



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

SİNGÜLER HAHN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ

Yılmaz ÇİÇEK

BURDUR, 2022

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

SİNGÜLER HAHN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ

Yılmaz ÇİÇEK

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Singüler Hahn Sturm-Liouville Operatörleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

23 /06/ 2022

Yılmaz ÇİÇEK

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Haziran, 2022

Yılmaz ÇİÇEK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET....	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Temel Kavramlar	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	12
3.1. Regüler Hahn Sturm-Liouville Problemleri	12
3.2. Singüler Hahn Sturm-Liouville Problemleri.....	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	32
5. SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR.....	38

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Kümesi

$(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$: Sınır değer uzayı

$D_{q,\omega}f(t)$: Hahn fark operatörü

$E_{q,\omega}(t, z)$: $q - \omega$ Üstel fonksiyon

H : Hilbert Uzayı

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$W_{q,\omega}[f, g]$: f ile g fonksiyonlarının $q - \omega$ Wronskian'ı

$\int$: İntegral

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Singüler Hahn Sturm-Liouville Operatörleri

Yılmaz ÇİÇEK

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Haziran, 2022

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, regüler ve singüler Hahn Sturm-Liouville problemleri çalışıldı.

Son olarak singüler Hahn Sturm-Liouville operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hahn kalkülüs, Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Singular Hahn Sturm-Liouville Operators

Yılmaz ÇİÇEK

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

June, 2022

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned, some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, regular and singular Hahn Sturm-Liouville problems are studied.

Finally a description of all maximal dissipative, accretive, self-adjoint extensions and some other extensions of singular Hahn Sturm-Liouville operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: Hahn calculus, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions.

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analizdeki temel problemlerden biri olan simetrik operatörlerin genişlemesi problemi, simetrik bir operatörün kendisi de simetrik olan genişlemelerinin hangi koşullarda ve nasıl elde edileceği problemidir. 1929 yılında J. von Neumann (Von Neumann, 1929) bu problem ile ilgili temel sonuçları vermiştir. Rellich (Rellich,1951), Krein (Krein, 1947-1952), Vishik (Vishik,1952), Birman (Birman,1956), Phillips (Phillips,1959), simetrik operatörlerin genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır. 1969 yılında Rofe-Beketov (Rofe-Beketov,1969) lineer bağıntıları kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesini elde etmiştir. Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk vd,1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk,1976) ve Kochubei (Kochubei,1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk vd,1989) çalışmasına bakılabilir. Simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemelerini sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk vd,1984), Bairamogly (Bairamogly,1984), Allahverdiev (Allahverdiev, 2013, 2014, 2016), Tuna (Tuna , 2013), Tuna ve Bayrak (Tuna ve Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) ve Allahverdiev vd. (Allahverdiev vd., 2020) dir.

1949 yılında W. Hahn (Hahn, 1949) önemli iki operatörü tek çatı altında birleştirmek amacıyla

$$D_{q,\omega}f(t) := \frac{f(qt + \omega) - f(t)}{(qt + \omega) - t}, \quad (1.1)$$

tanımını vermiştir.

Hahn bu tanımla Jackson q- türev operatörü (Jackson, 1910)

$$D_q y(x) := \frac{y(qx) - y(x)}{x(1 - q)}, 0 < q < 1, \quad (1.2)$$

ile ileri fark operatörünün genellemesini elde etmiştir. Ancak bu tanım matematikçilerin ilgisini uzun zaman çekmemiştir. Hahn fark operatörünün sağ tersinin bulunmasıyla (Annaby vd., 2012) Hahn kalkulus teorisi gelişme göstermeye başlamıştır. Birinci mertebe Hahn başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik problemleri Hamza ve Ahmed (Hamza ve Ahmed, 2013, 2013a) tarafından incelenmiştir.

2018 yılında Annaby vd. (Annaby vd., 2018) klasik Sturm-Liouville denklemindeki adi türev yerine Hahn-türevini alarak regüler durumda Hahn Sturm-Liouville problemlerini ele almıştır. 2021 yılında Allahverdiev ve Tuna (Allahverdiev ve Tuna, 2021) singüler durumda Hahn Sturm-Liouville problemleri için Titchmarsh-Weyl teorisini vermiştir.

Bu tez çalışmasında, singüler durumda Hahn Sturm Liouville denklemi ele alınmıştır. Bu tip operatörler için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. U , bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u, v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (u, v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı denir:

1. $(u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.2. $(U, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. u vektörünün normu,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad (2.2)$$

normuna göre tam ise, yani $(U, (.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi U 'nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4. K, H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı ($K \subseteq H$) olsun.

$$T: K \subseteq H \rightarrow H \quad (2.3)$$

dönüşümü, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve her $u, v \in K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv \quad (2.4)$$

eşitliğini sağlıyorsa T dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.5. H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin.

Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \quad (2.6)$$

eşitliği ile de hesaplanabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.6. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T 'nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \quad (2.7)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörler kümesine T 'nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $(T^*)^* = T$

ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$

iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$

iv. $(T)^* = L^*T^*$

v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken)

(Naimark, 1968).

Tanım 2.7. $T^* = T$ ise T 'ye kendine eş operatör adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.8. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermitian denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.9. $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise yani $A \subset A^*$ ise, A 'ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.10. $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U 'ya izometrik operatör denir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.11. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$U^*U = UU^* = I \text{ olmasıdır (Akhiezer and Glazman, 1963).}$$

Tanım 2.12. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\text{Im}(Th, h) \geq 0 \tag{2.8}$$

ise T lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.13. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K;$$

- ii. Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır, şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.14. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.15. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.9)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.10)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (2.9) ve (2.10) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (2.9) , (2.10) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (2.9), (2.10) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.11)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.12)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.11), (2.12) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Şimdi Hahn kalkülüsün temel kavram ve teoremlerini verelim.

$q \in (0,1), \omega > 0$ sabit olsun $\omega_0 := \omega/(1-q)$, ve I reel sayılar kümesininin ω_0 'ı kapsayan bir alt aralığı olsun. $h(t) := qt + \omega, t \in I$ olsun. O zaman,

$$\omega_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (h \circ h \circ \dots \circ h)(t)$$

dir.

Tanım 2.16. f, I aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. f ω_0 'da diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere Hahn fark operatörü,

$$D_{q,\omega}f(t) := \begin{cases} \frac{f(qt + \omega) - f(t)}{(qt + \omega) - t}, & t \neq \omega_0 \\ f'(\omega_0), & t = \omega_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

ifadesi ile tanımlanır. $D_{q,\omega}f(\omega_0)$ ifadesine f fonksiyonunun q, ω -türevi denir. Eğer $D_{q,\omega}f(\omega_0)$ türevi mevcutsa f fonksiyonuna I üzerinde q, ω -diferansiyellenebilir denir (Hahn, 1983).

Eğer f, g fonksiyonu, $t \in I$ noktasında q, ω -diferansiyellenebilir aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$D_{q,\omega}(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha D_{q,\omega}f(t) + \beta D_{q,\omega}g(t), \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

$$D_{q,\omega}(fg)(t) = D_{q,\omega}(f(t))g(t) + f(qt + \omega)D_{q,\omega}g(t),$$

$$D_{q,\omega} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{(D_{q,\omega} f(t))g(t) - f(t)D_{q,\omega} g(t)}{g(t)g(qt + \omega)}, g(t)g(qt + \omega) \neq 0,$$

(Annaby, vd., 2012).

$D_{q,\omega}$ fark operatörünün sağ tersi Annaby vd. tarafından (Annaby vd., 2012)'de Jackson – Nörlund toplamı cinsinden şu şekilde tanımlanmıştır (Jordan, 1965).

$a, b \in I$ ve $[k]_q := \frac{1-q^k}{1-q}, k \in \mathbb{N}$ olsun. a dan b ye f fonksiyonu q, ω -integrali şu şekilde tanımlanır.

$$\int_a^b f(t) d_{q,\omega} t := \int_{\omega_0}^b f(t) d_{q,\omega} t - \int_{\omega_0}^a f(t) d_{q,\omega} t, \quad (2.14)$$

$$\int_{\omega_0}^x f(t) d_{q,\omega} t := (x(1-q) - \omega) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k + \omega[k]_q), \quad x \in I, \quad (2.15)$$

(2.15) eşitliğindeki seriler $x = a$ ve $x = b$ noktalarında yakınsaktır. Bu durumda, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde q, ω -integrallenebilir denir ve (2.15) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam Jackson – Nörlund toplamı olarak adlandırılacaktır.

f, g sürekli fonksiyonları için q, ω - kısmi integrasyon formülü,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) D_{q,\omega} g(t) d_{q,\omega} t &= f(t)g(t) \Big|_a^b \\ &- \int_a^b D_{q,\omega}(f(t))g(qt + \omega) d_{q,\omega} t, a, b \in I \end{aligned} \quad (2.16)$$

ile verilir (Annaby vd., 2012).

