= \Gamma(j, Y)(f \circ i) \\ &= \Gamma(j, Y) \Gamma(i, Y)(f) \end{aligned}$$

olduğundan $\Gamma(i \circ j) = \Gamma(j, Y) \Gamma(i, Y)$ dir.

Tanım 3.3. $P: T^{op} \rightarrow \text{Set}$ bir funktor ve $\{U_i\}_{i \in I}$ U 'nun bir açık örtüsü olsun. Her $i, j \in I$ için $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ olacak şekilde $f_i \in P(U_i)$ verildiğinde bir tek $f \in P(U)$ var öyleki $f|_{U_i} = f_i$ ise P ye *lokal karakter özelliğine* sahiptir denir.

Tanım 3.4. Lokal karakter özelliğine sahip bir P öndemetine *demet* denir.

Önerme 3.5. $P: T^{op} \rightarrow \text{Set}$ bir öndemet olsun. P nin demet olması için $\Leftrightarrow U \in T$

nin her $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü için $P(U) \rightarrow \prod_{i \in I} P(U_i) \xrightarrow[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j)$ diagramının

equalizer olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ P demet olsun. Bu durumda U nun bir $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü için

$$\begin{array}{ccc} P(U_i \cup U_j) & \rightarrow & P(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(U_j) & \rightarrow & P(U_i \cap U_j) \end{array}$$

diagramı komutatiftir. Üstelik bu diagramın invers limiti $P(U_i \cup U_j)$ dır. Bu limit her $i, j \in I$ için mevcut olduğundan

$$P(U) \rightarrow \prod_{i \in I} P(U_i) \xrightarrow[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j)$$

diagramı equalizerdir.

$$(\Leftarrow) \quad P(U) \rightarrow \prod_{i \in I} P(U_i) \xrightarrow[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j)$$

diagramı equalizer olsun. Bu durumda aşağıdaki diagramlar komutatiftir.

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} P(U_i) & \xrightarrow{d_0} & \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j) & \quad \quad & \prod_{j \in I} P(U_j) & \xrightarrow{d_1} & \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j) \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_{ij} & & P_j \downarrow & & \downarrow P_{ij} \\ P(U_i) & \rightarrow & P(U_i \cap U_j) & & P(U_j) & \rightarrow & P(U_i \cap U_j) \end{array}$$

d_0 ve d_1 morfizmlerinin equalizeri $P(U)$ olduğundan her $i, j \in I$ için ,

$$\begin{array}{ccc} P(U_i \cup U_j) & \rightarrow & P(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(U_j) & \rightarrow & P(U_i \cap U_j) \end{array}$$

diagramı komutatiftir. O halde P lokal karakter özelliğine sahiptir.

3.1. Grothendieck Topoloji

Grothendieck topoloji kavramı, cebirsel geometrinin topolojik uzaylardaki açık kümelerin kafes (lattice)'inden daha genel olan, kategoriler üzerinde tanımlı demete benzeyen nesnelerin çalışılması arzusunun ortaya çıkmıştır (Johnstone,P.T).

Tanım 3.6. C , pull-back 'lere sahip bir kategori olsun. C 'nin her bir U nesnesi için $\{U_i \rightarrow U | i \in I\}$ morfizm ailelerinin bir $P(U)$ kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $P(U)$ 'ya C üzerinde *Grothendieck öntopoloji*, $P(U)$ 'nun elamanlarına da örtü aileleri denir.

(i) Her hangi U nesnesi için $1_U: U \rightarrow U$ dan oluşan tek elamanlı aile $P(U)$ ya aittir.

(ii) Eğer $V \rightarrow U, C$ 'nin bir morfizmi ve $\{U_i \rightarrow U | i \in I\} \in P(U)$ ise, bu durumda $\{V \times_U U_i \xrightarrow{p_i} V | i \in I\} \in P(V)$ dır.

(iii) Eğer $\{U_i \xrightarrow{\alpha_i} U | i \in I\} \in P(U)$ ve her bir $i \in I$ için $\{V_{ij} \xrightarrow{\beta_{ij}} U_i | j \in J_i\} \in P(U_i)$ ise, bu durumda $\{V_{ij} \xrightarrow{\alpha_i \beta_{ij}} U | i \in I, j \in J_i\} \in P(U)$ dir.

Tanım 3.7. C pull-back 'lere sahip kategori, P C üzerinde Grothendieck öntopoloji ve $F: C^{op} \rightarrow Set$ öndemet olsun. F 'ye P öntopoloji için bir *demet* denir, eğer her örtü ailesi $\{U_i \rightarrow U | i \in I\}$ için

$$F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

diagramı equalizer ise.

Tanım 3.8. C pull-back 'lere sahip kategori ve P, C üzerinde bir öntopoloji olsun. $R = \{U_i \rightarrow U | i \in I\} \in P(U)$ örtü ailesine *doymuş* (saturated) denir, eğer

$\alpha: V \rightarrow U \in R$ olmak üzere, herhangi $\beta: W \rightarrow V$ morfizmi için $\alpha \circ \beta: W \rightarrow U \in R$ ise. Doymuş bir $R = \{U_i \rightarrow U \mid i \in I\} \in P(U)$ ailesine U üzerinde *siv* (sieve) denir.

Tanım 3.9. C pull-back 'lere sahip kategori olsun. Her bir $U \in C$ elamanları örtü sivi olarak adlandırılan U üzerindeki sivlerin bir $J(U)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu aileye C üzerinde bir *Grothendieck topoloji* denir.

(i) Her bir $U \in C$ için maksimal siv $\{\alpha \mid \alpha \text{'nın değer bölgesi } U\} \in J(U)$ dir.

(ii) Eğer $R \in J(U)$ ve $f: V \rightarrow U \in C$ ise $f^*(R) = \{\alpha: W \rightarrow V \mid f \circ \alpha \in R\} \in J(V)$ dir.

(iii) Eğer, $R \in J(U)$ ve S ailesi de her bir $f: V \rightarrow U \in R$ için $f^*(S) \in J(V)$ olan U üzerinde bir siv ise, bu durumda $S \in J(U)$ dir.

Bir kategori Grothendieck topoloji ile donatılırsa bu kategoriye *site* denir (Johnstone, P.T).

Tanım 3.10. C bir site ve J, C üzerinde Grothendieck topoloji ve $R_1 = \{U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$, $R_2 = \{U_j \rightarrow U \mid j \in J\} \in J(U)$ olsun. Bu durumda R_1, R_2 'yi *inceltiyor* denir, eğer her $\alpha: U_i \rightarrow U \in R_1$ için $\exists \beta: U_j \rightarrow U \in R_2$ var öyleki α, β üzerinden *faktör ediliyorsa* (α factor trough β).

$R_1, R_2 \in J(U)$ olsun. $R_1 \approx R_2$ dir $\Leftrightarrow R_2, R_1$ 'yi inceltiyorsa. Bu şekilde tanımlanan $\approx$ bağıntısı $J(U)$ üzerinde yönlendirme bağıntısıdır. Gerçekten,

(1) $R_1 \approx R_1$ dir. Çünkü; Her $\alpha: U_i \rightarrow U \in R_1$ için

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\alpha} & U \\ \text{id}_{U_i} \downarrow & \nearrow \alpha & \\ U_i & & \end{array}$$

diagramı mevcut olduğundan α , α üzerinden factor edilir.

