



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

SİNGÜLER KONFORM KESİRLİ MERTEBE STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Canan ERDOĞAN

BURDUR, 2021

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SİNGÜLER KONFORM KESİRLİ MERTEBE
STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
GENİŞLEMELERİ**

Canan ERDOĞAN

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2021

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Singüler Konform Kesirli Mertebe Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.././

Canan ERDOĞAN

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ocak, 2021

Canan ERDOĞAN

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET.....	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ... ..	1
2.MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Konform Kesirli Türevler	5
2.2. Konform Kesirli İntegraller	11
3. SINIR DEĞER UZAYLARI VE DİSİPATİF GENİŞLEMELER.....	18
3.1.Disipatif Genişlemeler	18
3.2. Lineer Bağıntılar	22
3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler	25
4. SİNGÜLER KONFORMKESİRLİ MERTEBEDEN STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ.....	29
4.1. Hilbert Uzayı	30
4.2. Temel çözümler	32
4.3. Limit-Nokta Kriteri	35
5. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	40
6. SONUÇ.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	48

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T_α	: Konform Kesirli Türev
T_α^a	: Konform Soldan Kesirli Türev
${}^bT_\alpha$	: Konform Sağdan Kesirli Türev
I_α	: Konform Kesirli İntegral
I_α^a	: Konform Soldan Kesirli İntegral
${}^bI_\alpha$	: Konform Sağdan Kesirli İntegral
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$W_\alpha[f, g]$	: f ile g fonksiyonlarının konform-Wronskian'ı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Singüler Konform Kesirli Mertebe Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri
Canan ERDOĞAN

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ocak, 2021

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, sınır değer uzayı ve dissipatif genişlemelerin temel tanım ve özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde, singüler konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemi için Weyl teorisi verilmiştir.

Son olarak, singüler konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konform kesirli kalkülüs, Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Extensions of Singular Conformable Fractional Sturm-Liouville Operator

Canan ERDOĞAN

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

January, 2020

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, basic definitions and properties of a space of boundary value and dissipative extension are given.

In the fourth section, Weyl's theory for the singular conformable fractional Sturm-Liouville equation is given.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self-adjoint and, other extensions of singular conformable fractional Sturm-Liouville operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: conformable fractional calculus, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions.

1. GİRİŞ

Yakın zamanlarda çeşitli bilim dallarında çalışan araştırmacılar, uğraştıkları sistemler için modelleme yaparken klasik türev yerine kesirli mertebeye türevi kullanmanın daha iyi sonuçlar verdiğini gözlemleyerek, kesirli mertebeden hesaplamalar ile yakından ilgilenmeye başlamışlardır. Kesirli mertebeden kalkülüs mertebesi tamsayı olmayan türev ve integrali içine alır. Kesirli mertebeden türev kavramı ilk olarak 17. yüzyılın sonlarında Fransız matematikçi L'Hopital'in Leibniz'e sorduğu $n = 1/2$ için n . mertebeden türev ne demektir sorusuyla literatüre girmiştir. Günümüze kadar pek çok kesirli mertebeden türev tanımını ortaya konulmuştur (Kilbas, vd., 2006; Miller, 1993). Bu tanımlardan en çok kullanılanları, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev tanımlarıdır. Bu tanımlardaki kesirli türev adı türevin iyi bilinen özelliklerini (örneğin iki fonksiyonun çarpımının türevi, bölümünün türevi, bileşke fonksiyonlar için zincir kuralı gibi) sağlamamaktadır. Bu yüzden matematikçiler kesirli mertebeden türev için yeni bir tanım arayışına girmişlerdir. 2014 yılında Khalil ve arkadaşları (Khalil, vd., 2014) konform kesirli türev ve konform kesirli integral tanımı verdiler. Bu tanım adı türevin tanımındaki limit formuna dayanmaktadır. Konform kesirli mertebeye türev için adı türevin temel özellikleri (çarpımın türevi, toplamın türevi, bölümün türevi, ortalama değer teoremi, Rolle teoremi) ispatlamışlardır. Bu çalışmadan bir yıl sonra Abdeljawad (Abdeljawad, 2015) bu yeni konform kesirli mertebeden kalkülüs teorisini geliştirerek zincir kuralı, üstel fonksiyonlar, Gronwall eşitliği, kısmi integrasyon, Taylor kuvvet serisi açılımı, Laplace dönüşümünün konform kesirli kalkülüs versiyonlarını vermiştir. Aynı zamanda Anderson ve Ulness (Anderson ve Ulness, 2015) konform kesirli türev kavramını genelleştirerek birim operatörü içeren bir yapı ortaya koymuştur.

2019 yılında Allahverdiev vd. (Allahverdiev vd., 2019), regüler konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemini ele aldılar. Bu türden denklemler için varlık ve teklik teoremi ispatlanmıştır. Kendine eş konform kesirli mertebeye Sturm-Liouville problemi formüle edilmiştir. Bu problem için Green fonksiyonu oluşturulmuş ve öz fonksiyon açılımları verilmiştir.

Baleanu v.d (Baleanu vd., 2019), dağılımlı potansiyele sahip singüler kesirli mertebeden dizisel denklemler için Weyl teorisini vermişlerdir.

Simetrik operatörlerin genişleme problemi operatörler teorisinin ilginç problemlerden birisidir. J. Von Neumann (von Neumann, 1929), 1929 yılında simetrik operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili ilk sonuçları elde etmiştir. Von Neumann bu çalışmasında hangi koşullar altında simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl yapılacağını göstermiştir. Rellich (Rellich, 1951), Krein (Krein, 1947, 1952), Vishik (Vishik, 1952), Birman (Birman, 1956), Phillips (Phillips, 1959), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır.

Lineer bağıntılar yardımıyla simetrik operatörlerin genişlemesiyle ilgili ilk sonuçlar Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) tarafından elde edildi. Bu metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984), Allahverdiev (Allahverdiev, 1995, 2013, 2014, 2016, 2019), Tuna (Tuna, 2013), Tuna ve Bayrak (Tunave Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018), Allahverdiev vd. (Allahverdiev, Tuna and Yalçinkaya, 2020) ve Kholkin (Kholkin, 1981) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk, vd., 1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bkz: Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk, vd., 1989).

Bu tez çalışmasında, singüler durumda konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville simetrik operatörü ele alınmıştır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, maksimal akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Lineer uzaylarda tanımlanmış olan dönüşümlere operatör denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.2. U , bir kompleks lineer uzay olsun. Her $u, v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ için

1. $(u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$

şartlarını sağlayan ve (u, v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının *iç çarpımı* denir ve U lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

Ayrıca verilen bu özellikleri dikkate aldığımızda $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de yazılabilir. (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.3. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad (2.1)$$

normuna göre tam ise, yani $(U, (.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi U ' nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. Bir U iç çarpım uzayında

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad (2.2)$$

ifadesi bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur. Sayılabilir, tam ortonormal sistem içeren iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve H ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.5. Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin.

$$\forall u \in H \text{ için, } \|Tu\| \leq k\|u\|, \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan bir k sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \quad (2.4)$$

eşitliği ile de hesaplanabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.6. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olsun. T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \quad (2.5)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T 'nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörlerinden oluşan kümeye de T 'nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\text{i. } (T^*)^* = T$$

$$\text{ii. } (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$$\text{iii. } (T + L)^* = T^* + L^*$$

$$\text{iv. } (T)^* = L^* T^*$$

$$\text{v. } \|T^*\| = \|T\| \quad (T \text{ sınırlı iken})$$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. $T^* = T$ ise, T ye *kendine eş operatör* adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.8. A lineer operatörünün tanım kümesi $\mathcal{D}(A)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun.

$$\forall f \in \mathcal{D}(A), \operatorname{Im}(Af, f) \geq 0 \quad (2.6)$$

ise, A lineer operatörüne disipatif(dissipative) operatör denir.

$$\forall f \in \mathcal{D}(A), \operatorname{Im}(Af, f) \leq 0 \quad (2.7)$$

ise, A lineer operatörüne akretif(accelerative) operatör denir (Gorbachuc ve Gorbachuk, 1991).

A lineer operatörü akretif(accelerative) operatördür ancak ve ancak A disipatif(dissipative) operatördür.

Eğer A disipatif(akretif) operatörü kendinden farklı disipatif(akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif(akretif) operatör denir.

Disipatif operatörler daima kapanabilir. Disipatif operatörlerin kapanışı da disipatifdir. Maksimal disipatif operatörler daima kapalıdır.

2.2. Konform Kesirli Türevler

Tanım 2.2.1. Mertebesi $\alpha \in (0,1)$ olan $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun “konform kesirli türevi”

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \forall t > 0 \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Eğer $f, a > 0$ için $(0, a)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa, o zaman $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ ile tanımlanır (Khalil vd., 2014).

Bir fonksiyonu $\alpha = 0$ mertebeden türevi fonksiyonun kendisine eşit değildir. Gerçekten de

$$(T_0 f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f[t(1+\varepsilon)] - f(t)}{1+\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

dir.

Yukarıdaki denklemdeki birinci çarpan, mertebesi 1 olan kuantum türeve karşılık gelir, ikinci çarpan ise ∞ gider (Ortigueira ve Tenreiro Machado, 2014).

