

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

SİNAPTİK CEBİRLER ÜZERİNE

Sevim YASLI

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi : 17.08.2015

Bornova - İZMİR
2015

Sevim YASLI tarafından **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak sunulan “**Sinaptik Cebirler Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 17.08.2015 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Doç. Dr. Tahsin ÖNER	
Raportör Üye	: Doç. Dr. Aysun AYTAÇ	
Üye	: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum **“Sinaptik Cebirler Üzerine”** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.... / / 20..

İmzası

Adı-Soyadı

ÖZET

SİNAPTİK CEBİRLER ÜZERİNE

YASLI, Sevim

Yüksek Lisan Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Ağustos 2015, 59 Sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci Bölümde tez konusu tanıtıldı ve bu konu ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci Bölümde bu tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli bazı temel bilgilere verildi.

Üçüncü Bölümde 2010 yılında David James Foulis tarafından yayınlanan sinaptik cebirler çalışması esas alınarak sinaptik cebirler tanıtıldı ve özellikleri ele alındı.

Dördüncü Bölümde sinaptik cebirlerde türev kavramını tanımlandı ve bazı temel özellikleri elde edildi.

Son bölümde ise bu çalışmaların ışığında elde edilen bilgilerin bir sonucu verildi.

ABSTRACT
ON SYNAPTIC ALGEBRAS

YASLI, Sevim

Supervisor : Assoc. Doç. Dr Tahsin ÖNER

August 2015, 59 pages

This thesis essentially consist of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and information about the studies which have been done with respect to this subject is given.

In the second chapter, some general background which help to make legibility easy is given.

In the third chapter, (David James Foulis, 2010)'s work is introduced. Synaptic algebras has been defined and its characteristic has been gone around.

In the forth chapter, notion of derivation of synaptic algebras introduced by us and this notion some identities and consults of derivation of synaptic algebras is obtained.

In the finally chapter, as a result of the information that obtained in light of these studies is given.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım benden yardımlarını, desteğini, vaktini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Dr. Tahsin ÖNER'e; tez savunma jürisinde bulunan, benimle ilgili bilgi ve görüşlerini paylaşan diğer öğretim üyelerine; tezin yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen Sn. Ruhi İLKBAHAR ve Sn. Coşkun ÖZMEN'e ve son olarak desteklerini her zaman hissettiren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
1.GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3.SİNAPTİK CEBİRLER	6
3.1 Sinaptik Cebirlerin Tanımı ve Elemanlarının Normu	6
3.2 Karekökler, İzdüşümler ve Taşıyıcılar	10
3.3. Mutlak Değer ve Kutupsal Ayrışım	19
3.4 Kuadratik, Kompresyon ve Sasaki Dönüşümleri	27
3.5 İzdüşüm Kafeslerinin Ortomodülerliği	35
3.6.Tersinirve Regüler Elemanlar	41
3.7 Spektral Çözüm	46
4.SİNAPTİK CEBİRLERİN TÜREVLERİ	47
5. SONUÇ	56
KAYNAKLAR DİZİNİ	57
ÖZGEÇMİŞ	58

1. GİRİŞ

Kısmi sıralı cebirsel yapılar üzerinde sinaptik cebir kavramı ilk olarak 2010 yılında David James Foulis tarafından yapılan bir çalışmada verildi.

Sinaptik cebir, Jordan cebiri bir spectral sıralı birimli normlu uzay, bir konveks efekt cebir ve bir ortomodüler kafesin birbirleri ile bağlantısını sağlayan bir cebir yapısıdır.

Bir sinaptik cebir hem özel bir Jordan cebri hem de bir spectral sıralı birimli normlu uzaydır ve bir Hilbert Uzayı üzerinde sınırlı Hermitian operatörlerinin kısmi sıralı Jordan cebiri tarafından doğal koşulları sağlar.

Bir sinaptik cebir bir Von Neumann cebirinin self-adjoint elemanlarının Jordan cebirinin bir genelleştirilmesidir. David James Foulis ve Sylvia Pulmannova'nın 2013 yılında yaptıkları bir çalışmada sinaptik cebirlerdeki simetrileri, yani karesi birim eleman olan elemanları, incelediler ve simetrilerin sonlu dizileri ile yönlendiren cebirin izdüşüm kafesleri üzerinde denklik bağlantısını ele aldılar. İzdüşüm kafeslerinin tam olması durumunda bu denklik bağlantısı bir ortomodüler kafesler üzerinde bir boyut denklik bağlantısının pek çok özelliğe sahip olduğu gösterildi.

Sinaptik cebirlerde türev kavramı tanımlandı ve bazı temel özellikleri kanıtlandı.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli bazı tanım ve özellikler verilmiştir.

Tanım 2.1 (Alfsen,1971) $\mathbb{R}$ üzerinde kısmi sıralı vektör uzayı A nın negatif elemanları $a \in A^-$ the only ones for which $\{ \alpha a \mid \alpha \in \mathbb{R}^+ \}$ bir üst sınıra sahip ise A ya Arşimet denir.

Tanım 2.2 (Gudder,Pulmannova,Bugajski,Beltrametti,1998) Bir efekt cebir 0 ve 1 elemanları, $+$ ikili işlemi ile birlikte aşağıdaki koşulları sağlayan $(P, 0, 1, +, O)$ cebirsel sistemidir;

E1) $a + Ob$ tanımlı ise $b + Oa$ tanımlıdır ve $a + Ob = b + Oa$ dır.

E2) $a + Ob$ ve $(a + Ob) + Oc$ tanımlı ise $b + Oc$ ve $a + O(b + Oc)$ de tanımlıdır ve $a + O(b + Oc) = (a + Ob) + Oc$ dir.

E3) Her $a \in P$ için $a + Oa' = 1$ olacak şekilde bir tek $a' \in P$ elemanı vardır.

E4) $a + O1$ tanımlı ise $a = 0$ dır.

Tanım 2.3 (Gudder,Pulmannova,Bugajski,Beltrametti,1998) Bir efekt cebir P her $p \in P$ ve $\lambda \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ bir $\lambda a \in P$ elemanına sahip ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa konvektir;

(i) $\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $a \in P$ ise $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$.

(ii) $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \leq 1$ ve $a \in P$ ise $\alpha a \perp \beta a$ ve $(\alpha + \beta)a = \alpha a + O\beta a$.

(iii) $a, b \in P$, $a \perp b$ ve $\lambda \in [0,1]$ ise $\alpha a \perp \lambda b$ ve $\lambda(a + Ob) = \lambda a + O\lambda b$

(iv) $a \in P$ ise $1a = a$.

Tanım 2.4 (Foulis,Pulmannova;2008) Bir Generalized Hermitian (GH) cebiri, birimi 1 olan ve R halkısının toplamsal grubunun aşağıdaki koşulları sağlayan bir G alt grubudur:

(i) G , pozitif yönü $G^+ = \{g \in G : 0 \leq g\}$, $1 \in G^+$ ve G deki sıralı birimi 1 olan bir kısmi sıralı abel gruptur.

(ii) $a, b \in G^+$ ise $ab = ba \Rightarrow ab \in G^+$.

(iii) $a, b \in G^+$ ise $aba \in G^+$ ve $aba = 0 \Rightarrow ab = ba = 0$.

(iv) $g \in G$ ise $g^2 \in G^+$.

(v) $2d = 1$ olacak şekilde $d \in G^+$ vardır.

(vi) $g, h \in G$ ise $gh^2g = 0 \Rightarrow gh = hg = 0$.

Lemma 2.5 (Foulis,Pulmannova;2008) $p, q \in P$ ve $a \in A$ ise aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) $J_p(a) \leq a \Rightarrow a \in C(p)$

(ii) $a \in A^+$ için $a \in C(p) \Leftrightarrow J_p(a) \leq a$

(iii) $p \in C(pq) \Leftrightarrow p \in C(q) \Leftrightarrow q \in C(p)$

(iv) $p \in C(q) \Leftrightarrow J_p \circ J_q = J_q \circ J_p$

Teorem 2.6 (Foulis,Pulmannova;2008) Her $a \in A$ ve her $p \in P$ için $p \leq a' \Leftrightarrow a \in C(p)$ ve $J_p(a) = 0$ olacak şekilde tek türlü $': A \rightarrow P$ dönüşümü tanımlanır.

Lemma 2.7 (Foulis,Pulmannova;2008) Her $a, b \in A$, her $p \in P$ ve her $e \in E$ için aşağıdakiler gerçektlenir:

$$(i) J_a(a) = 0 \text{ ve } a \in C(a').$$

$$(ii) p' = u - p.$$

$$(iii) a'' := (a')' = u - a' \text{ ve } C(a'') = C(a').$$

$$(iv) 0 \leq a \leq b \Rightarrow a'' \leq b''.$$

$$(v) e'', e \text{ nin izdüşüm kapsamasıdır.}$$

$$(vi) a', a'' \in CPC(a)$$

$$(vii) J_p(a) = a \Leftrightarrow a'' \leq p.$$

Lemma 2.8 (Foulis,Pulmannova;2008) $p, q \in P$ ise aşağıdaki koşullar geçerlidir:

$$(i) p \perp q \Leftrightarrow p + q \in P.$$

$$(ii) p \leq q \Leftrightarrow q - p \in P$$

$$(iii) p \perp q \Rightarrow p + q = p \vee q$$

$$(iv) p \leq q \Rightarrow q - p = q \wedge (u - p) = q \wedge p'$$

$$(v) p \leq q \Leftrightarrow J_p \circ J_q = J_q \circ J_p = J_p$$

$$(vi) p \leq q \Leftrightarrow J_p \circ J_q = J_q \circ J_p \Leftrightarrow J_p(q) = J_q(p) = p \wedge q$$

$$(vii) p \leq q \text{ ise } C(p) \cap C(q) \subseteq C(p \wedge q) \cap C(p \vee q)$$

Lemma 2.9 (Foulis,Pulmannova;2008) $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ ve $p := \sum_{i=1}^n p_i \leq u$ ile

tanımlansın. O zaman aşağıdaki koşullar gerçektlenir:

$$(i) p = \bigvee_{i=1}^n p_i \in P$$

$$(ii) c \in C(\{p_1, p_2, \dots, p_n\}) \Rightarrow J_p(c) = \sum_{i=1}^n J_{p_i}(c)$$

$$(iii) a_1, a_2, \dots, a_n \in A^+ \Rightarrow (\sum_{i=1}^n a_i)'' = \bigvee_{i=1}^n (a_i)''$$

Teorem 2.10 (Foulis,Pulmannova;2008) $a \in A$ ise aşağıdakiler geçerlidir:

$$(i) (a^+)'' \leq a'' \text{ ve } (a^+)'' p^\mp(a) \text{ daki en küçük izdüşümüdür.}$$

$$(ii) q \in P^\mp(a) \text{ ve } q \leq a'' \text{ ise } q = (a^+)''$$

$$(iii) (a^+)'' = u \text{ ise } 0 \leq a$$

Teorem 2.11 (Foulis,Pulmannova;2008) Herbir $\lambda \in \mathbb{R}$ için, p_λ aşağıdaki

özelliklerle tek türlü tanımlanır:

$$(i) p_\lambda \in P \cap CPC(a) \text{ ve } a \in C(p_\lambda)$$

$$(ii) J_{p_\lambda}(a) - \lambda p_\lambda \leq 0 \leq J_{u-p_\lambda}(a) - \lambda(u - p_\lambda)$$

$$(iii) (a - \lambda u)' \leq p_\lambda$$

3. SİNAPTİK CEBİRLER

3.1 Sinaptik Cebirlerin Tanımı ve Elemanlarının Normu

Bu bölümde sinaptik cebirler kavramı verildi ve elemanlarının normu üzerine bazı özellikler David Foulis James'in 2010 yılındaki çalışmasından yararlanarak incelendi.

Tanım 3.1.1 (Foulis, 2010) $R, \mathbb{R}$ üzerinde 1 birim elemanlı bir lineer birleşmeli cebir ve A, R nin bir (reel) vektör uzayı olsun. $a, b \in A$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman $a C b$ olması için gerek ve yeter koşul a ve b nin değişmeli olmasıdır.

$$C(a) := \{ b \in A : a C b \}, C(B) := \bigcap_{b \in B} C(b) \text{ ve } CC(a) := C(C(a))$$

şeklinde tanımlanır.

A vektör uzayı genişletilmiş R cebirli bir sinaptik cebirdir eğer ve yalnız eğer A aşağıdaki koşulları gerçekler:

SA1. $A, A^+ = \{a \in A : 0 \leq a\}$ pozitif yönlü bir kısmi sıralı bir arşimet reel vektör uzayıdır. $1 \in A^+$, A da bir sıra birimi ve $\| \cdot \|$ karşılık gelen sıra birim normudur.

SA2. $a \in A$ ise $a^2 \in A^+$ dır.

SA3. $a, b \in A^+$ ise $aba \in A^+$ dır.

SA4. $a \in A$ ve $b \in A^+$ ise $aba = 0 \Rightarrow ab = ba = 0$ dır.

SA5. $a \in A^+$ ise $b^2 = a$ olacak şekilde $b \in A^+ \cap CC(a)$ vardır.

SA6. $a \in A$ ise $p = p^2$ olacak şekilde $p \in A$ vardır ve her $b \in A$ için $ab = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $pb = 0$ olmasıdır.

SA7. $1 \leq a \in A$ ise $ab = ba = 1$ olacak şekilde $b \in A$ vardır.

SA8. $a, b \in A$; $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$, $C(b)$ nin ikili değişmeli elemanlarının bir artan dizisi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\| = 0$ ise o zaman $a \in C(b)$ dir.

P kümesi $P := \{p \in A: p = p^2\}$ ile tanımlanır ve P nin elemanlarına izdüşümler denir. A daki birim aralık $E := \{e \in A: 0 \leq e \leq 1\}$ dır ve E kümesinin elemanları efektler olarak adlandırılır. E ve P , A üzerinde $\leq$ kısmi sıralamasının kısıtlamaları ile kısmi sıralı kümelerdir.

