

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ VOLTERRA
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN DÜZGÜN
YAKINSAK FARK ŞEMALARI

Ömer YAPMAN

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2022
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN DÜZGÜN YAKINSAK FARK ŞEMALARI

Ömer YAPMAN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu tez çalışmasında, birinci mertebeden singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde singüler pertürbasyon teorisi, integro-diferansiyel denklemlerin tarihçesi ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve formüllere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak, lineer ve lineer olmayan singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemleri ele alınmıştır. Düzgün şebekede üstel katsayılı fark şemaları ayrı ayrı kurulmuştur. İkinci olarak, lineer singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümü için parçalı düzgün şebeke olan Shishkin şebekede üstel katsayılı sonlu fark şeması kurulmuştur. Üçüncü olarak, ilk önce lineer singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümü için parçalı düzgün şebekede üstel katsayılı sonlu fark şeması kurulmuştur. Son olarak, lineer singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümü için parçalı düzgün şebekede homojen tipli sonlu fark şeması kurulmuştur. Ele alınan sürekli problemlerin özellikleri verilmiş, kalan terimi integral şeklinde olan ve üstel katsayılı baz fonksiyonları içeren interpolasyon kuadratür formüllerinden yararlanılmıştır. Her bir problemin yaklaşık çözümünün kesin çözüme ayırık maksimum normda ε -pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve yakınsama hızları belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

2022, 101 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzgün yakınsaklık, Gecikmeli fark şeması, Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem, Shishkin şebeke, Singüler pertürbasyon, Sonlu fark metodu

ABSTRACT

PhD Thesis

UNIFORMLY CONVERGENT DIFFERENCE SCHEMES FOR SINGULARLY PERTURBED VOLTERRA DELAY-INTEGRO- DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ömer YAPMAN

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

In this thesis, numerical solutions of first order singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equations are considered. This thesis study consists of five main sections. In the first section, singular perturbation theory, the history of integro-differential equations and their application fields are mentioned. Literatures are given in the second section. Some basic definitions and formulas used in this study are given in the third section. In the fourth section of this study, first, initial value problems for the first order linear and nonlinear singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equations are discussed. Exponential fitted difference schemes are constructed for these problems on a uniform mesh separately. Second, a finite difference scheme on a piecewise uniform mesh (Shishkin mesh) to solve a singularly perturbed initial value problem for a linear first order Volterra integro-differential equation with delay is presented. Later, a fitted finite difference scheme on the piecewise uniform mesh for the numerical solution of the first order linear singularly perturbed Volterra integro-differential equation is proposed. In the end, a homogeneous (nonhybrid) type difference scheme on the piecewise uniform mesh for numerical solutions of the first order singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation is introduced. For these presented problems, the properties of continuous problems are given and the difference schemes are constructed by the method of integral identities with the use of exponential basis functions and interpolating quadrature rules with the weight and remainder terms in integral form. It has been shown that the approximate solutions are uniformly convergent according to ε -parameter to the exact solution in the discrete maximum norm and the rates of convergence are specified. The obtained results are supported by numerical examples.

2022, 101 Pages

Keywords: Delay difference scheme, Finite difference method, Shishkin mesh, Singular perturbation, Uniform convergence, Volterra delay-integro-differential equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarıyla, yönlendirmeleriyle, destekleriyle, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye, tez izleme komitesinde yer alan komite üyeleri Doç. Dr. Mustafa KUDU'ya ve Dr. Öğr. Üyesi Wael HAJ AHMAD'e, doktora sürecinde birlikte çalışma fırsatını yakaladığım Prof. Dr. İlhami AMİRALİ'ye, görüşleriyle destek olan Öğr. Gör. Dr. Muhammet Enes DURMAZ'a ve bu süreçte en büyük destekçim olan aileme teşekkürlerimi sunuyorum.

Ömer YAPMAN

Haziran, 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. KURAMSAL TEMELLER.....	9
3.1. Regüler ve Singüler Pertürbe Problemi	9
3.2. Volterra İntegral Denklem	11
3.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu	11
3.4. Düzgün ve Düzgün Olmayan Şebeke	12
3.5. Şebeke Normları	12
3.6. Düzgün Şebekede Fark Türevleri	12
3.7. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri.....	13
3.8. Bileşik Dikdörtgen Kuralı.....	14
3.9. Bileşik Yamuk (Trapezoidal) Kuralı	15
3.10. Ayırık Maksimum Prensibi	15
3.11. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri	16
3.12. Gronwall İntegral Eşitsizliği	17
3.13. Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık	17
3.14. Fark Şemasının Kararlılığı	18
4. YÖNTEM.....	19
4.1. Birinci Mertebeden Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü İçin Kesin Fark Şemaları Yöntemi.....	19
4.1.1. Lineer problem	19
4.1.1.1. Kesin çözümün özellikleri	19
4.1.1.2. Fark şemasının kurulması	23

4.1.1.3.	Hata değ�erlendirmesi	26
4.1.1.4.	Nümerik sonuçlar.....	31
4.1.2.	Lineer olmayan problem	34
4.1.2.1.	Kesin çözümün �zellikleri	35
4.1.2.2.	Fark �emasının kurulması	38
4.1.2.3.	Hata değ�erlendirmesi	41
4.1.2.4.	Nümerik sonuçlar.....	44
4.2.	Singüler Pertürbe �zellikli Gecikmeli Başlangıç Değ�r Probleminin Shishkin �ebekede ��z�m�	47
4.2.1.	Fark �emasının kurulması	47
4.2.2.	Hata değ�erlendirmesi	50
4.2.3.	Nümerik sonuçlar	54
4.3.	Uyarlanmış �ebekelerde İkinci Dereceden Kesinliğ� Sahip Sonlu Fark Yöntemleri.....	56
4.3.1.	Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değ�r problemi.....	56
4.3.1.1.	Kesin çözümün �zellikleri	57
4.3.1.2.	Fark �emasının kurulması	58
4.3.1.3.	Hata değ�erlendirmesi	64
4.3.1.4.	Nümerik sonuçlar.....	69
4.3.2.	Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için homojen tipli sonlu fark �eması	73
4.3.2.1.	Kesin çözümün �zellikleri	73
4.3.2.2.	Fark �emasının kurulması	76
4.3.2.3.	Hata değ�erlendirmesi	82
4.3.2.4.	Nümerik sonuçlar.....	90
5.	SONUÇ ve �NER�LER.....	93
	KAYNAKLAR	95
	EKLER.....	101
	Ek-1. Tez �alı�ması Süresince Yapılan Akademik �alı�malar	101

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1. (3.1) probleminin çözümünün ε 'a göre değişimi 11



TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1. (4.39)-(4.40) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_{N_0} şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev vd., 2019).	33
Tablo 4.2. (4.41)-(4.42) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_{N_0} şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev vd., 2019).	34
Tablo 4.3. (4.68)-(4.69) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_{N,1}$ şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman vd., 2019).	46
Tablo 4.4. (4.68)-(4.69) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_{N,2}$ şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman vd., 2019).	46
Tablo 4.5. (4.90)-(4.91) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev ve Yapman, 2019).	56
Tablo 4.6. (4.137)-(4.138) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_N şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar ve q_ε^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2020).	71
Tablo 4.7. (4.139)-(4.140) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_N şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2020).	73
Tablo 4.8. (4.184)-(4.185) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\bar{\omega}_{N_0}$ şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2021).	92

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

C	ε ve N 'den Bağımsız Sabit
$C^n[0, l]$	$[0, l]$ Bölgesinde n 'inci Mertebeden Sürekli Türevlere Sahip Fonksiyonlar Kümesi
ε	Singüler Pertürbasyon Parametresi
e^N	Şebekede Maksimum Hata
e_ε^N	Şebekede Kesin Hata
h	Düzgün Şebekede Adım Uzunluğu
h_i	Düzgün Olmayan Şebekede Adım Uzunluğu
L	Diferansiyel Operatörü
l	Sonlu Fark Operatörü
N	Şebeke Elemanlarının Sayısı
$O(h^q)$	Yakınsaklık Hızı
q^N	Yakınsaklık Oranı
r	Gecikme Parametresi
σ	Parçalı Düzgün Şebekede (Shishkin Şebeke) Geçiş Noktası
u	İntegro-Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü
v_i	$v(t)$ Fonksiyonunun t_i Şebeke Noktasındaki Değeri
ω_N	Şebeke
y	Sonlu Fark Probleminin Çözümü

Kısaltmalar

SPFİDD	Singüler Pertürbe Özellikli Problem Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem
SPGVİDD	Singüler Pertürbe Özellikli Gecikmeli Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem
SPP	Singüler Pertürbe Özellikli Problem
SPVİDD	Singüler Pertürbe Özellikli Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem
VİDD	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem

1. GİRİŞ

Evrende birçok doğa olayı bazı parametrelere göre ani değişkenlikler gösterebilmektedir. Uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan bu ani değişiklik pertürbasyon teorisi olarak bilinmektedir. Teori ilk olarak 1904 yılında Heidelberg’te düzenlenen 3. Uluslararası Matematikçiler Kongresinde Ludwig Prandtl tarafından “Çok Küçük Akışkanlı Sıvıların Hareketi” başlıklı sunulan bildirisinde sınır katlarının varlığı ve bunun sürüklenme ile aerodinamik hale getirmek için öneminden bahsederek literatüre girmiştir (Prandtl, 1904). Sonrasında, 1946 yılında New York Üniversitesi’nde düzenlenen bir seminerde Wasow ve Friedrichs tarafından sunulan doğrusal olmayan titreşimlerle ilgili çalışmayla birlikte singüler pertürbasyon terimi literatüre kazandırılmıştır. Pertürbasyon teorisi matematikte, mühendislikte ve uygulamalı bilimlerin çeşitli alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Bunlar arasında akışkanlar dinamiği, jeofizik akışkanlar dinamiği, elastikiyet, kuantum mekaniği, kırınım teorisi, kimyasal reaktör teorisi, optimal kontrol, aerodinamik, akışkanlar mekaniği, okyanus ve atmosferik sirkülasyon, reaksiyon-difüzyon süreçleri ve meteoroloji sayılabilir. Pertürbasyon teorisi, singüler ve regüler pertürbasyon olmak üzere ikiye ayrılır. Bu tez çalışmasında singüler pertürbe özellikli problemler ele alınacaktır. Matematiksel olarak bu tür problemler, en yüksek mertebeli türevler içeren terimlerin katsayılarının pozitif çok küçük bir parametre olduğu problemler olarak ifade edilmektedir. Bu tip problemlerin çözümünde pertürbasyon parametresi olarak bilinen ε ’un küçük değerleri için tanım bölgesinin sınır katlarında çok hızlı ve düzensiz değişirken, diğer bölgelerde oldukça yavaş ve düzenli değişkenlik gösterir. Bu düzensizlik sonucunda, singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümünün incelenmesinde önemli zorluklar ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak hızlı değişimin olduğu sınır katı bölgesi olarak adlandırılan bu alanlarda çözümün sınırsız türevleri oluşmaktadır (Doolan vd., 1980; Nayfeh, 1993; Shishkin ve Shishkina, 2008; O’Malley, 2013; Roos vd., 2014; Amiralı G. ve Amiralı İ., 2018). Bu tip denklemler sıklıkla bilimin farklı dallarındaki matematiksel problemlerde karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan bazıları kontrol teorisi, kimyasal reaksiyonlar, elektrik ağları, yüksek Reynold sayısındaki sıvı akışı, yarı akışkanların sürüklenme-difüzyon denklemleri gibi fiziksel modellerdir (Doolan vd., 1980; Nayfeh, 1993; Farrell vd., 2000; Miller vd., 2012; O’Malley, 2013). Nümerik çözümde ise bu özellikler ortaya çıkmaktadır. Öyle ki şebeke adımlarının küçülmesiyle yaklaşık çözüm kesin çözüme genellikle yakınsamaz. Bundan dolayı bu özellikleri dikkate alarak singüler pertürbe

özellikli problemler için uygun nümerik yöntemlerin kurulması önem arz etmektedir. Dolayısıyla bilinen klasik nümerik yöntemler yerine bu tipten problemlerin çözümünde ε -parametresine göre düzgün yakınsaklık veren uyarlanmış operatör metodu ya da uyarlanmış şebeke metodu gibi nümerik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir (Farrel vd., 2000; Amiraliyev ve Şevgin, 2006; Amiraliyev ve Erdoğan, 2007; Kadalbajoo ve Gupta, 2010; Miller vd., 2012; Amiraliyev ve Yilmaz, 2014; Mishra ve Saini, 2014; Roos vd., 2014).