Teorem 2.2.2. $\alpha \in (0,1]$, $t_0 > 0$ olmak üzere eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t_0 noktasında α -türevlenebilir ise o zaman t_0 noktasında f süreklidir (Khalil vd., 2014).

İspat: Öncelikle

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

eşitliğinden

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazabiliriz. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alırsak,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

bulunur. Bu eşitlikten de

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

elde edilir. Bu da demektir ki t_0 noktasında f süreklidir.

Teorem 2.2.3. $\alpha \in (0,1]$ için f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α -diferansiyellenebilir olsun. O halde

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \forall a, b \in \mathbb{R}.$
2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}.$
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, her sabit fonksiyon $f(t) = \lambda$.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f).$
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}.$
6. Ayrıca f türevlenebilirse, o zaman $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ (Khalil vd., 2014)

özellikleri sağlanır.

İspat:

(1)-(3) özellikler tanımdan kolayca elde edilir. (4) ve (6)'yı ispat edelim. Şimdi, sabit $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \cdot g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$$

$$= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha(g)(t)$$

dir. g, t 'de sürekli olduğundan dolayı $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir. (4)'ün ispatı tamamlanır.

(5) de benzer şekilde ispatlanır.

(6) ispat etmek için Tanım 2.2.1 deki $h = \varepsilon^{1-\alpha}$ seçelim. O halde $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ olur. O halde

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \right)$$

$$= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \text{ olur.}$$

Şimdi aşağıda bazı fonksiyonların konform kesirli türevini verelim:

1. $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, c \in \mathbb{R}.$
2. $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx, b \in \mathbb{R}.$
3. $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx, b \in \mathbb{R}.$
4. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1,$
5. $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha,$
6. $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha,$
7. $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}, (\text{Khalil vd., 2014}).$

Tanım 2.2.4. Mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ olan $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasındaki soldan konform kesirli türevi,

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. $a = 0$ için T_α ile gösterilir. Eğer (a, b) üzerinde $(T_\alpha f)(t)$ varsa

$$(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$$

dir.

Mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ olan $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun b noktasındaki sağdan konform kesirli türevi,

$$({}^bT_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) de $({}^bT_\alpha f)(t)$ varsa, o zaman

$$({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^bT_\alpha f)(t)$$

olur. (Abdeljawad, 2014).

Tanım 2.2.5. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(f^{(n)}(t))$ mevcut olan) a noktasındaki α –mertebeden soldan kesirli türevi,

$$(\mathbf{T}_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır.

Burada $a = 0$ yazarsak $\mathbf{T}_\alpha$ olur. f fonksiyonunun $(f^{(n)}(t))$ mevcut olan) b noktasındaki α mertebeden sağdan kesirli türevi,

$$({}^b\mathbf{T}_\alpha f)(t) = (-1)^{n+1} ({}^bT_\beta f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

Dikkat edelirse, $\alpha = n+1$ alırsak o zaman $\beta = 1$ ve f 'in kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ (veya $\alpha \in (0,1)$) için $\beta = \alpha$ olur ve Tanım 2.2.2 elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Teorem 2.2.6. (Zincir Kuralı): $0 < \alpha \leq 1$ için $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları soldan α –türevlenebilir ve $h(t) = f(g(t))$ olsun. O halde $h(t)$ fonksiyonu soldan α –türevlenebilirdir ve

$$\forall t, t \neq a, g(t) \neq 0, (T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \quad (2.11)$$

dir. Eğer $t = a$ ise,

$$(T_\alpha^a h)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \quad (2.12)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımda $u = t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}$ alınırsa ve g fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (T_\alpha^a h)(t) &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{u - t} t^{1-\alpha} \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{g(u) - g(t)} \cdot \lim_{u \rightarrow t} \frac{g(u) - g(t)}{u - t} t^{1-\alpha} \\ &= \lim_{g(u) \rightarrow g(t)} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))} g(t)^{1-\alpha} \cdot T_\alpha^a g(t) \cdot g(t)^{\alpha-1} \\ &= (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7. $f: [a, \infty) \rightarrow \infty$ fonksiyonu (a, ∞) da iki defa türevlenebilir olsun. O halde

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t) \quad (2.14)$$

dir (Abdeljawad, 2014). Burada α ve β sayılarını $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ve $1 < \alpha + \beta \leq 2$ olarak tanımlandı.

İspat: f fonksiyonunun iki defa türevlenebilir olması ve kesirli çarpımın türevi kuralından

$$\begin{aligned} (T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} [t^{1-\beta} (t - a)^{-\beta} f'(t)] \\ &= t^{1-\alpha} [t^{1-\beta} f''(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} f'(t)] \end{aligned}$$

$$= T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_{\alpha}^a f(t) \quad (2.15)$$

olur. (2.14) de $\alpha, \beta \rightarrow 1$ alınır

$$T_{\alpha}^a T_{\beta} f(t) = T_2 f(t) = f''(t)$$

bulunur. Konform kesirli türev keyfi bir α ve β için $T_{\alpha} T_{\beta}(f)(t) \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$ indeks kuralına sahip değildir: (2.8) deki denklem iki defa uygulanırsa

$$T_{\alpha} T_{\beta}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f[t+\varepsilon t^{1-\alpha}+(\varepsilon t^{1-\beta})^{1-\beta}]-f(t+\varepsilon t^{1-\beta})-f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)}{\varepsilon^2} \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$$

elde edilir.(Ortigueira ve Tenreiro Machado, 2014).

Kabul edelim ki $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n$ öyle ki $f^{(n)}(t)$ sürekli olsun. O zaman,

$$(T_{\alpha}^a f)(t) = (T_{\alpha+1-n}^a f^{(n-1)})(t) = (t-a)^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$$

ve böylece

$$(T_{\alpha}^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (t-a)^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde, $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $f^{(n)}(t)$ sağdan durum yerine

$$({}^b T_{\alpha} f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} (b-t)^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = 0$$

dir (Abdeljawad, 2014).

$0 < \alpha < 1$ ile $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. n 'inci mertebeden sırasıyla soldan(sağdan) dizisel konform kesirli türev tanımı,

$$({}^n T_{\alpha}^a f)(t) = \underbrace{T_{\alpha}^a T_{\alpha}^a \dots T_{\alpha}^a f(t)}_{n-\text{defa}} \quad (2.16)$$

ve

$${}^bT_\alpha^{(n)}f(t) = \underbrace{{}^bT_\alpha {}^bT_\alpha \dots {}^bT_\alpha}_{n\text{-defa}}f(t), \quad (2.17)$$

şeklindedir.(Abdeljawad, 2014).

Eğer, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon için, iki kez türevlenebilirse o halde doğrudan hesaplamalar gösterir ki,

$$({}^{(2)}T_\alpha^a f)(t) = T_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = \begin{cases} (1 - \alpha)(t - a)^{1-2\alpha} f'(t) + (t - a)^{2-2\alpha} f''(t) & \text{ise } t > a, \\ 0 & \text{ise } t = a, \end{cases}$$

dir.

Benzer şekilde, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ve $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sağdan durum için sürekli fonksiyon için iki kez türevlenebilirse o halde doğrudan hesaplamalar gösterir ki,

$${}^bT_\alpha^{(2)}f(t) = {}^bT_\alpha {}^bT_\alpha f(t) = \begin{cases} (1 - \alpha)(b - t)^{1-2\alpha} f'(t) + (b - t)^{2-2\alpha} f''(t) & \text{ise } t > b, \\ 0 & \text{ise } t = b, \end{cases}$$

dir.

2.2. Konform Kesirli İntegraller

Tanım 2.3.1. $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$(I_\alpha^a f) = \int_a^t f(x) d\alpha(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx \text{ dır.}$$

$a = 0$ ise $d\alpha(x)$ olur. Aynı şekilde,

$$({}^bI_\alpha f) = \int_t^b f(x) d\alpha(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

olarak tanımlanan I_α^a ve ${}^bI_\alpha$ operatörlerine f fonksiyonunun *konform soldan ve sağdan kesirli integrali* denir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.2. Varsayalım ki $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. O halde

$$\forall t > a, T_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.3. Varsayalım ki $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ süreklifonksiyon olsun. O halde

$$\forall t < b, {}^bT_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

Tanım 2.3.4. $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. α mertebeden soldan kesirli integral

$$(I_a^\alpha f)(t) = \mathbf{I}_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}f) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx \quad (2.18)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

$\alpha = n + 1$ ise, $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Buradan da

$$(I_a^\alpha f)(t) = (\mathbf{I}_{n+1}^a f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

olur. (Abdeljawad, 2014).

Hatırladığımız üzere, a noktasında mertebesi $\alpha > 0$ olan soldan Riemann- Liouville kesirli integrali

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (2.19)$$

ile tanımlanmıştı. Bu tanımdan

$(I_a^\alpha f)(t) = (\mathbf{I}_\alpha^a f)(t)$ için, $\alpha = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$ olduğunu görüyoruz. (Abdeljawad, 2014).

Örnek 2.3.5. Hatırladığımız üzere,

$$(\mathbf{I}_\alpha^a (t-a)^{\mu-1})(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\mu-1}, \alpha, \mu > 0$$

idi.

