

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**SİMPLEKTİK EĞRİLER VE
KARAKTERİZASYONLARI**

Esra ÇİÇEK ÇETİN

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

MART-2019

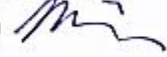
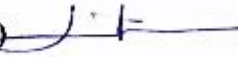
T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMPLEKTİK EĞRİLER VE KARAKTERİZASYONLARI

DOKTORA TEZİ

Esra ÇİÇEK ÇETİN
(141121203)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Şubat 2019
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Mart 2019

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü) 
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ (F.Ü) 
Dr.Öğretim Üyesi Ünal İÇ (F.Ü) 
Dr.Öğretim Üyesi İnan ÜNAL (M.Ü) 
Dr.Öğretim Üyesi Fatma BULUT KORKMAZ (B.E.Ü) 

MART-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen hocam, sayın Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılar sunarım.

Esra ÇİÇEK ÇETİN

Elazığ-2019



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2. Simplektik Uzayda Temel Tanım ve Teoremler	6
2.3. Simplektik İç Çarpım	10
3. HELİSLER VE SLANT HELİSLER.....	18
3.1 Helisler ve Karakterizasyonları.....	18
3.2. Slant Helisler ve Karakterizasyonları.....	24
4. SİMPLEKTİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	29
4.1. Simplektik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar	29
5. BERTRAND EĞRİLER.....	36
5.1. Bertrand Eğrilerin Karakterizasyonu	36
5.2. Genelleştirilmiş Bertrand Eğriler	37
6. SONUÇ.....	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	42

ÖZET

Simplektik Eğriler ve Karakterizasyonları

Öklid uzayında eğriler teorisi ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle eğriler teorisinin karakterizasyonları, İnvolüt-evolüt eğriler, Bertrand eğriler, Mannheim eğriler, Adjoint eğriler, helisler ve slant helisler birçok geometrici tarafından çalışılmaktadır. Ayrıca Frenet denklemleri kullanılarak bu eğriler Öklid uzayında, Lorentz uzayında, Semi-Öklidyen vb uzaylarda çalışılmış ve kullanışlı teoriler ortaya atılmıştır.

Bu çalışmada simplektik eğriler incelenmiştir. Özellikle simplektik eğrilerin Frenet denklemleri kullanılarak, Helisler, Slant helisler, Bertrand eğriler, incelenerek simplektik eğrilerin karakterizasyonları ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Helis, Slant Helis, Simplektik iç çarpım, Simplektik eğri

SUMMARY

Symplectic Curves and Their Characterizations

Many studies have been done on the theory of curves in Euclidean space. In particular the characterizations of curves theory, Involute- evolute curves, Bertrand curves, Mannheim curves, Adjoint curves, helices and slant helices are studied by many scientist. In addition, using Frenet equations, these curves were studied in Euclidean space, Lorentz space, Semi- Euclidean space and useful theories were put forward.

In this study, symplectic curves are examined. Especially, caharacterizations of symplectic curves are expressed and proved by using Frenet equations of such curves with considering Helices, Slant helices and Bertrand curves.

Keywords: Helices, Slant Helices, Symplectic Inner Product, Symplectic Curve .

SEMBOLLER LİSTESİ

α	: Eğri
s	: Yay uzunluğu
ds	: Yay uzunluğu elementi
$\langle, \rangle$	: Simplektik iç çarpım
Ω	: Simplektik form
(V, Ω)	: Simplektik vektör uzayı
z	: Simplektik regüler eğri
$\mathbf{a}_1(s)$	: Simplektik regüler eğrinin teğet vektörü
$\mathbf{a}_2(s)$	: Simplektik regüler eğrinin asli normal vektörü
$\mathbf{a}_3(s)$	: Simplektik regüler eğrinin birinci binormal vektörü
$\mathbf{a}_4(s)$	: Simplektik regüler eğrinin ikinci binormal vektörü
$\{\mathbf{a}_1(s), \mathbf{a}_2(s), \mathbf{a}_3(s), \mathbf{a}_4(s)\}$	: Simplektik eğrinin Frenet çatısı
$\mathbf{k}_1(s)$	: Simplektik eğrinin birinci eğriliği
$\mathbf{k}_2(s)$	: Simplektik eğrinin ikinci eğriliği
$\mathbf{H}_2(s)$	: Simplektik eğrinin üçüncü eğriliği
(C, C^*)	: Bertrand eğri çifti

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi geometrinin temel konusu olup, aynı zamanda bir çok bilim dalı ile de ortak çalışma sahasına sahiptir. Matematik açısından gerek fonksiyonel analiz, gerekse uygulamalı matematik için oldukça büyük bir anlam ifade etmektedir. Diğer bilim dalları açısından ekonomide sayısal verilerin eğriler sayesinde yorumlandığı, İktisat'ta gelir fonksiyonlarının eğrilerle ifade edildiği, tıpta birçok verilerde eğrinin davranışının önemli ipuçları verdiği bilinmektedir. Geometri açısından bakıldığında, eğrilerin diferensiyel geometrik özellikleri, onların çeşitli matematiksel yapılarla olan ilişkileri ve geometrik temellerin inşa edilmesi son derece önemlidir. Geometrinin önemli bir çalışma sahası olan diferensiyel geometride Öklid uzayında eğriler teorisi hakkında çok önemli çalışmalar yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir. Özellikle eğriler teorisinin karakterizasyonları, İnvolüt-evolüt eğriler, Bertrand eğriler, Mannheim eğriler, Adjoint eğriler, eğrilerin helis olma özellikleri vb. çalışmalar geometriciler tarafından titizlikle çalışılmaktadır ve çalışılmaya devam etmektedir. Son yıllarda Öklid uzayından başka yeni bir takım uzaylar tanımlanmış ve benzer eğriler incelenmektedir. Özellikle Lorentz-Minkowski uzayı ve Semi-Öklidyen uzayı kendi iç çarpımlarından ve içerisinde bulundurduğu eğri çeşitliliğinden kaynaklanan yapıdan dolayı Öklid uzayında elde edilen sonuçların değişik karakterizasyonlarını ve ilginç sonuçlarını ortaya çıkarmaktadır. Hatta bu uzaylarda time-like, space-like ve null eğri çeşitlerinden her biri için Öklid uzayındaki karakterizasyonların çalışmaları incelenmekte, bazen bilinen yapıların aksine çok farklı geometrik modeller ortaya çıkarmaktadır.

Eğrilerle ilgili yapılan çalışmalarda Frenet denklemleri (bu denklemler Serret- Frenet denklemleri olarak bilinmektedir öyle ki Frenet 1874, Serret 1851 yılında elde etmiştir.) ve eğrinin eğrilikleri anahtar rol oynamaktadır. Bir çok eğriler teorisinin inşasında Frenet denklemleri kullanılmakta olup ilginç sonuçlar ortaya koymaktadır. Frenet denklemlerinden klasik diferensiyel geometrinin silindirik helisler, dairesel helisler ve son yıllarda slant helisler kavramlarına ulaşılmaktadır. Ayrıca Frenet denklemlerinin Öklid uzayında, Lorentz uzayında Semi-Öklidyen uzaylarda vb. uzaylarda inşa edilmesi geometricilere oldukça geniş bir çalışma alanı açmıştır. Bu farklı uzaylarda Bertrand eğriler, İnvolüt-evolüt eğriler, Helisler vb. konular üzerinde oldukça kullanışlı teoriler ortaya atılmıştır. Diğer taraftan bu uzayların dışında başka uzayların tanımlanarak yeni

Çalışma alanları da açılmaya çalışılmaktadır. Özellikle yapılan bu çalışmaların yeni uzaylarda bulunup bulunmayacağı oldukça merak konusudur. Bu alışma yukarıda bahsettiğimiz yeni uzaylarda bazı geometrik kavramların mevcut durumu ve yeni karakterizasyonların inşasının rehber edinildiğı bir tezdır. Bu amaçla özellikle simplektik uzay göz önüne alınmıştır. Çünkü simplektik uzay üzerinde konular çalışılmamış olup oldukça bakir bir alandır.

Simplektik Geometri ismi yaklaşık olarak iki yüz yıl önce ortaya atılmıştır. Sözlük anlamı olarak simplektik kelimesinin muhtemelen balığın dışındaki bir kemik ismi olduğı görülür. Simplektik kelimesi ilk olarak Weyl tarafından Yunanca “ kompleks” anlamında simplektik grupları tanımlamak için kullanılmıştır. Bazı bilim adamları klasik mekaniğın dili olarak simplektik geometriyi kabul etmektedir. Aslında Matematik ve Teorik Fizik’ te önemli rol oynayan Hamilton ve Kaehler [1] manifoldlarının temeli simplektik geometriye dayanmaktadır. Hamilton mekaniğının orjiniinde simplektik geometri vardır ve bir simplektik manifoldun yapısında klasik sistemlerin baz uzayları önemli rol oynar. Simplektik geometri, geometrik optiğın temelinde yer almaktadır. Diğerk taraftan, simplektik geometrinin dinamik sistemler, integrallenebilir sistemler, cebirsel geometri ve global analizle de önemli bağılantıları vardır. Simplektik uzaylar ilk olarak Chern ve Wang [2] tarafından 1947 yılında klid uzayında alt uzaylarının lokal simplektik invaryantları çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışmada eğri ve yüzeyler için lokal simplektik diferensiyellenebilir yapılar elde edilmiştir.

Kamran, [3] lokal simplektik invaryantları kullanarak eğrilerin Frenet çatısını elde etti. Ayrıca eğriler için iki farklı yaklaşım ile lokal simplektik invaryantların tam bir kümesini inşa ederek araştırmalarını daha da geliştirdi. İlk yaklaşım “ aşağıdan yukarıya” yani eğriye teğet olan vektörün art arda diferensiyellenmesidir ve simplektik formun, non-dejenere olma zelliliğini kullanarak çalışmalar yaptılar. Hatta eğrinin simplektik eğrilikleri olarak bu lokal diferensiyel invaryantlardan bahsettiler. Diğerk yaklaşım ise “ yukarıdan aşağıya” yani hareketli çatılar metodu ile invaryantlar inşa edilmesidir. Daha ileri çalışmalar olarak hareketi çatılara eř değışkenli yaklaşım uygulanarak elde edilen sonuçlardan bahsettiler. Bu yaklaşımların aynı Frenet çatısını oluşturduğunu ve aynı diferensiyel invaryantları doğurduğunu buldular. Nihayetinde tüm diferensiyel invaryantların sabit özellikte olan IR^4 de eğrilerin durumunu incelediler ve afin simplektik grubunun tek parametrelili bir alt grubunu araştırdılar. Böylece Frenet matrisine karşılık gelen spektrumun cebir çeşidine göre eğrilerin bir sınıflandırmasını verdiler. Diğerk taraftan

Tian [4] bir kompakt Kaehler-Einstein yüzeyde kapalı simplektik yüzeyin uygun koşullar altında bir isotropik simplektik minimal yüzey olduğunu ispatladı. Xiaoli Han ve Jiayu Li [5] ise bir Kaehler yüzeyinin Simplektik Kahler yüzeyi olduğunu inceledi.