İntegral denklemlerle ilk olarak 1823 yılında Abel isimli bilim insanı mekanik bir problem üzerine çalışırken karşılaşmıştır. Daha sonrasında ise 1888 yılında integral denklem ifadesini ilk olarak literatüre kazandıran araştırmacı De Bois Reymond olmuştur. Bu dönemden itibaren bu konu üzerinde birçok araştırma yapılmıştır.

Volterra integral denklemlerin nümerik yaklaşımları üzerine son yüzyılda literatürde birçok çalışma vardır. Bu denklemler özellikle mühendislik ve uygulamalı bilimlerdeki sayısız problemlerin modellenmesinde önemli bir rol almaktadır. Bu nedenle birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. 1887 yılında ünlü İtalyan bilim insanı Vito Volterra integral denklemlerle ilgili önemli çalışmalar yapmıştır. Vito Volterra yeni özel bir integral denklem olan Volterra integral denklem terimini integrasyon limitlerinin en az birinin değişken olduğu integral denklem olarak tanımlayarak literatüre kazandırmıştır. Benzer şekilde özel bir integral denklem olan Fredholm integral denklemi 1903 yılında Eric İvan Fredholm isimli bilim insanının yapmış olduğu integrasyon limitlerinin her ikisinin de sabit olduğu çalışmasıyla literatürde yerini almıştır (Aksoy, 1998).

Matematik, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilememektedir. Bu problemler iki ve daha üzeri bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral ya da her ikisinin de bulunduğu integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak adlandırılabilirler. İntegro-diferansiyel denklemini kısaca tanımlamak gerekirse; bilinmeyen $u(t)$ fonksiyonunun hem türev hem de integral terimlerini içinde bulunduran denklemlerdir. İntegrasyon limitlerine göre integro-diferansiyel denklemler; Volterra integro-diferansiyel denklem (VİDD) ve Fredholm integro-diferansiyel denklem olmak üzere iki çeşitte sınıflandırılır.

Bu tez çalışmasında singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel denklem (SPVİDD) ve yeterince üzerinde çalışma yapılmayan gecikme parametresi içeren

singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem (SPGVİDD) ele alınmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde teze ilgili literatür özetinin olduğu Kaynak Özetleri bölümü bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında faydalanılan temel tanım ve teoremlerin verildiği Kuramsal Temeller bölümü yer almaktadır.

Dördüncü bölümde ise tezde ele alınan problemlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk alt başlığında birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan SPGVİDD için başlangıç değer problemleri ele alınmıştır.

İlk olarak, aşağıdaki birinci mertebeden lineer SPGVİDD için başlangıç değer problemi

$$Lu := \varepsilon u' + a(t)u + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I,$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0,$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon \in (0,1]$ pertürbasyon parametresi, r ise ε 'dan bağımsız sabit gecikme parametresidir. $a(t) \geq \alpha > 0$ (α sabit), $f(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. $u(t)$ çözümünün küçük ε değerleri için $t=0$ civarında sınır katı mevcuttur.

İkinci olarak, aşağıda tanımlanan birinci mertebeden kuazilineer SPGVİDD için başlangıç değer problemi

$$Lu := \varepsilon u' + a(t)u + f\left(t, \int_{t-r}^t K(t,s,u(s))ds\right) = 0, \quad t \in I,$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0,$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon > 0$ pertürbasyon parametresi ve $r > 0$ sabit gecikme parametresidir. Ayrıca $a(t)$, $\varphi(t)$, $f(t, v)$ ve $K(t, s, u)$ yeterince düzgün fonksiyonlardır. Her bir problem için fark şeması oluşturulmuş ve kararlılık, yakınsaklık, nümerik özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ikinci alt başlığında, ilk alt başlıkta ele alınan birinci mertebeden lineer SPGVİDD için parçalı düzgün şebeke olan Shishkin şebekede $O(N^{-1} \ln N)$ kesinlikli sonlu fark şeması oluşturulmuş ve kararlılık, yakınsaklık, nümerik özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümün üçüncü alt başlığında, uyarlanmış şebekelerde ikinci dereceden kesinliğe sahip sonlu fark yöntemleri incelenmiştir.

İlk olarak, aşağıda tanımlanan birinci mertebeden lineer SPVİDD için başlangıç değer problemi

$$Lu := \varepsilon u' + a(t)u + \int_0^t K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0) = A,$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon \in (0, 1]$ pertürbasyon parametresi, $a(t) \geq \alpha > 0$ (α sabit), $K(t, s)$ ve $f(t)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A verilmiş sabittir.

İkinci olarak, dördüncü bölümün ilk alt başlığında ele alınan birinci mertebeden lineer SPGVİDD için parçalı düzgün şebeke olan Shishkin şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli sonlu fark şeması oluşturulmuş ve kararlılık, yakınsaklık, nümerik özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Beşinci bölümde tez çalışmasında ele alınan problemler bir arada değerlendirilmiş, sonraki çalışmalar için görüş ve öneriler sunulmuştur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Singüler pertürbe özellikli problemler (SPP) ilk olarak 20. yüzyılın başlarında asimptotik değerlendirmelerle başlayıp ilerleyen dönemlerde sayısal metotlarla günümüze kadar gelmiştir. Bu problemler tıpta, fen bilimlerinde, mühendislikte ve diğer uygulamalı bilimlerde sıkça karşımıza çıkmaktadır. Bunlar arasında akışkanlar dinamiği, jeofizik akışkanlar dinamiği, elastikiyet, kuantum mekaniği, kırınım teorisi, kimyasal reaktör teorisi, optimal kontrol, aerodinamik, akışkanlar mekaniği, okyanus ve atmosferik sirkülasyon, reaksiyon-difüzyon süreçleri ve meteoroloji sayılabilir (Doolan vd., 1980; Skellam, 1991; Nayfeh, 1993; Kevorkian ve Cole, 1996; Farrell vd., 2000; Miller vd., 2012; O'Malley, 2013; Roos vd., 2014). Bu tip problemlerin nümerik çözümleri için standart nümerik yöntemler kararsız sonuçlar verdiği için kesin sonuç vermezler. Bundan dolayı kararlı ve küçük ε parametresine göre düzgün yakınsak nümerik yöntemler geliştirmek gerekir. Bunun için de iki çeşit yaklaşım kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlardan birincisi düzgün şebeke üzerinde uygun üstel fark şemalarının kurulması; ikinci yaklaşım ise üstel olmayan fark şemalarının ε parametresine göre düzgün yakınsaklığını sağlayan düzgün olmayan şebekelerin seçilmesidir (Bakhvalov, 1969; Doolan vd., 1980; Nayfeh, 1993; Selvakumar, 1994; Stynes ve Tobiska, 1998; Farrell vd., 2000; Fröhner ve Roos, 2001; Amirali ve Duru, 2002; Kadalbajoo ve Patidar, 2002; Boglaev, 2004; Shishkin ve Shishkina, 2008; Kadalbajoo ve Gupta, 2009; Miller vd., 2012; O'Malley, 2013; Roos vd., 2014). Bu tez çalışmasında her iki metot da kullanılacaktır.

Volterra, Fredholm, Volterra-Fredholm, Volterra-Abel integral ve integro-diferansiyel denklemler için son yıllarda yapılan çalışmalarda bilim insanları çeşitli yaklaşım tekniklerini kullanmışlardır. Bu teknikler; sonlu farklar yöntemi, sonlu elamanlar yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi, diferansiyel kuadratür yöntemi, homotopi pertürbasyon yöntemi ve spline kollokasyon yöntemleridir (Enright ve Hayes, 2007; Saadati vd., 2008; Shakourifar ve Enright, 2011, 2012; Aigo, 2013; Bhalekar ve Patade, 2016; Raffoul ve Rai, 2016; Zhao Y. ve Zhao F., 2016).

Yukarıda belirtilen problem sınıflarını en yüksek türevli terimlerin katsayılarının pozitif küçük bir parametre ile çarpıldığı ilgili sınıflarla sınırlandırılırsa, bu problemlere singüler pertürbe özellikli Volterra, Fredholm, Volterra-Fredholm, Volterra-Abel

integral ve integro-diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Bu problemlerin çözümü sınır katları olarak adlandırılan ince geçiş bölgelerinde hızlı değişimlere uğrar, bu nedenle bilinen sayısal yaklaşımlar pratik değildir. Bu gerçek, pertürbasyon parametresinin tüm değerleri için kararlılığa sahip özel tekniklerin tasarlanmasına neden olur. Bu bağlamda, SPVİDD için araştırmacılar birçok çalışma yapmıştır.

SPVİDD eş zamanlı yenilenme ve kontrol süreçleri, dağılım-yayılm süreçleri, aşırı nemlenmiş lineer olmayan esnek kütle, hastalık salgın dinamiği, polimer liflerin gerilmesi, sınır katmanı salınımı gibi biyolojik ve fiziksel problemlerde karşımıza çıkmaktadır.

Lodge vd. (1978) polimer liflerin gerilmesi problemi için SPVİDD çözümlerinin nitel davranışlarını araştırdılar ve indirgenmiş çözümün varlık ve tekliğini birkaç varsayımla ortaya koydular. Bu araştırma sonuçlarıyla birlikte konvolüsyon olmayan genel problem haline getirildi (Jordan, 1978, 1979). Bu genel problemin çözümlerinin davranışları incelenerek SPVİDD asimptotik değerlendirmesi için bilimsel bir yöntem sunulmuş ve bu yöntem bazı problemlere uyarlanmıştır (Angel ve Olmstead, 1985, 1987a, 1987b).

Kauthen (1993) SPVİDD için kapalı Runge-Kutta yöntemini araştırdı. SPVİDD sistemlerine uygulanan genişletilmiş kapalı Pouzet-Volterra-Runge-Kutta yöntemlerinin yakınsaklığını inceledi (Kauthen, 1995). Aynı yazar singüler pertürbe özellikli Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemler üzerine mevcut literatüre ilişkin bir araştırma yaptı (Kauthen, 1997). Salama ve Evans (2001)'de sabit bir ε pertürbasyon parametresiyle birlikte SPVİDD için üstel bir şema verip, şemanın kararlılık analizini çalıştılar. Singüler pertürbe özellikli Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemler için tension spline kollokasyon yöntemi kullanılarak, yöntemin yakınsaklığını inceleyen nümerik bir metot sunulmuştur (Horvat ve Rogina, 2002). Birinci mertebeden lineer olmayan SPVİDD'in nümerik çözümü için Bakhvalov şebekesinde (graded mesh) ε pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak bir metot türetilmiş ve ayrık maksimum normda birinci mertebeden kesinliğe sahip fark şeması kurulmuştur (Şevgin, 2014). Birinci mertebeden lineer SPVİDD için parçalı düzgün şebeke olan Shishkin şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli uygun fark şeması oluşturulmuştur (Yapman ve Amiraliev, 2020).

SPVİDD yaklaşım yöntemlerinin analiziyle ilgili detaylı inceleme için Lodge vd. (1978), Bijura (2002), Bobodzhanov ve Safonov (2004), Amiraliyev ve Şevgin (2006), Khater vd. (2007), Salama ve Bakr (2007), Ramos (2008), Iragi ve Munyakazi (2018, 2020) çalışmalarına ve bu çalışmalarda geçen diğer kaynaklara bakılabilir.

Singüler pertürbe özellikli Fredholm integro-diferansiyel denklem (SPFİDD) üzerine de son yıllarda yapılmış birçok çalışma vardır. Birinci mertebeden SPFİDD için; düzgün şebekede birinci mertebeden yakınsak üstel katsayılı fark şeması ve parçalı düzgün şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli fark şeması oluşturulmuştur (Amiraliyev vd., 2018, 2020). İkinci mertebeden SPFİDD için; düzgün şebekede $O(h)$ kesinlikli fark şeması ve parçalı düzgün şebekede ikinci mertebeden yakınsak fark şeması kurulmuştur (Amiraliyev vd., 2021; Durmaz ve Amiraliyev, 2021).

Gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili son yarım yüzyıldan itibaren literatüre kayıtlı birçok çalışma vardır. Kontrol teorisi ve popülasyon ekolojisi gibi uygulamalı alanlardaki problemlerde gecikme parametrelili diferansiyel denklemler kullanılmaktadır (Bellman ve Cooke, 1963; El'sgol'ts, 1966). Bellman ve Cooke (1963)'te yayımlanan bilimsel kitabında gecikme parametresi içeren birinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel fark denklemlerini ele almışlardır. Bu çalışmalarında ayrıca gecikmeli, nötral tipten diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik şartlarını vermişler, seri çözümü ve Laplace dönüşümü yardımıyla çözümlerini incelemişlerdir. El'sgol'ts (1966)'daki çalışmasında ele almış olduğu sınır-değer problemi hem nörobiyoloji hem de zaman gecikmesi içeren kontrol teoride karşımıza çıkmaktadır. El'sgol'ts ve Norkin (1973)'te yayımlanan bilimsel kitabında birinci mertebeden sabit katsayılı gecikme parametresi içeren diferansiyel denklem sistemlerinin lineer ve lineer olmayan durumlarından bahsetmişlerdir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik sonuçlarıyla ilgili literatüre kayıtlı birçok çalışma vardır (Norkin, 1972; Lee ve O'Regan, 1991, 1993; Jiang, 2002; Bai ve Ma, 2005). Diğer taraftan gecikmeli adi diferansiyel denklemler için uygulanmış Runge Kutta yöntemi, Euler yöntemi, Taylor seri yaklaşımı gibi nümerik araştırmalar yapılmıştır (Norkin, 1972; El'sgol'ts ve Norkin, 1973; Bellen ve Zennaro, 2003). Bunların dışında araç takip sistemi, enfeksiyon hastalıkları, enzim kinetiği, lojistik, elektrodinamik, immünoloji ve epidemiyoloji alanlardaki problemlerde de gecikme parametrelili diferansiyel denklemler kullanılmaktadır (Driver, 1977; Kuang, 1993; Hairer vd., 2008).

SPGVİDD sıklıkla mühendislik, fizik, tıp, ekoloji, biyoloji gibi birçok bilimlerin uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır. Wu ve Gan (2009) SPGVİDD'lere uygulanan lineer çok adımlı yöntemlerin hata davranışlarını araştırmış ve yakınsak kuadratür kuralıyla $A(\alpha)$ -kararlı lineer çok adımlı yöntemlerin hata değerlendirmelerini elde etmiştir. He ve Xu (2009) impulsif SPGVİDD'lerin üstel kararlılığını araştırdı. Amiraliev ve Yılmaz (2014) birinci mertebeden lineer SPGVİDD için düzgün şebekede birinci mertebeden düzgün yakınsaklığa sahip üstel katsayılı uygun fark şeması kurmuşlardır. SPGVİDD'in nümerik çözümü için bir başka yararlı çalışmada Kudu vd. (2016) parçalı düzgün şebeke üzerinde $O(N^{-1} \ln N)$ kesinlikli kapalı sonlu fark şeması kurmuşlardır. Birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan SPGVİDD'ler için $O(h)$ kesinlikli birinci mertebeden düzgün yakınsaklığa sahip fark şemaları oluşturulmuştur (Amiraliev vd., 2019; Yapman vd., 2019). Birinci mertebeden lineer SPGVİDD için; parçalı düzgün şebekede ayık maksimum normda sırasıyla $O(N^{-1} \ln N)$ kesinlikli birinci mertebeden ve $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli ikinci mertebeden düzgün yakınsak üstel katsayılı fark şemaları kurulmuştur (Amiraliev ve Yapman, 2019; Yapman ve Amiraliev, 2021).

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Regüler ve Singüler Pertürbe Problemi

P_ε problemi, ε pozitif yeterince küçük parametresine bağlı bir problem olsun. Bu problemin u_ε çözümünün $L(u, \varepsilon) = 0$ bağıntısıyla belirlendiği kabul edilsin. Bu tür problemlere genellikle *pertürbe olmuş problem* denilmektedir. $\varepsilon = 0$ durumunda oluşan yeni $L(u_0, 0) = 0$ denklemiyle tanımlanan P_0 probleminin çözümü u_0 olsun. P_0 problemine, P_ε problemi için uygun *indirgenmiş problem* denir. P_ε problemi ile indirgenmiş bu P_0 problemi aynı tipten ve mertebedense, ayrıca her iki problemin de bir tek çözümü varsa P_ε problemine *regüler pertürbe olmuş problem* aksi durumda ise *singüler pertürbe olmuş problem (SPP)* denir (Miller vd., 2012; Amirali G. ve Amirali İ., 2018). Bu problemlere örnek vermek gerekirse aşağıdaki iki farklı başlangıç-değer problemleri ele alınsın:

Örnek 3.1. (Birinci mertebeden denklem için başlangıç-değer problemi) İlk olarak kesin çözümü

$$u(t) = e^{-\varepsilon t}$$

şeklinde olan aşağıdaki başlangıç-değer problemi ele alınsın:

$$u'(t) + \varepsilon u(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1, \quad u(0) = 1.$$

$u(t)$ kesin çözümü ε 'un artan pozitif kuvvetlerine göre

$$u(t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 - \dots$$

biçiminde seri açılımıyla gösterilmektedir. $t_0 \in [0, 1]$ keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = 1$$

olmaktadır. Ana problemle aynı mertebeden olan indirgenmiş problemin çözümü $u_0(t)=1$ dir. Böylelikle örnekte ifade edilen başlangıç-değer problemi regüler pertürbe özellikli problemidir.

Şimdi ise kesin çözümü

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

şeklinde olan aşağıdaki başlangıç-değer problemi ele alınsın:

$$\varepsilon u'(t) + u(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1, \quad u(0) = 1. \quad (3.1)$$

$t_0 \in (0,1]$, ε 'dan bağımsız keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = 0$$

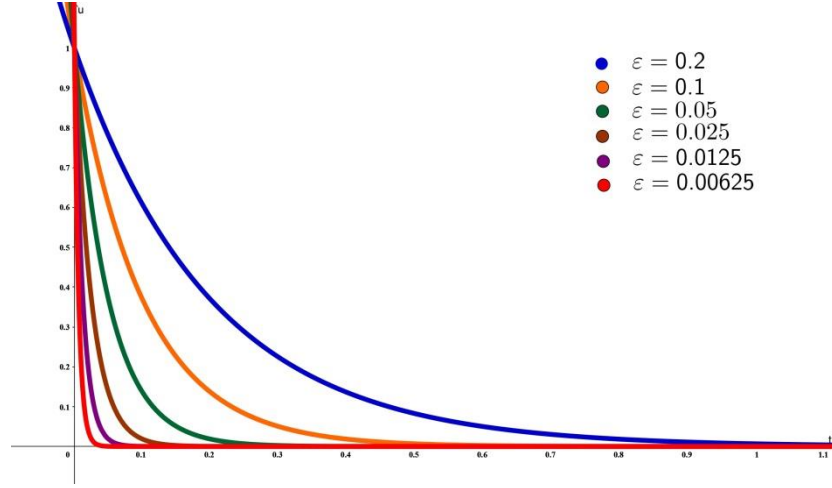
olmaktadır. Ancak tekrarlı limitlerin eşitliği olduğu görülür. Fakat $t=0$ noktası için tekrarlı limitlerin eşitliğinden bahsedilemez. Gerçekten

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} u(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = 0$$

olduğundan eşitlik yoktur.

Yukarıda bahsi geçen bu türden eşitsizlikler singüler pertürbe özellikli diferansiyel problemlere ait özel bir durumdur. Bu durum sınır ya da başlangıç katının varlığının bir göstergesidir. O halde yukarıdaki problemde $t=0$ noktasında bir başlangıç katı vardır. $u_0(t) \equiv 0$, uygun indirgenmiş problemin çözümüdür ve bu durumda ise başlangıç şartı gereksiz olmaktadır.

Şekil 3.1.'den anlaşılacağı üzere ε 'nun azalan değerlerine göre grafik eğrisinin koordinat eksenlerine daha fazla yaslandığı görülmektedir.



Şekil 3.1. (3.1) probleminin çözümünün ε 'a göre değişimi

3.2. Volterra İntegral Denklem

$u(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, $K(t,s)$ ve $g(t)$ bilinen fonksiyonlar, s ve t $[a,t]$ aralığında tanımlı reel değişkenler olmak üzere, integral sınırlarından biri değişken olan

$$u(t) - \int_a^t K(t,s)u(s)ds = g(t)$$

denklemine *ikinci tip lineer Volterra integral denklemi* denir. Burada $K(t,s)$ fonksiyonuna Volterra integral denkleminin *çekirdeği* denir. $g(t) \equiv 0$ ise bu denklem *ikinci tip homojen lineer Volterra integral denklemi* olarak adlandırılır (Krasnov vd., 1971).

3.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[0,T]$ aralığında tanımlanan ve sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışa *şebeke* denir. Bu şebekede t_i düğüm noktalarında tanımlanmış $v_i = v(t_i)$ fonksiyonuna *şebeke fonksiyonu* denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

3.4. Düzgün ve Düzgün Olmayan Şebeke

$[0, T]$ aralığında düğüm noktaları eşit aralıklı ise

$$\bar{\omega}_h = \left\{ t_i \mid t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = \frac{T}{N} \right\}$$

şeklinde tanımlı bu ifadeye *düzgün şebeke* denir. Burada h sabit sayısına *şebeke adımı* denir. Diğer taraftan $[0, T]$ aralığında tanımlı

$$\bar{\omega}_N = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T, h_i = t_i - t_{i-1}\}$$

ayrık noktalar kümesine de $[0, T]$ aralığında tanımlı *düzgün olmayan şebeke* denir. Burada tanımlı h_i ifadesine *şebeke adımı* denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

3.5. Şebeke Normları

$[0, T]$ aralığında tanımlanan

$$\|v\|_{\infty} \equiv \|v\|_{\infty, [0, T]} \equiv \|v\|_{C[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |v(t)|$$

ifadesine $[0, T]$ aralığındaki $v(t)$ fonksiyonunun *maksimum normu* denir (Isaacson ve Keller, 1994).

Ayrıca $\|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|$ ifadesine ise *düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde maksimum normun fark benzeri* denir (Isaacson ve Keller, 1994).

3.6. Düzgün Şebekede Fark Türevleri

$[0, T]$ aralığında tanımlanan bir düzgün şebekede herhangi bir $v(t)$ fonksiyonu için,

$$v_{t,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$v_{\bar{t},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$v_{o_{t,i}} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$v_{\bar{t},i} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}$$

eşitliğine *ikinci mertebeden fark türevi* denir (Samarskii, 2001).

3.7. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri

$[0, T]$ aralığında tanımlanan bir düzgün olmayan şebekede herhangi bir $v(t)$ fonksiyonu için,

$$v_{t,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}$$

eşitliğine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$v_{\bar{t},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}$$

eşitliğine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$v_{\dot{t},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_i}$$

eşitliğine *birinci mertebeden fark türevi*,

$$v_{o_{t,i}} = \frac{v_{t,i} + v_{\bar{t},i}}{2}$$

eşitliğine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$v_{\bar{t},i} = \frac{v_{t,i} - v_{\bar{t},i}}{\bar{h}_i}$$

eşitliğine *ikinci mertebeden fark türevi* denir. Burada

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır (Samarskii, 2001).

3.8. Bileşik Dikdörtgen Kuralı

$[0, T]$ aralığında yeterince düzgün $g(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^T g(t)dt = h \sum_{i=0}^i g(t_{i-\frac{1}{2}}) + R_N(g),$$

$$\left(t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{T}{N}; t_{i-\frac{1}{2}} = t_i - \frac{h}{2} \right)$$

ifadesine kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş dikdörtgen formülü* denir.