$(t - a)^\mu$ fonksiyonunun mertebesi $\alpha \in (n, n + 1]$ olan(konform) kesirli integralini hesaplayabiliriz. $\mu \in \mathbb{R}, \alpha + \mu - n > 0$ için,

$$(I_\alpha^a(t - a)^\mu)(x) = (\mathbf{I}_{n+1}^a(t - a)^{\mu+\alpha-n-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(x - a)^{\alpha+\mu} \quad (2.20)$$

olur.(Abdeljawad, 2014).

Benzer biçimde, sağdan (konform) kesirli integralini bulabiliriz. Yani $\mu \in \mathbb{R}, \alpha + \mu - n > 0$ için,

$$({}^bI_\alpha(b - t)^\mu)(x) = ({}^b\mathbf{I}_{n+1}(b - t)^{\mu+\alpha-n-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(b - x)^{\alpha+\mu} \quad (2.21)$$

elde edilir.(Abdeljawad, 2014).

Önerme 2.3.6. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha, \mu \leq 1$ öyle ki $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olsun. O halde

$$(I_\alpha I_\mu f)(t) = \frac{t^\mu}{\mu} (I_\alpha f)(t) + \frac{1}{\mu} (I_{\alpha+\mu} f) - \frac{t}{\mu} \int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s) ds \quad (2.22)$$

dir(Abdeljawad, 2014).

İspat: İntegrallerin sırasını değiştirelim

$$(I_{\alpha+\mu} f)(t) = (\mathbf{I}_2 s^{\alpha+\mu-2} f(s))(t) \quad (2.23)$$

o halde

$$\begin{aligned} (I_\alpha I_\mu f)(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(s) s^{\alpha-1} ds \right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\ &= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left(\int_s^t t_1^{\mu-1} dt_1 \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left[\frac{t^\mu}{\mu} - \frac{s^\mu}{\mu} \right] ds \\
&= \frac{t^\mu}{\mu} (I_\alpha f)(t) + \frac{1}{\mu} \left[(I_{\alpha+\mu} f)(t) - t \int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s) ds \right]. \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.24}$$

bulunur. Eğer (2.22) eşitliğinde $\alpha, \mu \rightarrow 1$ ise $(I_1 I_1 f)(t) = (I_2 f)(t)$ olur.

Riemann sağdan ve soldan kesirli integrali üzerindeki $(Qf(t) = f(a + b - t), f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ Q-operatörünü hatırlayacak olursak:

$$Q I_\alpha^a f(t) = {}^b I_\alpha Q f(t) \tag{2.25}$$

dir. $\alpha \in (n, n + 1]$ alındığında,

$$\begin{aligned}
Q I_\alpha^a f(t) &= Q I_{n+1}^a ((t - a)^{\alpha-n-1} f(t)) = {}_{n+1}^b I ((b - t)^{\alpha-n-1} f(a + b - t)) \\
&= {}^b I_\alpha Q f(t),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

bulunur.(Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.7. Farz edelim ki $\alpha \in (n, n + 1], f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Öyle ki $f^{(n)}(t)$ süreklidir. O halde

$$\forall t > a, \mathbf{T}_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

dir(Abdeljawad, 2014).

İspat: Direk tanımdan

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_\alpha^a I_\alpha^a f(t) &= T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_\beta^a f(t) \right) \\
&= T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_{n+1}^a (t - a)^{\beta-1} f(t) \right)
\end{aligned}$$

$$= T_{\beta}^a \left(I_1^a (t-a)^{\beta-1} f(t) \right) \quad (2.27)$$

bulunur. Yani

$$\mathbf{T}_{\alpha}^a I_{\alpha}^a f(t) = T_{\beta}^a I_{\beta}^a f(t)$$

Lemma 2.3.1 kullanıldığında istediğimiz sonuca ulaşırız.

Lemma 2.3.8. $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun öyle ki $f^{(n)}(t)$, $\alpha \in (n, n+1]$ için süreklidir. O halde

$$\forall t < b, {}^b\mathbf{T}_{\alpha}^b I f(t) = f(t)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.9. $f, h: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları olsun. Öyle ki $t > a$ için T_{α}^a var, (a, ∞) de f türevlenebilir ve

$$T_{\alpha}^a f(t) = (t-a)^{1-\alpha} h(t)$$

dir. O halde

$$\forall t > a, h(t) = f'(t)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

Sonuç 2.3.10. $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun öyle ki $b > t > a$ için $(I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a) f(t)$ var olsun.

O halde $f(t)$, (a, b) de türevlenebilirdir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.11. $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. O halde $\forall t > a$,

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a (f)(t) = f(t) - f(a) \quad (2.28)$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: f diferansiyellenebilir ise Teorem 2.2.2'deki yardımıyla

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a(f)(t) &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} T_{\alpha}(f)(x) dx \\
&= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x) dx = f(t) - f(a)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

bulunur.

Önerme 2.3.12. $\alpha \in (n, n+1]$, $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t > a$ için $(n+1)$ defa diferansiyellenebilir olsun. O halde

$$\forall t > a, I_{\alpha}^a \mathbf{T}_{\alpha}^a(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}, \tag{2.30}$$

bulunur.(Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımdan Teorem 2.2.1 bulunur,

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^a \mathbf{T}_{\alpha}^a(f)(t) &= I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} T_{\beta}^a f^{(n)}(t) \right) \\
&= I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} (t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t) \right) \\
&= I_{n+1}^a f^{(n+1)}(t). \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.31}$$

O halde kısmi integrasyonla istediğimiz sonucu buluruz.

Önerme 2.3.13. $\alpha \in (n, n+1]$, $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t < b$ için $(n+1)$ defa diferansiyellenebilir olsun. O halde

$$\forall t < b \text{ için, } {}^b I_{\alpha}^b \mathbf{T}(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}. \tag{2.32}$$

Özel olarak,

$n = 0$ ya da $0 < \alpha \leq 1$ ise, ${}^b I_{\alpha}^b T(f)(t) = f(t) - f(b)$ dir(Abdeljawad, 2014).

Şimdi Gronwall eşitliğinin kesirli versiyonunu ispatlayacağız.

Teorem 2.3.14. $r, J = [a, b]$ aralığı üzerinde sürekli, negatif olmayan fonksiyon olsun. δ ve k negatif olmayan sabitler olmak üzere,

$$r(t) \leq \delta + \int_a^t kr(s)(s-a)^{\alpha-1}ds, \quad t \in J$$

dir. O halde

$$\forall t \in J, \quad r(t) \leq \delta e^{k\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat:

$$R(t) = \delta + \int_a^t kr(s)(s-a)^{\alpha-1}ds = \delta + I_\alpha^a(kr(s))(t)$$

tanımlayalım. O halde

$$R(a) = \delta \text{ ve } R(t) \geq r(t),$$

$$T_\alpha^a R(t) - kR(t) = kr(t) - kR(t) \leq kr(t) - kr(t) = 0 \quad (2.33)$$

dır. (2.33) ile $K(t) = e^{-k\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$ çarpalım. Teorem 2.2.3'deki Zincir kuralı yardımıyla $T_\alpha^a K(t) = -kK(t)$ olduğu görülür. Çarpım kuralını kullanırsak

$$T_\alpha^a(K(t)R(t)) \leq 0.$$

$K(t)R(t)$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir olduğundan, Lemma 2.3.6 dan

$$I_\alpha^a T_\alpha^a(K(t)R(t)) = K(t)R(t) - K(a)R(a) = K(t)R(t) - \delta \leq 0 \quad (2.34)$$

elde edilir. Buradan

$$r(t) \leq R(t) \leq \frac{\delta}{K(t)} = \delta e^{k\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} \quad (2.35)$$

ispat tamamlandı.

3. SINIR DEĞER UZAYLARI VE DİSİPATİF GENİŞLEMELER

Bu bölümde Hilbert uzayda simetrik operatörlerin sınır değer uzayı yardımıyla yapılan disipatif genişlemeleri ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

3.1. Disipatif Genişlemeler

Teorem 3.1.1. Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif bir A operatörün maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $\Im \lambda < 0$ için

$$R(A - \lambda I) = H$$

olmasıdır (Gorbachukve Gorbachuk, 1991).

İspat: A kapalı disipatif operatör, $\Im \lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır. (2.6) eşitsizliğinden

$$\Im((A - \lambda I)f, f) \geq -\Im \lambda (f, f)$$

dir. Fakat

$$\Im((A - \lambda I)f, f) \leq \|(A - \lambda I)f\| \|f\| - \Im \lambda \leq \|(A - \lambda I)f\|$$

dir. Buradan $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır. Şimdi iki durum oluşabilir:

1. $\Im \lambda < 0$ için $R(A - \lambda I) = H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif $\tilde{A}$ genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A} - \lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan

$$\Im(\tilde{A}f_0, f_0) = \Im \lambda (f_0, f_0)$$

olur ki bu $\tilde{A}$ nın disipatifliği ile çelişir.