4-boyutlu simplektik uzayda Frenet vektörlerinin ifade edilmesi, bunun yanısıra eğrilerle ilgili bir çok karakterizasyonun tanımlanmaması bu doktora tezinin amacını ve literatürdeki önemini ortaya koymuştur. Bu amaçla özellikle tezde simplektik iç çarpım uzayında ve buna bağlı olarak Frenet vektörleri ve önemli bazı kavramlar ikinci bölümde ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde simplektik uzayda tanımlanmayan helisler ve slant helisler tanımlanarak bunların karakterizasyonları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, simplektik eğrilerin karakterizasyonları verilmiş olup beşinci bölümde Bertrand eğrilerin karakterizasyonu verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı da V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa buradaki A ya V vektör uzayı üzerinde bir afin uzay adı verilir.

$$(A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \vec{\alpha} \in V \text{ için } f(P, Q) = \vec{\alpha} \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır [6].}$$

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ için,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A Afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır [6].

Tanım 2.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\vec{\alpha}: I \rightarrow E^n$ şeklinde diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir dönüşümüne E^n de bir eğri adı verilir [6].

Tanım 2.1.4. E^n n-boyutlu Öklid uzayında,

$$S_r^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2, |\nabla f| \neq 0, r \in \mathbb{R} \text{ } r = \text{sabit}\}$$

nokta cümlesine bir (n-1) - boyutlu bir hiperküre veya kısaca (n-1) – küre denir [6].

Tanım 2.1.5 . M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold dur) denir.

(M1) M bir Hausdorff uzaydır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [6].

Tanım 2.1.6. M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold denir [6].

Tanım 2.1.7 . M diferensiyellenebilir manifold ve bir noktası $p \in M$ olsun. Bir

$$X_p : C^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin P noktasındaki tanjant vektörü ise, X_p ye M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir [6].

Tanım 2.1.8. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \xrightarrow{\text{birebir ve örten}} \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir [6].

Tanım 2.1.9. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere ,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde simetrik, bilinear, pozitif tanımlı dönüşüme M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği ya da diferensiyellenebilir metrik denir. Bu metrik ile M ikilisine, yani $(M, \langle , \rangle)$ e Riemann manifoldu denir, kısaca M ile gösterilir [6].

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri olmak üzere α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı $T(s)$, asli normal vektör alanı $N(s)$ ve binormal vektör alanı $B(s)$ olsun. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir ve

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde matris gösterimine sahiptir [7].

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin tanjant doğruları sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α ya bir silindirik helis (genel helis) denir.

$\alpha(s)$ nin bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{k}$ nın sabit olmasıdır”[8].

Tanım 2.1.12. Eğer Tanım 2.1.11 de τ ve k sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir [8].

Tanım 2.1.13. C ve C^* eğrilerinin asli normal vektörleri lineer bağımlı ise, (C, C^*) eğri çiftine Bertrand eğri çifti denir. (C, C^*) Bertrand eğri çifti ise

$$C(s) = C^*(s^*) + \lambda^*(s^*)N^*(s^*)$$

ve

$$\lambda = sb$$

(C, C^*) Bertrand eğri çiftlerinin teğetleri T ve T^* arasındaki açı α ise

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^*(s) \\ N^*(s) \\ B^*(s) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Ayrıca (C, C^*) eğri çiftinin Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda_1 k + \lambda_2 \tau = 1$$

olmasıdır [9].

2.2. Simplektik Uzayda Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.2.1. Global Darboux koordinatlarında standart simplektik form

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $\Omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear dönüşümü her $u, v \in V$ için $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$ ise Ω ye anti-simetrik bilinear dönüşüm (veya alterne bilinear dönüşüm) denir [1].

Teorem 2.2.1. V reel vektör uzayı üzerinde anti-simetrik bilinear dönüşüm Ω olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan V nin bir $u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ bazı vardır:

$$\begin{aligned}\Omega(u_i, v) &= 0; \forall v \in V \\ \Omega(e_i, e_j) &= \Omega(f_i, f_j) = 0; 1 \leq i, j \leq n \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

[1], [10].

İspat : Bu ispat tümevarımla Gram-Schmidt yönteminin bir anti-simetrik versiyonu olarak yapılacaktır. Bunun için önce

$$U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0; \forall v \in V\}$$

cümlesi gözönüne alınırsa bu durumda $U \subset V$ bir alt uzaydır. U nun bir bazını $u_1, u_2, \dots, u_k$ olarak seçilirse $U \oplus W = V$ olduğundan $e_1 (\neq 0) \in W$ keyfi bir vektör olur. Bu durumda $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$ olacak şekilde bir $f_1 \in W$ vardır. Aksi taktirde $W \subset U$ olurdu. Kabul edelim ki $\Omega(e_1, f_1) = 1$ ve $W_1 = \text{Sp}\{e_1, f_1\}$ olsun. Böylece

$$W_1^\Omega = \{w \in W : \Omega(w, v) = 0; \forall v \in W_1\}$$

yazılır. $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$ olduğu kabul edilirse, herhangi bir $\alpha \in W_1 \cap W_1^\Omega$ için $\alpha = \alpha e_1 + b f_1$ ($\alpha, b \in \mathbb{R}$) şeklinde yazılır. Aynı zamanda $\alpha \in W_1^\Omega$ olduğundan W_1^Ω nin tanımından $\Omega(\alpha, e_1) = \Omega(\alpha, f_1) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha, e_1) &= 0 \Rightarrow \Omega(\alpha e_1 + b f_1, e_1) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \Omega(e_1, e_1) + b \Omega(f_1, e_1) = 0 \\ &\Rightarrow b = 0\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha, f_1) &= 0 \Rightarrow \Omega(\alpha e_1 + b f_1, f_1) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \Omega(e_1, f_1) + b \Omega(f_1, f_1) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 0\end{aligned}$$

olur. O halde $\alpha = \alpha e_1 + b f_1$ olmasından dolayı $\alpha = 0$ elde edilir. Bu da $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$ olduğunun ispatını tamamlar.

Ayrıca $W_1 \oplus W_1^\Omega = W$ dir. Gerçekten, herhangi bir $v \in W$ alalım ve $\Omega(v, e_1) = c$ ve $\Omega(v, f_1) = d$ olsun. Bu durumda

$$v = (-c f_1 + d e_1) + (v + c f_1 - d e_1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada birinci bileşenin W_1 de ikinci bileşenin de W_1^Ω de olduğunu göstermek için $\Omega(-c f_1 + d e_1) + (v + c f_1 - d e_1) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Gerçekten Ω anti- simetrik bilinear dönüşüm olduğundan

$$\Omega(-cf_1 + de_1, v + cf_1 - de_1) = -c\Omega(f_1, v) - c^2\Omega(f_1, f_1) + cd\Omega(f_1, e_1) + d\Omega(e_1, v) + dc\Omega(e_1, f_1) - d^2\Omega(e_1, e_1)$$

hipotezi göz önüne alınırsa,

$\Omega(-cf_1 + de_1, v + cf_1 - de_1) = 0$ elde edilir. Şimdi $e_2 (\neq 0) \in W_1^\Omega$ olsun. O zaman $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ olacak şekilde bir $f_2 \in W_1^\Omega$ vardır. Kabul edelim ki $\Omega(e_2, f_2) = 1$ olsun. $W_2 = \text{Sp}\{e_2, f_2\}$ denirse, sonuçta

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$$

elde edilir. W_i alt uzaylarının baz vektörleri $\Omega(e_i, f_i) = 1$ olacak şekilde e_i, f_i vektörlerinden oluşur.

Sonuç 2.2.1 .

- 1) Teorem 2.1.1 deki baz tek değildir. Böyle bir baza kanonik baz adı verilir.
- 2) $\text{Rank } \Omega = 2n$, boy $V=m=2n+k$
- 3) Ω anti-simetrik bilineer dönüşümünü matris notasyonunda

$$\Omega(u, v) = u^t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot v$$

şeklinde yazılabilir. Burada I_n , n. mertebeden birim matristir [10].

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}$ üzerinde m-boyutlu bir vektör uzayı V ve $\Omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ anti-simetrik bilineer dönüşüm olsun. V nin duali V^* olmak üzere

$$\hat{\Omega}: V \rightarrow V^*$$

$$v \rightarrow \hat{\Omega}(v): V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \left(\hat{\Omega}(v) \right) (u) = \Omega(v, u)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir.

Ω bilineer bir dönüşüm olduğundan $\forall u, v \in V$ için $\left(\hat{\Omega}(v) \right) (u) = \Omega(v, u)$ eşitliğinden $\hat{\Omega}$ bir lineer dönüşüm olur.

Ayrıca $\text{Çek}\hat{\Omega} = \{u \in V: \hat{\Omega}(u) = 0\}$ ifadesi için

$$\left(\hat{\Omega}(u) \right) (v) = 0(v) \Rightarrow \Omega(u, v) = 0$$

yazılabileceğinden ve

$$U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0; \forall v \in V\}$$

olduğundan $\text{Çek}\hat{\Omega} = U$ elde edilir.

Eğer $\hat{\Omega}$ bijektif yani $U=\{0\}$ ise Ω ye V üzerinde bir simplektik yapı (simplektik form) ve (V, Ω) ikilisine de simplektik vektör uzayı adı verilir [10].

Sonuç 2.2.2. (V, Ω) simplektik vektör uzayında

1) boy $U = k = 0$ olduğundan boy $V = 2n$ çift bir sayıdır.

2) Teorem 2.1.2 den bir (V, Ω) simplektik vektör uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ bazı vardır.

$$\Omega(e_i, e_j) = \Omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0 \text{ ve } \Omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Böyle bir baza (V, Ω) nin kanonik simplektik bazı adı verilir. Bu baza karşılık gelen Ω simplektik formunun matrisi

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3) Ω , bilineer, anti-simetrik ve non-dejenere özelliğine sahiptir [1].

Örnek 2.2.1. $2n$ - boyutlu V reel vektör uzayının kanonik simplektik bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ ve V nin duali olan V^* uzayının da bu baza dual bazı $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*, e_{n+1}^*, \dots, e_{2n}^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{n+i}^*$$

şeklinde tanımlı dönüşüm V üzerinde bir simplektik formdur.

Gerçekten, Ω dönüşümünün bilineer ve alterne olduğu açıktır. Şimdi non-dejenere olduğunu göstermek için,

$v \in V$ olmak üzere,

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i e_{n+i}$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca her $w \in V$ için $\Omega(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$ dır. Bu ifade özel olarak w nin seçimiyle

$$w = e_1 \Rightarrow \Omega(v, e_1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$w = e_2 \Rightarrow \Omega(v, e_2) = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

$\vdots$

$$w = e_n \Rightarrow \Omega(v, e_n) = 0 \Rightarrow y_n = 0$$

$$w = e_{n+1} \Rightarrow \Omega(v, e_{n+1}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$\vdots$

$$w = e_{2n} \Rightarrow \Omega(v, e_{2n}) = 0 \Rightarrow x_n = 0$$

ifadelerinden $v = 0$ elde edilir. Yani her $w \in V$ için $\Omega(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$ dır [1].