Örnek 3.1.2 (Foulis, 2010) $X \neq \emptyset$ ve F, X in boştan farklı alt kümeleri üzerinde bir cisim olsun. A nokta tabanlı operatörlerle birlikte değişmeli ve birleşmeli reel lineer cebir olsun.

(i) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(\lambda) \in F$ ve

(ii) $\{f(x): x \in X\}$ sonlu

olacak şekilde $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bütün fonksiyonlar olsun. O zaman nokta tabanlı kısmi sıralı A genişletilmiş cebiri kendisi olan bir sinaptik cebirdir. A daki izdüşümler F deki kümelerin karakteristik küme fonksiyonlarıdır.

Uyarı 3.1.3 (Foulis, 2010) (SA2) den $a \in A$ ise $a^2 \in A$ dır. Bu nedenle A her $a, b \in A$ için

$$aob := \frac{1}{2}(ab + ba) = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - a^2 - b^2]$$

Jordan çarpımı altında özel bir Jordan cebiridir.

Uyarı 3.1.4 (Foulis, 2010) $a \in A$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in A$ dır. O halde A , a nın reel polinomları altında kapalıdır.

Lemma 3.1.5 (Foulis, 2010) $a, b \in A^+$ ve $a \leq b$ ise o zaman $ab = ba \in A^+$ olur.

Kanıt $a, b \in A^+$ ve $a \leq b$ olsun. Uyarı 1.3.4 den $ab = ba \in A$ dır. (SA5) den $a = x^2$ ve $b = y^2$ olacak şekilde $x \in A^+ \cap CC(a)$ ve $y \in A^+ \cap CC(b)$ vardır. $x \in CC(a)$ ve $a \leq b$ olduğundan $x \leq b$ dir. Benzer şekilde $y \in CC(b)$ ve $x \leq b$ olduğundan $x \leq y$ dir. Uyarı 1.3.4 den $xy = yx \in A$ olur. $xy \in A$ ve (SA5) den $(xy)^2 \in A^+$ dır. $(xy)^2 = x^2y^2 = ab$ olduğundan $ab \in A^+$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.1.6 (Alfsen, 1971) Bir sıralı birimli normlu uzay, aşağıdaki koşullar gerçekleşecek şekilde $1 \in A$ birim elemanlı bir A kısmi sıralı reel vektör uzayıdır.

- (i) A arşimet uzayıdır; yani, $a, b \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $na \leq b$ ise o zaman $-a \in A^+$ dır.
- (ii) $0 < 1$ ve $1, A$ da bir sıra birimdir; yani, her $a \in A$ için $a \leq n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.
- (iii) A üzerinde sıra birim norm

$$\|a\| := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda \text{ ve } -\lambda \leq a \leq \lambda \}$$

dır.

Her $a, b \in A$ için $-\|a\| \leq a \leq \|a\|$ dır. Ayrıca $-b \leq a \leq b$ ise $\|a\| \leq \|b\|$ dir.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, A da bir dizi ve $a \in A$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$, norm topolojisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\| = 0$ olduğu anlamına gelir.

Lemma 3.1.7 (Foulis, 2010) $a, b \in A$ ve $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

- (i) $-\lambda \leq a \leq \lambda \Leftrightarrow a^2 \leq \lambda^2$,
- (ii) $\|a^2\| = \|a^2\|$,
- (iii) $0 \leq a, b$ ise $\|a - b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$,
- (iv) $\|aob\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$,
- (v) aCb ise $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$

dir.

Kanıt

(i) $(\Rightarrow)$ $-\lambda \leq a \leq \lambda$ ise $\lambda + a \geq 0$ ve $\lambda - a \geq 0$ dir. $(\lambda - a) \cdot (\lambda + a) = (\lambda + a) \cdot (\lambda - a)$ olduğundan $(\lambda - a)C(\lambda + a)$ olur. Lemma 3.1.5 den $0 \leq (\lambda - a) \cdot (\lambda + a) = \lambda^2 - a^2$ dir. Buradan $a^2 \leq \lambda^2$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $a^2 \leq \lambda^2$ olsun. O halde $0 \leq \lambda^2 - a^2$ dir. (SA) den $\lambda - a \in A$ olduğundan $(\lambda - a^2)^2 \in A^+$ dir. $0 \leq (\lambda - a)^2 = (\lambda^2 - a^2) + (\lambda - a)^2 = 2(\lambda^2 - \lambda a)$ ve $0 < \lambda$ olduğundan $a \leq \lambda$ dir. $a^2 \leq \lambda^2$ ise $(-a)^2 \leq \lambda^2$ ve böylece $-\lambda \leq a$ olur. O halde $-\lambda \leq a \leq \lambda$ dir.

(ii) $\|a^2\| = \mu > 0$ ve $\|a\|^2 = \lambda > 0$ olsun. $-\lambda \leq a \leq \lambda$ ise $a^2 \leq \lambda^2$ ve μ , norm tanımından $-\mu \leq a^2 \leq \mu$ olacak şekilde en küçük eleman olduğundan $\mu \leq \lambda^2$ dir. $\mu \in a^+$ olduğundan, (SA5) den $b^2 = \mu$ olacak şekilde $b \in A^+ \cap CC(\mu)$ vardır ve $\lambda^2 \leq b^2$ dir. Buradan $\lambda^2 \leq \mu$ olur. O halde $\mu = \lambda^2$ dir.

(iii) $\|a\| \leq \|b\|$ olsun. $b \geq 0$ olmak üzere $a \leq \|a\| \leq \|b\| \leq \|b\| + b$ dir. Buradan $a - b \leq \|b\|$ olur. Norm tanımından $\|a - b\| \leq \|b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ elde edilir.

(iv) $\|a\| = \|b\| = 1$ ise $\|aob\| \leq 1$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $\|a\| = \|b\| = 1$ ise $\|a \pm b\| \leq 2$ dir. (ii) den $\|(a \pm b)^2\| \leq 4$ olur. O halde (iii) den $\|aob\| = \frac{1}{4} \|(a + b)^2 - (a - b)^2\| \leq \frac{1}{4} \max\{\|(a + b)^2\|, \|(a - b)^2\|\} \leq 1$ bulunur.

(v) $a \leq b$ ise $ab = ba = aob$ olduğundan (iv) den $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ elde edilir. $\square$

3.2 Karekökler, İzdüşümler ve Taşıyıcılar

Bu bölümde sinaptik cebirlerin elemanlarının izdüşümleri, karekökleri ve izdüşümlerinin taşıyıcı elemanları hakkında bilgiler verilmiş ve bu elemanlar üzerine bazı özellikler ele alınmıştır.

Uyarı 3.2.1(Foulis, 2010) $a, b \in A$ olsun. O zaman

- (i) (SA4) den $b = 1$ ve $a^2 = 0$ ise $a = 0$ dır.
- (ii) $a, b \geq 0$ ve $a + b = 0$ ise $0 \leq a = -b \leq 0$ den $a = b = 0$ dır.

Teorem 3.2.2 (Foulis, 2010) $0 \leq a \in A$ olsun. $r^2 = a$ olacak şekilde bir tek $0 \leq r \in A$ vardır ve $r \in CC(a)$ dır.

Kanıt $0 \leq a \in A$ olsun. (SA5) den $b^2 = a$ olacak şekilde $0 \leq b \in CC(a)$ vardır. $a \in C(a)$ ve $b \in CC(a)$ olduğundan $b \leq a$ ve buradan $b \in C(a)$ dır. $0 \leq r \in A$ ve

$r^2 = a$ olduğundan $r \in C(a)$ dir. Buradan $b \in C(r)$ elde edilir. O halde $b = r$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(SA5) den, $b \in A^+$ olduğundan $s^2 = b$ olacak şekilde $s \in A^+ \cap CC(b)$ vardır. $b \in C(b)$ ve $r \in C(b)$ olduğundan $s \in C(b)$ ve $s \in C(r)$ dir. Benzer şekilde (SA5) den $r \in A^+$ olduğundan $t^2 = r$ olacak şekilde $t \in A^+ \cap CC(r)$ vardır.

$b, r \in C(r)$ olduğundan $t \in C(r)$, $t \in C(r)$, $s \in C(b)$ ve $s \in C(r)$ dir.

$s(b - r) = sb - sr = bs - rs = (b - r)s$ den $(b - r) \in C(s)$ elde edilir.

O halde $s(b - r) = so(b - r) \in A$ olur. Benzer şekilde $t(b - r)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} (s(b - r))^2 + (t(b - r))^2 &= (s^2 + t^2)(b - r)^2 \\ &= (b + r)(b - r)^2 \\ &= (b^2 - r^2)(b - r) \\ &= (a - a)(b - r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Buradan $(s(b - r))^2 = (t(b - r))^2 = 0$ olur. Uyarı 3.2.1 (i) den $s(b - r) = t(b - r) = 0$ dir. Bu nedenle $b(b - r) = 0$ ve $r(b - r) = 0$ bulunur.

$(b - r)^2 = b(b - r) - r(b - r) = 0 - 0 = 0$ olur. Uyarı 3.2.1.(i) den $(b - r)^2 = 0$ ise $b - r = 0$ olur. O halde $b = r$ dir. □

Yukarıdaki teoremde tanımlanan r ye a nın karekökü denir ve $a^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilir.

$p \in P$ olsun. $p = p^2$ olduğundan (SA2) den $p \geq 0$ dir. $(1 - p)^2 = 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p + p = 1 - p$ dir, bu nedenle $p \leq 1$ dir. O halde $0 \leq p \leq 1$ olduğuna göre $P \subseteq E$ dir.

Teorem 3.2.4 (Foulis, 2010) $e \in E$ ve $p \in P$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

- (i) $e \leq p$,
- (ii) $e = ep = pe$,
- (iii) $e = pep$,
- (iv) $e = ep$,
- (v) $e = pe$.

Kanıt

(i) $\Rightarrow$ (ii): $e \leq p$ ve $d = p - e$ olsun. O zaman $e \geq 0, d \geq 0, 1 - p \geq 0$ ve

$$\begin{aligned} (1 - p)e(1 - p) + (1 - p)d(1 - p) &= (1 - p)(e + d)(1 - p) \\ &= (1 - p)p(1 - p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Uyarı 3.2.1(i) den $(1 - p)e(1 - p) = (1 - p)d(1 - p) = 0$ olur. (SA4) den $(1 - p)e = e(1 - p) = 0$ dir. $e - pe = e - ep = 0$ ise $e = pe = ep$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $ep = pe$ eşitliği sağ taraftan p ile çarpılırsa $ep^2 = pep$ olur. $p \in P, p^2 = p$ olduğundan $ep = pep$ dir ve hipotezden $e = pep$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $e = pep$ ise $ep = pep^2$ ve $p \in P$ olduğundan $ep = pep$ ve hipotezden $ep = e$ dir.

(iv) $\Rightarrow$ (v): $e = ep$ olduğundan $e - ep = 0$ dir. $e(1 - p) = 0$ ise $(1 - p)e(1 - p) = 0$ ve (SA4) den $(1 - p)e = e(1 - p) = 0$ olur. $(1 - p)e = e - ep = 0$ ise $e = pe$ dir. Ayrıca $e = pe = ep$ dir.

(v) $\Rightarrow$ (i): $e = pe = ep$ olduğundan $p - pe = p - ep = p - e$ dir. $p(1 - e) = (1 - e)p = p - e$ ve $p \in E$ olduğundan Lemma 3.1.5 den $p(1 - e) = (1 - e)p \in A^+$ olur. Böylece $p - e \in A^+$ yani $0 \leq p - e$ dir. O halde $e \leq p$ dir. $\square$

Lemma 3.2.5 (Foulis, 2010) $e \in E$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $0 \leq e^2 \leq e, e^2 \in E,$
- (ii) $2e - e^2 \in E,$
- (iii) $e - e^2 \in E$ ve $e - e^2 \leq e, 1 - e$

dir.

Kanıt

(i) (SA2) den $e \in E$ olduğundan $0 \leq e^2$ dir. $e(1 - e) = e - e^2 = (1 - e)e$ dir, buradan $0 \leq e, 1 - e$ ve $e \in E$ olduğuna göre Lemma 3.1.5 den $(1 - e)e = e - e^2 \in A^+$, yani $0 \leq e - e^2$ olur. O halde $0 \leq e^2 \leq e$ dir.

(ii) $0 \leq (1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2$ dir. Böylece $2e - e^2 \leq 1$ elde edilir. (i) den $e^2 \leq e$ ve buradan $0 \leq e - e^2$ olur. Eşitsizliğin her iki tarafına e

eklenirse $0 \leq e \leq 2e - e^2$ bulunur. O halde $0 \leq 2e - e^2 \leq 1$, yani $2e - e^2 \in E$ dir.

(iii) (i) den $0 \leq e - e^2 \leq 1, e - e^2 \in E$ dir. $0 \leq 2e - e^2 \leq 1$ eşitsizliğinde $-e$ eklenirse $-e \leq e - e^2 \leq 1 - e$ elde edilir. $e - e^2 \leq 1 - e$ olduğundan $e - e^2 \leq e$ bulunur. $\square$

E nin konveks bir küme olduğunu açıktır ve Uyarı 3.2.3 den $P \subseteq E$ olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki teorem $p \in E$ izdüşüm olan efektlerin çeşitli yollarla karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.2.6 (Foulis, 2010) $p \in E$ için aşağıdaki koşullar denktir:

- (i) $p \in P$.
- (ii) $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$ ve $e \in E$ ise $\lambda e \leq p \Leftrightarrow e \leq p$.
- (iii) p, E konveks kümesinin bir ekstrem noktasıdır.
- (iv) $e, f, e + f \in E$ ve $e, f \leq p$ ise $e + f \leq p$ dir.
- (v) $e \in E$ ve $e \leq p, 1 - p$ ise $e = 0$ dir.