2. $R(A - \lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahiptir ve bu genişleme şu şekilde inşa edilir:

$$N = H \ominus R(A - \lambda I), D_{\tilde{A}} = D_A + N,$$

$$\tilde{A}(f + u) = Af + \bar{\lambda}u, f \in D_A, u \in N.$$

olarak tanımlayalım $\tilde{A}$ operatörü doğru tanımlanır: $f + u = 0$ ise

$$(Af, f) = (Au, u) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u)$$

dir. $Im(Af, f) \leq 0$ ise $u = 0, f = 0$ olur. $\tilde{A}$ operatörü disipatifdir:

$$(\tilde{A}(f + u), f + u) = (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (Af, u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

$$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^*u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

$$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f)$$

Buradan

$$Im(\tilde{A}(f + u), f + u) = Im(Af, f) + Im\bar{\lambda}(u, u) \geq 0.$$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi $\tilde{A}$ operatörü maksimal disipatifdir. Teorem 3.1.1. den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir. Teorem 3.1.1. den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır. A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

Teorem 3.1.2. $\tilde{A}$ operatörü A simetrik operatörünün disipatif (akretif) genişlemesi olsun. O zaman $\tilde{A} \subset A^*$ dır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: Farz edelim ki $\tilde{A} \supset A$ disipatif bir genişleme olsun. Teorem 3.1.1 ile $\tilde{A}$ operatörünü maksimal disipatif kabul edelim.

$$B = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \tilde{B} = (\tilde{A} - iI)(\tilde{A} + iI)^{-1} \quad (3.1)$$

operatörlerini alalım. $-i$ disipatif (simetrik) operatörün özdeğerin olamayacağından (3.1) anlamlıdır. B operatörü $R(A + iI)$ uzayını $R(A - iI)$ uzayına izometrik olarak resmeder. Eğer $f \in R(A + iI)$, yani $f = (A + iI)g, g \in D_A$ ise,

$$\begin{aligned} \|Bf\|^2 &= \|(A - iI)g\|^2 = ((A - iI)g, (A - iI)g) \\ &= (Ag, Ag) - i(g - Ag, g) + i(Ag, g) + (g, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|(A + iI)g\|^2 = ((A + iI)g, (A + iI)g) \\ &= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g) \end{aligned}$$

dir.

$$(g, Ag) = (Ag, g) \text{ ise } \|Bf\| = \|f\|$$

dir. Benzer şekilde $\tilde{B}$ operatörünün bir büzülme operatörü olduğu gösterilir. (3.1) ifadesinden

$$A = -i(B + I)(B - I)^{-1}, \tilde{A} = -i(\tilde{B} + I)(\tilde{B} - I)^{-1}$$

dir. Açıktır ki $\tilde{B}$ operatörü B operatörünün genişlemesidir. $u \in N_{-i}$ olsun. O zaman $u \perp D_B$ dir. $v \in D_B, \xi \in \mathbb{C}$ için

$$\|\xi v + u\|^2 - \|\tilde{B}(\xi v + u)\|^2 \geq 0 \quad (3.2)$$

dir.

$$\|\tilde{B}v\| = \|Bv\| = \|v\|$$

olduğunu hesaba katarsak (3.2) den

$$\|u\|^2 - \|\tilde{B}u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi(\tilde{B}v, \tilde{B}v)) \geq 0$$

elde edilir. ξ keyfi olduğundan

$$(\tilde{B}v, \tilde{B}v) = 0$$

olur. Böylece her $v \in D_B$ için $\tilde{B}_u \perp \tilde{B}_v = Bv$ dir. Yani $\tilde{B}_u \perp R(A - iI), \tilde{B}_u \in N_i$. Buradan da C, N_{-i} den N_i ye büzölme operatörü olmak üzere $\tilde{B} = B \oplus C$. $g \in D_{\tilde{A}}$ olsun.

$$f = (\tilde{A} + iI)g$$

$$\tilde{B}f = (\tilde{A} - iI)g$$

olur. Son iki eşitlikten $f_1 \in R(A + iI), f_2 \in N_{-i}$ olmak üzere

$$g = \frac{1}{2i}(f - \tilde{B}f) = \frac{1}{2i}(f^1 + f^2 - Bf^1 - Cf^2)$$

$$= \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f_2 - Cf_2)$$

dir. B operatörünün tanımından $f_1 - Bf_1 \in D_A, f_2 - Cf_2 \in N_{-i} \oplus N_i$. Buradan $g \in D_{A^*}$ ve

$$A^*g = \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f^2 + Cf^2_2)$$

$$= \frac{1}{2}(f_1 + Bf_1) + \frac{1}{2}(f_2 + Cf_2)$$

dir. Diğer taraftan

$$\tilde{A}g = A^*g$$

dir.

3.2. Lineer Bağıntılar

Tanım 3.2.1. $0 < H$ bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine lineer bağıntı denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in genişlemesi denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 3.2.2. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$Im(x', x) \geq 0, (\text{sırasıyla}, Im(x', x) \leq 0, Im(x', x) = 0)$$

oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatifdir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eşittir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\},$$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının Cayley dönüşümü denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır. Eğer $\{x, x'\} \in \theta, \{y, y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$$\{x - y, x' - y'\} \in \theta, x' - y' = -i(x - y)$$

olur. Diğer taraftan

$$0 \leq Im(x' - y', x - y) = Im(-i(x - y), x - y) = -\|x - y\|^2$$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$$\|U_\theta(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x)$$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta(x' + ix)\| \leq \|x' + ix\|, \{x, x'\} \in \theta \quad (3.3)$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (4.3) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.3. K, H bir Hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K - I)x' + i(K + I)x = 0 \quad (3.4)$$

$$(K - I)x' - i(K + I)x = 0 \quad (3.5)$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (3.4), (3.5) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (3.4) ifadesindeki ((3.5) deki) K operatörü izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (3.4) veya (3.5) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat: (2.4) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.

$$K(x' + ix) = x' - ix$$

$$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2\text{Im}(x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2\text{Im}(x', x).$$

Sonuncu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4\text{Im}(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \quad (3.6)$$

olur. Böylece θ bağıntısı disipatifdir. $u \in H$ için

$$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$$

tanımlayalım. O zaman $\{x, x'\} \in \theta$, $x' + ix = u$, $x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H$, $U_\theta = K$ olduğunu gösterir. θ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\tilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur. Bu ise ancak $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\tilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir. θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, U_θ da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dır. Bunu ispatlayalım: Tersini kabul edelim. $U_\theta, \overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise $U_\theta, H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ, H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (3.4) eşitliğine karşılık gelen $\tilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\tilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\tilde{\theta} \supset \theta$ dır. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\tilde{\theta} = \theta$, $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ, H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından her $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \quad (3.7)$$

dır. Daha önceden belirttiğimiz gibi (2.7) maksimal disipatif $\tilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\tilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (2.4) ile belirlenir. (2.6) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır. θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{\{-x, x'\}: \{x, x'\} \in \theta\} \in \theta \quad (3.8)$$

bağıntısı maksimal disipatifdir. Gösterdik ki

$$\{x, x'\} \in \theta_1 \text{ (veya } \{-x, x'\} \in \theta) \Leftrightarrow (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$$

dir. Bu ifade de (2.5) e denktir. Tersini de benzer şekilde gösterilir. Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$$

$$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$$

eşitlikleri denktir.

$$K_1 K_2 (x' - ix) = x' + ix, K_2 K_1 (x' + ix) K_2 K_1 (x' + ix)$$

elde edilir.

$$\{x' + ix | \{x, x'\} \in \theta\} = \{x' - ix | \{x, x'\} \in \theta\} = H$$

olduğundan

$$K_1 K_2 = K_2 K_1 = I$$

olur, yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersisi aşıkardır.

3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler

Tanım 3.3.1. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^* f, g) - (f, A^*) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$$

ii. Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır; şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 3.3.2. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat:

$$D_{A^*} = D_A \oplus N_i \oplus N_{-i} \quad (3.9)$$

idi. $P_{-i}, P_i: D_{A^*} \rightarrow N_{-i}, N_i$ izdüşüm operatörleri olsun. $\dim N_{-i} = \dim N_i$ olduğundan $N_i \rightarrow N_{-i}$ izometrik bir dönüşüm vardır. Bunu U ile gösterelim. $K = N_{-i}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$$\Gamma_1 = P_{-i} + U P_i, \Gamma_2 = -i P_{-i} + i U P_i$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin A operatörünün sınır değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (3.9) ifadesinden $f, g \in D_{A^*}$ ise

$$f = f_0 + P_{-i}f + P_if, g = g_0 + P_{-i}g + P_ig, f_0, g_0 \in D_A$$

dir.

$$A^*P_i = -iP_i, A^*P_{-i} = -iP_{-i}$$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$$(\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır. $F_1, F_2 \in K, f \in D_{A^*}$ alalım.

$$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$$

$$f_{-i} = \frac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_i, f_i = \frac{1}{2i}U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$$

olsun. O zaman $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olur.