Burada $R_N(f)$ kalan terimi

$$R_N(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi) \left[\frac{(x_i - \xi)^2}{2} - (x_i - x_{i-1}) T_1 \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \xi \right) \right] d\xi$$

şeklindedir (Amirali ve Amirali, 2018). Burada

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \geq 0; \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

tanımlanmıştır.

3.9. Bileşik Yamuk (Trapezoidal) Kuralı

$[0, T]$ aralığında tanımlı yeterince düzgün $g(t)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} (g_i + g_{i-1}) + R_N(g) \equiv \sum_{i=0}^N \tilde{h}_i g_i + R_N(g)$$

biçiminde tanımlı ifadeye kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş yamuk (trapezoidal) kuralı* denir. Burada $R_N(g)$ kalan terimi

$$R_N(g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - \xi)(t_{i-1} - \xi) g''(\xi) d\xi$$

ve

$$\tilde{h}_0 = \frac{h_1}{2}, \quad \tilde{h}_N = \frac{h_N}{2}$$

şeklindedir (Amirali ve Amirali, 2018).

3.10. Ayrık Maksimum Prensibi

$$l[y_j] = A_j y_{j-1} - B_j y_j + C_j y_{j+1} = -G_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = \beta_1, \quad y_N = \beta_2,$$

şeklinde bir sonlu fark problemi için

$$A_j > 0, \quad C_j > 0, \quad D_j = B_j - A_j - C_j \geq 0$$

olsun. Bu durumda her $j = 1, 2, \dots, N-1$ ve $y_j \neq \text{sabit}$ için

$$l[y_j] \geq 0, \quad (l[y_j] \leq 0)$$

şartları her $j = 1, 2, \dots, N-1$ için sağlanıyorsa y_j şebeke fonksiyonu her $j = 1, 2, \dots, N-1$ için maksimal pozitif değer (minimal negatif değer) alamaz. Bu duruma *maksimum prensibi* denir (Samarskii, 2001).

3.11. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri

$q(t) \in C[a, b]$ baz fonksiyonu, $g(t)$ belirli bir fonksiyon ve σ – reel bir parametre olsun. Bu durumda

$$\int_a^b q(t)g(t)dt = \left[\int_a^b q(t)dt \right] \{ \sigma g(b) + (1-\sigma)g(a) \} \\ + g[a, b] \int_a^b (t - t^{(\sigma)}) q(t)dt + R_n(g)$$

eşitliği doğrudur. Burada kalan terim

$$R_n(g) = \int_a^b dt q(t) \int_a^b g^{(n)}(\xi) K_{n-1}(t, \xi) d\xi, \quad g \in C^n, \quad n=1, 2$$

şeklindedir. Burada

$$K_s(t, s) = T_s(t - \xi) - (b-a)^{-1}(t-a)(b-\xi)^s, \quad s=0, 1,$$

$$t^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a,$$

$$g[a, b] = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

biçiminde tanımlanmıştır.

$q(t) \in C^1[a, b]$ baz fonksiyonu, $g(t)$ belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b q(t)g'(t)dt = g[a, b] \int_a^b q(t)dt + R_n^*(g)$$

eşitliği doğrudur. Burada kalan terim

$$R_n^*(g) = - \int_a^b dt q'(t) \int_a^b g^{(n)}(\xi) K_{n-1}(t, \xi) d\xi, \quad g \in C^n, \quad n=1, 2$$

şeklindedir (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amirali ve Amirali, 2018).

3.12. Gronwall İntegral Eşitsizliği

$u(t)$ negatif olmayan sürekli fonksiyon, $k(t) \geq 0$ sürekli ve reel değerli bir fonksiyon ve C sabit olsun. Bu durumda eğer

$$u(t) \leq C + \int_0^t k(s)u(s)ds$$

ise

$$u(t) \leq Ce^{\int_0^t k(s)ds}$$

eşitsizliği vardır (Amirali ve Amirali, 2018).

3.13. Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık

$u(t)$ verilen bir problemin kesin çözümü ve bu probleme ait herhangi bir şebekedeki fark probleminin çözümü y olsun. $z = y - u$ eşitliğine *hata fonksiyonu* denir. $\| \cdot \|_1$ belirli bir şebekedeki herhangi bir norm olmak üzere

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$$

ise bu durumda fark probleminin çözümü verilen problemin çözümüne *yakınsaktır* denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük h sabitleri için

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \leq Ch^q, \quad q > 0$$

biçiminde bir eşitsizlik söz konusu ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h 'ın q 'uncu derecesiyle yakınsar denir. Başka bir ifade ile yaklaşık çözüm $O(h^q)$ kesinliğine sahiptir denir. Eğer C sabiti, h ve singüler pertürbe özellikli problemdeki pertürbasyon parametresi olan ε 'dan bağımsız ise o zaman yaklaşık çözüm kesin çözüme ε 'a göre *düzgün yakınsaktır* denir (Samarskii, 2001).

3.14. Fark Şemasının Kararlılığı

l_h ve L_h , $\bar{\omega}_h$ 'da tanımlı fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, γ_h ve ω_h belirli bir şebeke fonksiyonları olmak üzere

$$L_h y = \varphi_h, \quad t \in \omega_h,$$

$$l_h y = \chi_h, \quad t \in \gamma_h$$

fark problemi tanımlanabilir. Bu fark problemi, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ ve belirli sınıflardan olan her bir γ_h ve ω_h başlangıç veri fonksiyonları ve için bir tek çözüme sahip olduğu varsayılın. Bu fark probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\chi}_h$ ve $\tilde{\phi}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirlensin. Eğer öyle, h 'dan bağımsız C_1 ve C_2 sabitleri var ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\phi}_h - \phi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu durumda fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre *kararlıdır* denir. Burada $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_3$ şebeke normlarıdır (Samarskii, 2001).

4. YÖNTEM

4.1. Birinci Mertebeden Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü İçin Kesin Fark Şemaları Yöntemi

Bu bölümde birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemleri ele alınmıştır. Her bir problem için fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri incelenmiştir.

4.1.1. Lineer problem

Bu bölümde, aşağıda tanımlanan birinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi ele alınmıştır. $I = (0, T] = \bigcup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $0 \leq s \leq m$; $\bar{I} = [0, T]$ ve $I_0 = [-r, 0]$ olmak üzere;

$$Lu := \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (4.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0, \quad (4.2)$$

probleminde $\varepsilon \in (0, 1]$ pertürbasyon parametresi, r ise ε 'dan bağımsız sabit gecikme parametresidir. $a(t) \geq \alpha > 0$ (α sabit), $f(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve

$K(t, s)$ ($(t, s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. $u(t)$ çözümünün küçük ε değerleri için $t = 0$ civarında sınır katı mevcuttur.

4.1.1.1. Kesin çözümün özellikleri

Bu bölümde (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin çözümü ve birinci türevi için asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır. Bu değerlendirmeler daha sonra hata analizinde kullanılacaktır.

Lemma 4.1. $a, f \in C[0, T]$, $a(t) \geq \alpha > 0$, $|F(t)| \leq \mathcal{F}(t)$ ve $\mathcal{F}(t)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$\varepsilon v'(t) + a(t)v(t) = F(t), \quad t \in I, \quad (4.3)$$

$$v(0) = A, \quad (4.4)$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$|v(t)| \leq |A| + \alpha^{-1} \mathcal{F}(t), \quad t \in I,$$

eşitsizliğini sağlar (Amiraliyev ve Yılmaz, 2014).

Lemma 4.2. $a, f \in C^1[0, T]$, $\left| \frac{\partial}{\partial t} K(t, s) \right| \leq M_0 < \infty$ ise, (4.1)-(4.2) probleminin çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad (4.5)$$

$$|u'(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$C_0 = \left(|\varphi(0)| + \alpha^{-1} \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} \right) e^{\alpha^{-1} \bar{K} T},$$

$$\bar{K} = \max_{I \times I} |K(t, s)|,$$

$$\|\varphi\|_{1,0} = \int_{-r}^0 |\varphi(t)| dt$$

biçimindedir.

İspat. Öncelikle (4.5)'in doğruluğu gösterilecektir. (4.1) eşitliğinin sağ tarafı ve integral teriminden

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \right| &\leq \|f\|_{\infty} + \bar{K} \int_{t-r}^t |u(s)| \\ &\leq \|f\|_{\infty} + \bar{K} \begin{cases} \int_{t-r}^0 |\varphi(s)|ds + \int_0^t |u(s)|ds, & t < r \\ \int_{t-r}^t |u(s)|ds, & t > r \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitsizlik yazabilir:

$$\left| f(t) - \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \right| \leq \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} + \|f\|_{\infty} + \bar{K} \int_0^t |u(s)|ds, \quad t > 0.$$

Şimdi de (4.1)-(4.2) problemine Lemma 4.1. uygulanırsa;

$$|u(t)| \leq |\varphi(0)| + \alpha^{-1} \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} + \alpha^{-1} \bar{K} \int_0^t |u(s)|ds, \quad t \in I$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|u(t)| \leq \left(|\varphi(0)| + \alpha^{-1} \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} \right) e^{\alpha^{-1} \bar{K} t}$$

bulunur. Buradan (4.5)'in doğruluğu açıktır.

Şimdi (4.6)'nın ispatına geçelim.

(4.1)'in bir kez türevi alınır;

$$\varepsilon v'(t) + a(t)v(t) = \Phi(t), \quad t > 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada

$$v(t) = u'(t)$$

$$\Phi(t) = f'(t) - a'(t)u(t) - \int_{t-r}^t \frac{\partial}{\partial t} K(t,s)u(s)ds - K(t,t)u(t) + K(t,t-r)u(t-r)$$

biçimindedir.

Lemma 4.2.'nin şartları dikkate alınır,

$$|\Phi(t)| \leq \|f'\|_\infty + \|a'\|_\infty \|u\|_\infty + M_0 \left(\|\varphi\|_{1,0} + \|u\|_\infty \right) + \bar{K} (\|u\|_\infty + \|\varphi\|_\infty), \quad 0 < t < r$$

$$|\Phi(t)| \leq \|f'\|_\infty + \|a'\|_\infty \|u\|_\infty + M_0 \|u\|_\infty + 2\bar{K} \|u\|_\infty, \quad t > r$$

yazılabilir. Buradan ve (4.5)'den

$$|\Phi(t)| \leq C, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.8)$$

olur. $u'(0)$ değerlendirmesi için (4.1)'den

$$\begin{aligned} |u'(0)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| f(0) - a(0)u(0) - \int_{-r}^0 K(0,s)u(s)ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} (\|f\|_\infty + \|a\|_\infty C_0 + \bar{K} \|\varphi\|_{1,0}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$|v(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (4.9)$$

olur. Sonuç olarak (4.7) ve (4.9) dikkate alınır,

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\xi) d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\eta) d\eta} d\xi$$

bulunur. Böylece

$$|v(t)| \leq |v(0)| e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\Phi(\xi)| e^{-\frac{\alpha(t-\xi)}{\varepsilon}} d\xi$$

yazılabilir. Buradan (4.8) ve (4.9)'dan

$$|v(t)| \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + C\alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right)$$

olur. Böylece (4.6) eşitsizliği kolayca elde edilir.

4.1.1.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde, (4.1)-(4.2) problemi için düzgün şebekede fark şeması oluşturulacaktır. $\bar{I}$ aralığında,

$$\omega_h = \left\{ t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0; h = \frac{T}{N_0} = \frac{r}{N} \right\}$$

düzgün şebekesi ele alınsın. Burada her bir I_p ($1 \leq p \leq m$) alt aralığı N tane şebeke noktalarını içermektedir.

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N+1 \leq i \leq pN\}, 1 \leq p \leq m,$$

ve sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p}$$

şeklindedir.