Kuantum kalkülusta (Gasper ve Rahman, 1990, Jackson, 1910) tanımlandığı gibi olduğu gibi iki tür q, ω – üstel fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$e_{q,\omega}(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z(t(1-q) - \omega))^k}{(q, q)_k}, \quad |t - \omega_0| < \frac{1}{|z(1-q)|}, \quad (2.17)$$

$$E_{q,\omega}(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}k(k-1)}(z(t(1-q) - \omega))^k}{(q, q)_k}, \quad t \in \mathbb{C}, \quad (2.18)$$

Bu fonksiyonlar

$$D_{q,\omega}e_{q,\omega}(t, z) = ze_{q,\omega}(t, z), \quad e_{q,\omega}(\omega_0, z) = 1, \quad |t - \omega_0| < \frac{1}{|z(1-q)|},$$

$$D_{q,\omega}E_{q,\omega}(t, z) = -zE_{q,\omega}(qt + \omega, z), \quad E_{q,\omega}(\omega_0, z) = 1, \quad z, t \in \mathbb{C},$$

birinci mertebeden q, ω - başlangıç değer problemlerini sağlarlar (Annaby vd., 2012).

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ I aralığı üzerinde tanımlı ve $(n-1)$. mertebeden q, ω -diferansiyellenebilir fonksiyon olsunlar . O zaman q, ω - Wronskian

$$W_{q,\omega}(x_1, x_2, \dots, x_n)(t)$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ D_{q,\omega}x_1(t) & D_{q,\omega}x_2(t) & \dots & D_{q,\omega}x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{q,\omega}^{n-1}x_1(t) & D_{q,\omega}^{n-1}x_2(t) & \dots & D_{q,\omega}^{n-1}x_n(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I,$$

formülü ile verilir (Hamza ve Ahmed, 2013).

Şimdi Hahn kalkülüsün temel teoremini ifade edelim.

Teorem:2.17.Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ω_0 noktasında sürekli ve

$$F(t) := \int_{\omega_0}^t f(x) d_{q,\omega}x. \quad t \in I$$

ise F fonksiyonu ω_0 'da sürekli. Ayrıca $D_{q,\omega}F(t)$ her bir $t \in I$ için mevcuttur ve $D_{q,\omega}F(t) = f(t)$ dir.

Tersine, her $a, b \in I$ için

$$\int_a^b D_{q,\omega}f(t)d_{q,\omega}t = f(b) - f(a)$$

dir. (Annaby, vd., 2012).

$b > 0$ sabit olsun ve $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$, $[\omega_0, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan ve

$$\|f(\cdot)\| = \left(\int_{\omega_0}^b |f(t)|^2 d_{q,\omega}t \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Koşulunu sağlayan tüm karmaşık değerli fonksiyonlar kümesi olsun. $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$, $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzaydır.

Teorem:2.18. $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ uzayı

$$\langle f, g \rangle := \int_{\omega_0}^b f(t) \overline{g(t)} d_{q,\omega}t,$$

ile tanımlanan iç çarpım işlemi altında ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır (Annaby vd., 2018).

Teorem:2.19. $f(\cdot), g(\cdot) \in L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ fonksiyonları $[\omega_0, h^{-1}(b)]$ aralığı üzerinde tanımlı ve ω_0 noktasında da sürekli olsun. $t \in (\omega_0, b)$ olmak üzere

$$(D_{q,\omega}f)(h^{-1}(t)) = D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}}f(t), \quad (2.19)$$

$$\langle D_{q,\omega}f, g \rangle = f(b) \overline{g(h^{-1}(b))} - f(\omega_0) \overline{g(\omega_0)} + \langle f, -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}}g \rangle, \quad (2.20)$$

$$\langle -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q'}, -\omega} f, g \rangle = -f(h^{-1}(b)) \overline{g(\omega_0)} + f(\omega_0) \overline{g(\omega_0)} + \langle f, D_{q, \omega} g \rangle \quad (2.21)$$

dir. (Annaby vd., 2018).

İspat. (2.19) eşitliği doğrudan $D_{q, \omega}$ nin tanımından elde edilir. (2.16) formülünde $u = h(t)$ yazılır ve Hahn kalkülüsün temel teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} \langle D_{q, \omega} f, g \rangle &= \int_{\omega_0}^b D_{q, \omega} f(t) \overline{g(t)} d_{q, \omega} t \\ &= f(b) \overline{g(b)} - f(\omega_0) \overline{g(\omega_0)} - \int_{\omega_0}^b f(h(t)) \overline{D_{q, \omega} g(t)} d_{q, \omega} t \\ &= f(b) \overline{g(b)} - f(\omega_0) \overline{g(\omega_0)} - \int_{\omega_0}^{h(b)} f(u) \frac{1}{q} \overline{D_{\frac{1}{q'}, -\omega} g(u)} d_{q, \omega} u \\ &= f(b) \overline{g(b)} - f(\omega_0) \overline{g(\omega_0)} + \frac{1}{q} (b - h(b)) f(b) D_{\frac{1}{q'}, -\omega} g(b) \\ &\quad - \int_{\omega_0}^b f(u) \frac{-1}{q} \overline{D_{\frac{1}{q'}, -\omega} g(u)} d_{q, \omega} u. \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.20) ifadesi (2.19) uygulandıktan sonra (2.22) ifadesinden elde edilir. Ayrıca, (2.21) eşitliği, (2.20) ifadesi kullanılarak elde edilir çünkü

$$\begin{aligned} \langle -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q'}, -\omega} f, g \rangle &= \overline{\langle g, \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q'}, -\omega} f \rangle} \\ &= \overline{-g((b)) f(h^{-1}(b)) + g(\omega_0) f(\omega_0) + \langle D_{q, \omega} g, f \rangle} \\ &= -\overline{g((b)) f(h^{-1}(b))} + \overline{g(\omega_0) f(\omega_0)} + \overline{\langle f, D_{q, \omega} g \rangle} \text{ dir.} \end{aligned}$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde regüler ve singüler durumda Hahn Sturm-Liouville problemleri ele alınacaktır.

3.1. Regüler Hahn Sturm-Liouville Problemleri

$\omega_0 \leq t \leq b < \infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\ell y(t) := \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q'}, -\omega} D_{q, \omega} y(t) + p(t)y(t) = \lambda y(t), \quad (3.1)$$

$$U_1(y) := a_1 y(\omega_0) + a_2 D_{\frac{1}{q'}, -\omega} y(\omega_0) = 0, \quad (3.2)$$

$$U_2(y) := b_1 y(b) + b_2 D_{\frac{1}{q'}, -\omega} y(b) = 0. \quad (3.3)$$

problemini ele alalım. Burada, $p(\cdot)$ fonksiyonu $[\omega_0, b]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli bir fonksiyondur ve $\{a_i, b_i\}_{i=1,2}$ keyfi reel sayıları $|a_1| + |a_2| = 0 = |b_1| + |b_2|$ koşulunu sağlarlar.

Teorem 3.1.1. (3.1) – (3.3) ile tanımlı Hahn Sturm–Liouville problemi $L^2_{q, \omega}(\omega_0, b)$ uzayında kendine eşdir (Annaby vd., 2018).

İspat. $y(\cdot), z(\cdot) \in L^2_{q, \omega}(\omega_0, b)$ olmak üzere aşağıdaki q, ω -Lagrange özdeşliği

$$\int_{\omega_0}^b \ell y(t) \overline{z(t)} - y(t) \overline{\ell z(t)} d_{q, \omega} t = [y, \overline{z}](b) - [y, \overline{z}](\omega_0), \quad (3.4)$$

ile verilir burada

$$[y, z](t) = y(t) \overline{D_{\frac{1}{q'}, -\omega} z(t)} - D_{\frac{1}{q'}, -\omega} y(t) \overline{z(t)} \quad (3.5)$$

dir.

Gerçekten de (2.21) ifadesinde $f(t) = D_{q,\omega}y(t)$ ve $g(t) = z(t)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q,\omega} y(t), z(t) \right\rangle \\
&= -(D_{q,\omega} y(h^{-1}(b)) \overline{z(b)} + D_{q,\omega} y(\omega_0) \overline{z(\omega_0)}) + \langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t) \rangle \\
&= -D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} y(b) \overline{z(b)} + D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} y(\omega_0) \overline{z(\omega_0)} + \langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t) \rangle
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir.