Teorem3.3.3. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1f + i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (3.10)$$

$$(K - I)\Gamma_1f - i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (3.11)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (3.10) ve (3.11)

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (3.10) , (3.11) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (3.10), (3.11) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (3.12)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (3.13)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|K_f\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.12), (2.13) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: $\tilde{A}$, A operatörünün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Teorem 3.1.2. ile $\tilde{A} \subset A^*$ dır. (K, Γ_1, Γ_2) , A operatörünün sınır değer uzayı olmak üzere

$$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden θ, K da disipatif bağıntıdır. Eğer $\tilde{\theta} \supset \theta$ ve θ disipatif bağıntı ise $\tilde{\tilde{A}}, A^*$ operatörünün $D_{\tilde{\tilde{A}}} = \{f \in D_{A^*} : \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \tilde{\theta}\}$ kümesinin kısıtlaması olarak tanımlanan $\tilde{\tilde{A}}$ operatörünün disipatif genişlemesidir. Buradan $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$. Eğer $\{x, x'\} \in \theta$ ise belli bir $f \in D_{A^*}$, için $x = \Gamma_2 f, x' = \Gamma_1 f$, olur. Burada $f \in D_{\tilde{A}}$, ve $f \in D_{\tilde{A}}$, yani, $\{x, x'\} \in \theta$. Böylece $\tilde{\theta} = \theta$ ve θ maksimal disipatif bağıntıdır. Teorem 2.2.3 den istenen sonuçlar elde edilir.

Farz edelim ki $\tilde{A}, A^*$ operatörünün (2.10) koşulunu sağlayan vektörlerin $D_{\tilde{A}}$ kümesine kısıtlaması olsun.

$$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$$

ele alalım. Teorem 2.2.3 göre θ bağıntısı maksimal disipatiftir. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden $\tilde{A}$ disipatiftir.

Farz edelim ki $\tilde{\tilde{A}}$ operatörü $\tilde{A}$ operatörünün disipatif genişlemesi olsun.

$$\tilde{\theta} = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}\}$$

dır. $\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi olduğundan $\tilde{\theta} = \theta$ dır. Eğer $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$ ise $g \in D_{\tilde{A}}$ için $\Gamma_2 f = \Gamma_1 g, \Gamma_2 f = \Gamma_2 g$. Bu ise $f - g \in D_{AA}$, buradan $f \in D_{\tilde{A}}$. Böylece $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$ ve $\tilde{A}$ maksimal disipatiftir.

4. SİNGÜLER KONFORM KESİRLİ MERTEBEDEN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu bölümde singüler konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemi incelenecektir. Singüler denklemlerle uğraşırken, asıl sorun denklemin çözümünün singüler nokta civarında davranışını bulmaktır. Reel potansiyelli ikinci mertebeden differensiyel denklemler için Weyl (Weyl, 1910) tarafından etkili bir yol sunulmuştur ve problemin spektral parametre ile ilgili olmadığı ancak potansiyel fonksiyonu ile ilgili olduğu gösterilmiştir (Naimark, 1968), (Titchmarsh, 1946).

Sturm-Liouville denklemleri uygun katsayı ve verilen bir aralık üzerinde $w > 0$ ağırlık fonksiyonuyla

$$-T_\alpha(pT_\alpha y) + qy = \lambda wy, x > 0 \quad (4.1)$$

formunda konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville denklemine dönüştürülebilir. Eğer katsayılar yeterince düzgün ise (4.1) denklemi

$$-x^{1-\alpha}(px^{1-\alpha}y)' + qy = \lambda wy, x > 0 \quad (4.2)$$

ya da

$$-(px^{1-\alpha}y)' + x^{\alpha-1}qy = \lambda x^{\alpha-1}wy, x > 0$$

olur. İkinci denklem

$$-(\tilde{p}y)' + \tilde{q}y = \lambda \tilde{w}y, x > 0$$

temel Sturm-liouville denklemi olarak düşünülebilir. Ancak, bu durumda denklemin singüler noktada limit nokta ya da limit çember durumu olup olmasına göre $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ ve $\tilde{w}$ fonksiyonları üzerine koşul konulmalıdır.

Bu bölümde (4.1) denkleminden daha genel bir denklem olan aşağıdaki denklemi inceleyeceğiz.

$$-T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] + ps(T_\alpha y + sy) + qy = \lambda wy, x > 0. \quad (4.3)$$

Bu bölüm hazırlanırken Baleanu, Jarad ve Uğurlu'nun 2019 yılında yayınlanan makalesi kaynak alınmıştır (Baleanu v.d.,2019).

4.1. Hilbert Uzayı

$L^2_\alpha(1, \infty; w)$ uzayı , üzerinde iç çarpım

$$(y, z) = \int_1^\infty y \bar{z} w d\alpha(x)$$

ile tanımlanan ve aşağıdaki şartı sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir Hilbert uzayı olsun:

$$\|y\|^2 = \int_1^\infty |y(x)|^2 w(x) d\alpha(x) = \int_1^\infty |y(x)|^2 w(x) x^{\alpha-1} dx < \infty.$$

Bu çalışmada

$$l_\alpha(y) = \frac{1}{w(x)} \{-T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] + ps(T_\alpha y + sy) + q(x)y\}, 1 \leq x < \infty$$

şeklindeki konform differensiyel ifadeleri göz önünde bulunduracağız. Burada $0 < \alpha \leq \infty$, p, s, q ve w reel değerli sürekli fonksiyonlardır ve

$$L^\alpha_{loc}[1, \infty) = \{f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}: \int_I f(x) d\alpha(x) < \infty, \forall I \subseteq [1, \infty)\}$$

olmak üzere

$$x^{\alpha-1}p^{-1}, x^{\alpha-1}s, x^{\alpha-1}q, x^{\alpha-1}w \in L^\alpha_{loc}[1, \infty)$$

dir.

Burada $T_\alpha := T_\alpha^1$ dir.

Lemma 4.1.1. (Green Formülü). $1 \leq b < c \leq \infty$ için aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\int_b^c l_\alpha(y) \bar{X} w d\alpha(x) - \int_b^c y \overline{l_\alpha(X)} w d\alpha(x) = [y, X](c) - [y, X](b) \quad (4.4)$$

Burada

$$[y, X] = y^{[1]} \bar{x} - y \bar{x}^{[1]}$$

ve

$$y^{[1]} := p(T_\alpha y + sy)$$

dir.

İspat: Bu bağıntı kısmi integrasyon metodu kullanılarak elde edilir.

$$-T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] + ps(T_\alpha y + sy) + qy = \lambda wy \quad (4.5)$$

denklemini, λ spektral parametre iken

$$\begin{bmatrix} y \\ T_\alpha y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -x^{\alpha-1}s & x^{\alpha-1}p^{-1} \\ -x^{\alpha-1}(q - \lambda w) & -x^{\alpha-1}s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ T_\alpha y \end{bmatrix}$$

ya da

$$Y'(x) = A(x, \lambda)Y(x, \lambda)$$

formunda yazılabilir.

$A(x, \lambda)$ matrisinin elemanları $[1, \infty)$ aralığında lokal integrallenebildiği için (4.5) denkleminin

$$y(\xi, \lambda) = \zeta_1, y^{[1]}(\xi, \lambda) = \zeta_2,$$

şeklinde tek bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Burada $\xi \in [1, \infty)$ ve $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ dir(Naimark, 1968).

$AC_{loc}[1, \infty)$ kümesi, $[1, \infty)$ aralığındaki tüm lokal mutlak sürekli fonksiyonları göstermek üzere

$$D_\alpha = \{y \in L_\alpha^2[1, \infty): y, y^{[1]} \in AC_{loc}[1, \infty), l_\alpha(y) \in L_\alpha^2[1, \infty)\}$$

ile tanımlanan D_α kümesi, $L_\alpha^2[1, \infty)$ un bir alt kümesi olsun. (4.1) ifadesinin yardımıyla $y, X \in D_\alpha$ keyfi iki fonksiyon olmak üzere

$$(l_\alpha(y).X) - (y.l\psi_\alpha(X)) = [y, X](\infty) - [y, X](1) \quad (4.6)$$

denklemini elde edilir. (4.6) ifadesinin sol tarafı anlamlı ve sonlu olduğundan

$$[y, X](\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} [y, X](x)$$

limiti vardır ve sonludur.