Kanıt

(i) $\Rightarrow$ (ii): $p \in P$ olsun. $0 \leq e \leq 1$ ve $0 < \lambda < 1$ olduğundan $0 \leq \lambda e \leq e \leq 1$ dir. Buradan $\lambda e \in E$ dir. Teorem 3.2.4 den

$$\lambda e \leq p \Leftrightarrow \lambda ep = \lambda e \Leftrightarrow ep = e \Leftrightarrow e \leq p$$

dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğundan $0 \leq \lambda e \leq e \leq 1$ dir. Buradan $\lambda e \leq p$ olduğundan ve (ii) den $e \leq p$ dir.

$$e \leq p = \lambda e + (1 - \lambda)f \text{ ise } (1 - \lambda)e \leq (1 - \lambda)f$$

dir. Buradan $e \leq f$ bulunur.

$(1 - \lambda)f \leq p = \lambda e + (1 - \lambda)f$ ve böylece $f \leq e$ elde edilir. O halde $e = f$ ve $p = \lambda e + f - \lambda f$ olduğundan $e = f = p$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $p \in E$ olduğundan Lemma 3.2.5 den $p^2 \in E$ ve $2p - p^2 \in E$ dir. (iii) de $e = p^2, \lambda = \frac{1}{2}, f = 2p - p^2$ alınırsa, $p = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(2p - p^2)$ olur ve (iii) den $p = p^2 = 2p - p^2$ bulunur. Buradan $p \in P$ olur.

(i) $\Rightarrow$ (iv): $p \in P, e, f, e + f \in E$ ve $e, f \leq p$ olsun. Teorem 3.2.4 den $e = pep$ ve $f = pfp$ olur.

$0 \leq e + f \leq 1$ olduğundan $0 \leq 1 - (e + f)$ olur ve (SA3) den $0 \leq p(1 - e - f)p$ dir. Buradan $0 \leq p^2 - pep - pfp$ ve dolayısıyla $pep + pfp \leq p^2 = p$ dir. $e + f = pep + pfp \leq p^2 = p$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v): $e \in E$ ve $e \leq p, 1 - p$ ise $e + p \leq 1$ olacağından hipotezden $e + p \leq p$ olur. Bu durumda $e \leq 0$ elde edilir. Aynı zamanda $e \in E$ olduğundan sonuç olarak $e = 0$ bulunur.

(v) $\Rightarrow$ (i): $p \in E$ ise $p - p^2 \leq p, 1 - p$ dir; böylece Lemma 3.2.5 den $p - p^2 = 0$ ve buradan $p = p^2$ elde edilir. O halde $p \in P$ dir. $\square$

Teorem 3.2.7 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun. Her $b \in A$ için $ab = 0 \Leftrightarrow pb = 0$ olacak şekilde bir tek $p \in P$ izdüşümü vardır.

Kanıt (SA6) dan her $b \in A$ için $ab = 0 \Leftrightarrow pb = 0$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır.

Her $b \in A$ için $ab = 0 \Leftrightarrow qb = 0$ olacak biçimde $q \in P$ olsun. $p = q$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$b = 1 - p$ olsun. $a(1 - p) = 0$ ise $q(1 - p) = 0$ olur ve böylece $q = qp$ dir. $P \subseteq E$ olduğundan, q aynı zamanda E nin de bir elemanıdır ve Teorem 3.2.4 den $q \leq p$ elde edilir.

$b = 1 - q$ olsun. $a(1 - q) = 0$ ise o zaman $p(1 - q) = 0$ olur ve buradan $p = pq$ elde edilir. Teorem 3.2.4 den $p \leq q$ eşitliği bulunur. O halde $p = q$ dur. $\square$

Tanım 3.2.8 (Foulis, 2010) $a \in A$ ise o zaman Teorem 3.2.7 deki tek $p \in P$ izdüşümü a nın taşıyıcı izdüşümü olarak adlandırılır ve a^o ile gösterilir.

Lemma 3.2.9 (Foulis, 2010) $a, b \in A$ ve $p \in P$ için aşağıdakiler vardır:

- (i) $pb = 0 \Leftrightarrow pb = 0$.
- (ii) $pa = a \Leftrightarrow ap = a$.
- (iii) $aa^o = a^o a = a$.
- (iv) $ab = 0 \Leftrightarrow ba = a$.

Teorem 3.2.10 (Foulis, 2010) $a, b \in A$ için aşağıdakiler vardır:

- (i) $a = 0 \Leftrightarrow a^o = 0$.
- (ii) $a \in P \Leftrightarrow a = a^o$.
- (iii) $a^o, a = ap$ olacak şekilde en küçük $p \in P$ izdüşümdür.
- (iv) $e \in E$ ise $e^o, e \leq p$ olacak şekilde en küçük $p \in P$ izdüşümdür.
- (v) $ab = 0 \Leftrightarrow ab^o = 0 \Leftrightarrow a^o b^o = 0$.
- (vi) $a^o \in CC(a) \Rightarrow C(a) \subseteq C(a^o)$.

(vii) $n \in \mathbb{N}$ ise $(a^n)^o = a^o$ dir.

(viii) $0 \leq a \leq b$ ise $a^o \leq b^o$ dir.

Kanıt

(i) $a = 0$ ise her $b \in A$ için $ab = 0$ dir. Buradan her $b \in A$ için $ab = 0 \Leftrightarrow a^o b = 0$ dir; o halde $a^o = 0$ dir.

(ii) a^o nin tanımından $a \in P \Leftrightarrow a = a^o$ dir.

(iii) $p \in P$ ve $a = ap$ olsun. Buradan $a - ap = a(1 - p) = 0$ dir ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $a^o(1 - p) = a^o - a^o p = 0$ olur; böylece $a^o \leq p$ elde edilir.

(iv) (iii) ve Teorem 3.2.4 den açıktır.

(v) Lemma 3.2.9 dan, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$ dir. Böylece taşıyıcı izdüşüm tanımından $b^o a = 0 \Leftrightarrow ab^o = 0$ elde edilir. Ohalde $a^o b^o = 0$ bulunur.

(vi) $c \in C(a)$ $d := (1 - a^o)ca^o + a^o c(1 - a^o)$ oldun. Uyarı 3.1.4 den a^o nin reel polinomlarının yine A da olduğu bilindiğinden $d \in A$ olur. O halde Lemma 3.2.9 dan, $c \in C(a)$ ve $aa^o = a$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 ad &= a(1 - a^o)ca^o + aa^o c(1 - a^o) \\
 &= aca^o - aa^o ca^o + aa^o c - aa^o ca^o \\
 &= ac - aca^o \\
 &= ac - caa^o \\
 &= ac - ca
 \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde edilir. $ad = 0$ ise taşıyıcı izdüşüm tanımından $a^o d = 0$ bulunur. Böylece $c \in C(a)$ ve $a^o \in P$ olduğundan

$$\begin{aligned} a^o d &= a^o(1 - a^o)ca^o + a^o(a^o c(1 - a^o)) \\ &= a^o ca^o - a^o a^o ca^o + a^o a^o c - a^o a^o ca^o \\ &= a^o ca^o - a^o ca^o + a^o c - a^o ca^o \\ &= a^o c - a^o ca^o \end{aligned}$$

ve $0 = a^o d = a^o c - a^o ca^o$ elde edilir, yani $a^o c = a^o ca^o$ olur. $a^o d = 0$ ise Lemma 3.2.9 dan $da^o = 0$ dir.

$da^o = ((1 - a^o)ca^o)a^o + ((a^o c(1 - a^o))a^o$ dir ve benzer şekilde $0 = da^o = ca^o - a^o ca^o$ bulunur ve buradan $ca^o = a^o ca^o$ dir.

O halde $a^o c = ca^o$ dir, yani $a^o \in CC(a)$ olur.

(vii) $n \in \mathbb{N}$ olsun. $aa^o = a$ olduğundan $a^n a^o = a^n$ dir. $(a^n)^o a^n (a^n)^o = a^n$ olacak şekilde en küçük izdüşüm olduğundan $(a^n)^o \leq a^o = 0$ dir.

$q := 1 - (a^n)^o$ olsun. $aq = a(1 - (a^n)^o) = a - a(a^n)^o = a - (a^n)^o a = (1 - (a^n)^o)a = qa$ olduğundan $a \in C(q)$ dir. (vi) den $C(a^n) \subseteq C((a^n)^o)$ ve bu nedenle $a \in C(a^n)$ olduğundan, $a \in C((a^n)^o)$ ve $a \in C(1 - (a^n)^o)$,

$$a^n q = a^n(1 - (a^n)^o) = a^n - a^n(a^n)^o = a^n - a^n = 0$$

dır. Buradan $k, a^k q = 0$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olsun. Eğer k çift ise $a^{\frac{k}{2}} q a^{\frac{k}{2}} = 0$ dir ve (SA4) ten $a^{\frac{k}{2}} q = 0$ elde edilir ve bu k nın en küçük olması ile çelişir. Bu nedenle k tek ve $a^{k+1} q = 0$ dir. Buradan $a^{\frac{k+1}{2}} q a^{\frac{k+1}{2}} = 0$ olur ve (SA4) ten $a^{\frac{k+1}{2}} q = 0$ elde edilir. k en küçük olduğundan $k \leq \frac{k+1}{2}$ dir ve böylece $k = 1$ elde edilir. Böylece $aq = 0 = a(1 - (a^n)^o) = a - (a^n)^o$ olur; yani $a = a(a^n)^o$ dir ve (iii) den $a^o \leq (a^n)^o$ elde edilir. O halde $a^o = (a^n)^o$ dir.

(viii) $0 \leq a \leq b$ olsun. $b = 0$ ise sonuç açıktır. $b \neq 0, \lambda := \|b\|^{-1}, e := \lambda a$ ve $f := \lambda b$ olsun. $e, f \in E, e \leq f, e^o = a^o$ ve $f^o = b^o$ olduğu (iv) den açıktır. $e \leq f \leq f^o \in P$ ve buradan $e^o \leq f^o$ dolayısıyla $a^o \leq b^o$ olur. $e^o = a^o$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$e = \lambda a$ ve $ec = 0$ ise $\lambda ac = 0$ olur ve buradan $\|b\|^{-1} ac = 0$ elde edilir. $b \neq 0$ olduğundan $ac = 0$ yani $a^o c = 0$ ve böylece $e^o \leq a^o$ bulunur.

$ac = 0$ ise $\|b\|^{-1} ac = 0$, yani $ec = 0$ olur ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $e^o = 0$ olur. Buradan $a^o \leq e^o$ elde edilir. $\square$

3.3. Mutlak Değer ve Kutupsal Ayrışım

Bu bölümde sinaptik cebirlerin elemanlarının mutlak değeri, signumu ve bunların taşıyıcı izdüşümler ile bağlantıları incelenmiştir.

Tanım 3.3.1 (Foulis, 2010) $a \in A$ ise a nın mutlak değeri $|a| := (a^2)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. Ayrıca $a^+ := \frac{1}{2}(|a| + a)$ ve $a^- := \frac{1}{2}(|a| - a)$ ile tanımlanır.

Uyarı 3.3.2 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun. $0 \leq |a| = |-a|$, $|a|^2 = a^2$ ve $C(a) \subseteq C(a^2) \subseteq C(|a|)$ dır ve buradan $|a|, a^+, a^- \in CC(a)$ olur. Buna ek olarak, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $a^+ a^- = a^- a^+ = 0$ ve $a^- = (-a)^+$ elde edilir.

Yukarıdaki uyarıda verilen önermeler aşağıda kanıtlanmıştır:

- $a \in A$ ise (SA2) den $a^2 \in A^+$ olur. $0 \leq a^2$ ise $r^2 = a^2$ olacak şekilde bir tek $r \in A^+$ vardır.

$$|-a| = ((-a)(-a))^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = |a| \text{ elde edilir.}$$

- $|a|^2 = ((a^2)^{\frac{1}{2}})^2 = a^2 = r^2$.
- $b \in C(a)$ ise $ab = ba$ dır. $ba^2 = baa = aba = aab = a^2b$ olduğundan $b \in C(a^2)$ elde edilir; yani $C(a) \subseteq C(a^2)$ dir.
- $x \in C(a^2)$ ise $xa^2 = a^2x$ dir. $x(a^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2a^2)^{\frac{1}{2}} = (xxa^2)^{\frac{1}{2}} = (xa^2x)^{\frac{1}{2}} = (a^2xx)^{\frac{1}{2}} = (a^2x^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}}x$ olduğundan $x \in C(|a|)$ bulunur. O halde $C(a^2) \subseteq C(|a|)$ elde edilir.
- $b \in C(a^2)$ olsun. $ba^+ = \frac{b(|a|+a)}{2} = \frac{|a|b+ab}{2} = \frac{(|a|+a)b}{2} = a^+b$ olduğundan $a^+ \in CC(a)$ dır.

$$\begin{aligned} a^+ - a^- &= \frac{1}{2}(|a|+a) - \frac{1}{2}(|a|-a) \\ &= \frac{1}{2}((|a|+a) - (|a|-a)) \\ &= \frac{1}{2}(|a|-a - |a|+a). \end{aligned}$$

- $a^+ + a^- = \frac{1}{2}(|a|+a) + \frac{1}{2}(|a|-a) = |a|$.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad a^+ a^- &= \frac{1}{2}(|a|+a) \frac{1}{2}(|a|-a) \\
&= \frac{(|a|+a)-(|a|-a)}{4} = \frac{(|a|^2-a^2)}{4} = \frac{a^2-a^2}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $a^- a^+ = 0$ bulunur. O halde $a^+ a^- = a^- a^+ = 0$ elde edilir.

$$\bullet \quad (-a)^+ = \frac{1}{2}(|-a|+(-a)) = \frac{(|a|-a)}{2} = a^-.$$

Teorem 3.3.3 (Foulis, 2010) $a \in G$, $p := (a^+)^o$ ve $q := (a^-)^o$ olsun. O zaman aşağıdakiler gerçektir:

- (i) $p, q \in CC(a)$.
- (ii) $pC|a|$ ve $qC|a|$.
- (iii) $pa = ap = a^+$.
- (iv) $qa = aq = -a^-$.
- (v) $0 \leq p|a| = |a|p = a^+$.
- (vi) $0 \leq q|a| = |a|q = a^-$.
- (vii) $pq = qp = 0$.
- (viii) $p + q = a^o$.