Tekrar (2.21) eşitliğinde $f(t) = y(t)$, $g(t) = D_{q,\omega} z(t)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t) \rangle \\
&= y(b) D_{q,\omega} \overline{z(h^{-1}(b))} - y(\omega_0) D_{q,\omega} \overline{z(\omega_0)} + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q,\omega} z(t) \rangle \\
&= y(b) D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} \overline{z(b)} - y(\omega_0) D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} \overline{z(\omega_0)} + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q,\omega} z(t) \rangle
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur.

(3.6) ve (3.7) ifadeleri birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q,\omega} y(t), z(t) \right\rangle \\
&= [y, z](b) - [y, z](\omega_0) + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q,\omega} z(t) \rangle
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

(3.2)-(3.3) sınır koşullarından

$$y(\omega_0) D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} \overline{z(\omega_0)} - \overline{z(\omega_0)} D_{\frac{1-\omega}{q'}, \frac{1}{q}} y(\omega_0) = 0,$$

$$y(b)D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} \overline{z(b)} - \overline{z(b)}D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} y(b) = 0,$$

bulunur.

$p(t)$ reel değerli fonksiyon olduğu için

$$\langle \ell y, z \rangle = \left\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q, \omega} y(t) + p(t)y(t), z(t) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q, \omega} y(t), z(t) \right\rangle + \langle p(t)y(t), z(t) \rangle$$

$$= \left\langle y, \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} D_{q, \omega} z(t) \right\rangle + \langle p(t)y(t), z(t) \rangle$$

$$= \langle y, \ell z \rangle,$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. (3.1)–(3.3) Hahn Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri (eigen değer) reel ve geometrik açıdan basittir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar (eigen fonksiyon) ortogonaldır (Annaby vd., 2018).

Şimdi, Hahn Sturm–Liouville probleminin temel çözümlerin varlığını, tekliğini ve analitik özelliklerini inceleyelim.

$C_{q, \omega}^2(\omega_0, b) = \{y \in L_{q, \omega}^2(\omega_0, b): y(\cdot) \text{ ve } D_{q, \omega} y(\cdot) \omega_0 \text{ noktasında sürekli} \}$ olsun.

Hamza ve Ahmed (Hamza ve Ahmed, 2013) (3.1) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesine sahip olduğunu ispatlamıştır.

$$C_{q, \omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} (t(1-q) - \omega)^{2n}}{(q; q)_{2n}}, \quad (3.9)$$

ve

$$S_{q,\omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (t(1-q) - \omega)^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

fonksiyonları

$$\frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q}, \omega} D_{q, \omega} y(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

$$y(\omega_0) = 1, \quad D_{q, \omega} y(\omega_0) = 0, \quad y(\omega_0) = 0, \quad D_{q, \omega} y(\omega_0) = 1,$$

başlangıç değer problemini sağlamaktadırlar.

Teorem 3.1.3. (3.1) denkleminin çözümlerinin q , ω -Wronskianı, t değişkeninden bağımsızdır (Annaby vd., 2018).

Teorem 3.1.4. $\lambda \in \mathbb{C}$ için, (3.1) denklemi

$$\phi(\omega_0, \lambda) = c_1,$$

$$D_{\frac{1-\omega}{q}, \omega} \phi(\omega_0, \lambda) := \lim_{t \rightarrow \omega_0^+} \frac{\phi(t, \lambda) - \phi(\omega_0, \lambda)}{t - \omega_0} = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad (3.12)$$

başlangıç koşullarına bağlı olarak tek bir $\phi(t, \lambda)$ çözümüne sahiptir. Ayrıca $t \in (\omega_0, b)$ için, $\phi(t, \lambda)$ çözüm fonksiyonu λ değişkenine göre tam fonksiyondur (Annaby vd., 2018).

İspat. $\mu := \sqrt{\lambda}$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x_1(t, \lambda) &= C_{q, \omega}(t, \mu) \quad \text{ve} \\ x_2(t, \lambda) &= \begin{cases} \frac{S_{q, \omega}(t, \mu)}{\mu}, & \mu \neq 0, \\ t, & \mu = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

fonksiyonları

$$\frac{-1}{q} D_{\frac{1-\omega}{q}, \frac{1}{q}} D_{q, \omega} y(t) - \lambda y(t) = 0.$$

denkleminin temel bir çözüm kümesi oluştururlar. Burada

$$C_{q, \omega}(t, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} (\mu(1-q) - \omega)^{2n}}{(q; q)_{2n}},$$

$$S_{q, \omega}(t, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (\mu(1-q) - \omega)^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}, \quad t \in \mathbb{C},$$

ile tanımlanır. Daha önceki teoremden $W_{q, \omega}(x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda)) \equiv 1$. Şimdi

$$\varphi_1(t, \lambda) = c_1 x_1(t, \lambda) + c_2 x_2(t, \lambda), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}(t, \lambda) &= c_1 x_1(t, \lambda) + c_2 x_2(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t [x_2(t, \lambda) x_1(h(s), \lambda) - x_1(t, \lambda) x_2(h(s), \lambda)] p(h(s)) \varphi_m(h(s)) d_{q, \omega} s, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

olmak üzere $\{\varphi_m(\cdot, \lambda)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini tanımlayalım.

Sabit bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için, t değişkeninden bağımsız olarak $B(\lambda)$ ve A pozitif sayıları

$$\begin{aligned} |p(t)| &\leq A, \quad \text{ve} \\ |x_i(t, \lambda)| &\leq \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}}, \quad i = 1, 2, t \in (\omega_0, b), \end{aligned} \quad (3.16)$$

olacak şekilde seçelim.

$$K(\lambda) := (|c_1| + |c_2|) \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}}$$

yazılırsa her $t \in (\omega_0, b)$ için $\varphi_1(t, \lambda) \leq K(\lambda)$ elde edilir.

Şimdi tümevarım kavramını kullanarak

$$|\varphi_{m+1}(t, \lambda) - \varphi_m(t, \lambda)| \leq K(\lambda) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AB(\lambda)(t(1-q)-\omega))^m}{(q, q)_m}, m = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

eşitsizliğini ispatlayacağız. İlk olarak üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & |\varphi_2(t, \lambda) - \varphi_1(t, \lambda)| \\ &= q \left| \int_{\omega_0}^t [x_2(t, \lambda)x_1(h(s), \lambda) - x_1(t, \lambda)x_2(h(s), \lambda)] p(h(s)) \varphi_1(h(s)) d_{q, \omega} s \right| \\ &\leq qAK(\lambda) 2 \left(\sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}} \right)^2 \int_{\omega_0}^t d_{q, \omega} s \\ &= qAK(\lambda) B(\lambda) \frac{[t(1-q) - \omega]}{1-q} \end{aligned} \quad (3.18)$$

bulunur. Bazı m sayıları için (3.17) ifadesinin doğruluğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} & |\varphi_{m+2}(t, \lambda) - \varphi_{m+1}(t, \lambda)| \\ &\leq q \left| \int_{\omega_0}^t [x_2(t, \lambda)x_1(h(s), \lambda) - x_1(t, \lambda)x_2(h(s), \lambda)] \right. \\ &\quad \left. \times p(h(s)) [\varphi_{m+1}(h(s), \lambda) - \varphi_m(h(s), \lambda)] d_{q, \omega} s \right| \\ &\leq qAB(\lambda) \int_{\omega_0}^t |\varphi_{m+1}(h^{k+1}(t), \lambda) - \varphi_m(h^{k+1}(t), \lambda)| d_{q, \omega} s \\ &\leq qK(\lambda) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AB(\lambda)(t(1-q) - \omega))^{m+1}}{(q, q)_m} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+mk+m} \\ &\leq K(\lambda) q^{\frac{m^2+3m+2}{2}} \frac{(AB(\lambda)(t(1-q) - \omega))^m}{(q, q)_m} \cdot \frac{1}{(1-q^{m+1})} \\ &\leq K(\lambda) q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \frac{(AB(\lambda)(t(1-q) - \omega))^m}{(q, q)_{m+1}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu nedenle, (3.17) eşitsizliği her bir $m \in \mathbb{N}$ için doğrudur. (3.17) eşitsizliği

$$\varphi_1(t, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{m+1}(t, \lambda) - \varphi_m(t, \lambda) \quad (3.20)$$

serisinin (ω_0, b) aralığı üzerinde düzgün yakınsamasını garanti eder.