4.2. Temel çözümler

$\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonları

$$l_\alpha(y) = \lambda y, 1 \leq x < \infty, \quad (4.7)$$

denkleminin, $0 \leq \gamma < \pi$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan iki çözümü olsun:

$$\begin{aligned} \varphi(1, \lambda) &= \sin \gamma, & \psi(1, \lambda) &= \cos \gamma, \\ \varphi^{[1]}(1, \lambda) &= -\cos \gamma, & \psi^{[1]}(1, \lambda) &= \sin \gamma, \end{aligned}$$

φ ve ψ çözümleri lineer bağımsızdır çünkü

$$[\varphi, \bar{\psi}](1) = 1$$

dir. Şimdi (4.7) denkleminin

$$\theta = \varphi + m\psi$$

çözümünü dikkate alalım. $[1, \infty)$ üzerinde (4.7) denkleminin sahip olduğu çözümlerin davranışını incelemek için problemi ilk başta $[1, b]$ sonlu aralığında

$$\cos\beta y(b) + \sin\beta y^{[1]}(b) = 0, 0 \leq \beta < \pi \quad (4.8)$$

sınır koşulları altında düşünelim. Eğer (4.8) sınırlandırılmış koşullarında θ çözümünü düşünürsek o zaman

$$(A + mB)\cos\beta + (C + mD)\sin\beta = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada ;

$$A = \varphi(b, \lambda), B = \psi(b, \lambda), C = \varphi^{[1]}(b, \lambda), D = \psi^{[1]}(b, \lambda)$$

dır. (4.9) ün kompleks eşleniğini alırsak

$$(\bar{A} + \bar{m}\bar{B})\cos\beta + (\bar{C} + \bar{m}\bar{D})\sin\beta = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir ve (4.9) ve (4.10) aşağıdaki gibi tek denklem şeklinde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} A + mB & C + mD \\ \bar{A} + \bar{m}\bar{B} & \bar{C} + \bar{m}\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

$\cos\beta$ ve $\sin\beta$ aynı zamanda sıfır olamayacağından dolayı (4.11) den

$$|m|^2(B\bar{D} - D\bar{B}) + m(B\bar{C} - D\bar{A}) + \bar{m}(A\bar{D} - C\bar{B}) + A\bar{C} - C\bar{A} = 0 \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$B\bar{D} - D\bar{B} = [\psi, \psi](b)$$

$$B\bar{C} - D\bar{A} = [\psi, \varphi](b)$$

$$A\bar{D} - C\bar{B} = [\varphi, \psi](b)$$

$$A\bar{C} - C\bar{A} = [\varphi, \varphi](b)$$

dır. (4.12) denklemini

$$[\theta, \theta](b) = 0$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir diğer taraftan Green formülü gösterir ki

$$[\theta, \theta](b) = 2i \operatorname{Im}(\lambda) \int_1^b |\theta|^2 w d\alpha(x) - 2i \operatorname{Im}(m)$$

ve

$$[\psi, \psi] = 2i \operatorname{Im}(\lambda) \int_1^b |\psi|^2 w d\alpha(x)$$

dir. Burada $\operatorname{Im}(z)$ ile z karmaşık sayısının sanal kısmı gösterilmektedir. O zaman

$$\frac{[\theta, \theta](b)}{[\psi, \psi](b)} = 0$$

denklemini kompleks m -düzleminde bir C_b çember denklemdir. Yani C_b çemberinin içi

$$\frac{[\theta, \theta](b)}{[\psi, \psi](b)} < 0$$

yada

$$\frac{2i \operatorname{Im}(\lambda) \int_1^b |\theta|^2 w d\alpha(x) - 2i \operatorname{Im}(m)}{2i \operatorname{Im}(\lambda) \int_1^b |\psi|^2 w d\alpha(x)} < 0$$

olarak tanımlanır. Böylece $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ alındığında

$$\int_1^b |\theta|^2 w d\alpha(x) < \frac{\operatorname{Im}(m)}{\operatorname{Im}(\lambda)} \quad (4.13)$$

oluyorsa m noktası C_b çemberinin içindedir. $\tilde{b} < b < \infty$ için

$$\int_1^{\tilde{b}} |\theta|^2 w d\alpha(x) < \int_1^b |\theta|^2 w d\alpha(x)$$

eşitsizliği yazılabilir.

m noktası C_b çemberinin üzerinde ya da iç noktasında ise $C_{\bar{b}}$ çemberinin iç noktasında olmak zorundadır. Sonuç olarak, bu çemberler iç içedir ve $b \rightarrow \infty$ iken C_∞ çemberine ya da bir C_∞ noktasına yakınsayabilir. (4.13) eşitsizliğinin sağ tarafı b ye bağlı olmadığı için aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.2.1. (4.7) ile denkleminin $\theta = \varphi + m\psi$ çözümü ($Im(\lambda) \neq 0$)

$$\int_1^\infty |\varphi + m\psi|^2 w d\alpha(x) < \infty$$

eşitsizliğini sağlar. Bir diğer ifadeyle $\theta \in L_\alpha^2[1, \infty; w]$ dir.

C_b çemberinin yarıçapı

$$r = \left(2Im(\lambda) \int_1^b |\psi|^2 w d\alpha(x) \right)^{-1} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. Limit-nokta durumunda, limit çemberinin yarıçapı sıfırlanmalıdır. Bundan dolayı (4.14) ifadesinden aşağıdaki teoremi yazarız.

Teorem 4.2.2. (4.7) ile verilen denklem için iki durum söz konusu olabilir.

- i. Tüm çözümler $L_\alpha^2[1, \infty; w]$ e aittir. (Limit-çember durumu)
- ii. Lineer bağımsız çözümlerden bir tanesi $L_\alpha^2[1, \infty; w]$ e ait değildir. (Limit-nokta durumu)

4.3. Limit-Nokta Kriteri

Teorem 4.3.1. Eğer bir $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ parametresi için limit-çember durumu varsa, o zaman her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bulunur.

İspat: $\varphi(x, \lambda_0)$ ve $\psi(x, \lambda_0)$

$$l_\alpha(y) = \lambda_0 y \quad (4.15)$$

denkleminin

$$[\varphi, \bar{\psi}] = 1$$

koşulunu sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsun.

ϑ fonksiyonu, $\vartheta = c_1\varphi + c_2\psi$ şeklinde

$$l_\alpha(y) = \lambda y \quad (4.16)$$

denkleminin çözümü olsun. (4.15) aşağıdaki gibi bir eşdeğer Hamilton sistem olarak ifade edilebilir.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^{\alpha-1}q & -x^{\alpha-1}s \\ -x^{\alpha-1}s & x^{\alpha-1}p^{-1} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

(4.16) ve (4.17) Hamilton sistemi için değişken değiştirme yöntemi kullanıldığında istenen sonuç elde edilir.

Şimdi (4.7) in çözümlerinin sonsuz civarında davranışını inceleyebiliriz.

Teorem 4.3.2. $w = 1, q \in L_\alpha^2[1, \infty; w)$ ve $ps^2 \in L_\alpha^2[1, \infty; w)$ olsun. O zaman

- i. psy , verilen aralıkta düzgün sınırlıdır.
- ii. (4.7) denklemi sonsuzda limit-nokta durumundadır.

İspat: Aşağıdaki

$$-T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] + ps(T_\alpha y + sy) + qy = 0. \quad (4.18)$$

denklemini ya da denk olarak

$$-\infty < -\int_1^\infty T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] d\alpha < \infty, -\infty < \int_1^\infty ps T_\alpha y d\alpha < \infty$$

eşitsizliğini dikkate alalım. Varsayımdan

$$-\int_1^\infty T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] d\alpha < \infty, \int_1^\infty ps T_\alpha y d\alpha < \infty$$

yazabiliriz. İkinci eşitsizlikten

$$(psy)(x) = d_1 + \int_1^x ps T_\alpha y d\alpha$$

elde ederiz. O halde i) kanıtlanır.

Dahası

$$y^{[1]}(x) = c_1 + \int_1^x T_\alpha[p(T_\alpha y + sy)] d\alpha$$

ve

$$|y^{[1]}(x)| < c_2 \quad (4.19)$$

yazabiliriz.

Şimdi varsayalım ki y_1, y_2 (4.18) denkleminin

$$y_2 y_1^{[1]} - y_1 y_2^{[1]} = c,$$

koşulunu sağlayan bağımsız çözümleri olsun.

(4.19) ifadesi ve üçgen eşitsizliğinden

$$c \leq c_3(|y_1| + |y_2|) \quad (4.20)$$

yazılır. (4.20) nın sağ tarafı $L_\alpha^2[1, \infty; w)$ ye aittir. Ancak bu bir çelişki verir.

O halde ii) İspatlanmış oldu.

Uyarı 4.3.3. α nın özel durumu $\alpha = 1$ ve $s = 0$ için Teorem 4.4.2, (Putnam, 1940) ve (Naimark, 1968) da gösterildi.

Teorem 4.3.4. $s(x) = 0$, $w(x) = 1$, $p(x) > 0$ ve $M(x)$ pozitif, $[1, \infty)$ aralığı üzerinde $\alpha - azalmayan$ fonksiyon olsun. Eğer,

i. x in yeterince büyük değeri için $q(x) > -KM(x)$, K sabit,

ii. $\int^\infty \frac{d\alpha(x)}{\sqrt{pM}} = \infty$,

iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{T_\alpha M \sqrt{p}}{\sqrt{M^3}} < \infty$,

ise, o zaman (4.7) denklemini sonsuzda limit-nokta durumundadır.