Kanıt

(i) Uyarı 3.2.2 den $a^+ \in CC(a)$ dir. $C(a) \subseteq C(a^+) \subseteq C(a^+)^o$ olduğundan $(a^+)^o = p \in C(a)$ elde edilir. Benzer şekilde $(a^-)^o \in C(a)$ bulunur.

(ii) $|a| \in CC(a)$ ve $p, q \in C(a)$ olduğundan $pC|a|$ ve $qC|a|$ elde edilir.

(iii) (i) den $pa = ap$ ve Lemma 3.2.9 (iii) den $a^+ = (a^+)^o a^+ = pa^+$ dır. $a^+a^- = 0$ olduğundan $(a^+)^o a^- = pa^- = 0$ dır. Sonuç olarak $pa = (a^+ - a^-) = pa^+ - pa^- = a^+ - 0 = a^+$, yani $pa = ap = a^+$ elde edilir.

(iv) (i) den $qa = aq$ dır, o halde $qa = -a^-$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a^- = (a^-)^o a^- = qa^-$ dır. Uyarı 3.3.2 den $a^-a^+ = 0$ ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $(a^-)^o a^+ = qa^+ = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$$qa = q(a^+ - a^-) = qa^+ - qa^- = 0 - a^- = -a^-$$

dir.

(v) $p \in A^+$, $|a| \in A^+$ ve (i) den $p \in C(a)$, yani pCa dır. O halde Lemma 3.1.5 den $0 \leq p|a|$ dır.

$$p|a| = p(a^+ + a^-) = pa^+ + pa^- = ppa = p^2a = pa = a^+,$$

yani $p|a| = a^+$ dır. O halde $pC|a|$ olduğunu göstermek gereklidir. $C(a) \subseteq C(|a|)$ ve $p \in C(a)$ olduğundan $p \in C(|a|)$ dır.

(vi) (v) ile benzer şekilde özellik gösterir.

(vii) Uyarı 3.3.2 den $a^+a^- = 0$ dır ve böylece Teorem 3.2.10.(v) den $(a^+)^o(a^-)^o = 0$, yani $pq = 0$ dır. (i) den $p, q \in CC(a)$ olduğuna göre pCq ve dolayısıyla $pq = qp$ elde edilir.

(viii) $p, q \in P$ için $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + p^2 = p + q$ olduğuna göre $p + q \in P$ dır. $a(p + q) = ap + aq = a^+ - a^- = a$ ve $ap = a$ olacak şekildeki en küçük izdüşüm a^o olduğundan $a^o \leq p + q$ dur.

$r := 1 - a^0$ olsun. $r^2 = (1 - a^0)^2 = (1 - a^0).(1 - a^0) = 1 - a^0 - a^0 + a^0 = 1 - a^0$ olduğundan $r \in P$ dir.

$$ar = (a^+ - a^-)r = a^+r - a^-r$$

ve

$$ar = a(1 - a^0) = a - aa^0 = a - a = 0$$

olduğundan $a^+r - a^-r = 0$, yani $a^+r = a^-r$ bulunur.

$a^+r = pa^+r = pa^-r = pqa^-r = 0$ olduğuna göre taşıyıcı izdüşüm tanımından $(a^+)^0r = pr = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $qr = 0$ bulunur. Böylece $(p + q)r = pr + qr = 0$ olur.

$(p + q)a^0 = (p + q)(1 - r) = p - pr + q - qr = p + q - (pr + qr) = p + q$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.4 den $p + q \leq a^0$ dir.

O halde $p + q = a^0$ dir. □

Sonuç Teorem 3.3.4. (Foulis, 2010) $0 \leq a, b \in A$ ve $a C b$ ise o zaman $a^2 \leq b^2$ ancak ve ancak $a \leq b$ dir.

Kanıt $(\Rightarrow)$ $0 \leq a, b \in A, aCb$ ve $a^2 \leq b^2$ olsun. $a^2 \leq b^2$ ise $0 \leq b^2 - a^2$ ve böylece $0 \leq (b - a)^2$ olur. $a^2 \leq b^2$ olduğuna göre $0 \leq (b - a)^2 + b^2 - a^2 = 2(b^2 - ab)$, yani $0 \leq (b - a)b$ dir.

Teorem 3.2.10 dan $a^o = (a^2)^o \leq (b^2)^o = b^o$ elde edilir. $a^o \leq b^o$ ise $aa^o \leq ab^o$, dolayısıyla $a \leq ab^o$ dir. Benzer şekilde $ab^o \leq a$, yani $a = ab^o$ elde edilir.

$c := (b - a)^+$ ve $d := (b - a)^-$ olsun. $b(b - a) = bb - ba = bb - ab = (b - a)b$ olduğundan $b \in C(b - a)$ olur. Böylece $b \in C(c)$ ve $b \in C(d)$ dir. c ile d nin tanımından $b - a = c - d$ dir. Buradan $0 \leq (b - a)b = (c - d)b = cb - db$ elde edilir.

$d(cb - db) = dcb - ddb = cdb - dbd = cbd - dbd = (cb - db)d$ ve böylece $dC(cb - db)$ bulunur. $0 \leq d$ ve $0 \leq cb - db$ dir. Buradan $0 \leq d(cb - db) = dcb - d^2b = -d^2b$ ise $0 \leq -d^2b$ elde edilir.

$0 \leq d^2, 0 \leq b$ ve bCd^2 olduğundan $bd^2 \geq 0$ olur. O halde $d^2b = 0$ ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $(d^2)^ob = d^ob = 0$ dır, buradan $db = 0$, dolayısıyla $db^o = 0$ elde edilir.

$c \in C(b) \subseteq C(b^o), 0 \leq c$ ve $0 \leq b^o$ ise Lemma 3.1.5 ten $0 \leq cb^o$ dir.

$0 \leq cb^o = (c - d)b^o = (b - a)b^o = bb^o - ab^o = b - a$ ise $a \leq b$ dir.

$a(b - a) = ab - aa = ba - aa = (b - a)a$ ise $aC(b - a)$ dır.

Lemma 3.1.5 den $0 \leq a(b - a) = ab - a^2$ elde edilir; böylece $a^2 \leq ab$ olur.

Yine Lemma 3.1.5 den $0 \leq (b - a)b = b^2 - ab$, buradan $ab \leq b^2$ elde edilir. O halde $a^2 \leq b^2$ dir. □

Tanım 3.3.5 (Foulis, 2010) $a \in A$ nın signumu $sgn(a) := (a^+)^o - (a^-)^o$ ile tanımlanır.

Teorem 3.3.6 (Foulis, 2010) $a \in A$ ise aşağıdaki koşullar gerçekleşir:

(i) $sgna(a) \in CC(a)$.

$$(ii) \quad sgn(a)^2 = a^2.$$

$$(iii) \quad sgn(a)a = asgn(a) = |a|.$$

$$(iv) \quad sgn(a)|a| = |a|sgn(a)a.$$

Kanıt

(i) Teorem 3.3.3 den $p = (a^+)^o \in CC(a)$ ve $q = (a^-)^o \in CC(a)$ dir.

$x \in C(a)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x((a^+)^o - (a^-)^o) &= x(a^+)^o - x(a^-)^o \\ &= xp - xq \\ &= px - qx \\ &= (p - q)x \\ &= ((a^+)^o - (a^-)^o)x \end{aligned}$$

olduğuna göre $((a^+)^o - (a^-)^o) = sgn(a) \in CC(a)$ elde edilir.

(ii) Teorem 3.3.3 den

$$sgn(a)^2 = ((a^+)^o - (a^-)^o)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p + q = a^o$$

dir.

(iii) Teorem 3.3.3 den

$$sgn(a)a = (p - q)a = pa - qa = ap - aq = a(p - q) = asgn(a)a$$

ve böylece

$$\operatorname{sgn}(a)a = a\operatorname{sgn}(a) = ap - aq = a^+ - (-a^-) = a^+ + a^- = |a|$$

dır.

(iv) Teorem 3.3.3 den

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(a)|a| &= ((a^+)^o - (a^-)^o)((a^+) + (a^-)) \\ &= (a^+)^o(a^+) + (a^+)^o(a^-) - (a^-)^o(a^+) - (a^-)^o(a^-) \\ &= (a^+)^o(a^+) + p(a^-) - q(a^+) - (a^-)^o(a^-) \\ &= a^+ - a^- \\ &= a \end{aligned}$$

dır ve $p, q, (a^+)$ ve (a^-) ile değişmeli olduğundan $\operatorname{sgn}(a)|a| = |a|\operatorname{sgn}(a)$ dır.

O halde $\operatorname{sgn}(a)|a| = |a|\operatorname{sgn}(a) = a$ dir. $\square$

Teorem 3.3.6 daki $a = \operatorname{sgn}(a)|a| = |a|\operatorname{sgn}(a)$ formülü a nın kutupsal ayrışımı olarak adlandırılır.

Sonuç 3.3.7 (Foulis, 2010) $a, b \in A$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar gerçekleşir:

- (i) $ab = 0 \Leftrightarrow |a||b| = 0$.
- (ii) $|a|^o = a^o$.

Kanıt

(i) $(\Rightarrow) r := (b^+)^o, s := (b^-)^o, p := (a^+)^o$ ve $q := (a^-)^o$ alınır; Teorem

3.3.3 ve Uyarı 3.3.2 den

$$\begin{aligned}
|a| |b| &= (a^+ + a^-)(b^+ + b^-) \\
&= (pa - aq)(rb - sb) \\
&= (p - q)a(r - s)b \\
&= (p - q)ab(r - s) \\
&= \operatorname{sgn}(a) ab \operatorname{sgn}(b) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(\Leftrightarrow) |a| |b| = 0$ ise $ab = \operatorname{sgn}(a) |a| |b| \operatorname{sgn}(b)$ olduğundan $ab = 0$ bulunur.

(ii) $(\Rightarrow) |a| b = 0$ ise $ab = \operatorname{sgn}(a) |a| b = 0$ olur.

$(\Leftrightarrow) ab = 0$ ise $|a| b = \operatorname{sgn}(a) ab = 0$ olur. □

3.4 Kuadratik, Kompresyon ve Sasaki Dönüşümleri

Bu bölümde sinaptik cebirler üzerinde kuadratik, kompresyon ve sasaki dönüşümleri tanımlanmış ve özellikleri irdelenmiştir.

Tanım 3.4.1 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun. Her $b \in A$ için $J_a(b) := aba$ olarak tanımlanan $J_a: A \rightarrow A$ dönüşümü a tarafından belirlenen kuadratik dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer $p \in P$ ise J_p, A üzerinde p ile odaklı kompresyon olarak adlandırılır.

Teorem 3.4.2 (Foulis, 2010) $a \in A$ ise $J_a: A \rightarrow A$ kuadratik dönüşümü hem lineer hem de sıra koruyan bir dönüşümdür.

Kanıt $x, y \in A$ ve $\lambda \in R$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} J_a(x + \lambda y) &= a(x + \lambda y)a = axa + a\lambda ya \\ &= axa + \lambda(aya) = J_a(x) + \lambda J_a(y) \end{aligned}$$

olduğundan J_a bir lineer dönüşümdür.

$0 \leq h \in A$ olsun. (SA3) den $0 \leq |a|h|a|$ dır. $k := (|a|h|a|)^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanırsa $k^2 = |a|h|a|$ olur. Lemma 3.2.9 ve Teorem 3.2.10 dan $k^2|a|^o = |a|h|a||a|^o = |a|h|a| = k^2$ dir, böylece $(k^2)^o = k^o \leq |a|^o = a^o$ elde edilir. O halde $ka^o = k$ dır.

$w := \text{sgn}(a)$ ile tanımlansın. Teorem 3.3.6 dan $w^2 = a^o$ ve $a = w|a|$ dir.

$0 \leq (wkw)^2 = wkw^2kw = wka^okw = wk^2w = w|a|h|a|w = aha = J_a(h)$ $b, c \in A, b \leq c$ olsun ve $h := c - b$ ile tanımlansın. Buradan $0 \leq J_a(h) = a(c - b)a = aca - abc = J_a(c) - J_a(b)$, yani $J_a(b) \leq J_a(c)$ elde edilir. O halde J_a sıra koruyan bir dönüşümdür. $\square$

Uyarı 3.4.3 (Foulis, 2010) (SA3), $a, b \in A^+ \Rightarrow aba \in A^+$ olmasını gerektirir fakat Teorem 3.4.2, daha güçlü bir sonuç olarak, her $a \in A$ için $b \in A^+ \Rightarrow aba \in A^+$ olduğunu gösterir.

Lemma 3.4.4 (Foulis, 2010) $a, b \in A$ ve $p \in P$ için aşağıdaki koşullar gerçekleşir:

- (i) $\|J_a(b)\| \leq \|a^2\| \|b\| = \|a^2\| \|b\|$.
- (ii) $J_a: A \rightarrow A$ norm süreklidir.

(iii) $p \neq 0$ ise $\|p\| = 1$ dir.

(iv) $\|J_p(a)\| \leq \|a\|$.