Notasyon kolaylığı için, herhangi bir $v(t)$ fonksiyonu için $v_i = v(t_i)$, $u(t)$ 'nin her bir t_i noktasındaki yaklaşık değeri y_i ve ayrıca $v_{i-\frac{1}{2}} = v(t_i - \frac{h}{2})$ olsun. ω_{N_0} üzerinde tanımlanan herhangi bir v_i şebeke fonksiyonu için kullanılan norm

$$\|v\|_{\infty, \omega_{N,p}} = \max_{(p-1)N \leq i \leq pN} |v_i|$$

biçimindedir. Fark şemasını oluşturmak için aşağıdaki özdeşlik ele alınacaktır:

$$\mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t) \varphi_i(t) dt = \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt \quad (4.10)$$

burada

$$\mu_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

ve

$$\varphi_i(t) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i-t)}, \quad i=1,2,\dots,N_0$$

olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. $\varphi_i(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} -\varepsilon\varphi'(t) + a_i\varphi(t) &= 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ \varphi(t_i) &= 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

probleminin çözümüdür. Kesin fark şemaları yöntemini uyguladıktan sonra (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev ve Şevgin, 2006; Amiraliyev ve Yılmaz, 2014; ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili kapsamlı bilgi için Samarskii, 2001, s. 207-214)

$$\begin{aligned} & \mu_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t)u(t)]\varphi_i(t)dt \\ &= \mu_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t_i)u(t)]\varphi_i(t)dt + \mu_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)]u(t)\varphi_i(t)dt \\ &= \varepsilon\theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + R_i^{(1)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho} \quad (4.13)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(1)} = \mu_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)]u(t)\varphi_i(t)dt \quad (4.14)$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\mu_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\varphi_i(t)dt = f_i + R_i^{(2)} \quad (4.15)$$

şeklindedir ve burada

$$R_i^{(2)} = \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f(t_i)] \varphi_i(t) dt \quad (4.16)$$

biçimindedir. (4.10) eşitliğindeki integral terim için uygun kuadratr formülleri uygulandıktan sonra

$$\begin{aligned} \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) \left(\int_{t-r}^t K(t, s) u(s) ds \right) dt &= \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \\ &= h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s_j) u_j + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) denkleminde

$$R_i^{(3)} = \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^t \frac{d}{dt} \left(\int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi, s) u(s) ds \right) \left[T_0(s - \xi) - T_0(t_{i-\frac{1}{2}} - \xi) \right] d\xi, \quad (4.18)$$

$$R_i^{(4)} = \sum_{j=i-N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left(t_{j-\frac{1}{2}} - \xi - h T_0(t_j - \xi) \right) \frac{d}{ds} \left(K(t_{i-\frac{1}{2}}, \xi) u(\xi) \right) d\xi \quad (4.19)$$

biçimindedir. Burada

$$T_0(\lambda) = 1, \lambda \geq 0; \quad T_0(\lambda) = 0, \lambda < 0$$

şeklindedir. Sonuç olarak $u(t_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon \theta_i u_{\bar{i}, i} + a_i u_i + h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2}, j} u_j = f_i - R_i \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir. (4.20) denkleminde kalan terimi ise

$$R_i = R_i^{(1)} - R_i^{(2)} + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} \quad (4.21)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $R_i^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, 4$) kalan terimleri sırasıyla (4.14), (4.16), (4.18) ve (4.19) denklemlerinde açıkça ifade edilmiştir.

Böylece (4.20)'yi dikkate alarak (4.1)-(4.2) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon \theta_i y_{\bar{t},i} + a_i y_i + h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2}j} y_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.22)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (4.23)$$

fark şeması önerilebilir. Burada θ_i , (4.13)'de ifade edilmiştir.

4.1.1.3. Hata değerlendirmesi

Lemma 4.3. $|F_i| \leq \mathcal{F}_i$ ve $\mathcal{F}_i$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere;

$$l_N v_i := \varepsilon \theta_i v_{\bar{t},i} + a_i v_i = F_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.24)$$

$$v_0 = A \quad (4.25)$$

başlangıç değer probleminin çözümü olan şebeke fonksiyonu v_i

$$|v_i| \leq |A| + \alpha^{-1} \mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.26)$$

eşitsizliğini sağlar (Amiraliyev vd., 2019).

İspat. İlk olarak, $l_N v_i$ fark operatörü için maksimum prensibi yazılırsa: Herhangi bir v_i şebeke fonksiyonu $l_N v_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq N$) ve $v_0 \geq 0$ şartlarını sağlıyorsa bu durumda $v_i \geq 0$ ($0 \leq i \leq N$) olur.

$$\psi_i^\pm = \pm v_i + |A| + \alpha^{-1} \mathcal{F}_i$$

şeklindeki bariyer fonksiyonu ele alınırsa ve $\mathcal{F}_i$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\mathcal{F}_{\bar{t},i} = \frac{\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_{i-1}}{h} \geq 0$$

dikkate alındığında;

$$\psi_0^\pm = \pm A + |A| + \alpha^{-1} \mathcal{F}_i \geq 0$$

ve

$$l_N \psi_i^\pm := \pm F_i + a_i |A| + \varepsilon \theta_i \alpha^{-1} \mathcal{F}_{\bar{t},i} + a_i \alpha^{-1} \mathcal{F}_i \geq \pm F_i + \mathcal{F}_i \geq 0,$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Buradan maksimum prensibine göre, $\psi_i^\pm \geq 0$ olduğu çıkar. Dolayısıyla (4.26)'nın doğruluğu ispatlanmış olur.

Lemma 4.4. (4.22)-(4.23) fark probleminin çözümü için

$$\|y\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq \gamma_0 \left(|\varphi_0| + \alpha^{-1} \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} \right) + \gamma_1 \|f\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \quad (4.27)$$

değerlendirmesi doğrudur. Burada $\gamma_0 = e^{\alpha^{-1} \bar{K} T}$ ve $\gamma_1 = \alpha^{-1} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T}$ dir.

İspat. (4.22) eşitliğindeki toplam ifadesinden yola çıkarak

$$\left| h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j \right| \leq h \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^{i-1} |y_j| \leq \begin{cases} h \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^0 |\varphi_j|, & i=1 \\ h \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^0 |\varphi_j| + h \bar{K} \sum_{j=1}^{i-1} |y_j|, & 1 < i \leq N-1 \\ h \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^{i-1} |y_j|, & i > N-1 \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$\left| f_i - h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j \right| \leq \|f\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} + \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} + h \bar{K} \sum_{j=1}^i |y_{j-1}|$$

değerlendirmesi doğrudur. Daha sonra (4.22)-(4.23) problemine Lemma 4.3. uygulanırsa,

$$|y_i| \leq |\varphi_0| + \alpha^{-1} \left(\|f\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} + \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} \right) + \alpha^{-1} h \bar{K} \sum_{j=1}^i |y_{j-1}|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu

$$|y_i| \leq \left(|\varphi_0| + \alpha^{-1} \left(\|f\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} + \bar{K} \|\varphi\|_{1,0} \right) \right) e^{\alpha^{-1} \bar{K} t_i}, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

sonucuna varılır. Bu da (4.27) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

$z_i = y_i - u_i$ hata fonksiyonu olsun. Burada y_i , (4.22)-(4.23) fark probleminin ve u_i de (4.1)-(4.2) probleminin t_i şebeke noktasındaki çözümüdür. (4.20) ve (4.22) özdeşliklerine göre z_i yaklaşık çözüm hatası

$$L_N z_i = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.28)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (4.29)$$

problemini sağlar.

Lemma 4.5. (4.28)-(4.29) probleminin z_i çözümü

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq \gamma_1 \|R\|_{\infty, \omega_{N_0}} \quad (4.30)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (4.27) eşitsizliğinin $\varphi \equiv 0$ ve $f \equiv R$ olacak şekilde (4.28)-(4.29) problemine uygulanmasıyla (4.30) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

Lemma 4.6. $a, f \in C^1[0, T]$, $\varphi \in C[-r, 0]$ ve $K \in C^1([0, T]^2)$ olsun. Bu durumda R_i kalan terim için

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq Ch \quad (4.31)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İlk olarak

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^4 |R_i^{(k)}| \quad (4.32)$$

eşitsizliği ele alınsın ve her bir $R_i^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, 4$) için ayrı ayrı değerlendirilecektir.

$R_i^{(1)}$ kalan teriminde $a(t)$ için ortalama değer teoreminden

$$|a(t) - a(t_i)| \leq |a'(\xi_i)| |t - t_i| \leq Ch, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik ve Lemma 4.2.'deki $|u(t)| \leq C$ eşitsizliği dikkate alınır

$$|R_i^{(1)}| \leq \mu_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)] u(t) \varphi_i(t) dt \right| \leq Ch \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt = Ch \quad (4.33)$$

hata değerlendirmesi elde edilir.

$R_i^{(2)}$ kalan terimi için yukarıdaki gibi benzer şekilde $f(t)$ için ortalama değer teoreminden

$$|f(t) - f(t_i)| \leq |f'(\eta_i)| |t - t_i| \leq Ch, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik dikkate alınarak

$$|R_i^{(2)}| \leq \mu_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f(t_i)] \varphi_i(t) dt \right| \leq Ch \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt = Ch \quad (4.34)$$

hata değerlendirmesi elde edilir.

$R_i^{(3)}$ kalan terimi için (4.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &\leq 2\mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds \varphi_i(s) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \int_{\xi-r}^{\xi} \left| \frac{\partial}{\partial t} K(\xi, s) \right| |u(s)| ds + |K(\xi, \xi)| + |K(\xi, \xi - r)| \right\} d\xi \\ &\leq 2r \left(\overline{K}^{(1)} \|u\|_{\infty, \bar{I}} + 2\overline{K} \right) h, \end{aligned}$$

hata değerlendirmesi elde edilir. Burada

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} K(t, s) \right| \leq K^{(1)}$$

biçimindedir. Buradan da

$$|R_i^{(3)}| \leq Ch \quad (4.35)$$

olduğu görülür.

Son olarak $R_i^{(4)}$ kalan terimi için (4.6) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|R_i^{(4)}| &\leq 2h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left(\bar{K}^{(2)} \|u\|_{\infty, \bar{I}} + \bar{K} |u'(\xi)| \right) d\xi \\
&\leq 2\bar{K}^{(2)} \|u\|_{\infty, \bar{I}} h^2 (N-1) + 2h\bar{K} \sum_{j=i-N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(\xi)| d\xi \\
&\leq 2r\bar{K}^{(2)} \|u\|_{\infty, \bar{I}} h + 2h\bar{K} \int_{t_{i-N+\frac{1}{2}}}^{t_{i-\frac{1}{2}}} |u'(\xi)| d\xi,
\end{aligned}$$

hata değerdendirmesi elde edilir. Burada

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} K(t, s) \right| \leq K^{(2)}$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-N+\frac{1}{2}}}^{t_{i-\frac{1}{2}}} |u'(\xi)| d\xi &\leq \int_{t_{i-N+\frac{1}{2}}}^0 |\varphi'(\xi)| d\xi + C \int_0^{t_{i-\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}} \right) d\xi \\
&\leq \|\varphi'\|_{1,0} + C \left(r + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} \right) \right) \\
&\leq \|\varphi'\|_{1,0} + C(r + \alpha^{-1}), \quad 1 \leq i \leq N
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-N+\frac{1}{2}}}^{t_{i-\frac{1}{2}}} |u'(\xi)| d\xi &\leq C \int_{t_{i-N+\frac{1}{2}}}^{t_{i-\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}} \right) d\xi \\
&\leq C \left[t_{i-\frac{1}{2}} - t_{i-N+\frac{1}{2}} + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha t_{i-N+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} \right) \right] \\
&\leq C(r + \alpha^{-1}), \quad i \geq N+1
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri de dikkate alındığında,

$$|R_i^{(4)}| \leq Ch \tag{4.36}$$

hata değerdendirmesi elde edilir.

Sonuç olarak (4.32), (4.33), (4.34), (4.35) ve (4.36) eşitsizliklerinden (4.31)'in doğruluğu açıktır.

Teorem 4.1. Lemma 4.6.'nın şartları sağlanmış olsun. Bu durumda (4.22)-(4.23) fark probleminin çözümü, (4.1)-(4.2) probleminin çözümüne düzgün şebekedeki maksimum normda ε 'a göre $O(h)$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|y - u\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq Ch.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.5. ve Lemma 4.6. kullanılarak elde edilebilir.