(2) $R_1, R_2, R_3 \in J(U)$, $R_1 \approx R_2$ ve $R_2 \approx R_3$ olsun.

Her $\beta \in R_2$ için $\exists \alpha \in R_1$ var öyleki β, α üzerinden factor edilebilir ve her $\gamma \in R_3$ için $\exists \beta \in R_2$ var öyleki γ, β üzerinden faktor edilebilir. Yani;

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\alpha} & U \\ f \uparrow & \nearrow \beta & \\ U_j & & \\ g \uparrow & \nearrow \gamma & \\ U_k & & \end{array}$$

diagramı mevcuttur. $\gamma = \alpha \circ (f \circ g)$ biçiminde yazılabildiğinden γ, α üzerinden faktor edilebilir O halde $R_1 \approx R_3$ dir.

(3) $R_1 = \{U_i \rightarrow U | i \in I\}, R_2 = \{U_j \rightarrow U | j \in I\} \in J(U)$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{p_2} & U_j \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \rightarrow & U \end{array}$$

diagramı komutatiftir. C üzerinde Grothendieck topoloji mevcut olduğundan $R_3 = \{U_i \times_U U_j \rightarrow U | i, j \in I\}$ ailesi bir örtü sividir. R_3 'ün her bir elemanı $U_i \rightarrow U$ ile p_2 nin kompozisyonu aynı zamanda $U_j \rightarrow U$ ile p_1 'in kompozisyonu şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $R_1 \approx R_3$ ve $R_2 \approx R_3$ dir.

Tanım 3.11. C bir site ve S simpleksel kümelerin kategorisi olmak üzere $X: C^{op} \rightarrow S$ fonktörüne C üzerinde bir *simpleksel öndemet* denir (Jardine, J.F.).

Nesneleri; Simpleksel öndemetler ve morfizmleri; tabii dönüşümler veya simpleksel öndemet dönüşümler olan bir kategori oluşturabiliriz. Bu kategoriye simpleksel öndemetlerin kategorisi denir ve $Spre(C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.12. C bir site, $R = \{U_i \rightarrow U | i \in I\}$ bir siv ve $X: C^{op} \rightarrow S$ öndemet olsun. Eğer U 'nun her $\{U_i\}_{i \in I}$ örtüsü için $X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i)$ injektif ise, X 'e R -

ayrılmış öndemet ve

$$X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i) \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} X(U_i \cap U_j)$$

diagramı equalizer ise, X 'e R -demet denir.

3.2. Lokal Teori

C üzerindeki topoloji, $C(-,U)$ representable fonktorların $R \subset C(-,U)$ altfonktorlarının $J(U)$ aileleri ile tanımlanmıştır. Her bir R , $C \downarrow U$ ($=C/U$ dilim kategori) comma kategorinin bir altkategorisi ile özdeşlenebilir. Böylece her $X: C^{op} \rightarrow S$ simpleksel öndemeti her bir R örtü sivi üzerinde bir funktora kısıtlanır.

Şimdi bir R örtü sivine karşılık gelen simplekse kümeyi tanımlayalım. Bu küme

$$X(U)_R = \varprojlim_{\gamma: V \rightarrow U \in R} X(V)$$

ile tanımlanır. $X(U)_R$ ye R -uyumlu simpleksel küme denir. Her $U \in C$ ve her $R \subset C(-,U)$ örtü sivi için $\tau_R: X(U) \rightarrow X(U)_R$ kanonik dönüşümü vardır.

Önerme 3.13. X simpleksel öndemetin bir simpleksel demet olması için $\Leftrightarrow$ Her $U \in C$ ve her $R = \{U_i \rightarrow U \mid i \in I\} \subset C(-,U)$ örtü sivi için $\tau_R: X(U) \rightarrow X(U)_R$ bir izomorfizm olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ X simpleksel öndemeti bir simpleksel demet olduğundan her $U \in C$ ve her $R = \{U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$ örtü sivi için

$$X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i) \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} X(U_i \times_U U_j)$$

diagramı equalizerdir. Diğer taraftan, X simpleksel öndemetin simpleksel demet olması için $\Leftrightarrow$ Her R örtü sivi için R -demet olmasından dolayı

$$X(U)_R \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i) \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} \prod_{i,j \in I} X(U_i \times_U U_j)$$

diagramı equalizerdir. Örnek 2.13.(2) den $X(U) \cong X(U)_R$ dir.

($\Leftarrow$) Hipotezden

$$X(U)_R \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \prod_{i,j \in I} X(U_i \times_U U_j)$$

diagramı equalizer ve $X(U) \cong X(U)_R$ olduğundan

$$X(U) \rightarrow \prod_{i \in I} X(U_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \prod_{i,j \in I} X(U_i \times_U U_j)$$

diagramının equalizer olduğu açıktır.

C üzerindeki simpleksel demetlerin kategorisini $Sshv(C)$ ile gösterelim.

Bu durumda $Sshv(C)$ kategorisi $SPre(C)$ nin full altkategorisidir.

Şimdi C üzerindeki örtü sivlerinin $J(U)$ ailesi üzerindeki yönlendirme bağıntısından faydalanarak aşağıdaki fonktörü tanımlayalım.

$$L: SPre(C) \rightarrow SPre(C) \quad , \quad X \rightarrow L(X) \quad \text{öyleki}$$

$$L(X): C^{op} \rightarrow S \quad U \rightarrow L(X)(U) = \varinjlim_{R \subset C(-,U)} X(U)_R$$

ile tanımlıdır. Bu durumda $L_X: X \rightarrow LX$ kanonik dönüşümü vardır.

$J: SShv(C) \rightarrow SPre(C)$ dahil etme fonktörü $L^2: SPre(C) \rightarrow SShv(C)$ birleştirilmiş demet fonktörüne sol adjointtir.

L ve L^2 fonktörleri noktasallaştırılmış limitleri korurlar ve $L_{LX}: LX \rightarrow L^2(X)$ kononik dönüşümü vardır. Bu dönüşüm noktasal monik olduğunda X ayrılmış öndemettir.

Tanım 3.14. X ve Y simpleksel öndemet ve $p: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. p 'ye *lokal lifleme* denir. Eğer, simpleksel dönüşümlerin her komutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n,k} & \xrightarrow{\alpha} & X(U) \\ i \downarrow & & \downarrow p(U) \\ \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & Y(U) \end{array}$$

diagramı için $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için komutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_{n,k} & \xrightarrow{\alpha} & X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) \\
 i \downarrow & & \downarrow p(U) & \nearrow & \downarrow p(V) \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & Y(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & Y(V)
 \end{array}$$

diagramı varsa. Diğer bir ifadeyle $p, n > 0$ için $\Delta_{n,k} \rightarrow \Delta_n$ formundaki bütün simpleksel küme dahil etme tasvirleri lokal sağ yükseltme özelliğine sahipse.