Örnek 2.2.2. $V = \mathbb{R}^2$ alınırsa, $\Omega: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ simplektik formu, $\forall v, v' \in \mathbb{R}^2$ için $v = xe_1 + ye_2$ ve $v' = x'e_1 + y'e_2$ olmak üzere

$$\Omega(v, v') = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

olur [1].

Tanım 2.2.5 . (V, Ω) simplektik uzay olsun. Her $v, w \in V$ için $\Omega(v, w) = 0$ ise v ile w ya Ω –ortogonal, anti-ortogonal veya kısaca ortogonaldır denir ve $v \perp w$ biçiminde gösterilir [1].

Tanım 2.2.6 $(K, +, \cdot)$ bir cisim olmak üzere $V = K^{2n}$ alınırsa (K^{2n}, Ω) ikilisine standart simplektik uzay denir [1].

Örnek 2.2.3. $k \in \mathbb{N}$ için K cismi üzerinde $(2n+k)$ boyutlu bir U vektör uzayı vardır öyle ki

$$\widehat{\Omega}: U \times U \rightarrow K$$

dönüşümü anti-simetrik, bilinear ve $\text{rank} \widehat{\Omega} = 2n$ olsun. $\widehat{\Omega}$ nin sıfırlayıcı (annihilatörü)

$$U_0 = \{u \in U: \widehat{\Omega}(u, w) = 0; \forall w \in U\}$$

ve $\text{rank} U_0 = k$ dır. $\widehat{\Omega}$ nin U/U_0 üzerine kısıtlanması ile Ω simplektik formu elde edilir.

Böylece (V, Ω) simplektik uzayına, $(U, \widehat{\Omega})$ uzayının indirgenmiş denir [1].

Tanım 2.2.7. Eğer $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ise α, β vektörlerine simplektik ortogonaldır denir. Aksi durumda simplektik adjointtir denir [1].

Tanım 2.2.8. $\tilde{H}$ bir lineer operatör olmak üzere keyfi α, β vektörleri için ,

$$\langle \alpha, \tilde{H}_\beta \rangle = \langle \beta, \tilde{H}_\alpha \rangle$$

şartını sağlayan $\tilde{H}$ lineer dönüşümüne bir Hamilton operatörü denir [1].

2.3. Simplektik İç Çarpım

Tanım 2.3.1. $u = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), v = (\xi^1, \dots, \xi^n, w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^{2n}$ vektörleri için simplektik iç çarpım

$$\langle u; v \rangle = \Omega(u, v) = u^T J v = \sum_{i=1}^n (x^i w^i - y^i \xi^i) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ ile verilir [3].

Tanım 2.3.2. $\mathbb{R}^4$ de simplektik iç çarpım $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$

olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2$$

şeklinde tanımlanır [11,12].

Bu çalışmanın bu kısmından sonra aksi belirtilmedikçe simplektik iç çarpım kullanılacaktır.

Tanım 2.3.3. Bir $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ simplektik çatı, her $z \in \mathbb{R}^{2n}$ noktasını sıralı bir $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ tanjant vektörlerine karşılık getiren $\mathbb{R}^{2n}$ deki lineer çatıların diferensiyellenebilir bir kesiti yardımıyla tanımlanır. Yani,

$$\langle a_i, a_j \rangle = \langle a_{i+n}, a_{j+n} \rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\langle a_i, a_{j+n} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

ve

$$\langle a_i, a_{i+n} \rangle = 1$$

dir [3].

Tanım 2.3.4. Bir simplektik çatı için yapı denklemleri $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere,

$$da_i = \sum_{k=1}^n w_{ik} a_k + \sum_{k=1}^n \theta_{ik} a_{k+n}$$

ve

$$da_{i+n} = \sum_{k=1}^n \Phi_{ik} a_k - \sum_{k=1}^n w_{ik} a_{k+n}$$

şeklindedir. Burada

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}, \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ji}$$

dir [3].

Bundan sonraki bölümlerde nokta ile keyfi t parametresine göre türevler gösterilecektir.

Tanım 2.3.5. $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere,

$$\langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle \neq 0$$

($t \in I$) ve (yani non- dejenere) şartını sağlayan $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ regüler diferensiyellenebilir eğrisine simplektik regüler eğri denir [3].

Tanım 2.3.6 . $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve ($t_0 \in I$) olsun. Bir simplektik regüler z eğrisinin s yay uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_0}^t \langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle^{1/3} dt \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle^{1/3} dt = t_2 - t_1 \quad , (t_1, t_2 \in I) \quad t_1 \leq t_2 \quad (2.4)$$

ise simplektik bir z regüler eğrisi simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilmiştir denir [3]. Ayrıca (2.4) denklemin den $\langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Simplektik yay uzunluğu parametresi düzlemsel eğriler için equaffine yay uzunluğuna karşılık gelir.

s ile simplektik yay uzunluğuna göre türevler gösterilecektir. s , t_0 başlangıç noktasına bağlı olmasına rağmen simplektik yay uzunluğu elementi

$$ds = \langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle^{1/3} dt \quad (2.5)$$

ve

$$\frac{d}{ds} \langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle^{-1/3} \frac{d}{dt} \quad (2.6)$$

türev operatörü ile ilgili değildir. Aşağıdaki önerme gösterir ki genelliği kaybetmeden herhangi bir simplektik regüler eğri simplektik yay uzunluğu ile yeniden parametrelendirilebilir.

Örnek 2.3.1. $z : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$z(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5})$$

şeklinde tanımlanan eğri için

$$\dot{z}(t) = (1, t, t^2, t^2 + t^4)$$

ve

$$\ddot{z}(t) = (0, 1, 2t, 2t + 4t^3)$$

olup

$$\langle \dot{z}(t), \ddot{z}(t) \rangle \neq 0$$

olduğundan z eğrisi regüler simplektik eğridir.

Örnek 2.3.2. $z : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$z(s) = (-\sin s, \sin s, \cos s, \sin s)$$

şeklinde tanımlanan eğri için

$$z'(s) = (-\cos s, \cos s, -\sin s, \cos s)$$

ve

$$z''(s) = (\sin s, -\sin s, -\cos s, -\sin s)$$

olup

$$\langle z'(s), z''(s) \rangle = 1$$

olduğundan z eğrisi yay uzunluklu simplektik eğridir.

Önerme 2.3.1. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bir simplektik regüler eğri olsun ve bu eğrinin simplektik yay uzunluğu s olsun. O zaman s yay parametresi ile parametrelendirilen h inverse fonksiyonu vardır, hatta $w = zoh: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bileşke fonksiyonu da simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilir [3].

İspat. z , simplektik regüler olduğundan, I aralığı üzerinde s, t nin bir kesin monoton fonksiyonudur. Dolayısıyla $h: \tilde{I} \rightarrow I$ şeklinde ters fonksiyon tanımlıdır. Ayrıca

$$w' = \frac{dw}{ds} = \langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle^{-1/3} \dot{z}, \quad w'' = \frac{d^2w}{ds^2} = \langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle^{-2/3} \ddot{z} + \frac{d^2h}{ds^2} \dot{z}$$

$$\left\langle \frac{dw}{ds}, \frac{d^2w}{ds^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{z}}{\langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle^{1/3}}, \frac{\ddot{z}}{\langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle^{2/3}} \right\rangle = 1$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.3.7. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir simplektik regüler eğri olsun. Bu taktirde $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ simplektik çatısı vardır ve

$$a_1 = \frac{dz}{ds}, \quad a_{n+1} = \frac{d^2z}{ds^2}, \quad (2.7)$$

ve

$$K_1 = \left\langle \frac{da_{n+1}}{ds}, a_{n+1} \right\rangle \quad (2.8)$$

dir.

Her bir $1 \leq j \leq n-2$ için

$$a_{j+1} = \frac{da_{n+j}}{ds} - K_j a_j - (1 - \delta_{j1}) a_{j-1} \quad (2.9)$$

$$H_{j+1} = - \left\langle \frac{da_{j+1}}{ds}, a_{j+1} \right\rangle \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, eğer $H_{j+1} \neq 0$ tüm $1 \leq j \leq n-2$ için

$$a_{n+j+1} = \frac{1}{H_{j+1}} \frac{da_{j+1}}{ds} \quad (2.11)$$

ve

$$K_{j+1} = \left\langle \frac{da_{n+j+1}}{ds}, a_{n+j+1} \right\rangle \quad (2.12)$$

dir [3].

Tanım 2.3.8. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir simplektik regüler eğri olsun. a_n ve a_{2n} Frenet vektörleri ve H_n, K_n yapı fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$a_n = \frac{da_{2n-1}}{ds} - K_{n-1} a_{n-1} - (1 - \delta_{n-1,1}) a_{n-2} \quad (2.13)$$

$$\langle a_i, a_{2n} \rangle = 0 \quad , \quad \langle a_{n+i}, a_{2n} \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.14)$$

$$\langle a_n, a_{2n} \rangle = 1 \quad , \quad \left\langle \frac{da_n}{ds}, a_{2n} \right\rangle = 0$$

$$H_n = -\left\langle \frac{da_n}{ds}, a_n \right\rangle \quad , \quad K_n = \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}, a_{2n} \right\rangle \quad (2.15)$$

şimdi z nin ortonormallik şartının sağlandığını kontrol edelim [3].

Önerme 2.3.2. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir simplektik regüler eğri olsun. $H_{j+1} \neq 0$ (tüm $1 \leq j \leq n-2$) şartını sağlayan görüntüsü $(a_1, \dots, a_{2n})$ çatısı simplektiktir [3].

İspat. İspat tümevarım metodu ile yapalım. Tanımdan ,

$$\langle a_1, a_1 \rangle = \langle a_{n+1}, a_{n+1} \rangle = 0 \quad , \quad \langle a_1, a_{n+1} \rangle = 1 \quad (2.16)$$

dir. Bazı $1 \leq j \leq n-2$ ve tüm $1 \leq i, l \leq j$ için yukarıdaki ortonormallik şartlarını sağlayan $a_1, \dots, a_j, \dots, a_{n+1}, \dots, a_{n+j}$ Frenet vektörleri için

$$\langle a_i, a_l \rangle = 0 \quad , \quad \langle a_i, a_l \rangle = \delta_{il} = -\langle a_{n+l}, a_i \rangle, \quad \langle a_{n+i}, a_{n+l} \rangle = 0 \quad (2.17)$$

olsun. a_{j+1} ve a_{n+j+1} çatı vektörlerinin $a_1, \dots, a_j, \dots, a_{n+1}$ çatı vektörleriyle ilgili olan gerekli ortonormallik şartlarını sağladığı gösterilmelidir. Tümevarım yöntemiyle (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) eşitlikleri kullanılarak,

$$\langle a_{j+1}, a_l \rangle = \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds} - K_j a_j - (1 - \delta_{jl}) a_{j-1}, a_l \right\rangle$$

ve

$$= \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}, a_l \right\rangle = -\langle a_{n+j}, \frac{da_l}{ds} \rangle = H_l \langle a_{n+j}, a_{n+l} \rangle = 0$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\langle a_{j+1}, a_{n+l} \rangle = -\langle a_{n+j}, \frac{da_{n+l}}{ds} \rangle - K_j \delta_{jl} - (1 - \delta_{ji}) \delta_{j-1,l} \quad (2.18)$$

dir.