Serinin m 'inci kısmi toplamları $\varphi_{m+1}(\cdot, \lambda)$, olduğu için, o halde $\varphi_{m+1}(\cdot, \lambda)$ (ω_0, b) aralığı üzerinde bir $\varphi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Şimdi tümevarımla, $\varphi_m(t, \lambda)$ ve $D_{q, \omega} \varphi_m(t, \lambda)$ fonksiyonları ω_0 noktasında sürekli olduğunu ispatlayalım. $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} D_{q, \omega} \varphi_{m+1}(t, \lambda) &= c_1 D_{q, \omega} x_1(t, \lambda) + c_2 D_{q, \omega} x_2(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t [D_{q, \omega} x_2(t, \lambda) x_1(h(s), \lambda) \\ &- D_{q, \omega} x_1(t, \lambda) x_2(h(s), \lambda)] p(h(s)) \varphi_m(h(s)) d_{q, \omega} s \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Bu nedenle $\phi(\cdot, \lambda)$ ve $D_{q, \omega} \phi_m(\cdot, \lambda)$ fonksiyonları ω_0 'da süreklidirler, yani $\phi(\cdot, \lambda) \in C_{q, \omega}^2(\omega_0, b)$. (3.14) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} \phi(t, \lambda) &= c_1 x_1(t, \lambda) + c_2 x_2(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t [x_2(t, \lambda) x_1(h(s), \lambda) - x_1(t, \lambda) x_2(h(s), \lambda)] p(h(s)) \phi_m(h(s)) d_{q, \omega} s. \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Düzgün yakınsama nedeniyle integrasyon ve limit sırası değiştirilebilir.

Şimdi $\phi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin (3.12) koşullarına bağlı olarak çözümünü olduğunu gösterelim.

$$\phi(\omega_0, \lambda) = c_1 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1-\omega}{q}, q} \phi(\omega_0, \lambda) &:= \lim_{t \rightarrow \omega_0^+} \frac{\phi(t, \lambda) - \phi(\omega_0, \lambda)}{t - \omega_0} \\ &= c_1 D_{\frac{1-\omega}{q}, q} \phi_1(\omega_0, \lambda) + c_2 D_{\frac{1-\omega}{q}, q} \phi_2(\omega_0, \lambda) = c_2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

olur.

$t = \omega_0$ olsun. (3.22) ifadesinden

$$\begin{aligned} D_{q,\omega}\phi(t, \lambda) &= c_1 D_{q,\omega}x_1(t, \lambda) + c_2 D_{q,\omega}x_2(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t [D_{q,\omega}x_2(t, \lambda)x_1(h(s), \lambda) \\ &- D_{q,\omega}x_1(t, \lambda)x_2(h(s), \lambda)]p(h(s))\phi(h(s))d_{q,\omega}s \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. O zaman,

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega}\phi(t, \lambda) \\ &= \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega}x_2(t, \lambda) \left(c_1 - q \int_{\omega_0}^t x_1(h(s), \lambda)p(h(s))\phi(h(s))d_{q,\omega}s \right) \\ &\quad - \frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega}x_1(t, \lambda) \left(c_2 + q \int_{\omega_0}^t x_2(h(s), \lambda)p(h(s))\phi(h(s))d_{q,\omega}s \right) - p(t)\phi(t, \lambda) \\ &= \lambda\phi(t, \lambda) - p(t)\phi(t, \lambda) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dir.

Eğer $t = \omega_0$ ise, o zaman

$$D^2y(\omega_0) - qp(\omega_0)y(\omega_0) = q\lambda y(\omega_0) \quad (3.26)$$

dir. Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} D_{q,\omega}^2\phi(\omega_0, \lambda) &= c_1 D_{q,\omega}^2x_1(\omega_0, \lambda) + c_2 D_{q,\omega}^2x_2(\omega_0, \lambda) + qp(\omega_0)\phi(\omega_0, \lambda) \\ &- q\lambda c_1x_1(\omega_0, \lambda) - q\lambda c_1x_1(\omega_0, \lambda) + qp(\omega_0)\phi(\omega_0, \lambda) \\ &= -q\lambda\phi(\omega_0, \lambda) + qp(\omega_0)\phi(\omega_0, \lambda), \end{aligned} \quad (3.27)$$

olduğu görülür. Yani, $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonu (3.1) denklemini $t = \omega_0$ noktasında sağlar.

Şimdi çözümün tekliğini gösterelim. $\Psi_i(t, \lambda)$,

$i=1,2$, (3.1),(3.12) probleminin iki çözümü olduğunu farz edelim.

$$Y(t, \lambda) = \Psi_1(t, \lambda) - \Psi_2(t, \lambda), t \in (\omega_0, b)$$

olsun. O zaman $Y(t, \lambda)$ (3.1) denkleminin

$$Y(\omega_0, \lambda) = D_{\frac{1-\omega}{q}} Y(\omega_0, \lambda) = 0 \text{ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümdür. } q, -\omega \text{ kısmi}$$

integrasyonu iki kez (3.1) denklemine uygulanırsa

$$Y(\omega_0, \lambda) = \int_{\omega_0}^t (t-s)(\lambda - p(s))Y(s, \lambda) d_{q, \omega} s. \quad (3.28)$$

elde edilir.

$Y(t, \lambda)$ ve $p(t)$ fonksiyonları ω_0 noktasında sürekli oldukları için,

$$\begin{aligned} P_{\lambda, t} &= \max_{n \in N} |Y(h^n(t), \lambda)|, \\ R_{\lambda, t} &= \max_{n \in N} |\lambda - p(h^n(t))|, \end{aligned} \quad (3.29)$$

olacak şekilde pozitif sayılar $P_{t, \lambda}, R_{t, \lambda}$ mevcuttur.

Tekrar matematiksel tümevarımla,

$$|Y(t, \lambda)| \leq P_{\lambda, t} R_{\lambda, t}^k q^{k^2} (1-q)^{2k} \frac{(t-\omega_0)^{2k}}{(q, q)_{2k}}, \quad k \in N, \quad t \in (\omega_0, b), \quad (3.30)$$

bulunur.

Nitekim eğer (3.30) ifadesi $k \in N$ içinde sağlanırsa, o zaman (3.28) denkleminde

$$\begin{aligned} |Y(t, \lambda)| &\leq P_{\lambda, t} R_{\lambda, t}^{k+1} q^{k^2} \frac{(1-q)^{2k}}{(q, q)_{2k}} \int_{\omega_0}^t (t-s)(s-\omega_0)^{2k} d_{q, \omega} s \\ &= P_{\lambda, t} R_{\lambda, t}^{k+1} q^{k^2} \frac{(1-q)^{2k}}{(q, q)_{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n (t(1-q) - \omega) (t - h^n(t)) (h^n(t) - \omega_0)^{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k+1} q^{k^2} \frac{(1-q)^{2k}}{(q,q)_{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n (1-q) (t-\omega_0) (1-q^n) (t-\omega_0) (q^n (t-\omega_0))^{2k} \\
&= P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k+1} q^{k^2} \frac{(1-q)^{2k+1} (t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2k+1)n} (1-q^n) \\
&= P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k+1} q^{k^2} \frac{(1-q)^{2k+1} (t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k}} \left(\frac{q^{(2k+1)} (1-q)}{(1-q^{2n+1}) (1-q^{2n+2})} \right) \\
&= P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k+1} q^{(k+1)^2} \frac{(1-q)^{2k+2} (t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k+2}},
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.30) $k + 1$ için geçerli olur. Sonuç olarak (3.30) tüm $k \in \mathbb{N}$ değerleri için doğrudur.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^k q^{k^2} (1-q)^{2k} \frac{(t-\omega_0)^{2k}}{(q,q)_{2k}} = 0$$

olduğundan her $t \in (\omega_0, b)$ için $Y(t, \lambda) = 0$ olur. Bu çözümün tekliğini ispatlıyor.

Son olarak, $\phi(t, \lambda), t \in (\omega_0, b)$ λ değişkenine göre tam fonksiyon olduğunu ispatlayalım. $t \in [\omega_0, b]$ için, keyfi bir pozitif ρ için $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonun her

$$D_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \rho\}$$

diskinde analitik olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $t \in [\omega_0, b]$ için hem $\varphi_m(t, \lambda)$ hem de $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_m(t, \lambda)$ D_ρ diski üzerinde analitik ve tüm $\lambda \in D_\rho$, için $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_m(t, \lambda)$ (ω_0, λ) noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $t \in (\omega_0, b)$ için $x_1(t, \lambda)$ ve $x_2(t, \lambda)$ λ değişkenine göre tam fonksiyonlarıdır. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\frac{\partial}{\partial \lambda} X_i(t, \lambda)$ (ω_0, λ) 'da süreklidirler. Dolayısıyla $m = 1$ için ifade doğrudur. İfadenin $m \geq 1$ için doğru olduğunu varsayalım. O zaman $t_0 \in (\omega_0, b)$, $\lambda_0 \in D_\rho$ için

$$\left. \frac{\partial \varphi_{m+1}(t_0, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$$

$$\begin{aligned}
&= q \frac{\partial x_2(t_0, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_{\omega_0}^{t_0} x_1(h(t), \lambda) \varphi_m(h(t), \lambda) d_{q, \omega} t + \frac{\partial \varphi_1(t_0, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\
&- q \frac{\partial x_1(t_0, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_{\omega_0}^{t_0} x_2(h(t), \lambda) \varphi_m(h(t), \lambda) d_{q, \omega} t \\
&+ q x_2(t_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_{\omega_0}^{t_0} x_1(h(t), \lambda) \varphi_m(h(t), \lambda) d_{q, \omega} t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\
&- q x_1(t_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_{\omega_0}^{t_0} x_2(h(t), \lambda) \varphi_m(h(t), \lambda) d_{q, \omega} t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir.