$*$: $C^{op} \rightarrow S$ fonktoru; Her $U \in R$ için $*(U)$, 0-simplekslerin bir kopyasıdır. Bu durumda $*$, $Spre(C)$ nin varış nesnesidir. Üstelik, $*$ her R örtü sivi için $*(U) \cong *(U)_R$ olduğundan simpleksel demettir.

Tanım 3.15. X bir simpleksel öndemet olsun. Eğer $X \rightarrow *$ simpleksel öndemet dönüşümü lifleme ise X 'e *lokal fibrant* denir.

Tanım 3.16. Bir $q: Z \rightarrow W$ simpleksel öndemet dönüşümüne *noktasal kan lifleme* denir. Eğer, Her $U \in C$ için kesitlerin her $q: Z(U) \rightarrow W(U)$ dönüşümü bir Kan lifleme ise.

Not 3.17. Bir $q: Z \rightarrow W$ simpleksel öndemet dönüşümü noktasal Kan lifleme ise lokal liflemedir. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 3.18. C bir kategori olsun. C de bir komutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B \\
 x \downarrow & & \downarrow y \\
 C & \xrightarrow{v} & D
 \end{array}$$

diagram verilsin. Eğer, $b: E \rightarrow B$ ve $c: E \rightarrow C$ morfizmleri için $vc = yb$ olacak şekilde her (b, c) morfizm çifti için bir tek $a: E \rightarrow A$ morfizmi var öyleki $b = ua$

ve $c=xa$ ise bu diagrama *kartezyen* (cartesian) denir. Eğer, $b':B \rightarrow E'$ ve $c':C \rightarrow E'$ morfizmleri için $b'u = c'x$ olacak şekildeki her (b',c') morfizm çifti için bir tek $d:D \rightarrow E'$ morfizmi var öyleki $b' = dy$ ve $c' = dv$ ise, bu diagrama *kokartezyen* denir.

Tanım 3.19. Simpleksel küme monomorfizmlerinin bir A sınıfına *lokal doymuş* denir (Gabriel,P.). Eğer, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa,

(1) Bütün izomorfizmler A ya aittir.

(2) Eğer,
$$\begin{array}{ccc} & K \rightarrow L & \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ & K' \rightarrow L' & \end{array}$$
 diagramı kokartezyen ve $\alpha \in A$ ise $\beta \in A$ dır.

(3) A , geriçekmelere göre kapalıdır.

(4) A sonlu kompozisyon ve sonlu direkt toplamlara göre kapalıdır.

Lemma 3.20. X ve Y simpleksel öndemet olsun. Sabit bir simpleksel öndemet dönüşüm $p: X \rightarrow Y$ 'ye göre lokal sol yükseltme özelliğine sahip olan simpleksel küme monomorfizmlerinin A_p sınıfı lokal doymuştur.

İspat: A_p ; $i: K \rightarrow L$ ye olan bütün simpleksel küme dahil etme tasvirlerinin bir ailesi öyleki; her bir komutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\alpha} & X(U) \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{\beta} & Y(U) \end{array}$$

diagramı için $\exists R \subset C(-,U)$ var öyleki her $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\alpha} & X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(U) \\ i \downarrow & & \downarrow p & \nearrow & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{\beta} & Y(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & Y(U) \end{array}$$

diagramı komutatifdir.

(1) A_p nın tanımından bütün izomorfizmler A_p ye aittir.

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & K' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ L & \rightarrow & L' \end{array} \quad (*)$$

diagramı komutatif, kokartezyen ve $f \in A_p \Rightarrow f' \in A_p$ mi?

$$\begin{array}{ccc} K' & \rightarrow & X(U) \\ f' \downarrow & & \downarrow \\ L' & \rightarrow & Y(U) \end{array}$$

komutatif diagram olsun. Bu iki diagram komutatif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & X(U) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ L & \rightarrow & Y(U) \end{array}$$

diagramı komutatiftir.

$f \in A_p \Rightarrow \exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccccc} K & \rightarrow & X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) \\ f \downarrow & & & \nearrow & \downarrow \\ & & L & \rightarrow & Y(U) \xrightarrow{\varphi^*} Y(V) \end{array}$$

diagramı komutatiftir.

$$\begin{array}{ccccccc} K & \rightarrow & K' & \rightarrow & X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) \\ f \downarrow & & f' \downarrow & & & & \downarrow \\ L & \rightarrow & L' & \rightarrow & Y(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & Y(V) \end{array}$$

diagramı (*)'ın kokartezyen oluşu ile birlikte düşünülürse $L' \rightarrow X(V)$ dönüşümü vardır.

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} K' & \rightarrow & K & \rightarrow & K' \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f' \\ L' & \rightarrow & K & \rightarrow & K' \end{array}$$

komutatif diagram f', f nin geriçekmesi ve $f \in A_p$ olsun.

$f \in A_p \Rightarrow \text{Her}$

$$\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & X(U) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ L & \rightarrow & Y(U) \end{array}$$

diagramı için $\exists R \subset C(-, U)$ var öyleki her $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccccc} K & \rightarrow & X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) \\ f \downarrow & \theta_\varphi & & \nearrow & \downarrow \\ L & \rightarrow & Y(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & Y(V) \end{array}$$

diagramı komutatiftir. Bu taktirde f', f 'nin geriçekmesi olduğundan $L' \rightarrow L$, $L \rightarrow L'$ dönüşümleri var ve $\theta_\varphi: L \rightarrow X(V)$ dönüşümü var olduğundan $\theta'_\varphi: L' \rightarrow X(V)$ dönüşümü vardır.

(4) $i_1, i_2 \in A_p \Rightarrow i_2 \circ i_1 \in A_p$ mi?

Kabul edelim ki

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\alpha} & X(U) \\ i_1 \downarrow & & \downarrow \\ K_2 & & \\ i_2 \downarrow & & \\ K_3 & \rightarrow & Y(U) \end{array}$$

diagramı komutatif olsun.

$i_1 \in A_p \Rightarrow \exists R \subset C(-, U)$ var öyleki her $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccccc} K_1 \rightarrow X(U) & \xrightarrow{\alpha} & X(U) & & \\ i_1 \downarrow & \nearrow & \downarrow p & & \\ K_2 & & & & \\ i_2 \downarrow & & & & \\ K_3 \rightarrow Y(U) & \rightarrow & Y(U) & & \end{array}$$

diagramı vardır.

$i_2 \in A_p \Rightarrow \exists S_\varphi \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her $\psi: W \rightarrow V \in S_\varphi$ için

$$\begin{array}{ccccccc} K_1 \rightarrow X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) & \xrightarrow{\psi^*} & X(W) & & \\ i_1 \downarrow & & & \nearrow & \downarrow & & \\ K_2 & & & & & & \\ i_2 \downarrow & & & & & & \\ K_3 \rightarrow Y(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & Y(V) & \xrightarrow{\psi^*} & Y(W) & & \end{array}$$

diagramı vardır. O halde $i_2 \circ i_1 \in A_p$ dir.