Eğer $l = j$ ise (2.11), (2.12) denklemleri kullanılarak, (2.18) denkleminin sol tarafının 0 olduğu elde edilir. Eğer $2 \leq l \leq j$ ise (2.9), (2.10), (2.18) hipotezi ile birlikte

$$\langle a_{j+1}, a_{n+l} \rangle = -\delta_{j,l+1} - \delta_{j,l-1} + \delta_{1l} \delta_{j,l-1} - \delta_{j-1,l} + \delta_{j1} \delta_{j-1,l} = 0$$

olduğunu verir.

Son olarak $l = 1 < j$ ise (2.9), (2.10) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle a_{j+1}, a_{n+l} \rangle &= -\langle a_{n+j}, \frac{da_{n+1}}{ds} \rangle - K_j \delta_{j1} - (1 - \delta_{j1}) \delta_{j-1,1} \\ &= \langle a_{n+j}, a_2 + K_1 a_1 \rangle - \delta_{j-1,1} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ortonormallik şartlarından kalanların ispatı benzerdir. Adapted simplektik çatı önceden tanımlanan herhangi bir simplektik regüler eğrinin bir Frenet çatısı olarak

düşünülebilir. Bu çatı için yapı denklemleri $H_2, \dots, H_n$ ve $K_1, \dots, K_n$, $2n-1$ fonksiyonlarının simplektik regüler eğriler için simplektik eğriliklerin rolünü oynadığını gösterir. (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) ve (2.13) denklemlerinde $H_2, \dots, H_n$ ve $K_1, \dots, K_n$ simplektik eğrilikleri geometrik olarak bir vektör çiftinin gerdiği düzlemde sapma miktarı olarak yorumlanabilir. Örneğin; $K_1 = 0$ ise $\frac{da_{n+1}}{ds}$ ve a_{n+1} tarafından gerilen 2-düzlem Lagrangian düzlemidir.

Önerme 2.3.3. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simplektik yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş $H_{j+1} \neq 0$ (tüm $1 \leq j \leq n-2$) şartını sağlayan bir simplektik regüler eğri olsun. Bu taktirde z nin Frenet çatısı aşağıdaki şekilde tanımlanır [3].

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{ds} &= a_{n+1}, & \frac{da_i}{ds} &= H_i a_{n+i} & 2 \leq i \leq n \\ \frac{da_{n+1}}{ds} &= K_1 a_1 + a_2, & \frac{da_{n+j}}{ds} &= a_{j-1} + K_j a_j + a_{j+1} & 2 \leq j \leq n-1 \\ \frac{da_{2n}}{ds} &= a_{n-1} + K_n a_n \end{aligned} \quad (2.19)$$

İspat. Bu denklemler benzer olduğu için yalnızca birkaçının ispatı yapılacaktır. Diğerleri benzer yöntemle yapılabilir. Birinci yapı denklemi (2.3.4) tanımının direkt bir sonucudur. Ayrıca ikinci yapı denklemleri $2 \leq j \leq n-1$ için (2.3.8) ve (2.3.9) tanımının direkt sonucudur. O halde yapı denklemlerini ispatlamak için kabul edelim ki,

$$\frac{da_n}{ds} = H_n a_{2n}$$

ve

$$\frac{da_n}{ds} = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n \beta_i a_{n+i}$$

olsun. Bu durumda (2.14), (2.15) denklemlerinden $\alpha_n = 0$ olur. $1 \leq i \leq n-1$ için (2.9), (2.10) ve (2.13) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left\langle \frac{da_n}{ds}, a_{n+i} \right\rangle = - \left\langle a_n, \frac{da_{n+1}}{ds} \right\rangle \\ &= - \langle e_n, a_{i+1} + K_i a_i + (1 - \delta_{i1} a_{i-1}) \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade (2.15) denkleminde, $\beta_n = H_n$ olduğunu ifade eder. Son olarak $1 \leq i \leq n-1$ için (2.11), (2.12) ve (2.7) denklemleri kullanılarak,

$$\beta_i = - \left\langle \frac{da_n}{ds}, a_i \right\rangle = \left\langle a_n, \frac{da_i}{ds} \right\rangle = 0$$

bulunur. Diğerlerinin ispatı benzer şekildedir. Böylece (2.19) denklem sistemleri

$$B = \begin{pmatrix} & & & & 1 & & & \\ & & & & & H_2 & & \\ & & & & & & H_3 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & H_n \\ k_1 & 1 & & & & & & \\ 1 & k_2 & 1 & & & & & \\ & 1 & k_3 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & k_n & & & \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \frac{da_1}{ds} \\ \vdots \\ \frac{da_{2n}}{ds} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Frenet formülleri kullanılarak, Öklid uzayında eğriler teorisinin varlık ve teklik teoremine benzer şekilde simplektik regüler bir eğrinin de varlık ve tekliği ispatlanabilir.

$M = \mathbb{R}^4$ olması durumunda, sabit lokal simplektik invaryantlı simplektik regüler eğriler için Frenet formüllerini göz önüne alalım. Bu durum simplektik eğrilerin incelenebileceği en düşük boyuttur. Sabit invaryantlı eğriler düşünüldüğü zaman konikler iyi birer örnektir. Hatta bu en düşük boyut sabit simplektik eğrilikli eğrilerin 4-değişkenli afin simplektik grupların 1-parametrelili alt grupların yörüngesi olduğunu ifade eder. 4-boyut olması durumunda Frenet denklemleri matris formunda

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \\ a_3(s) \\ a_4(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2(s) \\ k_1(s) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \\ a_3(s) \\ a_4(s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [3].

Daha açık bir ifadeyle

$$\begin{aligned} a_1'(s) &= a_3(s) \\ a_2'(s) &= H_2(s)a_4(s) \\ a_3'(s) &= k_1(s)a_1(s) + a_2(s) \\ a_4'(s) &= a_1(s) + k_2(s)a_2(s) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Örnek 2.3.3. $z(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sinh s, \frac{1}{2}s^2 + 2s, \cos hs, \frac{1}{2}s^2 - 2s)$ eğrisinin Frenet denklemleri ve eğrilikleri hesaplanırsa,

$$a_1(s) = z'(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\cosh s, s + 2, \sinh s, s - 2)$$

ve

$$a_3(s) = z''(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sinh s, 1, \cosh s, 1)$$

olduğundan,

$$\langle a_1(s), a_3(s) \rangle = 1$$

olup verilen eğri simplektik yay uzunluklu bir simplektik eğridir.

Benzer şekilde

$$a_2(s) = \frac{1}{5\sqrt{5}} (4\cosh s, -(s + 2), -4\sinh s, -(s - 2))$$

ve

$$a_4(s) = \frac{5}{4\sqrt{5}} (4\sinh s, -1, 4\cosh s, -1)$$

olduğu hesaplanır. Böylece

$$k_1(s) = \langle a_3'(s), a_3(s) \rangle = \frac{1}{5},$$

$$k_2(s) = \langle a_4'(s), a_4(s) \rangle = \frac{4}{25},$$

$$H_2(s) = -\langle a_2'(s), a_2(s) \rangle = 5$$

bulunur.

3. HELİSLER VE SLANT HELİSLER

Bu bölümde özellikle [13] Jinhua Qian and Young Ho Kim, ve [14] Ahmet T.Ali, Rafeal Lopez, Melih Turgut tarafından 4-boyutlu uzaylarda tanımlanan Helis ve Slant Helis karakterizasyonları simplektik eğriler için incelenmiş ve bazı yeni teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 3.1.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş simplektik bir eğri olsun. $\mathbb{R}^4$ ün sıfırdan farklı sabit bir u vektörü için eğer,

$$\langle a_1(s), u \rangle = \text{sabit ise 0- tipinden slant helis ,}$$

$$\langle a_2(s), u \rangle = \text{sabit ise 1- tipinden slant helis,}$$

$$\langle a_3(s), u \rangle = \text{sabit ise 2- tipinden slant helis ,}$$

$$\langle a_4(s), u \rangle = \text{sabit ise 3- tipinden slant helis}$$

olarak adlandırılır.

0-tipi slant helisler genel helis ve 1-tipi slant helisler slant helis olarak adlandırılır.

3.1 Helisler ve Karakterizasyonları

Teorem 3.1.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. $k_1(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ ve $H_2(s) = \text{sabit}$ eğriliklerine sahip $z(s)$ 0-tipinden simplektik eğri ise

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $z(s)$ 0-tip slant helis olsun. O takdirde

$$\langle a_1(s), u \rangle = \text{sabit} = c$$

olur. Eğer

$$u = ca_3(s) + u_4a_4(s)$$

şeklinde seçilip s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$0 = c(k_1(s)a_1(s) + a_2(s)) + u'_4a_4(s) + u_4(a_1(s) + k_2(s)a_2(s))$$

veya

$$ck_1(s) + u_4 = 0$$

$$u'_4 = 0$$

$$c + u_4 k_2(s) = 0$$

elde edilir.

$$u'_4 = 0$$

ise $u_4 = c_1$ alınır

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1. Bu teorem $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere a_i -tipinden slant helislerinin hepsi için geçerlidir. Yani tüm slant helislerde

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $z(s)$ 1-tipinden slant helis olsun. O zaman

$$\langle a_2(s), u \rangle = c$$

olup,

$$u = u_3 a_3(s) + c a_4(s)$$

seçilir ve türev alınır,

$$0 = u'_3 a_3(s) + u_3 (k_1(s) a_1(s) + a_2(s)) + c (a_1(s) + k_2(s) a_2(s))$$

ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$0 = u'_3 a_3(s) + (u_3 k_1(s) + c) a_1(s) + (u_3 + c k_2(s)) a_2(s)$$

elde edilir. Buradan

$$u'_3 = 0$$

$$u_3 k_1(s) + c = 0$$

$$u_3 + c k_2(s) = 0$$

bulunur. Böylece

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

2-tip slant helis ve 3-tip slant helis için ispat benzer yöntemle yapılabilir.