Kanıt

(i) $-\|b\| \leq b\|b\|$ eşitsizliğinden $-\|b\|a^2 = a(-\|b\|)a \leq aba \leq a\|b\|a = \|b\|a^2$ ve böylece $\|aba\| \leq \|(\|b\|a^2)\| = \|a^2\|\|b\| = \|a\|^2\|b\|$ elde edilir. Yani $\|J_a(b)\| \leq \|a^2\|\|b\|$ dir.

(ii) (i) den açıktır.

(iii) $p \in P$ ve $p \neq 0$ olsun. $J_p = ppp = p$ dir. $\|p\| \leq \|p^2\|\|p\| = \|p^2\|\|p\| = \|p\|\|p\| = \|p^2\|$ dir. Buradan $\|p\| = 1$ bulunur.

(iv) $p = 0$ olduğu durum açıktır. $p \neq 0$ olsun. (i) den $\|J_p(a)\| \leq \|p^2\|\|a\| = \|p\|^2\|a\|$ dir. (iii) den $\|J_p(a)\| \leq 1^2 \cdot \|a\|$, yani $\|J_p(a)\| \leq \|a\|$ elde edilir. $\square$

$p \in P$ ve $e \in E$ olsun. Teorem 3.4.2 den $e \leq p$, J_p lineer ve sıra koruyan bir dönüşümdür. Ayrıca $J_p(1) = p1p = p^2 = p \in P \subseteq E$ olduğu açıktır. Teorem 3.2.4 den $e \leq p$ ise $J_p(e) = pep = e$ dir. Eğer $J_p(e) = 0$ ise $pep = 0$ dir. Böylece (SA4) den $pe = ep = 0$ ve $e \leq 1 - p$ dir. A üzerindeki kompresyon karakterizasyonu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.4.5 (Foulis, 2010) $J: A \rightarrow A, J_{(1)} \leq 1$ olacak şekilde bir lineer ve sıra koruyan dönüşüm ve her $e \in E$ için $e \leq J_{(1)} \Rightarrow J_{(e)} = e$ olsun. O zaman $p := J_1 \in P$ ve $J = J_p$ dir.

Lemma 3.4.6 (Foulis, 2010) $a \in A$ ve $p \in P$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$(i) \quad a \in C_p \Leftrightarrow a = J_a(a) + J_{1-p}(a).$$

$$(ii) \quad C_p, A \text{ da norm kapalıdır.}$$

Kanıt

(i) $(\Rightarrow) a \in C_p$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} J_p(a) + J_{1-p}(a) &= pap + (1-p)a(1-p) \\ &= pap + a - ap - pa + pap \\ &= pa + a - ap - pa + pa \\ &= a \end{aligned}$$

dir.

$$(\Leftarrow) a = J_p(a) + J_{1-p}(a) \text{ olsun. } a = pap + a - ap - pa + pap \text{ olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafı soldan ve sağdan p ile çarpılırsa, $pap = pa$ ve $pap = pa$ elde edilir. O halde $pap = ap = pa$, yani $a \in C_p$ dir.

(ii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, C_p$ de bir dizi ve $C_n \rightarrow C$ olsun. O zaman $c \in C_p$ dir. O halde

C_p A da norm kapalıdır. □

Teorem 3.4.7 (Foulis, 2010) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, A da bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a \in A$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

$$(i) \quad \text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a_n \leq b \in A \text{ ise } a \leq b \text{ dir.}$$

- (ii) $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ ise o zaman $a, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nin A daki en küçük üst sınırıdır.
- (iii) A nın pozitif yönü A^+ , A da norm kapalıdır.

Kanıt

(i) Hipotezden her $m \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$N_m \leq n \Rightarrow a_n - a \leq \|a_n - a\| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow a_n \leq a + \frac{1}{m}$$

olacak şekilde $N_m \in \mathbb{N}$ vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b \in A$ dır, buradan $a_{N_m} \leq b$ olur ve böylece $a - b \leq a - a_{N_m}$ bulunur.

$p: ((a - b)^+)^o \in CC(a - b)$ olarak tanımlanırsa, Teorem 3.3.3 den $(a - b)^+ = p(a - b) = p(a - b)p = J_p(a - b)$ elde edilir. Buradan $\varepsilon = \frac{1}{m}$ seçilirse J_p nin sıra koruyan bir dönüşüm olması, norm tanımı ve Lemma 3.4.4 den

$$(a - b)^+ = J_p(a - b) \leq J_p(a - a_{N_m}) \leq \|J_p(a - a_{N_m})\| \leq \|a - a_{N_m}\| \leq \frac{1}{m}$$

elde edilir, yani $m(a - b)^+ \leq 1$ dir. A Arşimet olduğundan $(a - b)^+ \leq 0$ olur. Fakat $0 \leq (a - b)^+$ dır. Bu nedenle $(a - b)^+ = 0$ dır. O halde Uyarı 3.3.2 den $(a - b) = (a - b)^+ - (a - b)^- = -(a - b)^- \leq 0$, yani $a \leq b$ elde edilir.

(ii) (i) den her $m \in \mathbb{N}$ için $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N_m} \leq a + \frac{1}{m}$ olduğu bilinmektedir. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a + \frac{1}{m}$ dir ve A Arşimet olduğundan

$a_n - a \leq 0$, yani $a_n \leq a$ dır. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a \leq b$ ise (i) den $a \leq b$ dir; böylece $a, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in en küçük üst sınırıdır.

(iii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, A^+$ da bir dizi ve $c_n \rightarrow c$ olsun. O zaman $-c_n \rightarrow -c$ olur ve her $n \in \mathbb{N}$ için $-c_n \leq 0$ ise $-c \leq 0$ bulunur. O halde (i) den $c \in A^+$, yani A^+, A da norm kapalıdır. $\square$

Tanım 3.4.8 (Foulis, 2010) Her $a \in A$ için $\phi_a: A \rightarrow P$ sasaki dönüşümü, her $b \in B$ için $\phi_a(b) = (J_a(b))^o = (aba)^o$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.9 (Foulis, 2010) $a, b, c \in A$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $\phi_a(b) \leq \phi_a(1) = a^o$.
- (ii) $0 \leq b \leq c \Rightarrow \phi_a(b) \leq \phi_a(c)$.
- (iii) $0 \leq b$ ise $\phi_a(b)c = 0 \Rightarrow \phi_a(c)b = 0$.
- (iv) $0 \leq b, c$ ise $\phi_a(b)c = 0 \Leftrightarrow \phi_a(c)b = 0$.
- (v) $0 \leq b$ ise $\phi_a(b) = \phi_a(b^o)$.

Kanıt

(i) $abaa^o = aba$ olduğundan Teorem 3.2.10 dan $\phi_a(b) = (aba)^o \leq a^o = \phi_a(1)$ elde edilir.

(ii) $b \leq c$ olsun. J_a bir sıra koruyan dönüşüm olduğundan $0 \leq J_a(b) \leq J_a(c)$ dir ve Teorem 3.2.10 dan $(J_a(b))^o \leq (J_a(c))^o$ olur. O halde $\phi_a(b) \leq \phi_a(c)$ dir.

(iii) $0 \leq b$ ve $\phi_a(b)c = 0$ olsun. $(aba)^oc = 0$ ise taşıyıcı izdüşüm tanımından $abac = 0$ dır. $(aca)b(aca) = ac(abac)a = 0$ olduğuna göre

(SA4) den $acab = baca = 0$ olur. Taşıyıcı izdüşüm tanımından $(aca)^o = \emptyset_a(c)b = 0$ elde edilir.

(iv) (iii) den açıktır.

(v) $0 \leq c$ olsun. Taşıyıcı izdüşüm tanımından $\emptyset_a(c)b = 0 \Leftrightarrow \emptyset_a(c)b^o = 0$ olur ve $0 \leq b^o$ olduğundan (iv) den $\emptyset_a(c)b^o = 0 \Leftrightarrow \emptyset_a(b^o)c = 0$ bulunur. O halde $\emptyset_a(b)c = 0 \Leftrightarrow \emptyset_a(b^o)c = 0$ elde edilir. $c = 1 - \emptyset_a(b^o)$ alınırsa $\emptyset_a(b^o)c = \emptyset_a(b^o)(1 - \emptyset_a(b^o)) = 0$ olur ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $\emptyset_a(b)(1 - \emptyset_a(b^o)) = \emptyset_a(b) - \emptyset_a(b)\emptyset_a(b^o) = 0$ elde edilir. $\emptyset_a(b) = (aba)^o \in E$ ve $\emptyset_a(b)^o = (ab^o a)^o \in P$ ve $\emptyset_b = \emptyset_a(b)\emptyset_a(b^o)$ olduğundan Teorem 3.2.4 den $\emptyset_a(b) \leq \emptyset_a(b^o)$ bulunur. Benzer şekilde $\emptyset_a(b^o) \leq \emptyset_a(b)$ elde edilir. O halde $\emptyset_a(b) = \emptyset_a(b^o)$ dir. $\square$

Teorem 3.4.10 (Foulis, 2010) $0 \neq v \in P$ olsun ve $vAv := J_v(A) = \{vav : a \in A\} = \{b \in A : b = bv = vb\}$ olarak tanımlansın. vAv birim elemanı v ve genişletilmiş cebri vRv olan bir sinaptik cebirdir. Arica her $a, b \in vAv$ için $aob, a^o, \|a\|, a^+, a^-, \text{sgn}(a) \in vAv; J_A \subseteq vAv; \emptyset_a(A) \subseteq vAv$ ve $0 \leq a \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} \in vAv$ dir.

Kanıt Lemma 3.4.4 den $J_v : A \rightarrow A$ norm sürekli ve $vAv J_v$ nin sabit noktalarının kümesi olduğundan vAv, A nın norm kapalı lineer alt uzayıdır.

$b \in vAv$ olsun. O zaman $b \leq n = n.1$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır ve böylece $b = J_v(b) \leq nJ_v(1) = nv$ bulunur. Bu nedenle $v vAv$ deki sıralı birimdir.

Benzer şekilde $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ ise $-\lambda \leq b \leq \lambda$ ve $b > 0$ olduğundan $-\lambda v \leq b \leq \lambda v$ olur; böylece $b \neq 0$ olduğundan $-\lambda \leq b \leq \lambda$ elde edilir. $0 \leq v \leq 1$ nedeniyle $\|b\| = \inf\{0 < \lambda \in \mathbb{R} : -\lambda v \leq b \leq \lambda v\}$ bulunur; yani vAv , (SA1) koşulunu sağlar.

$x \in vAv$ olsun. O halde $x = vav$ olacak şekilde öyle bir $a \in A$ vardır.

$$x^2 = (vav)^2 = (vav)(vav) = vav^2av = va^2v$$

dir. $a \in A$ olduğundan, SA2 den, $a^2 \in A^+$ ve $v \in A, a^2 \in A^3$ olduğundan (SA3) den $va^2v \in vA^+v$; böylece $x^2 \in vA^+v$ bulunur. O halde vAv , (SA2) koşulunu sağlar.

$x, y \in (vAv)^+ = vA^+v$ ve $x = vav$, $y = vbv$ olsun. $xyx = (vav)(vbv)(vav) = vav^2bv^2av = vavbvav \in vA^+v = (vav)^+$ olduğundan vAv , (SA3) koşulunu sağlar.

$x \in (vAv)$, $y \in (vAv)^+$, $x = vav$, $y = vbv$ ve $xyx = 0$ olsun. (SA4) den $vavbv = vbvav = 0$ olur. $v = v^2$ olduğundan $vavvbv = vbvvav = 0$ dir, yani $xy = yx = 0$ olur. O zaman vAv , (SA4) koşulunu sağlar.

$0 \leq b \in vAv$ olsun. $b = vb = bv$ ve $b^{1/2} \in CC(b)$ olduğundan $0 \leq vb^{1/2}v = vb^{1/2} = b^{1/2}v$, $(vb^{1/2})^2 = b$ olur, böylece Teorem 3.2.2 den $b^{1/2} = vb^{1/2}$ elde edilir. O halde $b^{1/2} \in vAv$ yani (SA5) sağlanır.

$b \in vAv$ olsun. O halde $b = bv = vb$ dir ve buradan $b^o \in CC(b)$, $v \in C(b)$ olduğundan $b^ov = vb^o$, yani $b^o \leq v$ elde edilir. Teorem 3.2.4 den $b^o = b^ov = vb^o$ olduğundan $b^o \in vAv$ elde edilir. Böylece (SA6) sağlanmış olur.

$v \leq b \in vAv$ olsun. O zaman $b = vb + bv$ dir. $1 = v + (1 - v) \leq b + (1 - v)$ olduğundan (SA7) den $1 = c(b + 1 - v) = (b + 1 - v)c$ olacak şekilde $c \in A$ vardır.

$1 = cb + c - cv = bc + c - vc$ eşitliğinde J_v dönüşümü altındaki görüntüleri alınırsa $v = vcbv + vcv - vcv = vbcv + vcv - vcv$ elde edilir. Buradan $v = vcvb = bvcv$ ve $vcv \in vAv$ olduğundan (SA7) gerçekleşir.

$a, b \in vAv$ ve $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, C(b)$ nin değişmeli ikili elemanlarının artan bir dizisi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\| = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|vxv - (vx_nv)\| = 0$ ve buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v(x - x_n)v\| = 0$, yani $a \in C(b)$ elde edilir. vAv için (SA8) sağlanmış olur.

O halde vav bir sinaptik cebirdir. □

3.5 İzdüşüm Kafeslerinin Ortomodülerliği

Bu bölümde sinaptik cebirler üzerinde izdüşüm kafesleri tanıtılmış ve bu kafeslerin ortomodülerliği incelenmiştir.

Tanım 3.5.1 (Foulis, 2010) $\perp : P \rightarrow P$ dönüşümü her $p \in P$ için $p^\perp := 1 - p$ olarak tanımlanır. $p, q \in P$ için p, q ya diktir ($p \perp q$) eğer ve yalnız eğer $p \leq q^\perp$ dir.