4.1.1.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örnekler ile denetlenmiştir. Bu örnekler (4.22)-(4.23) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{f_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} y_{i-1} - h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j}{\frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} + a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.37)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad i = -N, \dots, 0, \quad (4.38)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülüyor. Burada θ_i , (4.13)'de açıkça ifade edilmiştir.

Örnek 4.1.

$$\varepsilon u'(t) + 2u(t) - \int_{t-1}^t u(s) ds = -1 + t - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} \right), \quad t \in (0, 2], \quad (4.39)$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (4.40)$$

probleminin kesin çözümü:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{e^{-\lambda_1(t-1)} - e^{-\lambda_2(t-1)}}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 1 + e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{2(t-1)}{\varepsilon}}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}$$

biçimindedir.

(4.39)-(4.40) problemin yakınsaklık durumunu araştırmak için, q^N düzgün yakınsaklık oranı,

$$q^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}$$

formülü ile hesaplanır. Burada kesin hata e_ε^N ve hesaplanan noktasal maksimum hata e^N aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$e_\varepsilon^N = \|y - u\|_{\infty, \mathcal{O}_{N_0}}, \quad e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N.$$

Bununla beraber y, u başlangıç değer probleminin farklı N ve ε değerleri için hesaplanmış fark denkleminin çözümünü ifade etmektedir.

Sonuç olarak (4.39)-(4.40) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 6, 12, 18, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.37)-(4.38) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.1.'de gösterilmiştir.

Aşağıdaki tabloda görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak birinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.1.'de verilen birinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

Tablo 4.1. (4.39)-(4.40) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_{N_0} şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε ’a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev vd., 2019).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,008613	0,004680	0,002473	0,001271	0,000644
	0,88	0,92	0,96	0,98	
2^{-6}	0,008602	0,004739	0,002522	0,001305	0,000657
	0,86	0,91	0,95	0,99	
2^{-12}	0,008606	0,004741	0,002523	0,001305	0,000657
	0,86	0,91	0,95	0,99	
2^{-18}	0,008609	0,004743	0,002524	0,001306	0,000657
	0,86	0,91	0,95	0,99	
2^{-24}	0,008609	0,004743	0,002524	0,001306	0,000657
	0,86	0,91	0,95	0,99	
e^N	0,008613	0,004743	0,002524	0,001306	0,000657
q^N	0,88	0,91	0,95	0,99	

Örnek 4.2.

$$\varepsilon u'(t) + u(t) + \int_{1-t}^t su(s)ds = 5t^2 - 2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (4.41)$$

$$u(t) = 5 + t, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (4.42)$$

bu problemin kesin çözümü bilinmiyor. Hata yaklaşımı ve yakınsama oranının hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Bu amaçla, $\bar{\omega}_{N_0}$ şebekesini düzgün olarak ikiye yarılayarak elde edilen şebeke üzerinde başka bir yaklaşık çözüm olan y^{2N} çözümünü hesaplıyoruz. Bu ise, nümerik sonuçları iki kat daha ince bir şebeke üzerindeki sonuçlarla karşılaştırmaktır. Bundan dolayı düzgün yakınsaklık oranı deneysel olarak

$$q^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}$$

ile hesaplanmıştır. Burada farklı ε ve N değerleri için hata ve maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^N = \|y^N - y^{2N}\|_{\infty, \omega_{N_0}}, \quad e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

biçimindedir.

Sonuç olarak (4.41)-(4.42) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 6, 12, 18, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.37)-(4.38) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.2.'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2. (4.41)-(4.42) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_{N_0} şebekesi üzerinde; e_{ε}^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev vd., 2019).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,035015	0,019972	0,010703	0,005617	0,002867
	0,81	0,90	0,93	0,97	
2^{-6}	0,044512	0,025213	0,013605	0,007091	0,003594
	0,82	0,89	0,94	0,98	
2^{-12}	0,060601	0,034326	0,018522	0,009721	0,004928
	0,82	0,89	0,93	0,98	
2^{-18}	0,066050	0,037155	0,019910	0,010449	0,005297
	0,83	0,90	0,93	0,98	
2^{-24}	0,067411	0,038450	0,020462	0,010739	0,005444
	0,81	0,91	0,93	0,98	
e^N	0,067411	0,038450	0,020462	0,010739	0,005444
q^N	0,81	0,91	0,93	0,98	

Yukarıda tabloda görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak birinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.1.'de verilen birinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

4.1.2. Lineer olmayan problem

Bu bölümde, aşağıda tanımlanan birinci mertebeden parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli kuazilineer gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç

değer problemi ele alınmıştır. $I = (0, T] = \bigcup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $0 \leq s \leq m$ (kolaylık olması açısından T/r 'yi bir tam sayı kabul edeceğiz öyle ki $T = mr$) ve $I_0 = [-r, 0]$, $r > 0$ sabit gecikme parametresi olmak üzere;

$$Lu := \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + f\left(t, \int_{t-r}^t K(t, s, u(s))ds\right) = 0, \quad t \in I, \quad (4.43)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0, \quad (4.44)$$

probleminde $\varepsilon > 0$ pertürbasyon parametresidir. Ayrıca $a(t)$, $\varphi(t)$, $f(t, v)$ ve $K(t, s, u)$ yeterince düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$a(t) \geq \alpha > 0, \quad t \in \bar{I} = [0, T],$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \leq M_1 < \infty, \quad (t, v) \in \bar{I} \times \mathbb{R},$$

$$\left| \frac{\partial K}{\partial u} \right| \leq \bar{K} < \infty, \quad (t, s, u) \in \bar{I} \times \bar{I} \times \mathbb{R}$$

şeklindedir.

4.1.2.1. Kesin çözümün özellikleri

Bu bölümde (4.43)-(4.44) başlangıç değer probleminin çözümüne uygun fark şeması kurulmasında kullanılacak bazı değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.7. (4.43)-(4.44) probleminin $u(t)$ çözümü

$$\|u\|_{\infty, \bar{I}} \leq C_0 \quad (4.45)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$C_0 = \left\{ |\varphi(0)| + \alpha^{-1} \left(\max_{\bar{I}} |f(t, 0)| + M_1 \bar{K} (r + \|\varphi\|_{1,0}) \right) \right\} e^{\alpha^{-1} M_1 \bar{K} T}$$

ve

$$|u'(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.46)$$

şeklinde olup

$$\left| \frac{\partial K(t, s, u)}{\partial t} \right| \leq C, \quad (t, s) \in \bar{I}^2, \quad |u| \leq C_0,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq C, \quad t \in \bar{I}, \quad |v| \leq C_1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$C_1 = r \left(\max_{\bar{I} \times \bar{I}} |K(t, s, 0)| + \bar{K} C_0 \right)$$

biçimindedir.

İspat. Öncelikle (4.45)'in doğruluğunu gösterelim. (4.43) denklemini

$$\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \frac{\tilde{\partial f}}{\partial v} \int_{t-r}^t \frac{\tilde{\partial K}}{\partial u} u(s) ds + F(t) = 0$$

olarak ele alalım. Burada

$$F(t) = f(t, 0) + \frac{\tilde{\partial f}}{\partial v} \int_{t-r}^t K(t, s, 0) ds$$

şeklindedir. Tildeler; kısmi türevlerin Ortalama Değer Teoremi'ni ele alarak ara noktalarda değerlendirildiğini gösterir.

$$|F(t)| \leq \max_{\bar{I}} |f(t, 0)| + M_1 \bar{K} r$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\tilde{\partial f}}{\partial v} \int_{t-r}^t \frac{\tilde{\partial K}}{\partial u} u(s) ds \right| &\leq M_1 \bar{K} \left(\int_{t-r}^0 |\varphi(s)| ds + \int_0^t |u(s)| ds \right) \\
&\leq M_1 \bar{K} \left(\|\varphi\|_{1,0} + \int_0^t |u(s)| ds \right), \quad 0 \leq t \leq r \\
&\leq M_1 \bar{K} \int_{t-r}^t |u(s)| ds \leq M_1 \bar{K} \int_0^t |u(s)| ds, \quad t > r
\end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\left| \frac{\tilde{\partial f}}{\partial v} \int_{t-r}^t \frac{\tilde{\partial K}}{\partial u} u(s) ds + F(t) \right| \leq \max_I |f(t, 0)| + M_1 \bar{K} (r + \|\varphi\|_{1,0}) + M_1 \bar{K} \int_0^t |u(s)| ds, \quad t > 0.$$

Şimdi de Lemma 4.1.'i (4.43)-(4.44) problemine uygulanırsa;

$$|u(t)| \leq |\varphi(0)| + \alpha^{-1} \left[\max_I |f(t, 0)| + M_1 \bar{K} (r + \|\varphi\|_{1,0}) \right] + \alpha^{-1} M_1 \bar{K} \int_0^t |u(s)| ds, \quad t > 0$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|u(t)| \leq |\varphi(0)| + \alpha^{-1} \left[\max_I |f(t, 0)| + M_1 \bar{K} (r + \|\varphi\|_{1,0}) \right] e^{\alpha^{-1} M_1 \bar{K} t}$$

bulunur. Böylece (4.45)'in doğruluğu buradan açıktır.

Şimdi (4.46)'nın ispatına geçelim. Eş. (4.43)'ten

$$|u'(0)| = \frac{\left| a(0)\varphi(0) + f \left(0, \int_{-r}^0 K(0, s, \varphi(s)) ds \right) \right|}{\varepsilon}$$

yazılır. Böylece

$$|u'(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.47}$$

elde edilir. Şimdi (4.43)'ün bir kez türevi alınır;

$$\varepsilon \omega'(t) + a(t)\omega(t) = \Phi(t) \quad (4.48)$$

elde edilir. Burada

$$\omega(t) = u'(t),$$

$$\Phi(t) = -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial v} \left(\int_{t-r}^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s)) ds + K(t, t, u(t)) - K(t, t-r, u(t-r)) \right) - a'(t)u(t)$$

biçimindedir.

Lemma 4.7.'nin koşulları altında ve (4.45) eşitsizliği dikkate alınır,

$$\Phi(t) \leq C \quad (4.49)$$

elde edilir. Buradan ve (4.48)'den

$$\omega(t) = \omega(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\xi) d\xi} ds$$

yazılır. Böylece (4.47) ve (4.49) eşitsizliklerinden

$$|u'(t)| \leq |u'(0)| e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + C \varepsilon^{-1} \int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}} ds \leq C e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + C \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.46) eşitsizliği ispatlanmış olur (Yapman vd., 2019).

4.1.2.2. Fark şemasının kurulması

(4.43)-(4.44) problemi için sonlu fark şeması oluşturulacaktır. $\bar{I}$ aralığında,

$$\omega = \left\{ t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0; h = \frac{T}{N_0} = \frac{r}{N} \right\}$$

düzgün şebekesi ele alınsın. Burada her bir I_p ($1 \leq p \leq m$) alt aralığı N tane şebeke noktalarını içermektedir.