Teorem 3.1.2. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. $k_1(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ ve $H_2(s) = \text{sabit}$ eğriliklerine sahip $z(s)$ simplektik eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart

$$a_1^{(iv)}(s) = [k_1''(s) + k_1^2(s) + H_2(s)]a_1(s) + 2k_1'(s)a_3(s) \quad (3.1)$$

diferensiyel denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatılı bir simplektik eğri olduğundan Frenet denklemlerinden

$$a_1'(s) = a_3(s) \quad (3.2)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır,

$$a_1''(s) = k_1(s)a_1(s) + a_2(s) \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$a_1'''(s) = k_1'(s)a_1(s) + k_1(s)a_3(s) + H_2 a_4(s) \quad (3.4)$$

ve son kez türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$a_1^{(iv)}(s) = [k_1''(s) + k_1^2(s) + H_2(s)]a_1(s) + [k_1(s) + k_2(s)H_2(s)]a_2(s) + 2k_1'(s)a_3(s) + H_2'(s)a_4(s) \quad (3.5)$$

bulunur. $H_2(s) = \text{sabit}$ ve $z(s)$ bir helis olduğundan

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s) \quad (3.6)$$

kabul edilirse,

$$a_1^{(iv)}(s) = [k_1''(s) + k_1^2(s) + H_2(s)]a_1(s) + 2k_1'(s)a_3(s)$$

bulunur. Tersine

$$a_1^{(iv)}(s) = [k_1''(s) + k_1^2(s) + H_2(s)]a_1(s) + 2k_1'(s)a_3(s)$$

diferensiyel denkleminin sağlandığı kabul edilsin. Frenet denklemlerinden

$$a_1(s) = \frac{1}{k_1(s)} [a_3'(s) - a_2(s)] \quad (3.7)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a_1'(s) = \left(\frac{-k_1'(s)}{k_1(s)} \right) a_1(s) + \left(\frac{1}{k_1(s)} \right) [a_3''(s) - a_2'(s)] \quad (3.8)$$

elde edilir. Bu ifadenin bir kez daha türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa ,

$$a_1''(s) = k_1(s)a_1(s) + \left[\frac{-H_2(s)k_2(s)}{k_1(s)} \right] a_2(s) + \left[\frac{H_2'(s)}{k_1(s)} \right] a_4(s) \quad (3.9)$$

bulunur. Diğer taraftan Frenet denklemlerinden

$$a_1''(s) = k_1(s)a_1(s) + a_2(s) \quad (3.10)$$

dir. (3.9) ve (3.10) denklemleri taraf tarafa eşitlenirse,

$$\left[\frac{H_2'(s)}{k_1(s)} \right] = 0$$

ve

$$\left[\frac{-H_2(s)k_2(s)}{k_1(s)} \right] = 1 \quad (3.11)$$

elde edilir. Buradan $H_2(s) = \text{sabit}$ ve $\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$ bulunur. O halde $z(s)$ simplektik eğrisi bir helistir.

Sonuç 3.1.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, $H_2(s) = \text{sabit}$ olan bir dairesel helis ise

$$a_1^{(iv)}(s) = \lambda a_1(s) \quad (3.12)$$

dir. Burada $\lambda = k_1^2(s) + H_2(s) = \text{sabit}$ dir.

İspat. $z(s)$ bir dairesel helis ise $k_1(s) = \text{sabit}$ ve $k_2(s) = \text{sabit}$ olacağından doğrudan hesaplamalarla (3.12) denklemi bulunur.

Teorem 3.1.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. $k_1(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ ve $H_2(s) = \text{sabit}$ eğriliklerine sahip $z(s)$ simplektik eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart

$$a_4'''(s) = (1 + k_2''(s) - k_1(s)k_2(s))a_2(s) + (2k_2'(s)H_2(s))a_4(s) \quad (3.13)$$

diferensiyel denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatılı bir simplektik eğri olduğundan Frenet denklemlerinden

$$a_4'(s) = a_1(s) + k_2(s)a_2(s) \quad (3.14)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$a_4''(s) = a_3(s) + k_2'(s)a_2(s) + k_2(s)H_2(s)a_4(s) \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) denleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$a_4'''(s) = (k_1(s) + k_2(s)H_2(s))a_1(s) + (1 + k_2''(s))a_2(s) + k_2^2(s)H_2(s)a_4(s) \quad (3.16)$$

bulunur. $H_2(s) = \text{sabit}$ ve $z(s)$ bir helis olduğundan,

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s) \quad (3.17)$$

kabul edilirse,

$$a_4'''(s) = (1 + k_2''(s) - k_1(s)k_2(s))a_2(s) + (2k_2'(s)H_2(s))a_4(s)$$

bulunur.

Tersine

$$a_4'''(s) = (1 + k_2''(s) - k_1(s)k_2(s))a_2(s) + (2k_2'(s)H_2(s))a_4(s)$$

diferensiyel denklemi sağlansın. Frenet denklemlerinden

$$a_2(s) = \frac{1}{k_2(s)} [a_4'(s) - a_1(s)] \quad (3.18)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a_2'(s) = -\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} a_2(s) + \frac{1}{k_2(s)} [a_4''(s) - a_3(s)]$$

elde edilir. Bu ifadenin bir kez daha türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$a_2''(s) = \left[-\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right] a_1(s) + [-k_1(s)] a_2(s) \quad (3.19)$$

bulunur. Diğer taraftan Frenet denklemleri kullanılırsa

$$a_2''(s) = H_2'(s) a_4(s) + H_2(s) a_1(s) + H_2(s) k_2(s) a_2(s) \quad (3.20)$$

dir. (3.19) ve (3.20) denklemleri taraf tarafa eşitlenirse,

$$H_2'(s) = 0 \quad \text{ise} \quad H_2(s) = \text{sabit} \quad (3.21)$$

ve

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s) \quad (3.22)$$

elde edilir. O halde z(s) simplektik eğrisi bir helistir.

Sonuç 3.1.2. z(s), IR⁴ uzayında {a₁(s), a₂(s), a₃(s), a₄(s)} Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. Eğer z(s), H₂(s) = sabit olan dairesel bir helis ise

$$a_4'''(s) = \mu a_2(s) \quad (3.23)$$

dir. Burada $\mu = (1 - k_1(s)k_2(s)) = \text{sabit}$ dir.

İspat. z(s) bir dairesel helis ise k₁(s) = sabit ve k₂(s) = sabit olacağından (3.13) denkleminde direkt hesaplamalarla (3.23) denklemini bulunur.

Teorem 3.1.4. z(s), IR⁴ uzayında {a₁(s), a₂(s), a₃(s), a₄(s)} Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. k₁(s) ≠ 0, k₂(s) ≠ 0 ve H₂(s) = sabit eğriliklerine sahip z(s) simplektik eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart

$$a_2'''(s) = H_2(s) a_3(s) + H_2(s) k_2'(s) a_2(s) - H_2(s) k_1(s) a_4(s) \quad (3.24)$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat. z(s), IR⁴ uzayında {a₁(s), a₂(s), a₃(s), a₄(s)} Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olduğundan Frenet denklemlerinden

$$a_2'(s) = H_2(s) a_4(s) \quad (3.25)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır ,

$$a_2''(s) = H_2'(s) a_4(s) + H_2(s) a_1(s) + H_2(s) k_2(s) a_2(s) \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa ,

$$a_2'''(s) = [2H_2'(s)]a_1(s) + [2H_2'(s)k_2(s) + H_2(s)k_2'(s)]a_2(s) + [H_2(s)]a_3(s) + [H_2''(s) + k_2(s)H_2^2(s)]a_4(s) \quad (3.27)$$

bulunur. $H_2(s) = \text{sabit}$ ve $z(s)$ bir helis olduğundan,

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s)$$

kabul edilirse ,

$$a_2'''(s) = H_2(s)a_3(s) + [H_2(s)k_2'(s)]a_2(s) - [H_2(s)k_1(s)]a_4(s)$$

bulunur. Tersine

$$a_2'''(s) = H_2(s)a_3(s) + [H_2(s)k_2'(s)]a_2(s) - [H_2(s)k_1(s)]a_4(s)$$

diferensiyel denklemi sağlanıyorsa $z(s)$ in bir helis olduğu gösterilmelidir. Frenet denklemlerinden

$$a_4(s) = \frac{1}{H_2(s)} a_2'(s) \quad (3.28)$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a_4''(s) = \left[\frac{-2H_2'(s)}{H_2(s)} \right] a_1(s) + \left[\frac{-2H_2'(s)}{H_2(s)} k_2(s) + k_2'(s) \right] a_2(s) + [a_3(s)] \left[\left(\frac{-H_2'(s)}{H_2^2(s)} \right)' H_2(s) + \left(\frac{-H_2'(s)}{H_2^2(s)} \right) H_2'(s) - k_1(s) \right] a_4(s) \quad (3.29)$$

bulunur. Diğer taraftan Frenet denklemlerinden

$$a_4''(s) = k_2'(s)a_2(s) + a_3(s) + k_2(s)H_2(s)a_4(s) \quad (3.30)$$

dir. (3.29) ve (3.30) denklemleri taraf tarafa eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$H_2(s) = \text{sabit} \quad (3.31)$$

ve

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s) \quad (3.32)$$

elde edilir. O halde $z(s)$ simplektik eğrisi bir helistir.

Sonuç 3.1.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilen bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, $H_2(s) = \text{sabit}$ olan dairesel bir helis ise

$$a_2'''(s) = c_1 a_3(s) + c_2 a_4(s) \quad (3.33)$$

dir. Burada $c_1 = H_2(s)$ ve $c_2 = -k_1(s)H_2(s)$ sabitlerdir.

İspat. $z(s)$ dairesel bir helis ise $k_1(s) = \text{sabit}$ ve $k_2(s) = \text{sabit}$ olacağından (3.24) denkleminde direkt hesaplamalarla (3.33) denklemi bulunur.

3.2. Slant Helisler ve Karakterizasyonları

Teorem 3.2.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 0-tipinden bir slant helis ise $H_2(s) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$k_1''(s) - H_2(s)k_1(s)k_2(s) + H_2(s) = 0 \quad (3.34)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $z(s)$ bir 0-tipinden slant helis olduğundan

$$\langle a_1(s), u \rangle = \text{sabit} = c \quad (3.35)$$

dir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\langle a_3(s), u \rangle = 0 \quad (3.36)$$

elde edilir. Tekrar s ye göre türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\langle a_1(s), u \rangle = -ck_1(s) \quad (3.37)$$

bulunur. Bu ifadeden s ye göre tekrar türev alınıp ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\langle a_3(s), u \rangle = -\frac{1}{H_2(s)}k_1(s) \quad (3.38)$$

olur. (3.38) denkleminin son kez s ye göre tekrar türevi alınır

$$k_1''(s) - H_2(s)k_1(s)k_2(s) + H_2(s) = 0$$

bulunur.

Sonuç 3.2.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir 0-tipi slant helis ise $H_2(s) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$k_2''(s) - k_2^2(s)H_2(s) - 1 = 0 \quad (3.39)$$

dir.

İspat. $z(s)$ bir 0-tipi slant helis olduğundan aynı zamanda bir genel helisdir. Yani

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

dir. Eğer

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s)$$

kabul edilirse (3.39) denklemini bulunur.

Sonuç 3.2.2. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir 0-tipi slant helis ise $H_2(s) \neq 0$ sabit olmak üzere, eğer $k_1(s) \neq 0$ sabit ve $k_2(s) \neq 0$ sabit ise

$$\mathbf{a)} \ k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$$

veya

$$\mathbf{b)} \ H_2(s) = -\frac{1}{k_2^2(s)}$$

dir.

İspat. Eğer $k_1(s) \neq 0$ sabit ve $k_2(s) \neq 0$ sabit ise (3.34) ve (3.39) denklemlerinden kolaylıkla bulunur.

Teorem 3.2.2. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 1-tipinden bir slant helis ise $H_2(s) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$k_2''(s) - k_1(s)k_2(s) + 1 = 0 \quad (3.40)$$

bulunur.