Tümevarımdan $\frac{\partial}{\partial \lambda} (X_i(t, \lambda) \varphi_m(h(t), \lambda)), i = 1, 2, (\omega_0, \lambda_0)$ 'da sürekli olduğu elde edilir. Bu nedenle, $D_\eta(\lambda_0) = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_0| < \eta\}$ olmak üzere

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_i(h^n(t_0), \lambda) \varphi_m(h^n(t_0), \lambda)) \right| < M, n \in N, \quad \lambda \in D_\eta(\lambda_0), \tag{3.32}$$

$M, \eta > 0$ sabitleri mevcuttur. Dolayısıyla her $\lambda \in D_\eta(\lambda_0)$ için

$$\begin{aligned}
&(t_0(1 - q) - \omega) q^n \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_i(h^{n+1}(t_0), \lambda) \varphi_m(h^{n+1}(t_0), \lambda)) \right| \\
&\leq (t_0(1 - q) - \omega) q^n M, \quad n \in N,
\end{aligned}$$

olur.

Buna bağlı olarak

$$\int_{\omega_0}^{t_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_i(h(t), \lambda) \varphi_m(h^m(t), \lambda) d_{q, \omega} t, \quad i = 1, 2, \tag{3.33}$$

q, ω – integrallerine karşılık gelen seriler $\lambda = \lambda_0$ bir komşuluk bölgesinde düzgün yakınsaktır. O zaman $\varphi_{m+1}(t_0, \lambda)$ λ_0 'da analitiktir. Şimdi (3.31)'deki diferansiyel ve integrasyon işlemlerininin sırasını değiştirebiliriz.

t_0 , ile λ_0 keyfi olduğundan her $t \in (\omega_0, b)$, $\lambda \in \Omega_M$ için

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_{m+1}(t, \lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(t, \lambda) + q \int_{\omega_0}^t \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_2(t, \lambda) x_1(h(s), \lambda) \varphi_m(h(s), \lambda)) p(h(s)) d_{q, \omega} s \\
&- q \int_{\omega_0}^t \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_1(t, \lambda) x_2(h(s), \lambda) \varphi_m(h(s), \lambda)) p(h(s)) d_{q, \omega} s
\end{aligned} \tag{3.34}$$

dir. Yine, tümevarımdan, (3.34)'daki integraller (ω_0, λ) 'da süreklidirler. Sonuç olarak $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_{m+1}(t, \lambda)$ (ω_0, λ) 'da süreklidirler. $t_0 \in [\omega_0, b]$ keyfi olsun. O zaman

$$|x_i(t_0, \lambda)| \leq \sqrt{\frac{\Upsilon(t_0)}{2}}, i = 1, 2, \quad |\varphi_1(t_0, \lambda)| \leq \beta(t_0), \quad \lambda \in D_\rho, \tag{3.35}$$

olacak şekilde $\Upsilon(t_0), \beta(t_0) > 0$ mevcuttur.

Sonuç olarak tümevarımdan

$$\begin{aligned}
&|\varphi_{m+1}(t_0, \lambda) - \varphi_m(t_0, \lambda)| \\
&\leq \beta(t_0) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AY(t_0)(t(1-q) - \omega))^m}{(q, q)_m}, \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.20) serileri $t = t_0$ için D_ρ 'de $\phi(t_0, \lambda)$ 'ya düzgün olarak yakınsar. Dolayısıyla $\phi(t_0, \lambda)$ D_ρ 'de analitiktir, yani tamdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\phi_1(\cdot, \lambda)$ ve $\phi_2(\cdot, \lambda)$ fonksiyonları

$\phi_1(\omega_0, \lambda) = 1, \quad D_{q, \omega} \phi_1(\omega_0, \lambda) = 0; \quad \phi_2(\omega_0, \lambda) = 0, \quad D_{q, \omega} \phi_2(\omega_0, \lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}$
başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözüm olsunlar.

B_1, B_2 rastgele sabitler olmak üzere (3.1) denkleminin her çözümü

$$y(t, \lambda) = B_1 \phi_1(t, \lambda) + B_2 \phi_2(t, \lambda), \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1) denkleminin bir $y(\cdot, \lambda)$ çözümü, (3.2)–(3.3) sınır koşullarını sağlıyorsa, yani,

$$B_1 U_1(\phi_1) + B_2 U_1(\phi_2) = 0, \tag{3.38}$$

$$B_1 U_2(\phi_1) + B_2 U_2(\phi_2) = 0. \tag{3.39}$$

lineer sistemi için aşikar olmayan bir çözüm elde edilebilirse öz fonksiyon olacaktır.

Bu nedenle, λ bir öz değerdir ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (3.1)– (3.3) probleminin karakteristik determinanı olarak adlandırılır.

$\Delta(\lambda)$ 'nın sıfırları tam olarak (3.1)–(3.3) probleminin özdeğerleridir.

Her bir sabit $t \in [\omega_0, b]$ için $\phi_1(t, \lambda)$ ve $\phi_2(t, \lambda)$ fonksiyonları λ değişkenine göre tam oldukları için, $\Delta(\lambda)'$ da tamdır. Bu nedenle, problemin özdeğerleri, sonlu limit noktaları olmaksızın sayılabilir sayıdadırlar.

Teorem 3.1.5. (3.1)–(3.3) probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ 'nın basit sıfırlarıdır (Annaby vd., 2018).

3.2. Singüler Hahn Sturm-Liouville Problemleri

Bu bölümde singüler durumdaki Hahn Sturm-Liouville problemi için Titchmarsh–Weyl teorisi verilecektir.

Şimdi λ karmaşık bir parametre, v $[\omega_0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve ω_0 noktasında sürekli, gerçel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\ell(y) := -q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega, q}y(x) + v(x)y(x) = \lambda y(x), x \in (\omega_0, \infty) \quad (3.40)$$

singüler Hahn Sturm-Liouville problemini ele alalım.

Teorem 3.2.1. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $x \in [\omega_0, \infty)$ için, (3.40) denklemin keyfi iki çözümünün ω, q -Wronskian ı x 'ten bağımsızdır.

İspat. y ve z fonksiyonları (3.40) denkleminin iki çözümü olsun. (3.4) denkleminde

$$\int_{\omega_0}^x \ell(y)\bar{z}d_{\omega, q}t - \int_{\omega_0}^x y\ell(\bar{z})d_{\omega, q}t = [y, z](x) - [y, z](\omega_0)$$

$$= W_{\omega, q}(y, \bar{z})(h^{-1}(x), \lambda) - W_{\omega, q}(y, \bar{z})(h^{-1}(\omega_0), \lambda).$$

elde edilir.

$\ell(y) = \lambda y$ ve $\ell(z) = z$, olduğundan aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0}^x \ell(y)z d_{\omega,q}t - \int_{\omega_0}^x y\ell(z)d_{\omega,q}t &= (\lambda - \lambda) \int_{\omega_0}^x y(t, \lambda)z(t, \lambda)d_{\omega,q}t = 0 \\ &= W_{\omega,q}(y, z)(h^{-1}(x), \lambda) - W_{\omega,q}(y, z)(h^{-1}(\omega_0), \lambda) \end{aligned} \quad (3.41)$$

O halde $W_{\omega,q}(y, z)(h^{-1}(x), \lambda) = W_{\omega,q}(y, z)(h^{-1}(\omega_0), \lambda)$ elde edilir.

Şimdi (3.40) denkleminin y çözümü için aşağıdaki sınır koşulu koyabiliriz:

$$D_{\omega,q}y(q^{-n}) \sin \alpha + y(q^{-n}) \cos \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}. \quad (3.42)$$

$0 \leq \zeta < \pi$ olmak üzere, $\chi(x, \lambda)$ ve $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonları (3.40) denkleminin

$$\begin{aligned} \chi(\omega_0, \lambda) &= \sin \zeta, \phi(\omega_0, \lambda) = \cos \zeta \\ D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}\chi(\omega_0, \lambda) &= -\cos \zeta, D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}\phi(\omega_0, \lambda) = \sin \zeta \end{aligned} \quad (3.43)$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Burada $W_{\omega,q}(\chi, \phi) = 1$ olduğundan χ and ϕ çözümleri lineer bağımsızdır (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Lemma 3.2.2. $x \in [\omega_0, \infty)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$\overline{\chi(x, \lambda)} = \chi(x, \bar{\lambda}), \overline{\phi(x, \lambda)} = \phi(x, \bar{\lambda})$$

İspat. Eğer $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.40) denkleminin bir çözümü ise

$$-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega,q}\chi(x, \lambda) + v(x)\chi(x, \lambda) = \lambda\chi(x, \lambda), x \in (\omega_0, \infty)$$

elde edilir. Kompleks eşlenik alırsak

$$-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega,q}\overline{\chi(x, \lambda)} + v(x)\overline{\chi(x, \lambda)} = \bar{\lambda}\overline{\chi(x, \lambda)}, x \in (\omega_0, \infty)$$

elde edilir.