Notasyon kolaylığı için; herhangi bir $v(t)$ fonksiyonu için $v_i = v(t_i)$, $u(t)$ 'nin her bir t_i noktasındaki yaklaşık değerini y_i , $v_{i-\frac{1}{2}} = v(t_i - h/2)$ ve ω üzerinde tanımlanan norm

$$\|v\|_{\infty, \omega} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i| \text{ şeklindedir.}$$

Fark şemasını oluşturmak için aşağıdaki özdeşlik ele alınacaktır:

$$\mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t) \varphi_i(t) dt = 0, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.50)$$

burada

$$\varphi_i(t) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}$$

üstel katsayılı baz fonksiyonu ve

$$\mu_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

şeklindedir. $\varphi_i(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi'(t) + a_i \varphi(t) &= 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ \varphi(t_i) &= 1 \end{aligned}$$

probleminin çözümüdür. Kesin fark şemaları yöntemini uyguladıktan sonra (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev ve Şevgin, 2006; Amiraliyev ve Yılmaz, 2014; ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili kapsamlı bilgi için Samarskii, 2001, s. 207-214)

$$\begin{aligned} & \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t)u(t)] \varphi_i(t) dt \\ &= \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t_i)u(t)] \varphi_i(t) dt + \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)] u(t) \varphi_i(t) dt \\ &= \varepsilon \theta_i u_{\bar{t}, i} + a_i u_i + R_i^{(1)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho} \quad (4.52)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(1)} = \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)] \mu(t) \varphi_i(t) dt \quad (4.53)$$

biçimindedir. (4.50)'deki lineer olmayan terim için

$$\begin{aligned} \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\cdot) \varphi_i(t) dt &= f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s, u(s)) ds \right) + R_i^{(2)} \\ &= f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \right) + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (4.54)$$

eşitliği kullanılır ve kalan terimler

$$R_i^{(2)} = \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{d\xi} \left(f \left(\xi, \int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi, s, u(s)) ds \right) \right) \left[T_0(t-\xi) - T_0(t_{i-\frac{1}{2}}-\xi) \right] d\xi, \quad (4.55)$$

$$R_i^{(3)} = f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s, u(s)) ds \right) - f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \right) \quad (4.56)$$

biçimindedir. Burada

$$T_0(\lambda) = 1, \lambda \geq 0; \quad T_0(\lambda) = 0, \lambda < 0$$

şeklindedir. Sonuç olarak (4.51) ve (4.54)'ten $u(t_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \right) + R_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.57)$$

şeklinde yazılabilir. (4.57) özdeşliğinin kalan terimi ise

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \quad (4.58)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $R_i^{(k)}$ ($k=1,2,3$) kalan terimleri sırasıyla (4.53), (4.55) ve (4.56) denklemlerinde açıkça ifade edilmiştir.

Böylece (4.57)'yi dikkate alarak (4.43)-(4.44) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon \theta_i y_{\bar{i},i} + a_i y_i + f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, y_j) \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.59)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (4.60)$$

fark şeması elde edilir. Burada θ_i , (4.52)'de ifade edilmiştir.

4.1.2.3. Hata değerlendirme

$z_i = y_i - u_i$ olsun. Burada y_i , (4.59)-(4.60) fark probleminin ve u_i de (4.43)-(4.44) probleminin t_i şebeke noktasındaki çözümüdür. (4.57) ve (4.59) özdeşliklerine göre z_i yaklaşık çözüm hatası

$$\varepsilon \theta_i z_{\bar{i},i} + a_i z_i + f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, y_j) \right) - f \left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \right) = R_i, \quad (4.61)$$

$$1 \leq i \leq N_0,$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (4.62)$$

problemini sağlar. Burada R_i , (4.58)'de ifade edilmiştir.

Lemma 4.8. Lemma 4.7.'nin şartları altında ve bu şartlara ek olarak

$$\left| \frac{\partial K}{\partial s} \right| \leq C, \quad (t, s) \in \bar{I}^2 \quad \text{ve} \quad |u| \leq C_0$$

eşitsizlikleri kabul edilsin. Bu durumda R_i kalan terim için

$$\|R\|_{\infty, \omega} \leq Ch \quad (4.63)$$

eşitsizliği sağlanır (Yapman vd., 2019).

İspat. İlk olarak Eş. (4.58)'i ele alınsın ve her bir $R_i^{(k)}$ ($k=1,2,3$) için ayrı ayrı değerlendirilecektir.

$R_i^{(1)}$ hatasını değerlendirmek için Lemma 4.7. kullanılırsa

$$|R_i^{(1)}| \leq \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |a(t) - a(t_i)| |u(t)| \varphi_i(t) dt \leq \mu_i^{-1} h^{-1} C_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |a'(\xi_i)(t - t_i)| \varphi_i(t) dt \leq Ch, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

eşitsizliği elde edilir.

$R_i^{(2)}$ hatasını değerlendirmek için

$$|R_i^{(2)}| \leq \mu_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{d}{dt} \left(f \left(\xi, \int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi, s, u(s)) ds \right) \right) \right| d\xi$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \left(f \left(\xi, \int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi, s, u(s)) ds \right) \right) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \times \left\{ \int_{\xi-r}^{\xi} \left| \frac{\partial K}{\partial t}(\xi, s, u(s)) \right| ds + |K(\xi, \xi, u(\xi))| + |K(\xi, \xi-r, u(\xi-r))| \right\} \leq C \end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa

$$|R_i^{(2)}| \leq Ch, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

bulunur.

Son olarak $R_i^{(3)}$ hatasını değerlendirmek için Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa

$$|R_i^{(3)}| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \left| \int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s, u(s)) ds - \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \right| \quad (4.64)$$

elde edilir. Burada bileşik dikdörtgen kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s, u(s)) ds - \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j) \\
&= \sum_{j=i-N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} (t_{j-\frac{1}{2}} - \xi - hT_0(t_j - \xi)) \frac{d}{ds} (K(t_{i-\frac{1}{2}}, \xi, u(\xi))) d\xi
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik ve $\partial f / \partial v$ 'nin düzgün sınırlılığı Eş. (4.64)'te dikkate alınırsa

$$|R_i^{(3)}| \leq Ch, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

bulunur.

$$|R_i| \leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}| + |R_i^{(3)}|$$

olduğundan ve elde edilen eşitsizlikler kullanılarak

$$|R_i^{(k)}| \leq Ch, \quad k = 1, 2, 3$$

değerlendirmesi yazılabilir. Bu da (4.63)'ün doğruluğunu gösterir.

Lemma 4.9. (4.61)-(4.62) probleminin çözümü z_i olsun. Bu durumda

$$\|z\|_{\infty, \omega} \leq C \|R\|_{\infty, \omega} \quad (4.65)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (4.61) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, y_j)\right) - f\left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j)\right) \right| \\
& \leq \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \sum_{j=i-N+1}^{i-1} |K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, y_j) - K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, u_j)| \\
& = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \sum_{j=i-N+1}^{i-1} \left| \frac{\partial K}{\partial u} \right| |z_j| \leq M_1 \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^{i-1} |z_j| \leq M_1 \bar{K} \sum_{j=0}^{i-1} |z_j|
\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Lemma 4.3. (4.61)-(4.62) problemine uygulanırsa,

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} + \alpha^{-1} M_1 \bar{K} \sum_{j=0}^{i-1} |z_j|, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

bulunur. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} e^{\alpha^{-1} M_1 \bar{K} i} \|R\|_{\infty, \omega}, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (4.65) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir (Yapman vd., 2019).

Teorem 4.2. Lemma 4.8.'in şartları altında (4.59)-(4.60) fark probleminin çözümü düzgün şebekedeki maksimum normda (4.43)-(4.44) probleminin çözümüne ε 'a göre $O(h)$ hızıyla düzgün yakınsaktır (Yapman vd., 2019):

$$\|y - u\|_{\infty, \omega} \leq Ch.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.8. ve Lemma 4.9.'un sonuçlarından kolayca gösterilebilir.

4.1.2.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.43)-(4.44) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örnek ile denetlenmiştir. Bu örnek (4.59)-(4.60) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{\frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} y_{i-1} + f\left(t_{i-\frac{1}{2}}, \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j, y_j)\right)}{\frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} + a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.66)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad i = -N, \dots, 0, \quad (4.67)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülüyor. Burada θ_i , (4.52)'de ifade edilmiştir.

Örnek 4.3.

$$\varepsilon u'(t) + 2u(t) + \tanh\left(t + \int_{t-1}^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)}) ds\right) = 0, \quad 0 < t \leq 2, \quad (4.68)$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (4.69)$$

bu problemin kesin çözümü bilinmiyor. Hata yaklaşımı ve yakınsama oranının hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Bu amaçla, $\bar{\omega}$ şebekesini düzgün olarak ikiye yarılayarak elde edilen şebeke üzerinde başka bir yaklaşık çözüm olan y^{2N} çözümünü hesaplıyoruz. Bu ise, nümerik sonuçları iki kat daha ince bir şebeke üzerindeki sonuçlarla karşılaştırmaktır. Bundan dolayı düzgün yakınsaklık oranı deneysel olarak

$$q^{2N,p} = \ln(e^{N,p} / e^{2N,p}) / \ln 2, \quad p = 1, 2$$

ile hesaplanmıştır. Burada farklı ε ve h değerleri için hata ve maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^{N,p} = \|y^N - y^{2N}\|_{\infty, \omega_{N,p}}, \quad e^{N,p} = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^{N,p}, \quad p = 1, 2$$

biçimindedir. Burada

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\}, \quad p = 1, 2$$

şeklindedir.

Sonuç olarak (4.68)-(4.69) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 2, 6, 10, 14, 18$ ve $N = \frac{1}{h} = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranları (4.66)-(4.67) algoritması ile bulunmuş, ayrıca Tablo 4.3. ve Tablo 4.4.'te gösterilmiştir.

Tablo 4.3.'te görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan $q^{N,1}$ 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde azalarak birinci dereceden ve Tablo 4.4.'te görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan $q^{N,2}$ 'nin yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak birinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.2.'de verilen birinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

Tablo 4.3. (4.68)-(4.69) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_{N,1}$ şebekesi üzerinde; e_{ε}^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman vd., 2019).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^{-2}	0,0168086	0,0081688	0,0039782	0,0019645	0,0009775
	1,041	1,038	1,018	1,007	
2^{-6}	0,0143282	0,0069537	0,0033818	0,0016734	0,0008338
	1,043	1,040	1,015	1,005	
2^{-10}	0,0098427	0,0047868	0,0023312	0,0011551	0,0005756
	1,040	1,038	1,013	1,005	
2^{-14}	0,0056523	0,0027508	0,0013415	0,0006647	0,0003312
	1,039	1,036	1,013	1,005	
2^{-18}	0,0049551	0,0024115	0,0011760	0,0005831	0,0002906
	1,039	1,036	1,012	1,005	
$e^{N,1}$	0,0168086	0,0081688	0,0039782	0,0019645	0,0009775
$q^{N,1}$	1,041	1,038	1,018	1,007	

Tablo 4.4. (4.68)-(4.69) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_{N,2}$ şebekesi üzerinde; e_{ε}^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman vd., 2019).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^{-2}	0,0464231	0,0249293	0,0128774	0,0065740	0,0033145
	0,897	0,953	0,970	0,988	
2^{-6}	0,0464202	0,0249450	0,0128677	0,0065463	0,0032959
	0,896	0,955	0,975	0,990	
2^{-10}	0,0463927	0,0249475	0,0129137	0,0065742	0,0033123
	0,895	0,950	0,974	0,989	
2^{-14}	0,0463806	0,0248892	0,0128924	0,0065680	0,0033091
	0,898	0,949	0,973	0,989	
2^{-18}	0,0463869	0,0249099	0,0128852	0,0065507	0,0032981
	0,897	0,951	0,976	0,990	
$e^{N,2}$	0,0464231	0,0249475	0,0129137	0,0065742	0,0033145
$q^{N,2}$	0,897	0,950	0,974	0,989	

4.2. Singüler Pertürbe Özellikli Gecikmeli Başlangıç Değer Probleminin Shishkin Şebekede Çözümü

Bu bölümde (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin çözümü için $[0, T]$ üzerinde özel parçalı düzgün bir şebeke ele alınmıştır. Ele alınan problemin diferansiyel kısmı için kapalı (upwind) tip şema ve integral kısmında ise sol kenar bileşik dikdörtgen kuralı içeren fark problemi kurulmuştur.

4.2.1. Fark şemasının kurulması

$\bar{I}$ aralığı üzerinde düzgün olmayan şebeke

$$\bar{\omega} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0-1} < t_{N_0} = T; h_i = t_i - t_{i-1}\}$$

N çift sayısı için, $\omega_{N,p}$ ($1 \leq p \leq m$) olmak üzere m tane alt şebeke içerip aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\omega = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

$$\omega_{N,1} = \begin{cases} t_i = ih^{(1)}, i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, h^{(1)} = \frac{2\sigma}{N}; \\ t_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2}\right)h^{(2)}, i = \frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{3N}{2}, h^{(2)} = \frac{r - \sigma}{N}, \end{cases}$$

$$\omega_{N,p} = \left\{ t_i = r_{p-1} + \left(i - \left(p - \frac{1}{2}\right)N\right)h^{(3)}, i = \left(p - \frac{1}{2}\right)N + 1, \dots, \left(p + \frac{1}{2}\right)N, h^{(3)} = \frac{r}{N} \right\},$$

$$2 \leq p \leq m, r_s = sr \quad (0 \leq s \leq m).$$

N bir çift sayı olmak üzere, $\omega_{N,1}$ parçalı düzgün şebekesi $N/2$ eşit aralıkta $[0, \sigma]$ ince parsel ve $[\sigma, r]$ kalın parsel olacak şekilde alt aralıklara bölünmüştür. Burada

$$\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$$

bir geçiş noktasıdır. Ayrıca $[r, T]$ alt aralığında $\omega_{N,p}$ ($2 \leq p \leq m$) üzerinde $3N/2$ eşit uzaklıkta $N_0 = (m+1/2)N$ tane nokta içermektedir. $\bar{\omega}$ üzerinde bir geçiş noktasına sahip düzgün olmayan bu özel şebeke Shishkin şebeke olarak adlandırılır.