$p \perp q$ olsun. O zaman $p \leq q^\perp = 1 - q$ ve böylece $q \leq 1 - p$ dir. O halde $q \perp p$ dir.

$p \perp p$ olsun. O zaman $p \leq 1 - p$ dir. Teorem 3.2.4 den $p = p(1 - p)p = p^2 - p^2 = 0$ elde edilir.

Tanım 3.5.2 (Foulis, 2010) X bir kısmi sıralı küme olsun. X den X e $x \rightarrow x^\perp$ ile tanımlı dönüşümü involution olarak adlandırılır eğer ve yalnız eğer bu dönüşüm sıra koruyandır ve her $x \in X$ için $(x^\perp)^\perp = x$ dir. Bir ortomodüler poset X , en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 ve involution $\perp : X \rightarrow X$ ile birlikte her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir kümedir:

- (i) x ve $x^\perp$ nün en büyük alt sınırı $x \wedge x^\perp$, X de mevcuttur ve $x \wedge x^\perp = 0$ dir.
- (ii) $x \leq y^\perp$ ise en küçük üst sınır $x \vee y$, X de mevcuttur.
- (iii) $x \leq y$ ise $y = x \vee (x^\perp \wedge y)$ dir.

Her $x, y \in X$, X de bir en büyük alt sınır $x \wedge y$ ve en küçük üst sınır $x \vee y$ ye sahipse bir ortomodüler poset X , bir ortomodüler kafes olur.

X bir poset ve $a, b, x, y \in X$ olsun. $a = x \wedge y$ yazılıyorsa, x ve y nin en büyük alt sınırı X de mevcuttur ve b ye eşittir. X deki $x \rightarrow x^\perp$ involutionu De Morgan kuralına neden olur ve buradan infimayı supremaya ve supremayı da infimaya dönüştürür.

Örneğin; $a = x \wedge y$ ise $a^\perp = x^\perp \vee y^\perp$ dir. X en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahipse $0^\perp = 1$ ve $1^\perp = 0$ dir. $p \rightarrow \perp = 1 - p$ ($e \rightarrow 1 - e$) dönüşümünün, P kısmi sıralı kümesi (E kısmi sıralı kümesi) üzerinde bir involution olduğu açıktır ve $a \rightarrow -a$ dönüşümü de A da bir involution dur.

X ortocomplementation gibi $x \rightarrow x^\perp$ ile birlikte bir ortomodüler poset olsun. Tanım 3.5.2 den ve De Morgan kuralından $x \wedge x^\perp = 0$ ve $x \vee x^\perp = 1$ dir ve $x^\perp$, x in X de bir ortocomplementidir.

$x, y \in X$ ve $x \leq y$ olsun. $x \leq (y^\perp)^\perp$ olduğundan, Tanım 3.5.2 den $x \vee y^\perp$, X de mevcuttur ve De Morgan kuralından $x^\perp \wedge y = (x \vee y^\perp)^\perp$ dir ve X de mevcuttur. $x \leq x \vee x^\perp = (x^\perp \wedge y)^\perp$ olduğundan ve Tanım 3.5.2 den $x \vee (x^\perp \wedge y)$ supremumu X de mevcuttur. Teorem 3.5.2 deki $x \leq y \Rightarrow y = y \vee (x^\perp \wedge y)$ koşulu ortomodülerlik kuralı olarak adlandırılır.

Lemma 3.5.3 (Foulis, 2010) Her $p, q \in P$ için aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $p \leq q$ ise $pq = p \wedge q$ dir.
- (ii) $p \perp q$ ise $pq = 0$ dir.
- (iii) $p \perp q$ ise $p \vee q = p + q$ dir.
- (iv) $p \leq q$ ise $q - p = p^\perp \wedge q \in P$ dir.
- (v) P , bir monoton ortocomplementation gibi $p \rightarrow p^\perp := 1 - p$ bir ortomodüler poşettir.

Kanıt

(i) $pq = qp$ olsun. $(pq)^2 = (pq)(pq) = p^2q^2 = pq$ olduğundan $pq \in P$ ve $p(pq) = pq, q(pq) = pq$ dur. Bu nedenle Teorem 3.2.4 den $pq \leq p, q$ olur.

$r \in P$ ve $r \leq p, q$ olsun. Teorem 3.2.4 den $rp = pr = r$ ve $rq = qr = r$ dir. $rp = pr = r$ eşitliği q ile sağ taraftan çarpılırsa $rpq = prq = rq = r$ elde edilir. O halde Teorem 3.2.4 den $r \leq pq$, yani $pq = p \wedge q$ dir.

(ii) $p \perp q \Leftrightarrow p \leq 1 - q \Leftrightarrow p = p(1 - q) = p - pq \Leftrightarrow pq = 0$ dir.

(iii) $p \perp q$ olsun. (ii) den $pq = 0$ ve Lemma 3.2.9 dan $qp = 0$ dir.

$(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$ olduğundan $p + q \in P$ dir. $0 \leq p, q$ ise $p, q \leq p + q$ dur.

$p, q \leq r$, $r \in P$ olsun. O zaman Teorem 3.2.4 den $p = pr$ ve $q = qr$ dir. Buradan $p + q = (p + q)r$, yani $p + q \leq r$ dir. O halde $p + q = p \vee q$ dir.

(iv) $p \leq q = (q^\perp)^\perp$ olsun. O zaman $p \perp q^\perp$ dir. (iii) den $p \vee q^\perp = p + q^\perp \in P$ ve De Morgan kuralından $(p + q^\perp)^\perp = p^\perp \wedge q \in P$ elde edilir. $(p + q^\perp)^\perp = 1 - (p + 1 + q) = q - p \in P$ olduğundan $q - p = p^\perp \wedge q \in P$ bulunur.

(v) P posetinde en küçük elemanın 0 ve en büyük elemanın 1 olduğu açıktır. $p \in P$ ve $p^\perp = 1 - p$ olsun. $p \wedge p^\perp = pp^\perp = p(1 - p) = p - p^2 = p - p = 0$, yani $p \perp p^\perp$ dolayısıyla $pp^\perp = 0$ dir.

$p, r \in P$ ve $p \leq r^\perp = 1 - r$ olsun. O zaman Teorem 3.2.4 den $p = p(1 - r) = (1 - r)p$ ve böylece $pr = rp = 0$, yani $p \perp r$ dur. O zaman (iii) den $p \vee r = p + r \in P$ bulunur.

$p, r \in P$ ve $p \leq r$ olsun. Teorem 3.2.4 den $p = pr = rp$ dir. $r \in P$ ise $r \in (1 - p)$ olur ve $(r - p)^\perp = 1 - (r - p) = 1 - r + p$ ise $p \leq (r - p)^\perp$ yani $p \perp (r - p)$ olduğundan

$$\begin{aligned} p \vee (p^\perp \wedge r) &= p \vee ((1 - p) \wedge r) \\ &= p \vee ((1 - p)r) \\ &= p \vee (r - pr) \\ &= p \vee (r - p) \end{aligned}$$

$$= p + (r - p)$$

$$= r$$

bulunur. O halde P , bir orthocomplementation gibi $p \rightarrow p^\perp: 1 - p$ ile birlikte bir ortomodüler poşettir. $\square$

Teorem 3.5.4 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

- (i) $p, q \in P$ ise $\phi_a(p) \perp q \Leftrightarrow p \perp \phi_a(q)$ dır.
- (ii) ϕ_a, P de mevcut olan tüm supremaları korur ve eğer $Q \subseteq P$ ve $r = \vee Q$ ise $\phi_a(r) = \vee \{\phi_a(q) : q \in Q\}$ dir.

Kanıt

(i) $(\Rightarrow)$ $\phi_a(p) \perp$ olsun. O zaman $(apa)^o \leq (1 - q)$ dur ve Teorem 3.2.4 den $apa(1 - q) = apa - apaq = apa$ dır. Buradan $apaq = 0$ bulunur ve taşıyıcı izdüşüm tanımından $(apa)^o q = \phi_a(q) = 0$ olur. O halde Teorem 3.4.9 dan $\phi_a(q)p = (aqa)^o p = 0$ olur ve buradan $aqap = -aqap = 0$, yani $aqa - aqap = aqa(1 - p) = aqa$ elde edilir. O zaman $(aqa)^o \leq (1 - p)$ ve böylece $\phi_a(q) \perp$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ Benzer şekilde elde edilir.

(ii) $Q \subseteq P$ ve $r \in \vee Q$ olsun. O zaman her $q \in Q$ için $0 \leq q \leq r$ dir ve Teorem 3.4.9 dan $\phi_a(q) \leq \phi_a(r)$ dir.

Her $q \in Q$ için $t \in P$ ve $\phi_a(q) \leq t$ olsun. O zaman her $q \in Q$ için $\phi_a(q) \perp t^\perp$ dir. Bu nedenle (i) den $q \perp \phi_a(t^\perp)$ yani $q \leq (\phi_a(t^\perp))^\perp$ elde edilir. Buradan $r = \vee Q$ olduğundan $r \leq (\phi_a(t^\perp))^\perp$ olur, bu ise $r \perp \phi_a(t^\perp)$ demektir.

Böylece $\phi_a(r) \perp t^\perp$, yani $\phi_a(r) \leq t$ elde edilir. O halde $\phi_a(r) = \bigvee \{\phi_a(q) : q \in Q\}$ dir. $\square$

Lemma 3.5.5 (Foulis, 2010) $p, q, r \in P$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $\phi_a(q) \leq p$.
- (ii) $r \leq p \Leftrightarrow \phi_p(r) = r$.
- (iii) $r \perp p \Leftrightarrow \phi_q(r) = 0$.
- (iv) $p \wedge q, P$ de mevcuttur ve $p \wedge q = p - \phi_p(q^\perp)$ dir.

Kanıt

(i) Teorem 3.4.9 dan $\phi_p(r) \leq p^o = p$ dir.

(ii) $(\Rightarrow) r \leq p$ ise Teorem 3.2.4 den $r = pr = rp$ dir. O zaman $\phi_p(r) = (prp)^o = (rp)^o = r^o = r$ elde edilir.

$(\Leftarrow) \phi_p(r) = r$ olsun. (i) den $r = \phi_p(r) \leq p$ bulunur.

(iii) $r \perp p$ olsun. Lemma 3.5.3 den $rp = 0$, (SA4) den $prp = 0$ ve Teorem 3.2.10 dan $(prp)^o = 0$ dir. O halde ϕ nin tanımından $\phi_p(r) = 0$ bulunur.

(iv) $p, q \in P$ olsun. $p \mathcal{C} q$ ise $p \mathcal{C} (1 - q)$ dir. $t := (\phi_p(q^\perp))^\perp = 1 - \phi_p(q^\perp) \in P$ olsun. (i) den $\phi_p(q^\perp) \leq p$ dir. $\phi_p(q^\perp) \in P \subseteq E$ olduğuna göre Teorem 3.2.4 den $\phi_p(q^\perp)p = p\phi_p(q^\perp) = \phi_p(q^\perp)$ olur. $p \mathcal{C} \phi_p(q^\perp)$ ise $p \mathcal{C} (\phi_p(q^\perp))^\perp = t$ dir. Lemma 3.5.3 den,

$$p \wedge t = pt = tp = p(1 - \phi_p(q^\perp)) = p - p\phi_p(q^\perp) = \phi_p(q^\perp)^\perp \wedge p \in P$$

bulunur. $p \wedge t = (\phi_p(q^\perp))^\perp \wedge p \leq (\phi_p(q^\perp))^\perp$ olduğundan $p \wedge t \perp \phi_p(q^\perp)$ dir.

Teorem 3.5.4 den $\phi_p(p \wedge t) \perp q^\perp$; yani $\phi_p(p \wedge t) \leq p, q$ dur.

$r \in P$ ve $r \leq p, q$ olsun. (iii) den $\phi_p(r) = r \leq q$ ve buradan $\phi_p(r) \perp q^\perp$ olur. Teorem 3.5.4 den $r \perp \phi_p(q^\perp)$ ve böylece $r \leq (\phi_p(q^\perp))^\perp = t$ dir. $r \leq p$ ve $r \leq t$ olduğundan $r \leq p \wedge t = p \wedge q$ olur. O halde $p \wedge t = p \wedge (p - \phi_p(q^\perp)) = p - \phi_p(q^\perp)$ bulunur. $\square$

Teorem 3.5.6 (Foulis, 2010) P bir ortomodüler kafestir ve her $p, q \in P$ için $\phi_p(q) = p \wedge (p^\perp \vee q)$ dir.

Kanıt P nin bir ortomodüler poset olduğu gösterildi. Bu nedenle P nin bir kafes olduğunu göstermek yeterlidir.

$p, q \in P$ olsun. Lemma 3.5.5 den $p \wedge q, P$ de mevcuttur ve De Morgan kuralından $p \vee q = (p^\perp + q^\perp)^\perp, P$ de mevcuttur. Buradan P bir ortomodüler kafestir.

$p^\perp \leq p^\perp \vee q$ ve ortomodüler kuralından

$$p^\perp \vee (p^\perp \vee q) = p^\perp \vee q = p^\perp \vee (p \wedge (p^\perp \vee q))$$

dir. Teorem 3.5.4 ve Teorem 3.5.5 den

$$\phi_p(q) = \phi_p(p^\perp) \vee \phi_p(q)$$

$$= \phi_p(p^\perp \vee q)$$

$$= \phi_p(p^\perp \vee (p \wedge (p^\perp \vee q)))$$

$$= \phi_p(p^\perp) \vee \phi_p(p \wedge (p^\perp \vee q))$$

$$= p \wedge (p^\perp \vee q)$$

dir. Bir ortomodüler kafesin iki elemanı p ve q kıyaslanabilirdir eğer ve yalnız

eğer $p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q^\perp)$ dir. $\square$

3.6.Tersinirve Regüler Elemanlar

Bu bölümde sinaptik cebirlerin tersinir ve regüler elemanları üzerinde bazı özellikler irdelenmiştir.