İspat:

$$\frac{1}{M}(-T_\alpha(pT_\alpha y) + qy) = 0, 1 \leq x < \infty$$

denklemini göz önüne alalım. Kısmi integrasyondan

$$-\int_1^x \frac{qy^2}{M} d\alpha(x) = -\frac{ypT_\alpha(y)}{M} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha(x) - \int_1^x \frac{pyT_\alpha(y)T_\alpha(M)}{M^2} d\alpha(x)$$

elde edilir. Şimdi $y \in L_\alpha^2[1, \infty; w)$ dikkate alalım. (i) koşulundan

$$-\int_1^x \frac{qy^2}{M} d\alpha(x) < k \int_1^x y^2 d\alpha(x) < k \int_1^\infty y^2 d\alpha(x)$$

elde edilir. Böylece

$$-\frac{ypT_\alpha(y)}{M} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha(x) - \int_1^x \frac{pyT_\alpha(y)T_\alpha(M)}{M^2} d\alpha(x) < k_1$$

olur. Burada k_1 sabittir. Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve (iii) koşulundan

$$\left| \int_1^x \frac{ypT_\alpha(y)T_\alpha(M)}{M^2} d\alpha \right|^2 \leq \int_1^x \left(\frac{p^{\frac{1}{2}}T_\alpha(M)}{M^{\frac{3}{2}}} \frac{yp^{\frac{1}{2}}T_\alpha(M)}{M^{\frac{1}{2}}} \right)^2 d\alpha < k_2 \left(\int_1^x \frac{p^{\frac{1}{2}}|yT_\alpha(y)|}{M^{\frac{1}{2}}} d\alpha(t) \right)^2 < k_2 \int_1^x \frac{p[yT_\alpha(y)]^2}{M} d\alpha(t) \int_1^x y^2 d\alpha(t)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\int_1^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha - \frac{ypT_\alpha(y)}{M} - k_2 \left(\int_1^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} < k_1$$

olur. Aslında

$$\int_1^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$$

olarak kabul etseydik, o zaman

$$\frac{pyT_\alpha(y)}{M} > 0$$

olurdu ve böylece y ve $T_\alpha(y)$, yeteri kadar büyük x için aynı işarete sahip olurdu. Bu da gösterir ki $y \notin L_\alpha^2[1, \infty; w)$ dir. Böylece bizim varsayımımız doğru olmaz. Yani

$$\int_0^x \frac{p(T_\alpha(y))^2}{M} d\alpha < \infty.$$

$y_1, y_2 \in L_\alpha^2[1, \infty)$, $l_\alpha(y) = 0$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olsun öyle ki $[y_1, \bar{y}_2] = c$ ve

$$\frac{y_1 p T_\alpha(y_2)}{\sqrt{M}} - \frac{y_2 p T_\alpha(y_1)}{\sqrt{M}} = \frac{c}{\sqrt{M}}$$

koşullarını sağlasınlar. O zaman

$$\frac{c}{\sqrt{M}} \leq \left| \frac{y_1 p T_\alpha(y_2)}{\sqrt{M}} \right| + \left| \frac{y_2 p T_\alpha(y_1)}{\sqrt{M}} \right| \quad (4.21)$$

olur. (4.21) nin sağ tarafındaki kısım $L_\alpha^2[1, \infty)$ aittir. Ancak bu (ii) varsayımıyla çelişir. Bundan dolayı ispat tamamlanmış olur.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde

$$l(y) = -T_\alpha^2 y(t) + q(t)y(t) \quad (5.1)$$

şeklindeki singüler konform kesirli Sturm-Liouville differensiyel denklemlerini çalışacağız. Burada $q(\cdot)$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, $q(\cdot) \in L_\alpha^1(0, \infty)$ koşulunu sağlayan reel değerli fonksiyon olsun.

(5.3) ifadesi tarafından üretilmiş olan minimal simetrik operatörün kapanışını T_0 ile gösterelim. Birinci konform kesirli merteye türevleri $(0, \infty)$ aralığında local mutlak sürekli, $l(y) \in L_\alpha^2(0, \infty)$ koşulunu sağlayan $L_\alpha^2(0, \infty)$ sınıfından $y(t)$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim D, T maksimal operatörünün tanım kümesidir ve $T = T^*$ dır (Naimark, 1968). T_0 simetrik operatörü Weyl 'in limit-çember durumunda olsun, yani $(2,2)$ indis defektine sahip olduğunu varsayacağız.

$l(y) = 0$ denkleminin,

$$u_1(0) = 1, \quad T_\alpha u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 1, \quad T_\alpha u_2(0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ olarak gösterelim.

Açıktır ki, $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ lineer bağımsızdır ve onların Wronskiansı 1 e eşittir;

$$W_\alpha[u_1, u_2]_t = W_\alpha[u_1, u_2]_0 = 1, \quad (0 \leq t \leq \infty).$$

Şimdi

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(0) \\ W_\alpha[y, u_1]_\infty \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} T_\alpha y(0) \\ W_\alpha[y, u_2]_\infty \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 5.1. (5.2) dönüşümleri ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü, T_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

Sınırdeğer uzayının ilk koşulunu kontrol edebilmek için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlamamız gerekiyor.

Lemma 5.2. $y(t), w(t) \in D$ keyfi fonksiyonlar için

$$W_\alpha[y, \bar{w}]_t = W_\alpha[y, u_1]_t \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_2]_t - W_\alpha[y, u_2]_t \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_1]_t, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (5.3)$$

dır.

İspat: $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ reel değerli fonksiyonları için

$$\begin{aligned} & W_\alpha[y, u_1]_t \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_2]_t - W_\alpha[y, u_2]_t \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_1]_t \\ &= (y(t)T_\alpha u_1(t) - T_\alpha y(t)u_1(t)) \left(\overline{w(t)T_\alpha u_2(t)} - \overline{T_\alpha w(t)u_2(t)} \right) \\ &= (y(t)T_\alpha u_2(t) - T_\alpha y(t)u_2(t)) \left(\overline{w(t)T_\alpha u_1(t)} - \overline{T_\alpha w(t)u_1(t)} \right) \\ &= y(t)\overline{T_\alpha w(t)} - T_\alpha y(t)\overline{w(t)} = W_\alpha[y, \bar{w}]_t, \quad 0 \leq t \leq \infty \end{aligned}$$

denklemlerini yazabiliriz.

$\forall y(t), w(t) \in D$ için

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = -y(0) \left(\overline{T_\alpha(w(0))} \right) + T_\alpha(y(0)) \overline{w(0)} + \\ & W_\alpha[y, u_1]_\infty \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_2]_\infty - W_\alpha[y, u_2]_\infty \cdot W_\alpha[\bar{w}, u_1]_\infty \end{aligned}$$

Lemma 5.1.2 den

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = W_\alpha[y, \bar{w}]_\infty - W_\alpha[y, \bar{w}]_0$$

elde edilir. Green formülünü kullanırsak (Lemma 4.1.1)

$$(Ty, w)_{L_\alpha^2(0, \infty)} - (y, Tw)_{L_\alpha^2(0, \infty)} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} \quad (5.4)$$

yazılabilir. Bundan dolayı, sınır değer uzayının ilk şartı yerine getirilmiştir. İkinci şartı aşağıdaki lemma kullanılarak ispatlanır.

Lemma 5.3. Keyfi ρ_0, ρ_1, δ_0 ve δ_1 kompleks sayıları için

$$y(0) = \rho_0, \quad T_\alpha y(0) = \rho_1, \quad W_\alpha[y, u_1]_\infty = \delta_0, \quad W_\alpha[y, u_2]_\infty = \delta_1 \quad (5.5)$$

şartlarını sağlayan bir $y \in D$ fonksiyonu vardır.

İspat:

$$(f, u_1)_{L_\alpha^2(1, \infty)} = \delta_0 + \rho_1 (f, u_2)_{L_\alpha^2(1, \infty)} = \delta_1 - \rho_0 \quad (5.6)$$

sağlayan bir $f(t) \in L_\alpha^2(0, \infty)$ fonksiyonunu dikkate alalım. Böyle bir fonksiyon u_1 ve u_2 fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak bulunabilir.

$$y(0) = \rho_0, \quad T_\alpha y(0) = \rho_1$$

başlangıç koşullarını sağlayan $l(y) = f(t)$ denkleminin çözümünü $y_1(t)$ ile gösterelim. Bu çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$y_1(t) = \rho_0 u_1(t) + \rho_1 u_2(t) + \int_0^t \{u_1(t) u_2(v) - u_1(v) u_2(t)\} f(v) d_\alpha v.$$

Bu ifade gösterir ki $y_1(t) \in L_\alpha^2(0, \infty)$ dir. Bu da $y_1(t)$ ve $u_j(t)$, ($j = 1, 2$) fonksiyonlarına Lagrange formülünü uygulamamıza izin verir;

$$\begin{aligned} (f, u_j)_{L_\alpha^2(1, \infty)} &= (l(y_1), u_j)_{L_\alpha^2(1, \infty)} \\ &= W_\alpha[y_1, u_j]_\infty - W_\alpha[y_1, u_j]_0 + (y, l(u_j))_{L_\alpha^2(1, \infty)}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Eğer, (5.7) da

$j = 1, 2$ için $l(u_j) = 0$, ve $y_1(0) = \rho_0$, $T_\alpha y(0) = \rho_1$ olduğundan

$$W_\alpha[y_1, u_j]_\infty = \begin{cases} -\rho_1, & j = 1 \\ \rho_0, & j = 2 \end{cases}$$

elde edilir. O zaman

$$(f, u_1)_{L^2_\alpha(1, \infty)} = W_\alpha[y_1, u_1]_\infty + \rho_1$$

$$(f, u_2)_{L^2_\alpha(1, \infty)} = W_\alpha[y_1, u_2]_\infty - \rho_0$$

buluruz. (5.6) ifadesinden

$$W_\alpha[y_1, u_1]_\infty = \delta_0 W_\alpha[y_1, u_2]_\infty = \delta_1$$

elde edilir.