$\partial\Delta_n$, Δ_n 'nin kanonik simpleksi i_n 'nin bütün yüzlerinin oluşturduğu altkompleks olsun. $n \geq 0$ için $\partial\Delta_n$ 'den Δ_n 'e bütün dahil etme tasvirlerinin ailesi lemma 3.20 'ye göre lokal doymuştur. Dolayısıyla bu aileye göre sağ yükseltme özelliğe sahip bütün simpleksel öndemet dönüşümler lokal liflemelerdir.

Lemma 3.21. X bir simpleksel öndemet olsun. $\eta_X: X \rightarrow LX$ kanonik dönüşümü, $\partial\Delta_n$ 'den Δ_n 'e bütün dahil etme tasvirlerine göre lokal sağ yükseltme özelliğine sahiptir.

İspat:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \rightarrow & X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \rightarrow & LX(U) \end{array}$$

diagramı bazı R örtüsü sivleri için

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \rightarrow & X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \rightarrow & X(U)_R \end{array}$$

diagramı üzerinden faktör edilebilir. Bu durumda her $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$\psi^*R = \{\psi: W \rightarrow V \mid \varphi \circ \psi \in R\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & X(V) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ X(U)_R & \xrightarrow{\varphi^*_R} & X(V)_{\varphi^*_R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ LX(U) & \longrightarrow & LX(V) \end{array}$$

diagramı komutatiftir. $\varphi^*R = C(-, V)$ olduğundan τ bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $\Delta_n \rightarrow X(V)$ dönüşümü vardır.

Önerme 3.22. X ve Y simpleksel öndemet olsun. Eğer, $p: X \rightarrow Y$ lokal lifleme ise $Lp: LX \rightarrow LY$ lokal liflemedir.

İspat:

$$\begin{array}{ccccc} X(U) & \xrightarrow{\eta_X} & LX(U) & \xleftarrow{\alpha} & \Delta_{n,k} \\ \downarrow p & & \downarrow Lp & & \downarrow \\ Y(U) & \xrightarrow{\eta_Y} & LY(U) & \xleftarrow{\beta} & \Delta_n \end{array}$$

diagramını düşünelim. Lemma 3.21 'den α , X 'e lokal olarak yükselir. Lemma 3.20 'den lokal liflemelerin kompozisyonunda lokal lifleme olduğundan $\eta_{Y \circ \rho}$ lokal liflemedir. Bu durumda β 'nın X 'e yükseltmesi vardır. β 'nın yükseltmesi ile η_X 'in kompozisyonu β 'nın LX 'e yükseltmesini verir.

X simpleksel öndemet ve K bir simpleksel küme olsun. $X^K: C^{op} \rightarrow S$ simpleksel öndemeti; her $U \in C$ için $X^K(U) = \text{Hom}(K, X(U))$ ile tanımlanır.

Tanım 3.23. X , C üzerinde lokal fibrat simpleksel öndemet ve K bir simpleksel küme olsun. $f, g: K \rightarrow X(U)$ simpleksel dönüşümler olmak üzere, eğer $\exists R \subset C(-, U)$ örtüsü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & X(U) \\ d^0 \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ K \times \Delta_1 & \xrightarrow{h_\varphi} & X(V) \\ d^1 \uparrow & & \downarrow \varphi^* \\ K & \xrightarrow{g} & X(U) \end{array}$$

diagramı varsa f, g 'ye lokal homotopiktir denir ve $f \cong_{loc} g$ ile gösterilir.

$L \subset K$ olsun. Eğer, $f|_L = g|_L$ ve her bir h_φ homotopisi L üzerinde sabit ise f, g 'ye L 'ye göre lokal homotopiktir denir ve $f \cong_{loc} g \text{ rel } L$ ile gösterilir.

Lemma 3.24. Eğer K sonlu kompleks ve X lokal fibrant simpleksel öndemet ise K 'dan $X(U)$ 'ya dönüşümlerin lokal homotopisi (herhangi altkomplekslere göre) eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat: Eğer X lokal fibrant ise $\Delta_0 \rightarrow X(U)$ köşe dönüşümlerinin lokal homotopisinin eşdeğerlik bağıntısı olduğunu göstermek yeterlidir. Yani, her bir comma kategori $C \downarrow U$ için

$$(C \downarrow U)^{op} \rightarrow C^{op} \xrightarrow{x} S$$

$$V \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X(V)$$

kompozisyon fonktoru $X|_U$ lokal fibranttır.

Şimdi kabul edelim ki

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ \nearrow & \sigma & \searrow f \\ L & \xrightarrow{\quad} & X(U) \\ \searrow & g & \nearrow \\ & K & \end{array}$$

diagramı var ve $C \downarrow U$ üzerinde simpleksel öndemetlerin

$$\begin{array}{ccc} (X|_U)^{K/L} & \rightarrow & (X|_U)^K \\ \downarrow & & \downarrow i^* \\ * & \xrightarrow{\sigma} & (X|_U)^L \end{array}$$

pull-back diagramı olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} (X|_U)^{K/L} & \rightarrow & \text{Hom}(K, X(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ *(U) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Hom}(L, X(U)) \end{array}$$

diagramına göre f ve g lokal fibrant $(X|_U)^{K/L}$ 'nin köşelerini belirler ve $f \cong_{loc} g$ (rel L) olması için $\Leftrightarrow$ karşılıklı köşelerin lokal homotopik olmasıdır.

Kabul edelim ki $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X(U) \\ d^0 \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Delta_1 & \xrightarrow{w_\varphi} & X(V) \\ d^1 \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\ \Delta_0 & \xrightarrow{y} & X(U) \end{array}$$

diagramı vardır. Yani $x \cong_{loc} y$ dir. Bu durumda, $\exists S_\varphi \subset C(-, V)$ örtü sivi var öyleki her bir $\gamma: W \rightarrow V \in S_\varphi$ için $(w_\varphi, s_0 \varphi^* x, -)$ dönüşümü $\partial_0 i_2'$ yi $w_\varphi(i_1)$ 'e ve $\partial_1 i_2'$ yi $s_0 \varphi^* x$ 'e dönüştürmek üzere

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{2,2} & \xrightarrow{(w_\varphi, s_0\varphi * x, -)} & X(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \gamma^* \\
 \Delta_2 & \xrightarrow{v_{\lambda, \varphi}} & X(W)
 \end{array}$$

diagramı vardır. O halde

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \xrightarrow{y} & X(U) \\
 d^0 \downarrow & & \searrow (\gamma \circ \varphi)^* \\
 \Delta_1 & \xrightarrow{d^2} \Delta_2 & \xrightarrow{v_{\gamma, \varphi}} X(W) \\
 d^1 \uparrow & & \nearrow (\gamma \circ \varphi)^* \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X(U)
 \end{array}$$

diagramı var olup $y \cong_{loc} x$ dir.