(3.43) denkleminden $\overline{\chi(x, \lambda)}$ fonksiyonu

$$-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega,q}u(x) + v(x)u(x) = \bar{\lambda}u(x), x \in (\omega_0, \infty).$$

denkleminin bir çözümü olduğu görülür. Fakat $u = \chi(x, \bar{\lambda})$ fonksiyonu da (3.40) denkleminin (3.43) koşullarını sağlayan bir çözümdür. Çözümün tekliğinden istenilen sonuç elde edilir (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Lemma 3.2.3. Eğer $y(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.40) denkleminin bir çözümü ise aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$2i\sigma \int_{\omega_0}^b |y(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x = W_{\omega, q}(y, \bar{y})(h^{-1}(b), \lambda) - W_{\omega, q}(y, \bar{y})(h^{-1}(\omega_0), \lambda) \quad (3.44)$$

$$\sigma = \text{Im } \lambda, b > 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

İspat. (3.4) denkleminde $z(x, \lambda) = y(x, \lambda)$ yerine koyarsak, (3.41) denklemini elde ederiz. Böylece (3.44) denklemini bulunur.

Şimdi (3.43) denklemini kullanarak (3.40) denkleminin aşağıdaki gibi ϑ çözümünü oluşturacağız:

$$\vartheta(x, \lambda) = \chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda), x \in [\omega_0, \infty)$$

burada η sabit bir sayıdır. Eğer ϑ yi y için (3.42) denkleminde y yerine ϑ koyarsak aşağıdakini elde ederiz:

$$(\Omega + \eta f) \sin \alpha + (Y + \eta \Phi) \cos \alpha = 0 \quad (3.45)$$

Burada

$$\Omega = D_{\omega, q} \chi(q^{-n}, \lambda), f = D_{\omega, q} \varphi(q^{-n}, \lambda)$$

$$Y = \chi(q^{-n}, \lambda), \Phi = \varphi(q^{-n}, \lambda) (n \in \mathbb{N})$$

dir. O halde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\eta = -\frac{Y \cos \alpha + \Omega \sin \alpha}{\Phi \cos \alpha + f \sin \alpha} \quad (3.46)$$

η fonksiyonu, λ değişkenine göre meromorf bir fonksiyonudur çünkü $\chi(x, \lambda)$ ve $\phi(x, \lambda)$ λ değişkenine göre tam fonksiyonlardır.

Ayrıca, regüler problemin özdeğerleri gerçel olduğundan, η 'nın bütün kutupları gerçel ve basittir. Eğer $\cot \alpha$ karmaşık bir z değişkeni ile yer değiştirilirse,

$$\eta = -\frac{Yz + \Omega}{\Phi z + f} \quad (3.47)$$

elde edilir. Möbius dönüşümleri teorisinden (Knopp, 1952) (3.47) denkleminin her λ için z 'de bire-bir konform dönüşümdür. Dolayısıyla η denklemi karmaşık düzlemde bir $C_{q^{-n}}$ çemberi tanımlar.

Şimdi artık $C_{q^{-n}}(n \in \mathbb{N})'$ nin merkezini ve yarıçapını bulalım. Sırasıyla $C_{q^{-n}}(n \in \mathbb{N})$ çemberlerinin yarıçapını ve merkezini r_n , Θ_n , ile gösterelim.

Teorem 3.2.4. $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\sigma = \text{Im } \lambda \neq 0$ olmak üzere aşağıdakileri elde ederiz.

$$\Theta_n(\lambda) = -\frac{W_{\omega,q}(\chi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}, \quad (3.48)$$

$$r_n(\lambda) = \left(2\sigma \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q} x \right)^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.49)$$

İspat. $\Theta_n(\lambda)(n \in \mathbb{N})$ ∞ da bir simetrik noktadır. z' ve z'' z -düzleminde ve

$$\eta(\lambda, z') = \infty, \quad \eta(\lambda, z'') = \Theta_n(\lambda)$$

olsun. O halde z' ve z'' z - düzleminin gerçel eksenine göre simetrik olmalıdır, yani $z' = \overline{z''}$. Fakat $\eta(\lambda, z') = \infty$ ancak ve ancak

$$z' = -\frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)}$$

dir. Dolayısıyla aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \Theta_n(\lambda) &= \eta\left(\lambda, -\frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)}\right) = -\frac{\chi(q^{-n}, \lambda)\left(-\frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)}\right) + D_{\omega,q}\chi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)\left(-\frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)}\right) + D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)} \\ &= -\frac{\chi(q^{-n}, \lambda)D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \bar{\lambda}) - \varphi(q^{-n}, \bar{\lambda})D_{\omega,q}\chi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \bar{\lambda}) - \varphi(q^{-n}, \bar{\lambda})D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)} \\ &= -\frac{W_{\omega,q}(\chi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$r_n(\lambda)$ nın $C_{q^{-n}}$ in merkezi ile $C_{q^{-n}}(\lambda)$ üzerindeki $\eta(\lambda, 0)$ noktası arasındaki uzaklık olduğu açıktır.

$W_{\omega,q}(\chi, \varphi)(q^{-n}) = 1(n \in \mathbb{N})$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} r_n(\lambda) &= \left| \frac{D_{\omega,q}\chi(q^{-n}, \lambda)}{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)} - \frac{W_{\omega,q}(\chi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| = \left| \frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \bar{\lambda})W_{\omega,q}(\chi, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| \\ &= \left| \frac{W_{\omega,q}(\chi, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| = \frac{1}{|W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)|} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3 den aşağıdaki sonuca ulaşıyoruz:

$$W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda) = 2i\sigma \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q}x$$

Böylece aşağıdakini elde ederiz:

$$|W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)| = 2|\sigma| \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q}x$$

(Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.5. $\lambda = \rho + i\sigma$. olsun. Eğer $\text{Im } \lambda = \sigma > 0$, ise, o halde üst yarı düzlem $C_{q^{-n}}(n \in \mathbb{N})$ çemberinin dışıyla eşleşir.

İspat. ω, q -Wronskian tanımından aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)} \right\} &= \frac{1}{2}i \left\{ -\frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda)}{\varphi(q^{-n}, \lambda)} + \frac{D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \bar{\lambda})}{\varphi(q^{-n}, \bar{\lambda})} \right\} \\ &= \frac{1}{2}i \frac{W_{\omega,q}(\bar{\varphi}, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{|\varphi(q^{-n}, \lambda)|^2} = -\frac{1}{2}i \frac{W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{|\varphi(q^{-n}, \lambda)|^2} \\ &= \frac{\sigma}{|\varphi(q^{-n}, \lambda)|^2} \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q}x > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

yani, eğer $\sigma > 0$ ise, $C_{q^{-n}}(\lambda)$ nın dışı, z-düzleminin üst yarı-düzlemine eşlenir.

(Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.6. $\text{Im } \lambda = \sigma > 0$ olsun, O halde $\eta \in C_{q^{-n}}(n \in \mathbb{N})$ çemberleri üzerinde bulunur ancak ve ancak

$$\int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q}x = \frac{\text{Im } \eta}{\sigma} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.50)$$

dir. $\eta \in C_{q^{-n}}$ çemberinin içisindedir ancak ve ancak

$$\int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q}x < \frac{\text{Im } \eta}{\sigma} \quad (n \in \mathbb{N})$$

dir.