Tanım 3.6.1 (Foulis, 2010) $a \in A$ tersinirdir eğer ve yalnız eğer $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in A$ vardır.

$a, b \in A$, $b \in C(a)$ ve a tersinir olsun. O zaman $ab = ba$ ve buradan $aa^{-1}b = a^{-1}ab = a^{-1}ba = b$ dir. Eşitlik sağ taraftan a^{-1} ile çarpılırsa $a^{-1}b = ba^{-1}$ elde edilir. O halde $a^{-1} \in CC(a)$ dır.

$a^o \in C(a)$ ve $a^{-1} \in CC(a)$ olduğundan $a^o a^{-1} = a^{-1} a^o$ dır. O halde $a^{-1} a a^o = a^{-1} a = a^o a^{-1} a$ ve Teorem 3.2.4 den $a^{-1} a \leq a^o$ yani $1 \leq a$ dır. Diğer yandan $a^o \in P$ olduğuna göre $a^o \leq 1$ dir. O halde a tersinir ise $a^o = 1$ elde edilir.

Lemma 3.6.2 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $0 \leq a$ ve a tersinir ise $0 \leq a^{-1}$ dir.
- (ii) a tersinirdir eğer ve yalnız eğer $|a|$ tersinirdir ve a tersinir ise $|a|^{-1} = |a^{-1}|$ dir.

Kanıt

(i) $0 \leq a$ ve a tersinir olsun. $a \in C(a^{-1})$ olduğundan $a \in C(a^{-1})^2$ ve (SA2) den $0 \leq (a^{-1})^2$ olur. O halde Lemma 3.1.5 den $0 \leq a(a^{-1})^2 = aa^{-1}a^{-1} = a^{-1}$ elde edilir.

(ii) $s := \operatorname{sgn}|a|$ olsun. Teorem 3.3.6 dan $s \in CC(a)$, $s^2 = a^o$, $sa = as = |a|$ ve $s|a| = |a|s = a$ olduğu bilinmektedir.

($\Rightarrow$) $a \in A$ tersinir olsun. $s, a^{-1}, |a| \in CC(a)$ olduğundan $s \in C(a^{-1})$ ve $a^{-1} \in C|a|$ dir. Buradan $|a|(sa^{-1}) = s|a|a^{-1} = (sa^{-1})|a| = 1$ elde edilir. O halde $|a|$ tersinirdir ve $|a|^{-1} = sa^{-1}$ dir.

$s^2 = s^o = 1$, $0 \leq sa^{-1}$ ve $a^o = 1$ olduğundan $(sa^{-1})^2 = (sa^{-1})(sa^{-1}) = s^2(a^{-1})^2 = a^o(a^{-1})^2 = 1$. $(a^{-1})^2 = (a^{-1})^2$ elde edilir. O halde $|a|^{-1} = sa^{-1} = |sa^{-1}| = |a^{-1}|$ bulunur.

($\Leftarrow$) $|a|$ tersinir olsun. $as|a|^{-1} = a\operatorname{sgn}(a)|a|^{-1} = |a||a|^{-1} = 1$ olduğundan a tersinirdir ve $a^{-1} = s|a|^{-1}$ olur. $\square$

Teorem 3.6.3 (Foulis, 2010) $a \in A$ için a tersinirdir eğer ve yalnız eğer $\varepsilon \leq |a|$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır.

Kanıt $a \in A$ tersinir olsun. Lemma 3.6.2 den $|a|$ tersinirdir ve $|a|^{-1} = \frac{1}{|a|} \leq n \in \mathbb{N}$ olur. $|a|(n - |a|^{-1}) = |a|n - |a||a|^{-1} = n|a| - |a|^{-1}|a| = (n - |a|^{-1})|a|$ olduğundan $|a|$, $n - |a|^{-1}$ ile değişmelidir. $|a|, n - |a|^{-1}$ ile değişmeli olduğundan Lemma 3.1.5 den $0 \leq (n - |a|^{-1})|a|$ ve buradan $1 \leq n|a|$ dir. O halde $0 < \varepsilon := \frac{1}{n}$ alınırsa $\varepsilon \leq |a|$ olur.

($\Leftarrow$) Tersine $0 < \varepsilon \leq |a|$ olsun. O halde $1 \leq \varepsilon^{-1}|a|$ olur ve (SA7) den $\varepsilon^{-1}|a|$ tersinirdir. $|a|\varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1}|a|)^{-1} = 1$ olduğundan $|a|^{-1} = \varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1}|a|)^{-1}$ seçilirse $|a|$ tersinir bulunur. O halde Lemma 3.7.2 den a tersinirdir. $\square$

Tanım 3.6.4 (Foulis, 2010) $a \in A$ olsun.

- (i) von Neumann regülerdir ancak ve ancak $ab, ba \in A$ ve $aba = a$ olacak şekilde $b \in A$ vardır.
- (ii) a regülerdir eğer ve yalnız eğer $\varepsilon a^o \leq |a|$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır.

0 ın hem von Neumann regüler hem de regüler olduğu açıktır.

Teorem 3.6.5 (Foulis, 2010) $0 \neq a \in A$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (i) a von Neumann regülerdir.
- (ii) $ar = ra = a^o$ olacak şekilde $r \in a^o A a^o$ vardır.
- (iii) $a, a^o A a^o$ sinaptik cebirde tersinirdir.
- (iv) a regülerdir.

Kanıt

(i) $\Rightarrow$ (ii): a von Neumann regüler olsun. O zaman tanımdan $ab, ba \in A$ ve $aba = a$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. $aba = a$ ise $ababa = ab$ ve buradan $ab \in P$ ve $baba = ba$ dır, bu nedenle $ba \in P$ olur. O zaman $a^o \leq ab = aa^o b$ ve $a^o \leq ba = ba^o a$ dır. $aa^o ba^o = a^o aba^o = aba^o = a^o$ ve $a^o baa^o = a^o$ olur ve buradan $a^o aba^o = a^o baa^o$, yani $ab = ba$ elde edilir.

$r = a^o ba^o \in a^o A a^o$ olsun. O zaman $ra = a^o ba^o a = a^o baa^o = a^o a^o = a^o$ ve $aa^o ba^o = a^o a^o = a^o$, yani $ar = ra = a^o$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $ar|a| = ra|a| = |a|$ ise $ra|a| - |a| = 0$ dir.

$$0 = ra|a| - |a| = (ra - 1)|a| = (a - 1)|a| = a|a| - |a|$$

dir. O zaman $|a| = a|a| = |a|a = |a|^o a = a^o a = a$ olur. Hipotezden $a \neq 0$ olduğundan $|a| \neq 0$ dir, yani $0 < \varepsilon \leq |a|$ olacak şekilde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. O zaman Teorem 3.6.3 den $a, a^o A a^o$ sinaptik cebirinde tersinirdir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): a tersinir olsun. O halde $ax = 1$ olacak şekilde $x = a^o b a^o \in a^o A a^o$ vardır. $ax = a a^o b a^o = a b a^o = 1$ dir ve eşitlik sağ taraftan a ile çarpılırsa $aba = a$ elde edilir. O halde a Von Neumann regülerdir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): a tersinir olsun. O zaman Teorem 3.6.3 den $\varepsilon \leq |a|$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. $\varepsilon \leq |a|$ ise $\varepsilon a^o \leq |a| a^o$ ve buradan $\varepsilon a^o \leq |a|$ dir, yani a regülerdir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): a regüler olsun. O zaman $\varepsilon a^o \leq |a|$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan $\varepsilon a^o \leq |a| a^o$ ve böylece $a^o \varepsilon a^o \in a^o |a| a^o$, yani $\varepsilon \leq |a|$ elde edilir. O halde $a, a^o A a^o$ sinaptik cebirde tersinirdir. $\square$

Sonuç Teorem 3.6.7 (Foulis, 2010) $a \in A$ için a tersinirdir eğer ve yalnız eğer a regülerdir ve $a^o = 1$ dir.

$0 \neq a$ ve a regüler olsun. O zaman Teorem 3.6.5 de geçen a nın $a^o A a^o$ deki tersi, a nın A daki psedo-tersi olarak adlandırılır ve 0 ın psedo-tersi 0 dir. Eğer a regüler ise a nın psedo-tersi $CC(a)$ ya aittir.

Teorem 3.6.8 (Foulis, 2010) $a \in A$ için a regülerdir eğer ve yalnız eğer a^+ ve a^- regülerdir.

Kanıt $p := (a^+)^o$ ve $q := (a^-)^o$ olsun. O zaman Teorem 3.3.3 den $p, q \in CC_{(a)}, p + q = a^o, pq = pa^- = 0, qp = qa^+ = 0, pa = pa^+ = a^+, qa = qa^- = a^-$ dir.

a regüler olsun. O zaman $\varepsilon a^o \leq |a|$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. $\varepsilon(p + q) = \varepsilon a^o \leq |a| = a^+ + a^-$ olur ve eşitsizlik p ile çarpılırsa $p(\varepsilon(p + q)) \leq p(a^+ + a^-) = pa^+ + pa^-$ elde edilir. $pa^+ = a^+$ ve $pa^- = 0$ olduğundan $p(\varepsilon(p + q)) \leq a^+ = (a^+)$ bulunur. Burada $p = (a^+)^o$ olduğundan $\varepsilon_1: \varepsilon(p + q)$ alınır a^+ nın regüler olduğu elde edilir. Benzer şekilde a^- nin de regüler olduğu bulunur.

Tersine, a^+ ve a^- regüler olsun. O zaman $\alpha p \leq a^+$ ve $\beta q \leq a^-$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vardır. $\varepsilon := \min\{\alpha, \beta\}$ olarak seçilirse $\varepsilon a^o = \varepsilon(p + q) \leq a^+ + a^- = |a|$, yani a nın regüler olduğu bulunur. $\square$

Sonuç Teorem 3.6.9 (Foulis, 2010) $a \in A$ tersinirdir eğer ve yalnız eğer $a^o = 1$ dir. Ayrıca a^+ ve a^- regülerdir.

3.7 Spektral Çözüm

Bu bölümde sinaptik cebirler üzerinde özel kompresyon dönüşümleri incelenmiştir.

Tanım 3.7.1 (Foulis, 2010) Bir $a \in A$, bir $p \in P$ ile uyumludur eğer ve yalnız eğer ve yalnız eğer $a = J_p(a) + J_{1-p}(a)$ dir.

$C(p)$, p ile uyumlu olan A nın bütün elemanlarının kümesidir.

Tanım 3.7.2 (Foulis, 2010) A da p ile odaklanmış bir kompresyon her $a, b \in A$ ve her $e \in E$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $J: A \rightarrow A$ dönüşümüdür:

- (i) $p = J_{(1)} \in E.$
- (ii) $J_{(a+b)} = J_{(a)} + J_{(b)}.$
- (iii) $a \leq b$ ise $J_{(a)} \leq J_{(b)}$ dir.
- (iv) $e \leq p$ ise $J_{(e)} = e$ dir.
- (v) $J_{(e)} = 0$ ise $e \leq 1 - p$ dir.

Tanım 3.7.3 (Foulis, 2010) A nın bir kompresyon bazı, A daki $(J_p)_p \in P$ kompresyonlarının bir ailesidir eğer ve yalnız eğer P, E nin bir normal alt efekt cebiridir ve $p, q, r \in P$ ve $p + q + r \leq 1$ ise $J_{p+r} \circ J_{q+r} = J_r$ dir.

Tanım 3.7.4 (Foulis, 2010) $e \in E$ ve $p \in E$ ise p, e nin izdüşüm örtüsüdür eğer ve yalnız eğer her $q \in P$ için $e \leq q \Leftrightarrow p \leq q$ dir. Kompresyon tabanı $(J_p)_p \in P$ izdüşüm kapsama özelliğini sağlar eğer ve yalnız eğer her $e \in E$ için bir izdüşüm kapsamı vardır.

Tanım 3.7.5 (Foulis, 2010) Kompresyon bazı $(J_p)_p \in P$ spektraldir eğer ve yalnız eğer hem izdüşüm kapsama hem de kıyaslanabilirlik özelliğini sağlar.

Teorem 3.7.6 (Foulis, 2010) $(J_p)_p \in P$ ailesi sıralı-birimli A uzayı için bir spektral kompresyon bazıdır.

Kanıt Öncelikle, P nin, E nin bir normal alt efekt cebiri olduğu gösterilmelidir. $0, 1 \in P$ ve $p \in P$ için $1 - p = p^\perp \in P$ dir. $p, q \in P$ ve $p + q \leq 1$ olsun. O zaman Lemma 3.5.3 den $p + q = p \vee q \in P$ dir. O halde P, E nin bir alt efekt cebiridir.

$d, e, f, d + e + f \in E$ ve $p := d + e \in P$, $q := d + f \in P$ olsun. O halde $e + q = d + e + f \leq 1$ dir ve Teorem 3.2.4 den $e = e(1 - q) = e - eq$,

böylece $eq = 0$ elde edilir. Ayrıca $d \leq d + f = q$ olduğundan Teorem 3.2.4 den $dq = d$ dir.

$$pq = (d + e)q = dq + eq = d \text{ ve benzer şekilde } qp = d \text{ elde edilir.}$$

O halde Lemma 3.5.3 den $d = p \wedge q \in P$ dir. Böylece P, E nin bir normal alt efekt cebiridir.

$p, q, r \in P$ ve $p + q + r \leq 1$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $pq = pr = qr = 0$, $p + r = p \vee r \in P$ ve $q + r = q \vee r \in P$ dir.

$$J_{p+r}(J_{q+r}(a)) = (p + r)(q + r)a(q + r)(p + r) = rar = J_r(a) \text{ dir.}$$

O halde $(J_p)_p \in P$ A için bir kompresyon bazıdır.