İspat. $z(s)$, 1-tipinden slant helis olduğundan,

$$\langle a_2(s), u \rangle = \text{sabit} = c \quad (3.41)$$

dir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\langle a_4(s), u \rangle = 0 \quad (3.42)$$

bulunur. (3.42) denkleminde tekrar s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\langle a_1(s), u \rangle = -ck_2(s) \quad (3.43)$$

elde edilir. Buradan s ye göre türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\langle a_3(s), u \rangle = -ck_2'(s) \quad (3.44)$$

ve (3.44) denkleminde son kez s ye göre türev alınır ve (3.41) ile (3.43) denklemleri göz önüne alınırsa

$$k_2''(s) - k_1(s)k_2(s) + 1 = 0$$

bulunur.

Sonuç 3.2.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 1-tipinden bir slant helis ise $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $H_2(s) \neq 0$ sabitler olmak üzere,

$$k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$$

olur.

İspat. (3.40) denkleminde direkt hesaplama ile bulunur.

Teorem 3.2.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 2-tipinden bir slant helis ise $H_2(s) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$(k_1''(s) + H_2(s) - H_2(s)k_1(s)k_2(s))\langle a_1(s), u \rangle = -2k_1'(s)c \quad (3.45)$$

denklemini sağlanır. Burada c sabittir.

İspat. $z(s)$, 2-tipinden bir slant helis olduğundan,

$$\langle a_3(s), u \rangle = \text{sabit} = c \quad (3.46)$$

dir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$k_1(s)\langle a_1(s), u \rangle + \langle a_2(s), u \rangle = 0 \quad (3.47)$$

bulunur. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır (3.46) ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$k_1'(s)\langle a_1(s), u \rangle + k_1(s)c + H_2(s)\langle a_4(s), u \rangle = 0 \quad (3.48)$$

elde edilir. (3.48) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (3.47) ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$(k_1''(s) + H_2(s) - H_2(s)k_1(s)k_2(s))\langle a_1(s), u \rangle = -2k_1'(s)c$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 1-tipinden bir slant helis ise $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $H_2(s) \neq 0$ sabitler ve $\langle a_1(s), u \rangle \neq 0$ olmak üzere

$$k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$$

olur.

İspat. (3.45) denklemden direkt hesaplama ile bulunur.

Teorem 3.2.4. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 3-tipinden bir slant helis ise $H_2(s) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$(k_2''(s) - k_1(s)k_2(s) + 1)\langle a_2(s), u \rangle = -2ck_2'(s)H_2(s) \quad (3.49)$$

denklemini sağlanır. Burada c sabittir.

İspat. $z(s)$, 3-tipinden bir slant helis olduğundan,

$$\langle a_4(s), u \rangle = \text{sabit} = c \quad (3.50)$$

dir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa ,

$$\langle a_1(s), u \rangle + k_2(s)\langle a_2(s), u \rangle = 0 \quad (3.51)$$

bulunur. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır (3.50) ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\langle a_3(s), u \rangle + k_2'(s) \langle a_2(s), u \rangle + k_2(s) H_2(s) c = 0 \quad (3.52)$$

elde edilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve (3.50), (3.51) ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$(k_2''(s) - k_1(s)k_2(s) + 1) \langle a_2(s), u \rangle = -2ck_2'(s)H_2(s)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ Frenet çatısı ile verilmiş bir simplektik eğri olsun. Eğer $z(s)$, 1-tipinden bir slant helis ise $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $H_2(s) \neq 0$ sabitler ve $\langle a_2(s), u \rangle \neq 0$ olmak üzere

$$k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$$

olur.

İspat. (3.45) denkleminde direkt hesaplama ile bulunur.

Örnek 3.2.1 . $z(s) = (\cos s, e^s, -\sin s, e^{-s})$ eğrisinin bir dairesel helis olduğunu gösterilerek

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s)$$

bağıntısı elde edilecektir.

$$a_1(s) = z'(s) = (-\sin s, e^s, -\cos s, -e^{-s})$$

ve

$$a_3(s) = z''(s) = (-\cos s, e^s, \sin s, e^{-s})$$

olduğundan,

$$\langle a_1(s), a_3(s) \rangle = 1$$

olup verilen eğri simplektik yay uzunluklu bir simplektik eğridir.

Benzer şekilde

$$a_2(s) = (4\sin s, -2e^s, 4\cos s, 2e^{-s})$$

ve

$$a_4(s) = (-\frac{1}{2}\cos s, \frac{1}{4}e^s, \frac{1}{2}\sin s, \frac{1}{4}e^{-s})$$

olduğu bulunur. Böylece

$$k_1(s) = \langle a_3'(s), a_3(s) \rangle = 3 \quad (3.53)$$

ve

$$k_2(s) = \langle a_4'(s), a_4(s) \rangle = \frac{3}{8} \quad (3.54)$$

dir ve böylece $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sabit olup $z(s)$ eğrisi dairesel helistir. Diğer taraftan benzer yöntemle hesaplamalarla

$$H_2(s) = -\langle a_2'(s), a_2(s) \rangle = -8 \quad (3.55)$$

bulunur. Böylece (3.53), (3.54) ve (3.55) denkleminde

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s)$$

elde edilir.



4. SİMPLEKTİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde Müslüm AYKUT AYGÜN [15] ün Minkowski uzayında bazı eğrilerin karakterizasyonları adlı doktora tezinde yapılan çalışmalar simplektik eğrilere uygulanmıştır.

4.1. Simplektik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar

1. Durum. Öncelikle simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)a_4(s) \quad (4.1)$$

yazılabilir. (4.1) denkleminde s ye göre türev alınırsa ,

$$z'(s) = \lambda'(s)a_3(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)a_3'(s) + \mu(s)a_4'(s)$$

olur. Frenet denklemleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} z'(s) &= \lambda'(s)a_3(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)(k_1(s)a_1(s) + a_2(s))\mu(s)(a_1(s) \\ &\quad + k_2(s)a_2(s)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} z'(s) &= \lambda'(s)a_3(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)k_1(s)a_1(s) + \lambda(s)a_2(s) + \mu(s)a_1(s) \\ &\quad + \mu(s)k_2(s)a_2(s) \\ &= (\lambda(s)k_1(s) + \mu(s))a_1(s) + (\lambda(s) + \mu(s)k_2(s))a_2(s) + \lambda'(s)a_3(s) + \\ &\quad \mu'(s)a_4(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerden aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(s) &= 0 \\ \mu'(s) &= 0 \\ \lambda(s)k_1(s) + \mu(s) &= 1 \\ \lambda(s) + \mu(s)k_2(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$\lambda'(s) = 0$ ise $\lambda(s) = \text{sabit} = c_1$ ve $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = \text{sabit} = c_2$

elde edilir. Böylece (4.3) denkleminin üçüncü ve dördüncü denklemlerinden $k_1(s) = \text{sabit}$

$k_2(s) = \text{sabit}$ ve $k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ de bir simplektik eğri olsun. $z(s)$ nin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart $k_1(s) = \text{sabit}$ $k_2(s) = \text{sabit}$ ve $k_1(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ olmak üzere

$$z(s) = c_1 a_3(s) + c_2 a_4(s) \quad (4.4)$$

şeklinde olmasıdır. Burada c_1 ve c_2 reel sabitlerdir.

2. Durum. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_3(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s)a_2(s) + \mu(s)a_3(s) \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.5) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} z'(s) &= \lambda'(s)a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) + \mu(s)(k_1(s)a_1(s) + a_2(s)) \\ &= \lambda'(s)a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) + \mu(s)(k_1(s)a_1(s)) + \mu(s)a_2(s) \\ &= \mu(s)k_1(s)a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s))a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) \\ &= \mu(s)k_1(s)a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s))a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliklerden aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} \mu(s)k_1(s) &= 1 \\ \lambda'(s) + \mu(s) &= 0 \\ \mu'(s) &= 0 \\ \lambda(s)H_2(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Buradan $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = c = \text{sabit}$ dir. Böylece (4.6) nın ikinci denkleminde $\lambda(s) = cs + c_1$ $c_1 \in \mathbb{R}$ bulunur. (4.6) denkleminin son denkleminde $H_2(s) = 0$ bulunur. Oysa $H_2(s) \neq 0$ olduğunda çözüm olmadığı görülür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_3(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğri yoktur.

3. Durum. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s)a_2(s) + \mu(s)a_4(s) \quad (4.7)$$

yazılabilir. (4.7) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} z'(s) &= \lambda'(s)a_2(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) + \mu(s)a_1(s) + \mu(s)k_2(s)a_2(s) \\ &= \mu(s)a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s)k_2(s))a_2(s) + (\mu'(s) + \lambda(s)H_2(s))a_4(s) \\ &= \mu(s)a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s)k_2(s))a_2(s) + (\mu'(s) + \lambda(s)H_2(s))a_4(s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \mu(s) &= 1 \\ \lambda'(s) + \mu(s)k_2(s) &= 0 \\ \mu'(s) + \lambda(s)H_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Eğer $\mu(s) = 1$ ise ikinci denklemden $\lambda(s) = k(s)s + c_1$ $c_1 \in \mathbb{R}$ bulunur. Bu ifade üçüncü denklemde yazılırsa $H_2(s) = 0$ bulunur. Oysa $H_2(s) \neq 0$ olduğunda çözüm olmadığı görülür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğri yoktur.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.4. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ de bir simplektik eğri olsun. Bu takdirde $\mathbb{R}^4$ uzayının

- a) $\{a_1(s), a_2(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.
- b) $\{a_1(s), a_3(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.
- c) $\{a_1(s), a_4(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.

İspat. a) $z(s)$ eğrisinin

$$z(s) = \lambda(s)a_1(s) + \mu(s)a_2(s)$$

olduğu kabul edilsin. Eğer bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_2(s) + \lambda(s)a_1'(s) + \mu(s)a_2'(s)$$

elde edilir. Buradan

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_2(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)H_2(s)a_4(s)$$

ve

$$\lambda'(s) = 1, \mu'(s) = 0, \lambda(s) = 0, \mu(s) = 0$$

sonucuna varılır ki, bu da aynı anda olamayacağından, $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_2(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.

b) $z(s) = \lambda(s)a_1(s) + \mu(s)a_3(s)$

olduğu kabul edilsin. Eğer bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)a_1'(s) + \mu(s)a_3'(s)$$

veya

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_3(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)k_1(s)a_1(s) + \mu(s)a_2(s)$$

olur. Buradan

$$z'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s))a_1(s) + \mu(s)a_2(s) + (\mu'(s) + \lambda(s))a_3(s)$$

$$\lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) = 1, \mu(s) = 0, \mu'(s) + \lambda(s) = 0, \lambda(s) = 0$$

olup birinci denklemi sağlamaz. Dolayısıyla $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_3(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.

$$\mathbf{d)} \quad z(s) = \lambda(s)a_1(s) + \mu(s)a_4(s)$$

olduğu kabul edilsin. Eğer bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa,

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)a_1'(s) + \mu(s)a_4'(s)$$

ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_4(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)a_1(s) + \mu(s)k_2(s)a_2(s)$$

veya

$$z'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s))a_1(s) + \mu(s)k_2(s)a_2(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)a_4'(s)$$

bulunur. Buradan,

$$\lambda'(s) + \mu(s) = 1, \mu(s)k_2(s) = 0, \lambda(s) = 0, \mu'(s) = 0 \Rightarrow \mu(s) = c$$

bulunur. $k_2(s) \neq 0$ olduğundan, $\mu'(s) = \mu(s) = 0$ olacağından, $\lambda'(s) = 1$ ve $\lambda(s) = 0$ olması aynı anda mümkün değildir. O halde $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_4(s)\}$ ile gerilen alt uzayında yatan bir simplektik eğrisi yoktur.