İspat. $\eta \in \mathbb{C}$ olsun. O halde aşağıdakini elde ederiz:

$$W_{\omega,q}(\chi + \eta\varphi, \overline{\chi + \eta\varphi})(\omega_0, \lambda) = W_{\omega,q}(\chi, \bar{\chi})(\omega_0, \lambda) + \eta W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\chi})(\omega_0, \lambda) + \bar{\eta} W_{\omega,q}(\chi, \bar{\varphi})(\omega_0, \lambda) + |\eta|^2 W_{\omega,q}(\varphi, \bar{\varphi})(\omega_0, \lambda) = -\eta + \bar{\eta} = -2i \operatorname{Im} \eta \quad (3.51)$$

Lemma 3.2.3 den

$$2\sigma \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q} x = \frac{1}{i} (W_{\omega,q}(\chi + \eta\varphi, \chi + \eta\varphi)(q^{-n}, \lambda) + 2i \operatorname{Im} \eta) (n \in \mathbb{N}). \quad (3.52)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5 e göre eğer $\operatorname{Im} z < 0$ ise, $v > 0$ olmak üzere η noktası $C_{q^{-n}}(n \in \mathbb{N})$ nin içindedir (3.47) dan aşağıdaki elde edilir

$$z = -\frac{\Omega + \eta f}{Y + \eta\Phi}, \quad \eta = -\frac{Yz + \Omega}{\Phi z + f},$$

burada

$$\Omega = D_{\omega,q}\chi(q^{-n}, \lambda), \quad f = D_{\omega,q}\varphi(q^{-n}, \lambda), \\ Y = \chi(q^{-n}, \lambda), \quad \Phi = \varphi(q^{-n}, \lambda) \quad (n \in \mathbb{N})$$

dir. Dolayısıyla,

$$i(z - \bar{z}) = i \left\{ -\frac{\Omega + \eta f}{Y + \eta\Phi} + \frac{\bar{\Omega} + \bar{\eta}\bar{f}}{\bar{Y} + \bar{\eta}\bar{\Phi}} \right\} = i \frac{W_{\omega,q}(\chi + \eta\varphi, \overline{\chi + \eta\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{|Y + \eta\Phi|^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

O zaman, $\operatorname{Im} z < 0$ ancak ve ancak

$$iW_q(\chi + \eta\varphi, \overline{\chi + \eta\varphi})(q^{-n}, \lambda) > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.53)$$

olur.

(3.52) ve (3.53) denklemlerinden şu sonuca ulaşırız

$$\int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega,q} x < \frac{\operatorname{Im} \eta}{\sigma} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.54)$$

Öte yandan, η , $C_{q^{-n}}$ çemberi üzerindedir ancak ve ancak $\operatorname{Im} z = 0$. Dolayısıyla aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$W_{\omega,q}(\chi + \eta\varphi, \overline{\chi + \eta\varphi})(q^{-n}, \lambda) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.55)$$

(3.55) i (3.52) de yerine koyarsak eşitlik (3.50) yi elde ederiz. (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.7. $\text{Im } \lambda = \sigma > 0$ olsun. $C_{q^{-n}}$ çemberleri $n \rightarrow \infty$ için iç içe geçmiştir.

İspat. $q^{-k} < q^{-n}$ olacak şekilde başka bir k noktası düşünelim. (3.52) yi kullanarak aşağıdakini yazabiliriz:

$$\int_{\omega_0}^{q^{-k}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x < \int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x < \frac{\text{Im } \eta}{\sigma}.$$

Bu da η noktasının $C_{q^{-n}}$ çemberi içerisinde olması gerektiği anlamına gelmektedir. (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Sonuç 3.2.8. $C_{q^{-n}}$ çemberleri $n \rightarrow \infty$ için ya bir çembere ya da bir noktaya yakınsar. (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Tanım 3.2.9. Eğer C_∞ bir nokta ise o halde denklem (3.40) ın limit nokta durumunda olduğu söylenir. Benzer şekilde, eğer C_∞ bir çember ise o halde denklem (3.40) ın limit çember durumunda olduğu söylenir. (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.10. η C_∞ limit çemberinin üzerinde veya içinde bulunan bir nokta olsun ve

$\Psi(x, \lambda) := \chi(x, \lambda) + \eta\phi(x, \lambda)$, $\text{Im } \lambda = \sigma > 0$ fonksiyonu (3.40) denkleminin çözümü olsun. O halde $\Psi(\cdot, \lambda) \in L^2_{\omega, q}(\omega_0, \infty)$, yani,

$$\int_{\omega_0}^{\infty} |\chi(x, \lambda) + \eta\varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x < \infty.$$

Burada η fonksiyonuna Titchmarsh–Weyl fonksiyonu ve $\Psi(x, \lambda)$ fonksiyonuna (3.40) denkleminin bir Weyl çözümü denir.

İspat. η C_∞ limit çemberinin üzerinde veya içinde bulunan bir nokta olsun, o halde aşağıdakini elde ederiz:

$$\int_{\omega_0}^{q^{-n}} |\chi(x, \lambda) + \eta \varphi(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x < \frac{\text{Im } \eta}{\sigma} (n \in \mathbb{N}) \quad (3.56)$$

(3.56) nın sağı tarafı q^{-n} noktasından bağımsız olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alabiliriz ve aşağıdakini elde ederiz:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} |\Psi(x, \lambda)|^2 d_{\omega, q} x < \frac{\text{Im } \eta}{\sigma}$$

bu da ispatı tamamlar. (Allahverdiyev ve Tuna, 2021).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde singüler durumdaki Hahn Sturm-Liouville operatörlerini çalışacağız. Sınır koşulları yardımıyla bu operatörün sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu uzay yardımıyla simetrik Hahn Sturm-Liouville operatörünün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilecektir.

Şimdi

$$\ell(y) := -q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega, q}y(x) + v(x)y(x) = \lambda y(x), x \in (\omega_0, \infty) \quad (4.1)$$

Hahn Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım. Burada $v(\cdot)$ fonksiyonu $[\omega_0, \infty)$ aralığı üzerinde reel-değerli ve ω_0 noktasında sürekli bir fonksiyondur. (4.1) denkleminde operatöre geçiş yapmak için,

$$\langle f, g \rangle := \int_{\omega_0}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}d_{q, \omega}t,$$

iç çarpımı yardımıyla $L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)$ Hilbert uzayını göz önüne alalım (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Şimdi (4.1) denkleminde karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanım kümelerini verelim.

$$D_{max} = \left\{ y \in L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty) : \begin{array}{l} y \text{ ve } D_{q, \omega}y \text{ fonksiyonları } (\omega_0, \infty) \text{ üzerinde tanımlı,} \\ \text{ve } \omega_0 \text{ noktasında sürekli,} \\ \ell(y) \in L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty) \end{array} \right\}.$$

$$D_{min} = \left\{ y \in D_{max} : y(\omega_0) = D_{\frac{1}{q}, -\omega}y(\omega_0) = 0, [y, z]_{\infty} = 0 \forall z \in D_{max} \right\}.$$

D_{max} kümesi üzerinde $L_{max}y = \ell y$ ile L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım.

Eğer L_{max} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak L_{min} minimal operatörü elde edilir.

$L_{min}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatördür (Naimark, 1968).

L_{min} simetrik operatörü Weyl'in limit-çember durumunda olsun.

$\ell(y) = 0$ denkleminin,

$$u_1(\omega_0) = 1, \quad (D_{q,\omega}u_1)(\omega_0) = 0, \quad u_2(\omega_0) = 0, \quad (D_{q,\omega}u_2)(\omega_0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ olarak gösterelim.

Açıktır ki $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ lineer bağımsızdır ve onların Wronskian 1 e eşittir;

$$W_{q,\omega}[u_1, u_2](t) = W_{q,\omega}[u_1, u_2](\omega_0) = 1, \quad (t \in [\omega_0, \infty)).$$

Şimdi,

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(\omega_0) \\ [y, u_1]_\infty \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} \frac{D_{\frac{1}{q'}, -\omega} y(\omega_0)}{[y, u_2]_\infty} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.1. (4.2) dönüşümleri ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü, $\mathbf{L}_{\min}$ operatörünün sınır değer uzayıdır.

Sınır değer uzayının ilk koşulunu ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlamamız gerekiyor.

Lemma 4.2. $y(t), w(t) \in D_{max}$ keyfi fonksiyonlar için

$$[y, \bar{w}]_t = [y, u_1]_t \cdot [\bar{w}, u_2]_t - [y, u_2]_t \cdot [\bar{w}, u_1]_t, \quad \omega_0 \leq t \leq \infty \quad (4.3)$$

dır.

İspat. $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ reel değerli fonksiyonları için

$$[y, u_1]_t \cdot [\bar{w}, u_2]_t - [y, u_2]_t \cdot [\bar{w}, u_1]_t$$

$$= (y(t)D_{\frac{1}{q'}, -\omega}u_1(t) - D_{\frac{1}{q'}, -\omega}y(t)u_1(t)) \left(\overline{w(t)}D_{\frac{1}{q'}, -\omega}u_2(t) - \overline{D_{\frac{1}{q'}, -\omega}w(t)}u_2(t) \right)$$

$$- (y(t)D_{\frac{1}{q'}, -\omega}u_2(t) - D_{\frac{1}{q'}, -\omega}y(t)u_2(t)) \left(\overline{w(t)}D_{\frac{1}{q'}, -\omega}u_1(t) - \overline{D_{\frac{1}{q'}, -\omega}w(t)}u_1(t) \right)$$

$$= y(t) \overline{D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} w(t)} - D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} y(t) \overline{w(t)} = [y, \bar{w}]_t, \quad \omega_0 \leq t \leq \infty$$

elde edilir.