$e \in E$ olsun. O zaman Teorem 3.2.10 dan $e^o, e \leq p$ olacak şekildeki en küçük p izdüşümüdür. Buradan $(J_p) \in P$ izdüşüm kapsama özelliğini sağlamış olur.

$a \in A$ ve $p := (a^+)^o$ olsun. Teorem 3.3.3 den ve $C_{(a)} \subseteq C_{(p)}$ olduğundan $J_p(a) = pap = pa = a^+ \geq 0$ ve $J_{1-p}(a) = (1 - p)a(1 - p) = (1 - p)a = a - pa = a - a^+ = -a^+ \leq 0$ dir. Böylece $(J_p)_p \in P$ kompresyon bazı kıyaslanabilirlik özelliğini sağlamış olur.

O halde $(J_p)_p \in P$ A için bir spektral kompresyon bazıdır.

$a \in A$ ise her $p \in P$ için

$$p \leq 1 - a^o \Leftrightarrow a^o p = 0 \Leftrightarrow ap = pa = 0 \Leftrightarrow a \in C, P$$

ve $J_p(a) = 0$ olduğu açıktır. Buradan her $a \in A$ için $a' := 1 - a^o$ olarak tanımlanan $': A \rightarrow P$ dönüşümü A daki Rickort dönüşümü gibi efektifdir. Her $p \in P$ için $p' = 1 - p = p^\perp$ olduğu not edilmelidir.

$a, b \in P$ olsun. Her $p \in P$ için $a \in C_{(p)} \Rightarrow b \in C_{(p)}$ ise $b \in CPC_{(a)}$ notasyonu ile gösterilir. $b \in CPC_{(a)} \Leftrightarrow C_{(a)} \cap P \subseteq C_{(b)}$ dir ve buradan $CC_{(a)} \subseteq CPC_{(a)}$ olur. Bu yüzden $a^o, |a|, a^+ \in CC_{(a)}$ olduğundan $a^o, |a|, a^+ \in CPC_{(a)}$ dir. □

Tanım 3.7.7 (Foulis, 2010) $a \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun

- (i) a için spektral alt ve üst sınırlar L ve $U, L := \sup\{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda \leq a\}$ ve $U := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: a \leq \lambda\}$ ile tanımlanır.
- (ii) $d_\lambda := 1 - ((a - \lambda)^+)^o$ ile tanımlanan $(d_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ izdüşümlerinin ailesi a nın spectral çözümü olarak adlandırılır.
- (iii) $d_\lambda := (a - \lambda)^o$ ile tanımlanan $(d_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ izdüşümlerinin ailesi a nın öz düşümleri olarak adlandırılır. Eğer $d_\lambda \neq 0$ ise $(d_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}, a$ için öz düşümlerin ailesidir.

[8, Teorem 3.1] den $-\infty < L \leq U < \infty, \|a\| = \max\{|L|, |U|\}$ ve $L \leq a \leq U$ dur.

Teorem 3.7.8 (Foulis, 2010) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $p_\lambda, d_\lambda \in CC_{(a)}$; buradan $p_\lambda \leq p_\mu, p_\lambda \leq d_\mu$ ve $d_\lambda \leq d_\mu$ dir.
- (ii) $p_\lambda(a - \lambda) \leq 0 \leq (1 - p_\lambda)(a - \lambda)$.
- (iii) $\lambda \leq \mu \Rightarrow p_\lambda \leq p_\mu$ ve $p_\mu - p_\lambda = p_\mu \wedge (1 - p_\lambda)$.
- (iv) $\lambda < \mu \Rightarrow d_\lambda \leq p_\lambda \leq 1 - d_\mu \Rightarrow d_\lambda \perp d_\mu$.

- (v) $\mu \leq U \Leftrightarrow p_\mu = 1.$
- (vi) $\lambda < L \Rightarrow p_\lambda = 0, \text{ ve } L < \lambda \Rightarrow 0 < p_\lambda \text{ dir.}$
- (vii) $\alpha \in \mathbb{R} \text{ ise } p_\alpha = \bigwedge \{p_\mu : \alpha < \mu \in \mathbb{R}\}.$
- (viii) $\alpha \in \mathbb{R} \text{ ise } p_\alpha - d_\alpha = \bigvee \{p_\lambda : \alpha > \lambda \in \mathbb{R}\}.$

Teorem 3.7.9 (Foulis, 2010) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_0 < L < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = U$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\varphi_i \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_i - 1 \leq \varphi_i \leq \lambda_i$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\varphi_i = p_{\lambda_i} - p_{\lambda_{i-1}}$ ve $\varepsilon_i := \{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$ ile tanımlansın. O zaman

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in P \cap CC(a), \sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$$

ve

$$\left\| a - \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi_i \right\| \leq \varepsilon$$

olur.

Kanıt Teorem 3.7.8 in (i) ve (iii) koşullarından $p_{\lambda_{i-1}} \leq p_{\lambda_i}$ ve $p_{\lambda_{i-1}}, p_{\lambda_i} \in P \cap CC(a)$ dir. Buradan $u_i \in P \cap CC(a)$ olur. $a \in C(P_{\lambda_i})$ ve Lemma 2.2 den $a \in C(u_i)$ dir. Teorem 3.7.8 in (v) ve (vi) koşullarından $\sum u_i = u$ olur. Teorem 3.7.8 (viii) kısmında $q := u_i$ alınırsa $\lambda_{i-1}u_i \leq J_{u_i}(a) \leq \lambda_i u_i$ elde edilir. O halde $\sum \lambda_{i-1} u_i \leq \sum J_{u_i}(a) \leq \sum \lambda_i u_i$ olur. Lemma 2.3 den $\sum J_{u_i} = J_1(a) = a$ ve $\sum \lambda_{i-1} u_i \leq a \leq \sum \lambda_i u_i$ elde edilir. Eşitsizlikten $\lambda_{i-1} \leq \varphi_i \leq \lambda_i$ ve $0 \leq u_i$ olduğundan

$$-\sum(\lambda_i - \lambda_{i-1})u_i \leq a - \sum \varphi_i u_i \leq \sum(\lambda_i - \lambda_{i-1})u_i$$

bulunur. Buradan $\|a - \sum \varphi_i u_i\| \leq \|\sum (\lambda_i - \lambda_{i-1}) u_i\| \leq \varepsilon \|\sum u_i\| = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ elde edilir. $\square$

Sonuç Teorem 3.7.10 (Foulis, 2010) Her bir $a_n, (p_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ailesinde izdüşümlerin sonlu bir lineer birleşimi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olacak şekilde $CC(a)$ da bir artan $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ dizisi vardır.

4. SİNAPTİK CEBİRLERİN TÜREVLERİ

Bu bölümde sinaptik cebirlerde türev kavramı tanımlandı ve aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

Tanım 4.1 $(A, ., *)$ bir sinaptik cebir ve $d: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $d(ab) = (d(a)b) * (ad(b))$ oluyorsa d dönüşümüne $(A, ., *)$ nın bir türevi denir.

Tanım 4.2 $a, b \in C(v), v, a, b \in P$ olmak üzere $d = J_v(a) = vav$ ile tanımlanan $d: A \rightarrow A$ dönüşümü, $(A, ., *)$ sinaptik cebiri üzerinde bir türev dönüşümüdür ve

$$d(ab) = (d(a)b) * (ad(b))$$

ile tanımlanır:

$$\begin{aligned} (d(a)b) * (ad(b)) &= ((vav)b) * (a(vbv)) \\ &= (a(vbv))((a(vbv)(vav)b) \\ &= (vabv)(v(ab)(ab)v) \\ &= vabv \\ &= J_v(ab) \\ &= d(ab). \end{aligned}$$

Tanım 4.3 A bir sinaptik cebir ve $d: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer $d(0) = 0$ ise d ye regüler denir.

Teorem 4.4 $(A, ., *)$ üzerindeki d türev dönüşümü regülerdir.

Kanıt $d(0) = d(0.0) = (d(0).0) * (0.d(0)) = 0(0.0) = 0$ olduğuna göre d türev dönüşümü regülerdir. $\square$

Tanım 4.5 $(A, ., *)$ bir sinaptik cebir, $d: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer $a, b \in A$ için $d(ab) = (ad(b)) * (d(a)b)$ oluyorsa d dönüşümüne $(A, ., *)$ nin bir eş türevi denir.

Teorem 4.6 $d, (A, ., *)$ üzerinde bir eş türevdir.

Kanıt

$$\begin{aligned}
 (ad(b)) * (d(a)b) &= (avbv) * (vavb) \\
 &= (vabv) * (vabv) \\
 &= (vabv)((vabv)(vabv)) \\
 &= vabv \\
 &= d(ab)
 \end{aligned}$$

$\square$

Teorem 4.7 $d(1)$, idempotent elemandır.

Kanıt

$$\begin{aligned}
 d(1) &= (d(1)1) * (1d(1)) \\
 &= ((v1v)1) * (1(v1v)) \\
 &= v * v
 \end{aligned}$$

$$= d(1) * d(1)$$

□

Tanım 4.8 $d, (A, ., *)$ sinaptik cebiri üzerinde bir türev dönüşümü olsun. O

zaman $Ker(d) := \{x \in A \mid d(x) = 0\}$ ile tanımlanır.

Teorem 4.2 den, $d(0) = 0$ olduğuna göre, $Ker(d) \neq \emptyset$ dir.

$x, y \in Ker(d)$ için $d(xy) = (d(x)y) * (xd(y)) = 0$ olduğundan $xy \in Ker(d)$ dir.

Teorem 4.9 $d, (A, ., *)$ sinaptik cebiri üzerinde bir türev olsun ve her $x \in X$

için $Fix_d(X) := \{x \in X \mid d(x) = x\}$ ile tanımlansın. O zaman $x, y \in P, x C y$ ve $x, y \in Fix_d(X)$ ise $xy \in Fix_d(X)$ dir.

Kanıt

$$d(xy) = (d(x)y) * (xd(y))$$

$$= (xy) * (xy)$$

$$= (xy)((xy)(xy))$$

$$= xy(xxyy)$$

$$= (xy)(x^2y^2)$$

$$= (xy)(xy)$$

$$= x^2y^2$$

$$= xy$$

olduğundan $xy \in Fix_d(X)$ elde edilir.

□

Teorem 4.10 $x \in P$ ve $d(1) \leq x$ olsun. O zaman $d(1) = d(x)$ dir.

Kanıt $d(1) = v1v = v^2 = v \in P$ ve $P \subseteq E$ olduğundan $d(1) \in E$ dir.

$d(1) \leq x$ ise Teorem 3.2.4 den $d(1)x = d(1).1$ ve $xd(1) = d(1)x$ dir.

$d(1)$ in idempotent eleman olduğu da göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
 d(x) &= d(x1) \\
 &= (d(x).) * (xd(1)) \\
 &= xd(1)(xd(1)d(x)) \\
 &= xxd(1)d(1)d(x) \\
 &= d(1)xd(1)xd(x) \\
 &= d(1)d(1)d(x) \\
 &= d(1)d(x)
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $d(1) = d(1)x = d(x)$, yani $d(1) = d(x)$ elde edilir.

Teorem 4.11 $d(1) = 1$ ve $d(y) = y$ ise $d(y^{-1}) = y^{-1}$ dir.

Kanıt

$$\begin{aligned}
 d(1) &= d(y^{-1}y) \\
 &= (d(y^{-1})y) * (y^{-1}d(y)) \\
 &= d(y^{-1})y * (y^{-1}y) \\
 &= d(y^{-1})y * 1 \\
 &= d(y^{-1})y
 \end{aligned}$$

yani $d(1) = d(y^{-1})y$ bulunur. Eşitlik sağ taraftan y^{-1} ile çarpılırsa $d(y^{-1}) = d(1)y^{-1}$, yani $d(y^{-1}) = y^{-1}$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.12 *A sinaptik cebirinde $x, d(x) \in P$ ve $d(1) = 1$ ise $x \leq d(x)$ ve $d(x) \leq x$ dir.*

Kanıt

$$d(x) = d(x1) = (d(x)1) * (xd(1))$$

$$= d(x) * x$$

$$= x(xd(x))$$

$$= x^2 d(x)$$

$$= xd(x)$$

dir. Diğer yandan

$$d(x) = d(1x) = (d(1)x) * (1d(x))$$

$$= d(x)(d(x)x)$$

$$= d^2(x)x$$

$$= d(x)x$$

olur. Buradan $xd(x) = d(x)x = d(x)$ bulunur. O halde Teorem 3.2.5 den

$d(x) \leq x$ dir. $\square$

5. SONUÇ

Bu tezin üçüncü bölümünde sinaptik cebirlere ait bir derleme yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise sinaptik cebirlerin türevleri tarafımızdan tanımlanıp, ilgili özelliklere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alfsen, E. M., 1971, Compact Convex Sets and Boundary Integrals. Springer-Veriag.

Beran, L., 1985, Orthomodular Lattices, An Algebraic Approach. Math.Appl. 18

Foulis, D. J., 2005, Compression bases in unital groups, Internat. J. Theoret. Phys. 44

Foulis, D. J. And Pulmannova, S., Spectral resolution in an order unit space. Rep. Math. Phys. 62

Foulis, D. J. And Pulmannova, S., Generalized Hermitian algebras. Internat. J. Theoret. Phys. 48

Foulis, D. J. And Pulmannova, S., Regular elements in generalized Hermitian Algebras. Math. Slovaca.

Foulis, D. J., 2010, Synaptic Algebras

ÖZGEÇMİŞ

Sevim YASLI, 22.02.1991 tarihinde İzmir’de doğdu. İlk öğrenimini Kars Halil Atila İlköğretim Okulu’nda ve orta öğrenimini Suphi Koyuncuoğlu Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2013 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2013 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı. Halen öğrenimini burada sürdürmeye devam etmektedir.