4.Durum. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ , μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s)a_2(s) + \mu(s)a_3(s) + \gamma(s)a_4(s) \quad (4.10)$$

yazılabilir. (4.10) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &= \lambda'(s)a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \gamma'(s)a_4(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) + \mu(s)k_1(s)a_1(s) + \\ &\quad \mu(s)a_2(s) + \gamma(s)a_1(s) + \gamma(s)k_2(s)a_2(s) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} &= (\mu(s)k_1(s) + \gamma(s))a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s) + \gamma(s)k_2(s))a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + (\gamma'(s) \\ &\quad + \lambda(s)H_2(s))a_4(s) \end{aligned}$$

yada

$$\begin{aligned} &= (\mu(s)k_1(s) + \gamma(s))a_1(s) + (\lambda'(s) + \mu(s) + \gamma(s)k_2(s))a_2(s) + \mu'(s)a_3(s) + \\ &\quad (\gamma'(s) + \lambda(s)H_2(s))a_4(s) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \mu(s)k_1(s) + \gamma(s) &= 1 \\ \lambda'(s) + \mu(s) + \gamma(s)k_2(s) &= 0 \\ \mu'(s) &= 0 \\ \gamma'(s) + \lambda(s)H_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$\mu(s) = c_1$ olup ilk denklemden $\gamma(s) = 1 - c_1 k_1(s)$ olur. İkinci denklemden

$$\lambda(s) = \int [-c - (1 - c_1 k_1(s)) k_2(s) ds] + c_2$$

bulunur. En son denklemden

$$\lambda'(s) = -\mu(s) + \gamma'(s) k_2(s) = -c - (1 - c_1 k_1(s)) k_2(s)$$

$$\lambda(s) = \int [-c - (1 - c_1 k_1(s)) k_2(s) ds] + c_2$$

ise

$$\gamma(s) = \int [-\int (-c - (1 - k_1) k_2) ds + c_2] H_2(s) ds + c_3 \quad (4.13)$$

olur. Böylece

$$\gamma'(s) = -\lambda(s) H_2(s) = [-\int (-c - (1 - c k_1) k_2) ds + c_2] H_2(s)$$

veya

$$\gamma(s) = \int [-\int (-c - (1 - c k_1) k_2) ds + c_2] H_2(s) ds + c_3 \quad (4.14)$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.5. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için

$$z(s) = -\frac{c_1}{H_2(s)} k_1'(s) a_2(s) + c_1 a_3(s) + (1 - c_1 k_1(s)) a_4(s) \quad (4.15)$$

veya

$$z(s) = [\int [c_1 (k_1(s) k_2(s) - 1) - k_2(s)] ds + c_2] a_2(s) + c_1 a_3(s) + (1 - c_1 k_1(s)) a_4(s) \quad (4.16)$$

5. Durum. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ , μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s) a_1(s) + \mu(s) a_3(s) + \gamma(s) a_4(s) \quad (4.17)$$

yazılabilir. (4.17) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$z'(s) = \lambda'(s) a_1(s) + \mu'(s) a_3(s) + \gamma'(s) a_4(s) + \lambda(s) a_3(s) + \mu(s) k_1(s) a_1(s) + \mu(s) a_2(s) + \gamma(s) a_1(s) + \gamma(s) k_2(s) a_2(s)$$

olur. Buradan

$$z'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s) k_1(s) + \gamma(s)) a_1(s) + (\mu(s) + \gamma(s) k_2(s)) a_2(s) + (\mu'(s) + \lambda(s)) a_3(s) + \gamma'(s) a_4(s)$$

böylece

$$z'(s) = (\lambda'(s) + \mu(s) k_1(s) + \gamma(s)) a_1(s) + (\mu(s) + \gamma(s) k_2(s)) a_2(s) + (\mu'(s) + \lambda(s)) a_3(s) + \gamma'(s) a_4(s) \quad (4.18)$$

elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(s) + \mu(s)k_1(s) + \gamma(s) &= 1 \\ \mu(s) + \gamma(s)k_2(s) &= 0 \\ \mu'(s) + \lambda(s) &= 0 \\ \gamma'(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

olur. Böylece $\gamma(s) = c$ sabittir. $\mu(s) = -ck_2(s)$ ve $\lambda(s) = ck_2(s)$ veya

$$\lambda(s) = \int (1 + ck_1(s)k_2(s))ds$$

olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.6. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_3(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere

$$z(s) = ck_2(s)a_1(s) + ck_2(s)a_3(s) + ca_4(s) \quad (4.20)$$

veya

$$z(s) = \left(\int (1 + ck_1(s)k_2(s))ds \right) - ck_2(s)a_3(s) + ca_4(s) \quad (4.21)$$

6. Durum. Simplektik bir $z(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ , μ ve γ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$z(s) = \lambda(s)a_1(s) + \mu(s)a_2(s) + \gamma(s)a_3(s) \quad (4.22)$$

yazılabilir. (4.22) denkleminde s ye göre türev alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} z'(s) &= \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_2(s) + \gamma'(s)a_3(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)H_2(s)a_4(s) + \\ &\quad \gamma(s)k_1(s)a_2(s) + \gamma(s)a_2(s) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} z'(s) &= (\lambda'(s) + \gamma(s)k_1(s))a_1(s) + (\mu'(s) + \gamma(s))a_2(s) + (\gamma'(s) + \lambda(s))a_3(s) + \\ &\quad \mu(s)H_2(s)a_4(s) \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} z'(s) &= (\lambda'(s) + \gamma(s)k_1(s))a_1(s) + (\mu'(s) + \gamma(s))a_2(s) + (\gamma'(s) + \lambda(s))a_3(s) + \\ &\quad \mu(s)H_2(s)a_4(s) \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(s) + \gamma(s)k_1(s) &= 1 \\ \mu'(s) + \gamma(s) &= 0 \\ \gamma'(s) + \lambda(s) &= 0 \\ \mu(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

olur. Böylece $\mu(s) = 0$ ve $\lambda(s) = 0$ ve $\gamma(s) = 0$ bulunur. Birinci denklemden çelişki elde edilir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.7. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ de bir simplektik eğri olsun. $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan z simplektik eğrisi yoktur.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.8. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ de bir simplektik eğri olsun. $\mathbb{R}^4$ uzayının $\{a_1(s), a_2(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan z simplektik eğrisi yoktur.

İspat. Kabul edelim ki

$$z(s) = \lambda(s)a_1(s) + \mu(s)a_2(s) + \gamma(s)a_4(s)$$

olsun. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$z'(s) = \lambda'(s)a_1(s) + \mu'(s)a_2(s) + \gamma'(s)a_4(s) + \lambda(s)a_3(s) + \mu(s)H_2(s)a_4(s) + \gamma(s)a_1(s) + \gamma(s)k_2(s)a_2(s)$$

ve buradan

$$z'(s) = (\lambda'(s) + \gamma(s))a_1(s) + (\mu'(s) + \gamma(s)k_2(s))a_2(s) + \lambda(s)a_3(s) + (\gamma'(s) + \mu(s)H_2(s))a_4(s)$$

bulunur.

Bu eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(s) + \gamma(s) &= 1 \\ \mu'(s) + \gamma(s)k_2(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= 0 \\ \gamma'(s) + \mu(s)H_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Buradan $\lambda(s) = 0$ ise $\gamma(s) = 1$, $\mu'(s) = -k_2(s)$, $\mu(s) = -k_2(s) + c_1$ olur ki bu durumda $H_2(s) = 0$ olamaz. O halde $\mu(s) = (-k_2(s) + c_1) = 0$ olamaz. $\{a_1(s), a_2(s), a_4(s)\}$ tarafından gerilen alt uzayında yatan simplektik eğri yoktur.

5. BERTRAND EĞRİLER

Bu bölümde simplektik uzayda Bertrand eğriler ve özellikle Matsuda H., ve Yorozu S., [16] tarafından Öklid uzayında tanımlanan (1,3) Bertrand eğriler incelenecektir.

5.1. Bertrand Eğrilerin Karakterizasyonu

Tanım 5.1.1. z ve $\bar{z}$ ikilisi $\mathbb{R}^4$ uzayında sırasıyla s , $\bar{s}$ simplektik yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş simplektik regüler iki eğri olsun. Bu eğri çiftine sırasıyla $a_2(s)$ ve $\bar{a}_2(\bar{s})$ vektörlerinin meydana getirdiği doğruların aynı olması durumunda Bertrand eğri çifti denir. $\bar{z}$ eğrisine z eğrisinin Bertrand eşi denir .

Daha açık olmak gerekirse $\mathbb{R}^4$ uzayında z , $(z: I \rightarrow \mathbb{R}^4)$ bir regüler simplektik eğri, $\bar{z}$, $(\bar{z}: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^4)$ eğrisi de z den farklı bir regüler simplektik eğri olsun. Eğrilerin yay parametreleri arasında regüler bir $\varphi: I \rightarrow \bar{I}$, $(\bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0)$ dönüşümü mevcut olsun. Bu φ dönüşümü altında eğrilerin birbirine karşılık gelen noktaları olan $z(s)$ ve $\bar{z}(\bar{s})$ noktalarında sırasıyla a_2 ve $\bar{a}_2$ vektörlerinin oluşturduğu doğruları aynı ise z eğrisine Bertrand eğrisi denir.