Böylece, Lemma 5.3 ve Teorem 5.1 ispatlandı. Teorem 5.1 ve Teorem 3.3.3 kullanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzölme operatörü ise T_0 operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \tag{5.8}$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \tag{5.9}$$

Koşullarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla T_0 operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine T_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (5.8) ve (5.9) koşulları yardımıyla verilir. K büzölme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (5.8) ve (5.9) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa T_0 operatörünün maksimal simetrik genişlemesini verir.

Eğer (5.8) ve (5.9) ifadesindeki K operatörü üniter olursa T_0 operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$-T_{\alpha}^2 y(t) + q(t)y(t), 0 \leq t \leq \infty$$

formundaki singüler konform kesirli Sturm-Liouville differensiyel denklemleri ele alındı. Buradaki $q(\cdot)$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, $q(\cdot) \in L_{\alpha}^1(0, \infty)$ koşulunu sağlayan reel değerli fonksiyondur. Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal ve maximal operatör oluşturuldu. Weyl limit-çember durumunda, yani indis defektin (2,2) olduğu durumda operatörün sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma aynı türde denklemler için Weyl limit-nokta durumu için yani indis defektin (1,1) olduğu durumda yapılarak konu genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad T., 2015. On Conformable Fractional Calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics 279, 57-66. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>.
- Abu Hammad M., Khalil R., 2014. Abel's Formula and Wronskian For Conformable Fractional Differential Equations, *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13,3, 177-183.
- Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Volume I. Frederick Ungar, New York.
- Anderson D.R., Ulness D.J., 2015. Newly Defined Conformable Derivatives, Adv. Dyn. Syst. Appl, 10,2, 109-137.
- Allahverdiev, B. P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential. Izvest. Ross. Akad. Nauk. Ser. Math. 59, 19-54 (English transl. Izv. Math. 59, 45-62).
- Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. J. Difference Equ. Appl. 19,5, 839-849.
- Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. Linear Multilinear Algebra 62, no. 9, 1146-1152.
- Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. Filomat 30, no. 6, 1475-1484.
- Allahverdiev, B.P., Tuna H. And Yalçinkaya Y., 2019. Conformable Fractional Sturm-Liouville Equation, Math. Meth. Appl. Sci., 1-19. <https://doi.org/10.1002/mma.5595>.
- Allahverdiev, B.P., Tuna H. And Yalçinkaya Y., 2020. On the dissipative extensions of the conformable fractional Sturm-Liouville operator, *International Conference on Artificial Intelligence and Applied Mathematics in Engineering (ICAIAE 2020)*.
- Al-Refai M., Abdeljawad T., 2017. Fundamental Results of Conformable Sturm-Liouville Eigenvalue Problems, Complexity. <https://doi.org/10.1155/2017/3720471>.
- Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk 2, 140-143.
- Baleanu D., Jarad F. and Uğurlu E. 2019, Singular conformable sequential differential equations with distributional potentials, Quaestiones Mathematicae, 42:3, 277-287.
- Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. Mat. Sb. 38, 431-450.
- Bruck, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, Mat. Sb., 100, 210-216.

- Coddington E. A and Levinson N. 1955. Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N. and Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 205, 1029-1032 (English transl., Soviet Math. Dokl. 13(1972), 1063-1067).
- Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I., 1984. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev (English transl. 1991, Birkhauser Verlag).
- Gorbachuk, M.L. , Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, Ukrain. Mat. Zh. 41, 1299-1312 (English transl. in Ukrainian Math. J. 41, (1989), 1117-1129).
- Gray H. L., Zhang N. F., 1988. On a new definition of the fractional difference, Math. Comp. 50, (182), 513-529.
- Kauffman R.M., Read T.T., and Zettl A. 1977, The Deficiency Index Problem for Powers of Ordinary Differential Expressions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 621, Springer-Verlag, Berlin.
- Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M., 2014. A New Definition Of Fractional Derivative, *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 264, 65-70.
- Khol'kin, A. M., 1981. Self-adjoint boundary conditions at-infinity for a quasiregular system of even-order differential equations pp.174-183 in: Theory of operators in function spaces and its applications, Naukova Dumka, Kiev.
- Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations; North-Holland, New York.
- Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. I, Mat. Sb. 20, 431-495; II, Mat. Sb. 21, 365-404.
- Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 16, 292-324.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- Miller, K.S., 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations; J. Wiley and Sons, New York.
- Naimark M. A., 1968. Linear Differential Operators, Second ed. Nauka, Moscow English transl. of First ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.
- Neumann, J. von., 1929. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Functionaloperatoren, Math. Ann. 102, 49-131.

- Ortigueira M.D., Tenreiro Machado J.A., 2015. What is a fractional derivative?, *Journal of Computational Physics* 293, 4-13.
- Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', *Trans. Amer. Math. Soc.* 90, 193-254; (Russian transl. In *Matematika* 6:4(1962), 11-70).
- Putnam C.R., 1940. On the spectra of certain boundary value problems, *Amer. J. Math.* 71, 109-111.
- Rellich, F., 1951. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', *Math. Ann.* 122, 343-368.
- Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 184, 1034-1037 (English translation in *Soviet Math. Dokl.* 10 (1969), 188-192).
- Titchmarsh E.C., 1946. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford.
- Tuna H. 2013, "Lim-3 Durumundaki 4. Mertebe Operatörlerin Dissipatif Genişlemeleri", *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi* , 2(2), 75-79.
- Tuna T. and Bayrak S., 2018. On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales. *Filomat*, 32, 11, 3843–3851.
- Tuna H. and Allahverdiev B. P. 2018, Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16 (1), 275-285.
- Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', *Trudy Moskov. Mat. Obshch* 1, 187-246.
- Weyl H. 1910, On ordinary differential equations with singularities and the associated expansions of arbitrary functions, *Math. Annal.* 68, 222-269. (German).

TEZ TESLİM KONTROL LİSTESİ

1. Tez metni 21x29,7cm boyutlarında standart, birinci hamur beyaz A4 kağıdına (80-120 gram) hazırlandı mı? ☐
2. Tezin dış kapağı **Ek-1**'e göre hazırlandı mı? ☐
3. Tez dış kapağına 2,5 cm ölçülerinde üniversitenin amblemi yerleştirildi mi? ☐
4. Tez sayfaları lazer yazıcı kullanılarak yalnızca kağıdın tek yüzüne basıldı mı? ☐
5. Tez metninin yazılmasında yazı karakteri olarak **Times New Roman** kullanıldı mı? ☐
6. Yazımda her sayfanın sol kenarında 3cm, diğer kenarlarda 2,5cm boşluk bırakıldı mı? ☐
7. Yazım kurallarında belirtilen satır ve paragraf aralıklarına uyuldu mu? ☐
8. Ana ve ara başlıklar uygun puntoda ve belirtilen özelliklerde yazıldı mı? ☐
9. Sayfa numaralandırılması belirtilen şekilde yapıldı mı? ☐
10. Tezin dış kapağı sonrası boş sayfa konuldu mu? ☐
11. Tezin iç kapağı **Ek-2**'ye göre hazırlandı mı? ☐
12. Jüri onay sayfası **Ek-3**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
13. Etik kurallara uygunluk beyanı **Ek-4**'e uygun olarak hazırlandı mı? ☐
14. Önsöz ve/veya Teşekkür sayfası **Ek-5**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
15. İçindekiler sayfası **Ek-6**'ya uygun olarak hazırlandı mı? ☐
16. Şekil ve Çizelge dizinleri **Ek-7**'ye uygun olarak hazırlandı mı? ☐
17. Simgeler ve kısaltmalar **Ek-8**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
18. Türkçe özet tezin içeriğini yansıtıyor mu? ☐
19. Türkçe özet sayfası **Ek-9**'a göre hazırlandı mı? ☐
20. Türkçe özete önerilen şekilde anahtar kelimeler konuldu mu? ☐
21. Türkçe ve İngilizce özet birbiri ile uyumlu mu? ☐
22. İngilizce özet sayfası **Ek-10**'a göre hazırlandı mı? ☐
23. İngilizce özete anahtar kelimeler konuldu mu? ☐
24. Şekil ve çizelgeler uygun şekilde hazırlandı mı? ☐
25. Şekil ve çizelgelerin üst, alt başlık ve açıklamaları uygun şekilde yazıldı mı? ☐
26. Tez içinde varsa, alıntılar belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
27. Tez içinde varsa, dipnotlar belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
28. Kaynaklar metin içinde doğru şekilde kullanıldı mı? ☐
29. Metin içerisinde kullanılan kaynakların tamamı kaynaklar listesine yazıldı mı? ☐
30. Kaynaklar **Ek-11**'de belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
31. Ekler uygun başlık seçilerek, tez içindeki sunuş sırasına göre ve her biri ayrı sayfadan başlamak üzere, tez arkasında verildi mi? ☐
32. Özgeçmiş sayfası **Ek-12**'ye göre hazırlandı mı? ☐
33. Tez çalışmasından yayın yapıldı mı? ☐

Tez Enstitü'ye teslim için UYGUNDUR.

Öğrenci
Canan
ERDOĞAN

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin
TUNA