$\forall y(t), w(t) \in D_{max}$ için

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = -y(\omega_0) \overline{\left(D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} w(\omega_0) \right)} + D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} y(\omega_0) \overline{w(\omega_0)} + [y, u_1]_{\infty} \cdot [\bar{w}, u_2]_{\infty} - [y, u_2]_{\infty} \cdot [\bar{w}, u_1]_{\infty}$$

Lemma 4.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = [y, \bar{w}]_{\infty} - [y, \bar{w}]_{\omega_0}$$

(3. 4) denklemi kullanılarak

$$(L_{max} y, w)_{L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)} - (y, L_{max} w)_{L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece sınır değer uzayının ilk şartı yerine getirilmiştir. İkinci şartı aşağıdaki lemma kullanılarak ispatlanır.

Lemma 4.3. Keyfi ρ_0, ρ_1, δ_0 ve δ_1 kompleks sayıları için

$$y(\omega_0) = \rho_0, \quad D_{\frac{1}{q'}, \frac{1}{q}} y(\omega_0) = \rho_1, \quad [y, u_1]_{\infty} = \delta_0, \quad [y, u_2]_{\infty} = \delta_1 \quad (4.5)$$

şartlarını sağlayan bir $y \in D_{max}$ fonksiyonu vardır.

İspat.

$$(f, u_1)_{L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)} = \delta_0 + \rho_1 \quad (f, u_2)_{L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)} = \delta_1 - \rho_0 \quad (4.6)$$

sağlayan bir $f(t) \in L^2_{q, \omega}(\omega_0, \infty)$ fonksiyonunu dikkate alalım. Böyle bir fonksiyon u_1 ve u_2 fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak bulunabilir.

$$y(\omega_0) = \rho_0, \quad D_{\frac{1-\omega}{q'}} y(\omega_0) = \rho_1$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\ell(y) = f(t)$ denkleminin çözümünü $y_1(t)$ ile gösterelim.

Bu çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_1(t) = \rho_0 u_1(t) + \rho_1 u_2(t) + \int_0^t \{u_1(t) u_2(\xi) - u_1(\xi) u_2(t)\} f(\xi) d_{q,\omega} \xi.$$

Bu ifade gösterir ki $y_1(t) \in L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)$ dir. (3. 4) denkleminde

$$\begin{aligned} (f, u_j)_{L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)} &= (\ell(y_1), u_j)_{L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)} \\ &= [y_1, u_j]_{\infty} - [y_1, u_j]_{\omega_0} + (y, \Gamma(u_j))_{L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir.

$$j = 1, 2 \text{ için } \ell(u_j) = 0, \text{ ve } y_1(\omega_0) = \rho_0, \quad D_{\frac{1-\omega}{q'}} y(\omega_0) = \rho_1 \text{ olduğundan}$$

$$[y_1, u_j]_{\infty} = \begin{cases} -\rho_1, & j = 1 \\ \rho_0, & j = 2 \end{cases}$$

elde edilir. O zaman

$$(f, u_1)_{L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)} = [y_1, u_1]_{\infty} + \rho_1$$

$$(f, u_2)_{L^2_{q,\omega}(\omega_0, \infty)} = [y_1, u_2]_{\infty} - \rho_0$$

buluruz. (4.6) ifadesinden

$$[y_1, u_1]_{\infty} = \delta_0 \text{ ve } [y_1, u_2]_{\infty} = \delta_1$$

elde edilir:

Böylece, Lemma 4.3 ve Teorem 4.1 ispatlandı. Teorem 4.1 ve Teorem 2.15 kullanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise $L_{\min}$ operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.8)$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.9)$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.8) ve (4.9) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (4.8) ve (4.9) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini verir.

Eğer (4.8) ve (4.9) ifadesindeki K operatörü üniter olursa $L_{\min}$ operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}D_{\omega, q}y(x) + v(x)y(x) = \lambda y(t), \quad t \in [0, \infty)$$

formundaki singüler Hahn- Sturm-Liouville differensiyel denklemleri ele alındı. Burada $v(\cdot)$ fonksiyonu $[\omega_0, \infty)$ aralığı üzerinde reel-değerli ve ω_0 noktasında sürekli bir fonksiyondur. Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal ve maximal operatör oluşturuldu. Weyl limit-çember durumunda, yani indis defektin (2,2) olduğu durumda operatörün sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma singüler Hahn- Sturm-Liouville differensiyel denklemlerinin Weyl limit-nokta durumu için yani indis defektin (1,1) olduğu durumda yapılarak araştırma genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Volume I. Frederick Ungar, New York.
- Allahverdiev B. P., 2016. Spectral problems of non-self-adjoint q -Sturm–Liouville operators in limit-point case, *Kodai Mathematical Journal* 39, 1–15.
- Allahverdiev, B. P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potentials, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Serriya Matematicheskaya* 59, 19-54 (English translet in *Izvestiya Mathematics* 59, 45-62).
- Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference Operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations Applications* 19, 5, 839-849.
- Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62, 9, 1146-1152.
- Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30, 6, 1475-1484.
- Allahverdiev, B. P. , Tuna, H. 2021, Titchmarsh-Weyl Theory of the Singular Hahn-Sturm-Liouville Equation, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 23, 3, 6-26.
- Annaby, M. H., Hamza, A. E. and Aldwoah, K. A., 2012 Hahn Difference Operator and Associated Jackson– Nörlund Integrals, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154, 1, 133–153.
- Annaby, M. H., Hamza, A. E. and Makhraresh, S. D., 2018. A Sturm–Liouville Theory for Hahn Difference Operator, *Frontiers of Orthogonal Polynomials and q -Series*, Singapore, World Scientific, 35–84.
- Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izvestiya Akademii Nauk Azerb. SSR Serriya Fiziko-Tekhnicheskiki Matematicheskikh Nauk* 2,140-143.
- Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Mathematical*, 38, 4, 431-450.
- Bruk, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, *Mathematics Sbornik*, 100, 210-216.
- Gaspar G. and Rahman M., 1990. Basic Hypergeometric Series (Cambridge University Press, New York).
- Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N. and Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of

differential operators in a space of vector-valued functions, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 205,1029-1032 (English translet in, Soviet Mathematics Doklady 13(1972),1063-1067).

Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I., 1984. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev (English translet in 1991, Birkhauser Verlag).

Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal* 41, 1299-1312 (English translet in Ukrainian Mathematical Journal 41, 1989), 1117-1129.

Hahn, W. Uber., 1949. Orthogonalpolynome, die " q-Differenzengleichungen" genügen, *Mathematische Nachrichten*, 2, 1–2, 4–34.

Hamza, A. E. and Ahmed, S. A., 2013 Theory of Linear Hahn Difference Equations, *Journal of Advances in Mathematics*, 4, 2, 440–460.

Hamza, A. E. and Ahmed, S. A., 2013 a Existence and Uniqueness of Solutions of Hahn Difference Equations, *Advances in Difference Equations*, 2013, 316, 1, 1–15.

Hamza, A. E. and Makharesh, S. D., 2016 Leibnizs Rule and Fubinis Theorem Associated with Hahn Difference Operator, *Journal of Advances Mathematics*, 12, 6, 6335- 6345.

Jackson, F. H., 1910. q-Difference Equations, *American Journal of Mathematics*, 32, 305–314.

Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications I, *Mathematics Sbornik* 20, 431-495; II, *Mathematics Sbornik* 21, 365-404.

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, *Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 16, 292-324.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York.

Knopp, K., 1952. Elements of the Theory of Functions, New York, Dover.

Neumann, J. von., 1929. Allgemeine Eigenwer theorie Hermitischer Functional operatoren, *Mathematische Annalen* 102, 49-131.

Rellich, F., 1951. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', *Mathematische Annalen* 122, 343-368.

Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space

of vector valued functions, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 184, 1034-1037 (English translation in *Soviet Mathematics Doklady* 10 (1969), 188-192).

Titchmarsh, E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Part I*, 2nd Edition, Oxford, Clarendon Press, 1962.

Tuna H. 2013, "Lim-3 Durumundaki 4. Mertebe Operatörlerin Dissipatif Genişlemeleri", *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 2, 2, 75-79.

Tuna H. and Bayrak S., 2018. On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales. *Filomat*, 32, 11, 3843–3851.

Tuna H. and Allahverdiev B. P., 2018. Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, 16, 1, 275-285.

Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations, *Trudy Moskov. Matematicheskoy Obshch.*, 1, 187-246.

Weyl, H. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Mathematische Annalen*, 1910, 68, 2, 220–269.