Kabul edelimki $x \cong_{loc} y$ ve $y \cong_{loc} z$ olsun. Yani,

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X(U) \\
 d^0 \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\
 \Delta_1 & \xrightarrow{w_\varphi} & X(V) \\
 d^1 \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{y} & X(U)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \xrightarrow{y} & X(U) \\
 d^0 \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\
 \Delta_1 & \xrightarrow{w_\varphi} & X(V) \\
 d^1 \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{z} & X(U)
 \end{array}$$

diagramları var olsun. Δ_2 ; köşeleri x, y, z olan iki simpleks olmak üzere $\Delta_0 \rightarrow \Delta_2 \xrightarrow{d_1 i_2} \Delta_1$ dönüşümü göz önüne alınırsa

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X(U) \\
 d^0 \downarrow & & \searrow (\gamma \circ \varphi)^* \\
 \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 & \xrightarrow{\partial_1 i_2} \Delta_1 & \rightarrow X(W) \\
 d^1 \uparrow & & \nearrow (\gamma \circ \varphi)^* \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{z} & X(U)
 \end{array}$$

diagramı vardır. Dolayısıyla $x \cong_{loc} z$ dir.

$x \cong_{loc} x$ olduğu açıktır.

C_t varış nesnesi t olan Grothendieck site olsun. X , C_t üzerinde lokal fibrant simpleksel öndemet ve $x \in X(t)_0$ köşesini alalım. x_U ; x 'in C_t 'deki $U \rightarrow t$ dönüşümüyle oluşturulan $X(t) \rightarrow X(U)$ dönüşümü altındaki görüntüsü olsun. $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (X(U), x_U)$ dönüşümlerinin lokal homotopi sınıflarının kümesi $[(\Delta_n, \partial\Delta_n), (X(U), x_U)]_{loc}$ ile gösterilen elemanlara sahip olsun. Bu durumda

$$\pi_n^P(X, x): C_t \rightarrow Set$$

$$U \rightarrow \pi_n^P(X, x)(U) = \{[(\Delta_n, \partial\Delta_n), (X(U), x_U)]_{loc}\}$$

ile tanımlanan $\pi_n^P(X, x)$ fonktoru C_t üzerinde bir öndemettir. Gerçekten,

$$i) \pi_n^P(X, x)(1_U): \pi_n^P(X, x)(U) \rightarrow \pi_n^P(X, x)(U)$$

Her $f \in \pi_n^P(X, x)(U)$ için

$$\begin{array}{ccc} & & (X(U), x_U) \\ & \nearrow & \downarrow 1_{X(U)} \\ (\Delta_n, \partial\Delta_n) & & (X(U), x_U) \\ & \searrow & \end{array}$$

diagramı var olduğundan $\pi_n^P(X, x)(1_U) = 1_{\pi_n^P(X, x)(U)}$ dir.

ii) $i: U \rightarrow V, j: V \rightarrow W \in C_t$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} & & (X(W), x_W) \\ & \nearrow & \downarrow X(i) \\ (\Delta_n, \partial\Delta_n) & \rightarrow & (X(V), x_V) \\ & \searrow & \downarrow X(j) \\ & & (X(U), x_U) \end{array}$$

diagramı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi_n^P(X, x)(joi)(f) &= f \circ X(j) \circ X(i) \\ &= \pi_n^P(X, x)(i)(f \circ X(j)) \\ &= \pi_n^P(X, x)(i) \circ \pi_n^P(X, x)(j)(f) \\ \Rightarrow \pi_n^P(X, x)(joi) &= \pi_n^P(X, x)(i) \circ \pi_n^P(X, x)(j) \end{aligned}$$

dir. Bu öndemet her $n \geq 1$ için ayrılmış öndemettir. Şimdi $\pi_n^P(X, x)$ 'in birleştirilmiş demeti olan $\pi_n(X, x)$ 'i tanımlayacağız. $\pi_n(X, x)$, $L\pi_n^P(X, x)$ ile özdeşlenebilir. Burada L fonktoru birleştirilmiş demet fonktordur. Benzer şekilde köşelerin lokal homotopi sınıflarının öndemeti $\pi_0^P(X, x)$ ve bunun birleştirilmiş demeti $\pi_0(X, x)$ dir.

$\pi_n^P(X, x)$ üzerindeki işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır.

f ve g lokal homotopi sınıfları $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (X(U), x_U)$ dönüşümlerinin birer ailesi olsun. $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi vardır öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1, n} & \xrightarrow{(x_U, \dots, x_U, f, -, g)} & X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{n+1} & \xrightarrow{\partial_n w_\varphi} & X(V) \end{array}$$

diagramı vardır. Bu durumda $\left\{ [\partial_n w_\varphi]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R}$ ailesine R -uyumlu aile denir.

Üstelik $\left[\left\{ [\partial_n w_\varphi]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R} \right]$, $\pi_n(X, x)(U)$ nun bir elemanıdır. O halde m^P dönüşümü

$$\begin{aligned} m^P: \pi_n^P(X, x) \times \pi_n^P(X, x) &\rightarrow \pi_n(X, x) \\ ([f]_{\text{loc}}, [g]_{\text{loc}}) &\rightarrow \left[\left\{ [\partial_n w_\varphi]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R} \right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. m^P ye birleştirilmiş demet fonktor uygulanırsa

$$m: \pi_n(X, x) \times \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, x)$$

dönüşümü elde edilir.

$x_u: (\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (X(U), x_U)$ sabit dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $\pi_n(X, x)(U)$ nun sabit bir e_U elemanını oluşturur öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için $\varphi^*(e_U) = e_V$ dir.

Önerme 3.25. $\pi_n(X, x)(U)$, $n \geq 1$ için bir gruptur.

İspat: Kabul edelimki $\left\{ [x_\varphi]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R}$, $\pi_n^P(X, x)(U)$ da bazı R örtü sivleri için bir R -uyumlu aile, $[z]_{\text{loc}} \in \pi_n^P(X, x)(U)$ ve her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1, n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, x_\varphi, -, \varphi^* z)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow w_\varphi & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

diagramı var olsun. Bu durumda $\left\{ \left[\partial_n w_\varphi \right]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R}$ R-uyumlu ailedir ve bu aile $\pi_n(X, x)(U)$ daki $\left[\left\{ \left[\partial_n w_\varphi \right]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R} \right] \cdot \left[[Z]_{\text{loc}} \right]$ çarpımı temsil eder.

1) $u, v, w: (\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (X(U), x_U)$ dönüşümleri $\pi_n^p(X, x)(U)$ nun elemanlarını temsil etsin. $\exists R \subset C_t(-, U)$ örtü sivi vardır öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için aşağıdaki diagramlar komutatiftir.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1,n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, \varphi^*u, -, \varphi^*v)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow w_{n-1}^\varphi & \\ \Delta_{n+1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1,n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, \partial_n w_{n-1}^\varphi, -, \varphi^*w)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow w_{n+1}^\varphi & \\ \Delta_{n+1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1,n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, \varphi^*V, -, \varphi^*W)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow w_{n+2}^\varphi & \\ \Delta_{n+1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+2,n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, w_{n-1}^\varphi, -, w_{n+1}^\varphi, w_{n+2}^\varphi)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow u^\varphi & \\ \Delta_{n+2} & & \end{array}$$