Teorem 5.1.1. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları $k_1(s), k_2(s)$, $H_2(s)$ olan birim hızlı regüler simplektik eğri olsun. Bu durumda z eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

İspat. $(z: I \rightarrow \mathbb{R}^4)$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları $k_1(s), k_2(s)$, $H_2(s)$ olan birim hızlı regüler simplektik eğri olsun. $\bar{z}$ eğrisi de z eğrisinin bir Bertrand eşi olsun. $z(s)$ ve $\bar{z}(\bar{s})$ ikilisi sırasıyla z , $\bar{z}$ eğrilerinin birbirine karşılık gelen noktaları olsun. Bu durumda z eğrisinin Bertrand eşi olan $\bar{z}$ eğrisi için

$$\bar{z}(\bar{s}) = \bar{z}(\varphi(s)) = z(s) + \lambda(s)a_2(s) \quad (5.1)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\lambda, \lambda(s) \neq 0$ şartını sağlayacak şekilde s parametresine bağlı bir fonksiyondur. (5.1) denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet denklemi kullanılırsa

$$\frac{d\bar{z}(\bar{s})}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = z'(s) + \lambda'(s)a_2(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s)$$

veya

$$\bar{a}_1(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{ds} = a_1(s) + \lambda'(s)a_2(s) + \lambda(s)H_2(s)a_4(s) \quad (5.2)$$

elde edilir. Bu denklem $a_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\lambda(s)H_2(s) = 0$$

bulunur. Hipotezden $H_2(s) \neq 0$ olduğunda $\lambda(s) = 0$ elde edilir. Böylece z ve $\bar{z}$ eğrileri çakışır. Bu da kabul ile çelişir. O halde z nin Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

5.2. Genelleştirilmiş Bertrand Eğriler

Tanım 5.2.1. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ ve $\bar{z}: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^4$ simplektik regüler eğriler olsun. $f: I \rightarrow \bar{I}$ bir regüler C^∞ dönüşüm öyle ki her $s \in I$ için z nin her $z(s)$ noktasında, $\bar{z}$ nin bir $\bar{z}(\bar{s}^*) = \bar{z}(f(s))$ noktasını karşılık getirsin. Eğer her $s \in I$ için z eğrisinin her $z(s)$ noktasında (1,3)-normal düzlemi ile $\bar{z}$ nin bu noktaya karşılık gelen $\bar{z}(\bar{s}^*)$ noktasındaki (1,3)- normal düzlemi çakışıyorsa z eğrisine (1,3)- Bertrand eğrisi ve $\bar{z}$ eğrisine de z eğrisinin (1,3)- Bertrand eşlenik eğrisi denir [16].

Teorem 5.2.1. $z: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı aynı işaretli an farklı ve k_1, k_2 ve H_2 eğriliklerine sahip birim hızlı regüler simplektik eğri olsun. Eğer z nin (1,3) tipinden Bertrand eğrisi varsa

$$\begin{aligned} \bar{z}(\bar{s}) = z(s) + \left[c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \right] a_2(s) \\ + \left[\sqrt{\frac{H_2}{k_2}} \left[c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \right] \right] a_4(s) \end{aligned}$$

formunda olmalıdır. Burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $z: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 ve H_2 asli normal a_2 ve ikinci binormal vektörü a_4 vektörler olan simplektik eğri ve $\bar{z}: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi z eğrisinin asli normal vektörü $\bar{a}_2$ ve ikinci binormal vektörü $\bar{a}_4$ olan Bertrand eğrisi olsun.

$$\bar{z}(\bar{s}) = z(s) + \gamma(s)a_2(s) + \beta(s) a_4(s) \quad (5.3)$$

yazılabilir. Burada γ ve β , I üzerinde C^∞ fonksiyonlardır. (5.3) ifadesinin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = z'(s) + \gamma'(s)a_2(s) + \beta'(s)a_4(s) + \gamma(s)H_2(s)a_4(s) + \beta(s)a_1(s) \\ + \beta(s) k_2(s)a_2(s) \end{aligned}$$

yada

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = a_1(s) + \gamma'(s)a_2(s) + \beta'(s)a_4(s) + \gamma(s)H_2(s)a_4(s) + \beta(s)a_1(s) \\ + \beta(s)k_2(s)a_2(s)$$

veya

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = (1 + \beta(s))a_1(s) + (\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s))a_2(s) + (\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))a_4(s)$$

nihayet

$$\bar{a}_1(s) \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = (1 + \beta(s))a_1(s) + (\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s))a_2(s) + (\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))a_4(s) \quad (5.4)$$

bulunur. $z(s)$, $\mathbb{R}^4$ de (1,3) tipinde Bertrand eğri olduğundan $a_2(s)$ ve $a_4(s)$ in gerdiği düzlemle $\bar{a}_2(\psi(s))$ ve $\bar{a}_4(\psi(s))$ in gerdiği düzlem çakışıktır. O halde

$$\bar{a}_2(\psi(s)) = A(s)a_2(s) + B(s)a_4(s) \quad (5.5)$$

ve

$$\bar{a}_4(\psi(s)) = C(s)a_2(s) + D(s)a_4(s) \quad (5.6)$$

yazılabilir. Buradan A, B, C ve D, L üzerinde C^∞ fonksiyonlarıdır. Sırasıyla (5.4) ile (5.5) denklemleri ve (5.4) ile (5.6) denklemleri iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \bar{a}_1(s) \frac{\partial \bar{s}}{\partial s}, \bar{a}_2(\psi(s)) \rangle = \langle (1 + \beta(s))a_1(s) + (\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s))a_2(s) + (\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))a_4(s), A(s)a_2(s) + B(s)a_4(s) \rangle$$

düzenlenirse ,

$$0 = B(s)(\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s)) + A(s)(\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))$$

veya

$$\langle \bar{a}_1(s) \frac{\partial \bar{s}}{\partial s}, \bar{a}_4(\psi(s)) \rangle = \langle (1 + \beta(s))a_1(s) + (\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s))a_2(s) + (\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))a_4(s), A(s)a_2(s) + B(s)a_4(s) \rangle$$

düzenlenirse,

$$0 = B(s)(\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s)) + A(s)(\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s))$$

elde edilir. Yani

$$A(s)(\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s)) + B(s)(\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s)) = 0 \quad (5.7)$$

ve

$$A(s)(\beta'(s) + \gamma(s)H_2(s)) + B(s)(\gamma'(s) + \beta(s)k_2(s)) = 0 \quad (5.8)$$

bulunur. (5.7) ve (5.8) denklemlerinden

$$\beta'(s) + H_2(s)\gamma(s) = 0 \quad (5.9)$$

ve

$$(\gamma'(s) + k_2(s)\beta(s) = 0 \quad (5.10)$$

elde edilir. (5.9) denkleminde

$$\gamma(s) = \frac{1}{H_2(s)} \beta'(s) \quad (5.11)$$

ve (5.11) denklemini (5.10) denkleminde yazılırsa

$$\gamma''(s) - k_2(s)H_2(s)\gamma(s) = 0 \quad (5.12)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem çözülürse c_1, c_2 sabitler olmak üzere

$$\gamma(s) = c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \quad (5.13)$$

sonucuna varılır. (5.13) denklemini (5.10) denkleminde yazılırsa

$$\beta(s) = \sqrt{\frac{H_2}{k_2}} \left[c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \right] \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.13) ve (5.14) denklemleri , (5.3) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{z}(\bar{s}) = & z(s) + \left[c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \right] a_2(s) + \\ & \left[\sqrt{\frac{H_2}{k_2}} \left[c_1 e^{\sqrt{k_2 H_2} s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2 H_2} s} \right] \right] a_4(s) \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Bu da ispatı tamamlar.

6. SONUÇ

Bu çalışmada 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında eğriler için yapılan helisler, slant helisler, alt uzaylarda kalma bağıntıları ve Bertrand eğri kavramlarının karşılıkları 4-boyutlu simplektik uzayda incelenmiştir. Özellikle $k_1(s)$, $k_2(s)$, $H_2(s)$ simplektik eğriliklerine sahip $z(s)$ simplektik eğrisinin helis olması durumunda

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -H_2(s)$$

bağıntısı elde edildi. Bu teori dairesel helis olan

$$z(s) = (\cos s, e^s, -\sin s, e^{-s})$$

simplektik yay uzunluklu bir simplektik eğrilikleri $k_1(s) = 3$, $k_2(s) = \frac{3}{8}$ ve $H_2(s) = -8$ olan simplektik eğri ile doğrulandı. Böylece literatüre oldukça seçkin bir teori katılmış oldu.

Bu tez simplektik eğriler teorisinde yapılan ilk tez çalışmasıdır. Eğriler teorisi özellikle Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Galilean uzayı ve Pseudo-Galilean uzayında incelenmiş ve üzerine birçok makale ve tez yapılmış bir alandır. Bu çalışma eğriler teorisinin Helis, Slant helis, alt uzayda kalma bağıntıları ve Bertrand eğriler konusunda yapılan teorilerin Simplektik eğrilerin Frenet çatılarına uygulandığı bir eserdir. Daha bir çok alanda (örneğin; involüt-evolüt eğriler gibi) simplektik eğriler incelenerek yeni teoriler inşa edilebilir. Ayrıca yüzeyler teorisi, eğriler teorisi gibi geometrinin çalışılmakta olan bir diğer sahasıdır. Bu konu üzerine birçok tez ve makale yayınlanmaktadır. Simplektik yüzeyler teorisi üzerine yapılan çalışmaların kısıtlı olması bundan sonraki çalışmalar için önemli bir açık problemidir. Bu alanda çalışacak araştırmacıların çözebileceği oldukça güzel teoriler ve uygulamaları vardır.

KAYNAKLAR

- [1] **Ata E.**, Simplektik Diferensiyel Geometri Üzerine Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, 2004
- [2] **S. S. Chern and H.C. Wang.**, Differential geometry in symplectic space, Science Report Nat. Tsing Hua Univ. 4, 453-477; reprinted in S.S. Chern, Selected Papers, Vol. II, pp. 165-191, 1947.
- [3] **Kamran N, Over PJ ve Tenenblat K.**, Local symplectic invariants for curves. Commun. Contemp Math, 11: 165-183, 2009.
- [4] **Tian G.**, Symplectic Isotropy in four Dimensions., In first International Congress of Chinese Mathematicians (Beijing, 1998). AMS IP Stud. Adv. Math.20, Amer. Soc., Providence, RI 143-147 (2001) Zbl 1054-53099 MR 18 30 170.
- [5] **Xiaoli Han ve Jiayu Li**, Symplectic Critical Surfaces in Kahler Surfaces, J.Eur. Math. Soc. 12, 505-527 (2010).
- [6] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara, 1983.
- [7] **Hacısalıhoğlu, H.H., ve Sabuncuoğlu, A.**, Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.
- [8] **Izumiya, S. and Takeuchi., N.** Generic Properties of helices and Bertrand Curves. Journal of Geometry, 74; 97-109, 2002.
- [9] **Sabuncuoğlu, A.** Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2004.
- [10] **Cannas da Silva, A.** Lectures on Symplectic Geometry, Berkeley, 2000.
- [11] **Çiçek Çetin E., Bektaş M.**, The Characterization of Affine Symplectic Curves in $\mathbb{R}^4$, Mathematics, 7(1), 110, 2019.
- [12] **Valiquette , F.**, Geometric Affine Symplectic Curve Flows in $\mathbb{R}^4$, Differential Geometry and its Applications 30, 631-641, 2012.
- [13] **Jinhua Qian and Young Ho Kim**, Null Helix and k-type null slant Helix in E_1^4 , Revista de La Union Mathematica Argentina vol 57, No:/ 71-83, 2016.
- [14] **Ahmet T.Ali, Rafeal Lopez, Melih Turgut** k-type portially null and Pseudo null slant helices in Minkowski 4-space, arXiv.org-math, arXiv: 1001-0458.
- [15] **Akgün M.A.**, Minkowski uzayında bazı eğrilerin karakterizasyonları, Doktora Tezi İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.
- [16] **Matsuda, H. ve Yorozu, S.**, Notes on Bertrand Curves, Yokohama Mathematical. Journal ,V.50, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

1989 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım ve 2014 yılında bitirdim. Aynı üniversite ve aynı anabilim dalında doktora eğitimime devam ediyorum.