Bu durumda her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{n+1,n} & \xrightarrow{(x_V, \dots, x_V, j^*u, \partial_n w_{n+1}^\varphi, \partial_n w_{n+2}^\varphi)} & X(V) \\ \downarrow & \nearrow \partial_n u^\varphi & \\ \Delta_{n+1} & & \end{array}$$

diagramı komutatiftir. Dolayısıyla

$$\left[[w]_{\text{loc}} \right] \cdot \left(\left[[v]_{\text{loc}} \right] \cdot \left[[u]_{\text{loc}} \right] \right) = \left[[w]_{\text{loc}} \right] \cdot \left[\left\{ \left[\partial_n w_{n-1}^\varphi \right]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in R} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left\{ \left[\partial_n w_{n+1}^\varphi \right]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in \mathbb{R}} \right] \\
&= \left[\left\{ \left[\partial_n w_{n+2}^\varphi \right]_{\text{loc}} \right\}_{\varphi \in \mathbb{R}} \right] \cdot \left[[u]_{\text{loc}} \right] \\
&= \left(\left[[w]_{\text{loc}} \right] \cdot \left[[v]_{\text{loc}} \right] \right) \cdot \left[[u]_{\text{loc}} \right] \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

2) Birim elaman ise $x_U: (\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (X(U), x_U)$ sabit dönüşümüyle oluşturulan $\pi_n(X, x)(U)$ 'nun e_U elamanıdır.

Sonuç 3.26: $\pi_n(X, x)$, $n \geq 1$ için grupların bir demetidir.

C bir site olsun. Her $U \in C$ için $C \downarrow U$ üzerinde C den indirgenen kanonik Grothendieck topoloji vardır. Ayrıca, $C \downarrow U$ bir varış nesnesine sahiptir. Bu nesne $1_U: U \rightarrow U$ özdeş morfizmidir. Eğer, X lokal fibrant simpleksel öndemet ise, $X|_U$ lemma 3.24 deki kompozisyon fonktor olmak üzere $x \in X|_U (1_U)_o$ köşesi $\pi_n(X|_U, x)$ homotopi gruplarının bir demetini belirler.

Tanım 3.27. X ve Y , C üzerinde iki lokal fibrant simpleksel öndemet olsun. $f: X \rightarrow Y$ lokal fibrant simpleksel öndemet dönüşümüne *konbinatorial zayıf eşdeğerlik* denir. Eğer, f ile üretilen,

$$f_*: \pi_o(X) \rightarrow \pi_o(Y) \text{ ve}$$

$$f_*: \pi(X|_U, x) \rightarrow \pi(Y|_U, f(x)), U \in C, x \in X(U) \quad \text{dönüşümlerinin her}$$

biri demet izomorfizmi ise.

Önerme 3.28. X, Y ve Z ; C üzerinde lokal fibrant simpleksel öndemetler ve aşağıdaki diagram komutatif olsun.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{g} & Y \\
h \searrow & & \swarrow f \\
& Z &
\end{array}$$

Eğer f, g ve $h=f \circ g$ dönüşümlerinden ikisi kombinatorial zayıf eşdeğerlik ise üçüncüsünde kombinatorial zayıf eşdeğerliktir.

İspat: Kabul edelimki g ve h kombinatorial zayıf eşdeğerlik olsun. Bu durumda $g_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ bir izomorfizmdir. Böylece $U \in C$ ve herbir $y \in Y(U)_0$ için $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi vardır öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için $x_\varphi \in X(V)_0$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_1 & \xrightarrow{(\varphi^*y, g(x_\varphi))} & Y(V) \\ \downarrow & \searrow w_\varphi & \\ \Delta_1 & & \end{array}$$

diagramı vardır. w_φ 'lerin herbiri demetlerin bir izomorfizmini üretir. Yani, $(w_\varphi)_*: \pi_n(Y|_V, \varphi^*y) \rightarrow \pi_n(Y|_V, g(x_\varphi))$ izomorfizmdir.

Her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için $(C \downarrow U) \downarrow (\varphi: V \rightarrow U)$; $C \downarrow U$ comma kategorisinin $\varphi: V \rightarrow U$ nesnesi üzerine indirgenen site olmak üzere $(C \downarrow U) \downarrow (\varphi: V \rightarrow U)$ ile $C \downarrow V$ comma kategorisi birbirine izomorfdur. Dolayısıyla, $\pi_n(Y|_U, y)(\varphi: V \rightarrow U)$ homotopi grubu ile $\pi_n(Y|_V, \varphi^*y)(1_V)$ homotopi grubu birbirine izomorfdur. Bu durumda aşağıdaki diagramlar komutatiftir.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(Y|_U, y)(1_U) & \xrightarrow{\varphi^*} & \pi_n(Y|_U, y)(\varphi: V \rightarrow U) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_n(Z|_U, f(y))(1_U) & \xrightarrow{\varphi^*} & \pi_n(Z|_U, f(y))(\varphi: V \rightarrow U) \\ \\ \pi_n(Y|_U, y)(\varphi: V \rightarrow U) & \cong & \pi_n(Y|_V, \varphi^*y)(1_V) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_n(Z|_U, f(y))(\varphi: V \rightarrow U) & \cong & \pi_n(Z|_U, f(\varphi^*y))(1_V) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \pi_n(X|_V, x_\varphi)(1_V) \\
& & \swarrow g^* \\
\pi_n(Y|_V, \varphi^* y)(1_V) & \xrightarrow{(w_\varphi)_*} & \pi_n(Y|_V, g(x_\varphi))(1_V) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
\pi_n(Z|_V, f(\varphi^* y))(1_V) & \xrightarrow{(fw_\varphi)_*} & \pi_n(Z|_V, fg(x_\varphi))(1_V) \\
& & \searrow h^*
\end{array}$$

Bu diagramlar komutatif olduğundan f_* bir izomorfizmdir.

Teorem 3.29. X ve Y , C üzerinde lokal fibrant simpleksel öndemetler olsun.

Bu durumda $p: X \rightarrow Y$ dönüşümünün lokal lifleme ve kombinatorial zayıf eşdeğerlik olması için $\Leftrightarrow p$ 'nin $\partial\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ şeklindeki bütün dahil etme tasvirlerine göre lokal sağ yükseltme özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha: (\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow (x(u), x_u)$, $\pi_n(x|_u, \chi)(1_u)$ 'nın *trivial elamanı* olması için $\Leftrightarrow \exists R \subset C(-, U)$ var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc}
\partial\Delta_{n+1} & \xrightarrow{(\varphi^* \alpha, x_V, x_V)} & X(V) \\
\downarrow & \nearrow w_\varphi & \\
\Delta_{n+1} & &
\end{array}$$

diagramı varsa. Her $n \geq 0$ için $p: X \rightarrow Y$ dönüşümü $\partial\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ dahil etme tasvirlerine göre lokal sağ yükseltme özelliğine sahip olduğundan kombinatorial zayıf eşdeğerliktir. Bu şekildeki bir dönüşüm lemma 3.21 'den lokal liflemedir.

$$\begin{array}{ccc}
(\Leftarrow) & \partial\Delta_n & \xrightarrow{\alpha} X(U) \\
& \downarrow & \downarrow p \\
& \Delta_n & \xrightarrow{\beta} Y(V)
\end{array} \quad (D)$$

diagramı lokal yükseltme özelliğine sahiptir. Yani $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_n & \xrightarrow{\varphi^*\circ\alpha} & X(V) \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\varphi^*\circ\beta} & X(V)
 \end{array} \quad (D_\varphi)$$

diagramı vardır. Bu ifadeler gösteriyorki bir $p: X \rightarrow Y$ simplekssel dönüşümün kombinatorial zayıf eşdeğerlik ve lokal lifleme olması için D şeklindeki diagramların herbiri lokal yükseltme özelliğine sahip olmasıdır.

İlk olarak, eğer D , lokal yükseltmeye sahip D_φ diagramlarına lokal homotopik ise, bu durumda D lokal yükseltmeye sahiptir. Yani, $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_n & \xrightarrow{\varphi^*\circ\alpha} & X(V) \\
 \downarrow & \searrow h_\varphi & \downarrow \\
 \partial\Delta_n \times \Delta_1 & \xrightarrow{h_\varphi} & X(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\varphi^*\circ\beta} & Y(V) \\
 \downarrow & \searrow h'_\varphi & \downarrow \\
 \partial\Delta_n \times \Delta_1 & \xrightarrow{h'_\varphi} & Y(V)
 \end{array}$$

diagramı vardır. Ayrıca hipotezden dolayı her bir $\varphi \in R$ için $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\psi: W \rightarrow V \in R_\varphi$ için

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_n & \xrightarrow{\psi^*\circ h_\varphi \circ d^1} & X(W) \\
 \downarrow & \searrow \theta_{\psi,\varphi} & \downarrow p \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\psi^*\circ h'_\varphi \circ d^1} & Y(W)
 \end{array}$$

diagramı vardır. Bu durumda bir $R_{\psi,\varphi} \subset C(-, W)$ örtü sivi vardır öyleki her bir $\gamma: W' \rightarrow W \in R_{\psi,\varphi}$ için (0) , Δ_1 'in sıfır köşesi olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial\Delta_n & \xrightarrow{d^0} & (\partial\Delta_n \times \Delta_1) \cup (\Delta_n \times (0)) & \xrightarrow{(\gamma^*\psi^*h_\varphi, \gamma^*\theta_{\psi,\varphi})} & X(W') \\
 \downarrow & & & \nearrow w_{\gamma,\psi,\varphi} & \downarrow p \\
 \Delta_n & \xrightarrow{d^0} & \Delta_n \times \Delta_1 & \xrightarrow{\gamma^*\psi^*h'_\varphi} & Y(W')
 \end{array}$$

diagramı vardır. Şimdi; $n \geq 1$ için

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X(U) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & Y(U) \end{array} \quad (D)$$

diagramını gözönüne alalım. $\varphi: V \rightarrow U$ için D diagramı $\partial\Delta_n$ nin (0) köşesinin görüntüsü x olmak üzere;

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \xrightarrow{(\alpha_\varphi^*, x_V, \dots, x_V)} & X(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \xrightarrow{\beta_\varphi} & Y(V) \end{array} \quad (D_\varphi)$$

diagramına lokal homotopiktir. Gerçekte, $\partial\Delta_n$ nin $\Delta_{n,0}$ altkompleksi (0) köşesi üzerine büzülür. Dolayısıyla homotopi, diagramların bir homotopisine lokal olarak genişler. Fakat, bu durumda $\alpha_\varphi, \pi_{n-1}(X|_V, x_V)(1_V)$ homotopi grubunun trivial elamanını temsil eder. Bu durumda $\pi_{n-1}(X|_V, x_V)(1_V)$ ile $\pi_{n-1}(Y|_V, P(x_V))(1_V)$ izomorf ve D_φ diagramı, $\psi: W \rightarrow V$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \xrightarrow{x_W} & X(W) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n & \xrightarrow{\beta_{\psi,\varphi}} & Y(W) \end{array} \quad (D_{\psi,\varphi})$$

şeklindeki diagramlara lokal homotopiktir. Son olarak, $P_*: \pi_{n-1}(X|_W, x_W) \rightarrow \pi_n(Y|_W, p(x_W))$ bir demet epimorfizmasıdır. Dolayısıyla her bir $D_{\psi,\varphi}$ lokal yükseltmeye sahiptir. Dolayısıyla D lokal yükseltmeye sahiptir. $P_*: \pi_0 X \rightarrow \pi_0 Y$ demet izomorfizmi Y nin her köşesi için istenen lokal yükseltmeleri verir.

Tanım 3.30 Lifleme ve zayıf eşdeğerlik adıyla bilinen morfizmlerin iki sınıfıyla oluşturulan varış nesnesi $*$ olan bir C kategorisine fibrant nesnelerin kategorisi denir. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa.

(A) C 'de $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow Z$ morfizmleri verilsin. Eğer, f, g ve $g \circ f$ dönüşümlerinden herhangi ikisi zayıf eşdeğerlik ise üçüncüsünde zayıf eşdeğerliktir.

(B) Liflemelerin kompozisyonunda bir liflemedir. Herhangi bir izomorfizm liflemedir.

(C) Liflemeler ve trivial liflemeler (=hem lifleme hem zayıf eşdeğerlik), pull-backler altında kapalıdır.

(D) C nin herhangi bir X nesnesi için Δ ; diagonal dönüşüm, s ; zayıf eşdeğerlik ve (d_0, d_1) lifleme olmak üzere aşağıdaki komutatif diagram vardır.

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow s & \downarrow (d_0, d_1) \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

(E) C nin herhangi bir X nesnesi için $X \rightarrow *$ dönüşümü bir liflemedir.

Teorem 3.31. C bir Grothendieck site olsun. Bu durumda C üzerindeki lokal fibrant simpleksel öndemetlerin kategorisi olan $S\text{Pre}(C)_f$; kombinatorial zayıf eşdeğerlik ve lokal liflemelerin sınıfıyla tanım 3.30 daki aksiyomları sağlar.

İspat: Homotopi kategorisi için fibrant nesnelerin bir kategorisinde gerekli olan aksiyomlardan (A) önerme 3.28 de ispatlandı., yine (B) aksiyomuda önerme 3.22 ve önerme 3.29 da verildi. Şimdi ise (C) aksiyomunu gösterelim.

X, Y ve Z simpleksel öndemetler $f: X \rightarrow Y \in C$ kombinatorial zayıf eşdeğerlik ve $g: Z \rightarrow Y \in C$ olsun. Göstereceğizki

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

diagramı pull-back kare olmak üzere $\bar{f}$ de kombinatorial zayıf eşdeğerliktir.

Teorem 3.29 dan $\bar{f}$ 'nin kombinatorial zayıf eşdeğerlik olması için $\Leftrightarrow \partial\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ dahil etme tasvirlerine göre lokal sağ yükseltme özelliğine sahip olmasıdır. Her $n \geq 0$ için

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_n & \longrightarrow & P \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & Z
 \end{array}$$

diagramı komutatif olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial\Delta_n & & & & \\
 \searrow & & & & \\
 \downarrow & \searrow & P & \longrightarrow & X \\
 \Delta_n & \searrow & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\
 & \searrow & Z & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

diagramı komutatifdir. f kombinatorial zayıf eşdeğerlik olduğundan $\exists R \subset C(-, U)$ örtü sivi var öyleki her bir $\varphi: V \rightarrow U \in R$ için $g \circ \beta$ nın Δ_n den $X(U)$ ya bir yükseltmesi vardır. $z, Z(U)$ nun sabit bir köşesi olmak üzere

$$X(U) \rightarrow \{z\}_{x_Y} X(U)$$

$$x \rightarrow (s_{n-1} \dots s_0 z, x)$$

dönüşümü, $\{z\}_{x_Y} X(U) \rightarrow Z(U)_{x_Y} X(U)$ dahil etme tasviri ve z, x sabit olmak üzere

$$Z(U)_{x_Y} X(U) \rightarrow P(U)$$

$$(z', x') \rightarrow \begin{cases} (z', x') , g(z') = f(x') \\ (z, x) , g(z) = f(x) \end{cases}$$

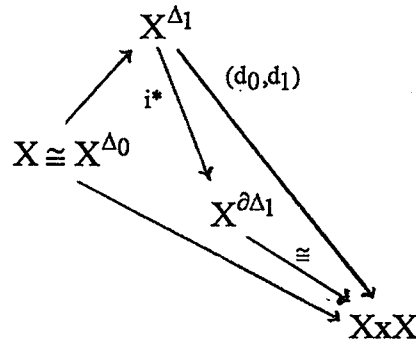
dönüşümlerinin kompozisyonu $X(U)$ 'dan $P(U)$ 'ya bir dönüşümdür. Bu dönüşüm ile $g \circ \beta$ nın yükseltmesinin kompozisyonu $\bar{f}$ nin yükseltmesini verir.

Liflemeler için ispat benzer şekilde yapılır.

(D) Her bir X lokal fibrant simpleksel öndemet için sonlu simpleksel kümelerin

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_1 & & \\
 i \downarrow & \searrow & \Delta_0 \\
 \Delta_1 & \searrow &
 \end{array}$$

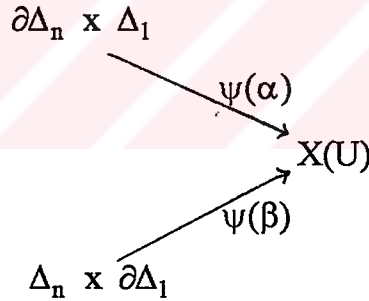
diagramıyla üretilen



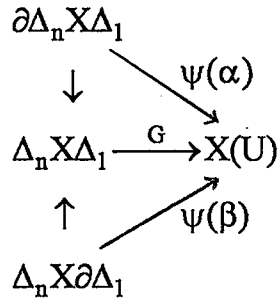
komutatif diagramı vardır. Bu diagramda; i^* dönüşümü lokal liflemedir. Yani, $X^{\Delta_1}(U) = \text{Hom}(\Delta_1, X(U))$, $U \in C$, olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(\Delta_1, X(U)) \\ \downarrow & & \downarrow i^* \\ \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}(\partial\Delta_1, X(U)) \end{array}$$

diagramında β 'nın bir $h: \Delta_n \rightarrow \text{hom}(\Delta_1, X(U))$ yükseltmesini bulacağız. Lemma 2.24 den $\text{Hom}(\partial\Delta_n, \text{Hom}(\Delta_1, X(U))) \cong \text{Hom}(\partial\Delta_n \times \Delta_1, X(U))$ ve $\text{Hom}(\Delta_n, \text{Hom}(\partial\Delta_1, X(U))) \cong \text{Hom}(\Delta_n \times \partial\Delta_1, X(U))$ olduğundan



diagramı vardır. " X lokal fibrant olduğundan $X(U)$ Kan kompleksdir." Bu taktirde $\psi(\alpha)$ ve $\psi(\beta)$ önerme 2.36 dan bir $G: \Delta_n \times \Delta_1 \rightarrow X(U)$ dönüşümüne genişletilebilir. Dolayısıyla aşağıdaki diagram vardır.



Bu diagrama tekrar lemma 2.24 uygulanırsa

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & \text{hom}(\Delta_1, X(U)) \\
 \downarrow & \nearrow \phi(G) & \downarrow \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\beta} & \text{hom}(\partial\Delta_1, X(U))
 \end{array}$$

diagramı elde edilir. o halde $\phi(G)$, β nın bir yükseltmesidir.

$X \cong X^{\Delta_0}$ olduğundan $d_0: X^{\Delta_1} \rightarrow X$ dönüşümü ; $d^0: \Delta_0 \rightarrow \Delta_1$ dönüşümünün ürettiği $(d^0)^*: X^{\Delta_1} \rightarrow X^{\Delta_0}$ dönüşümü ile özdeşlenebilir. $(d^0)^*$ dönüşümü $\partial\Delta_n \rightarrow \Delta_n$, $n \geq 0$, dönüşümlerine göre lokal sol yükseltme özelliğine sahiptir. Böylece teorem 3.29 dan dolayı d_0 lokal liflemedir. Benzer şekilde d_1 lokal liflemedir. Dolayısıyla (d_0, d_1) liflemedir. Bu durumda önerme 3.28 den s kombinatorial zayıf eşdeğerliktir.

(E) Bütün nesneler lokal fibrant olduğundan $X \rightarrow *$ dönüşümü liflemedir.

KAYNAKLAR

1. BARR, M, and WELLS, C, 1985, " Toposes, Triples and Theories " Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Newyork
2. CURTIS, E, 1968, "Simplicial Homotopi Theory ", s.1-27, Lecture Notes Series No. 10.
3. DOLD, A,1980, " Lectures on Algebraic Topology " Second Edition, Springer-Verlag, Berlin
4. ENGELKING, R,1992,"Topology A Geometric Aproach " Heldermann Verlag, Berlin
5. GABRIEL, P and ZISMAN, M, 1967 " Calculus of Fractions and Homotopy Theory " Springer-Verlag, New York
6. GIBLIN, P.J., 1977, " Graphs ,Surfaces and Homology " Chpman and Hall Math Series, A Halstet Press book ,New York
7. HIGGINS, P.J., 1971," Notes on Categories and Grupoids" Van Nostrand Reinhold Math Studies , s. 50, London
8. JANICH, K. 1980 " Topology " Springer-Verlag, New York
9. JARDINE, J.F.,1986,"Simplicial Presheaves" Jurnal of Pure and Applied Algebra 47 , s. 35-87, Nort-Holland

10. JOHNSTONE ,P.T.,1977 "Topos Theory" s. 1-20, Academic Press London
- 11.MAC LANE, S. 1959 " Simplicial Topology " Lectures by Saunders Mac Lane University of Chicago
- 12.MAY, J.Peter,1967 "Simplicial Objects in Algebraic Topology" D. Van nostrand company, inc., London
- 13.ULUÇAY, C, 1978 "Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri" 2. baskı , Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara



ÖZGEÇMİŞ

İsmet YÜKSEL 1970 yılında Balıkesir'in Sındırgı ilçesinin Taşköyünde doğdu. İlköğrenimini Taşköy ilkokulunda, ortaöğrenimini Sındırgı Lisesinde, yükseköğrenimini Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı.

1993 yılında adı geçen üniversitenin Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmektedir.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**