(4.1)-(4.2) probleminin fark şemasının kurulma süreci için ilk olarak aşağıdaki özdeşlik ele alınacaktır:

$$h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)dt = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.70)$$

Bu özdeşliğe uygun kuadratür formülleri uygulanacaktır. Bunun için (4.70) özdeşliğinde sağ kenar dikdörtgen kuralı uygulanırsa, Kudu vd. (2016)'dan benzer biçimde

$$h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) - f(t)]dt = \varepsilon u_{\bar{t},i} + a_i u_i - f_i + R_i^{(1)}$$

elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(1)} = -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} [a(t)u(t) - f(t)]dt \quad (4.71)$$

biçimindedir.

(4.70) bağıntısında integral terimi için sağ kenar dikdörtgen kuralı uygulanırsa,

$$h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \right) dt = \int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i,s)u(s)ds + R_i^{(2)}$$

elde edilir ve kalan terim

$$R_i^{(2)} = -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left(\frac{d}{d\xi} \int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi,s)u(s)ds \right) d\xi \quad (4.72)$$

şeklindedir.

Ayrıca sol kenar dikdörtgen kuralı uygulanırsa,

$$\int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i, s)u(s)ds = \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i h_j K(t_i, t_{j-1})u_{j-1} + R_i^{(3)}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{N} = \begin{cases} \frac{3N}{2}, & 1 \leq i \leq \frac{3N}{2} \\ N, & i > \frac{3N}{2} \end{cases}$$

ve kalan terim

$$R_i^{(3)} = \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi) \frac{d}{ds} K(t_i, \xi) u(\xi) d\xi, \quad 1 \leq i \leq \frac{3N}{2} \text{ ve } i > \frac{5N}{2} \quad (4.73)$$

$$R_i^{(3)} = \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi) \frac{d}{ds} K(t_i, \xi) u(\xi) d\xi - \int_{t_i-N}^{t_i-r} K(t_i, s) u(s) ds, \quad \frac{3N}{2} < i \leq \frac{5N}{2} \quad (4.74)$$

biçimindedir. Sonuç olarak $u(t_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon u_{\bar{t},i} + a_i u_i + \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i h_j K(t_i, t_{j-1}) u_{j-1} + R_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.75)$$

$$u_i = \varphi_i, \quad -\frac{3N}{2} \leq i \leq 0$$

şeklinde yazılabilir. (4.75) özdeşliğindeki kalan terim

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $R_i^{(k)}$ ($k=1,2,3$) kalan terimleri sırasıyla (4.71), (4.72), (4.73) ve (4.74) denklemleriyle açıkça ifade edilmiştir.

Böylece (4.75)'i dikkate alarak (4.1)-(4.2) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon y_{\bar{t},i} + a_i y_i + \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i h_j K_{i,j-1} y_{j-1} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.76)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -\frac{3N}{2} \leq i \leq 0 \quad (4.77)$$

fark şeması elde edilir.

4.2.2. Hata değerlendirme

$z_i = y_i - u_i$ hata fonksiyonu olsun. Burada y_i , (4.76)-(4.77) fark probleminin ve u_i de (4.1)-(4.2) probleminin t_i şebeke noktasındaki çözümüdür. (4.75) ve (4.76) özdeşliklerine göre z_i yaklaşık çözüm hatası

$$L_N z_i = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.78)$$

$$z_i = 0, \quad -\frac{3N}{2} \leq i \leq 0, \quad (4.79)$$

problemini sağlar.

Lemma 4.10. (4.78)-(4.79) probleminin z_i çözümü

$$\|z\|_{\infty, \omega} \leq C \|R\|_{\infty, \omega}$$

eşitsizliğini sağlar (Amiraliyev ve Yapman, 2019).

İspat. (4.76) eşitliğindeki toplam ifadesinden yola çıkarak

$$\left| \sum_{j=i-N+1}^i h_j K_{i,j-1} z_{j-1} \right| \leq \bar{K} \sum_{j=i-N+1}^i h_j |z_{j-1}| \leq \bar{K} \sum_{j=1}^i h_j |z_{j-1}|,$$

eşitsizliği sağlanır. Daha sonra Lemma 4.3. dikkate alınır

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} + \alpha^{-1} \bar{K} \sum_{j=1}^i h_j |z_{j-1}|$$

bulunur. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} \exp \left(\alpha^{-1} \bar{K} \sum_{j=1}^i h_j \right) \leq \alpha^{-1} \exp(\alpha^{-1} \bar{K} T) \|R\|_{\infty, \omega}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 4.10.'un ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.11. Lemma 4.2.'nin şartları altında, R_i yaklaşım hatası için

$$\|R\|_{\infty, \omega} \leq CN^{-1} \ln N \quad (4.80)$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Yapman, 2019).

İspat. Her bir $R_i^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$) hatası ayrı ayrı değerlendirilecektir.

$R_i^{(1)}$ hatasını değerlendirmek için herhangi bir şebeke üzerinde (4.71) kullanılırsa

$$|R_i^{(1)}| \leq Ch_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) (1 + |u'(t)|) dt, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ve Lemma 4.2.'den

$$|R_i^{(1)}| \leq C \left\{ h_i + h_i^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) e^{-\frac{at}{\varepsilon}} dt \right\}, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

olur. $[0, \sigma]$ aralığı üzerinde bu eşitsizlik

$$|R_i^{(1)}| \leq Ch^{(1)} (1 + \varepsilon^{-1}) = C2\alpha^{-1} N^{-1} \ln N (\varepsilon + 1), \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2}$$

şeklini alır. Buradan

$$|R_i^{(1)}| \leq CN^{-1} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \quad (4.81)$$

değerlendirmesi elde edilir.

$i > \frac{N}{2}$ için;

$$\begin{aligned}
|R_i^{(1)}| &\leq C \left\{ h_i + \varepsilon^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right\} = C \left\{ h_i + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\
&= C \left\{ h_i + \alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha h_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \leq C \left(h_i + \alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} \right) \\
&\leq C \left(h_i + \alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha \sigma}{\varepsilon}} \right) = C (h_i + \alpha^{-1} N^{-1}), \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N_0
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$h_i = h^{(2)}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{2}; \quad h_i = h^{(3)}, \quad \frac{3N}{2} + 1 \leq i \leq N_0$$

biçimindedir. Böylece

$$|R_i^{(1)}| \leq CN^{-1}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.82)$$

değerlendirmesi sağlanır.

$R_i^{(2)}$ hatasını değerlendirmek için (4.72) eşitsizliğine göre

$$|R_i^{(2)}| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{\xi-r}^{\xi} \frac{\partial K(\xi, s)}{\partial \xi} u(s) ds + K(\xi, \xi) u(\xi) - K(\xi, \xi-r) u(\xi-r) \right| d\xi$$

yazılabilir. $\partial K / \partial \xi$ 'nin düzgün sınırlılığı, $K(t, s)$ ve Lemma 4.2. dikkate alınır

$$|R_i^{(2)}| \leq Crh_i, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

bulunur. Buradan ise

$$|R_i^{(2)}| \leq CN^{-1} \ln N \quad (4.83)$$

elde edilir.

$R_i^{(3)}$ hatası önce $1 \leq i \leq \frac{3N}{2}$ ve $i > \frac{5N}{2}$ için değerlendirilecektir.

$$|R_i^{(3)}| \leq \sum_{j=i-N+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi) \left| \frac{d}{d\xi} K(t_i, \xi) \right| |u(\xi)| d\xi \leq C \sum_{j=i-N+1}^i h_j^2$$

yazılabilir. Buradan

$$|R_i^{(3)}| \leq C \bar{N} |h^{(1)}|^2 \leq CN^{-1} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2}, \quad (4.84)$$

$$|R_i^{(3)}| \leq C \bar{N} |h^{(2)}|^2 \leq CN^{-1}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{2}, \quad (4.85)$$

$$|R_i^{(3)}| \leq C \bar{N} |h^{(3)}|^2 \leq CN^{-1}, \quad i > \frac{5N}{2} \quad (4.86)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$R_i^{(3)}$ hatası şimdi de $\frac{3N}{2} < i \leq \frac{5N}{2}$ için değerlendirilecektir. (4.74) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &\leq \sum_{j=i-N+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi) \left| \frac{d}{d\xi} K(t_i, \xi) \right| |u(\xi)| d\xi + \left| \int_{t_{i-N}}^{t_i-r} K(t_i, s) u(s) ds \right| \\ &\leq C \left(\sum_{j=i-N+1}^i h_j^2 + |t_i - r - t_{i-N}| \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} t_i - r - t_{i-N} &= r + (i - \frac{3N}{2})h^{(3)} - r - \sigma - (i - \frac{3N}{2})h^{(2)} \\ &= -\sigma \left[1 - (i - \frac{3N}{2})N^{-1} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-N+1}^i h_j^2 &= \sum_{j=i-N+1}^{3N/2} h_j^2 + \sum_{j=\frac{3N}{2}+1}^i h_j^2 = (\frac{3N}{2} - i + N) |h^{(2)}|^2 + (i - \frac{3N}{2}) |h^{(3)}|^2 \\ &\leq N \left(|h^{(2)}|^2 + |h^{(3)}|^2 \right) = (r - \sigma)h^{(2)} + rh^{(3)} = \left[(r - \sigma)^2 + r^2 \right] N^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$|R_i^{(3)}| \leq C(\sigma + N^{-1}) \leq CN^{-1} \ln N, \quad \frac{3N}{2} < i \leq \frac{5N}{2} \quad (4.87)$$

elde edilir. Böylece (4.81)-(4.87) eşitsizliklerinden (4.80)'in doğruluğu açıktır.

Teorem 4.3. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü u ve (4.76)-(4.77) fark şemasının çözümü y_i olsun. Bu durumda Lemma 4.2.'nin şartları altında ε 'a göre düzgün

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}} \leq CN^{-1} \ln N$$

hata değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Yapman, 2019).

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.10. ve Lemma 4.11.'den elde edilir.

4.2.3. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik bulgular aşağıdaki örnek ile denetlenecektir. Bu örnek (4.76)-(4.77) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{f_i + \frac{\varepsilon}{h_i} y_{i-1} + \sum_{j=i-\bar{N}+1}^i h_j K_{i,j-1} y_{j-1}}{\frac{\varepsilon}{h_i} + a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.88)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad i = -\frac{3N}{2}, \dots, 0, \quad (4.89)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülüyor.

Örnek 4.4.

$$\varepsilon u'(t) + u(t) + \int_{t-1}^t su(s)ds = 5t^2 - 1, \quad 0 < t \leq 2, \quad (4.90)$$

$$u(t) = 5 + t, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (4.91)$$

denklemini verilsin. Bu problemin kesin çözümü elde edilemediğinden nümerik sonuçlardan hata yaklaşımı ve yakınsama oranının hesabı için çift şebeke metodu

kullanılacaktır. Bu ise, nümerik sonuçları iki kat daha ince bir şebeke üzerindeki sonuçlarla karşılaştırmaktır. Kesinliği ayırık maksimum norm ile hesaplanmaktadır.

$$e_{\varepsilon}^N = \max_i |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}|$$

burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$ aşağıda belirtilen şebeke üzerindeki yaklaşık çözümlerdir.

$$\tilde{\omega}_{2N} = \left\{ t_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, 2, \dots, 2N \right\}$$

burada

$$t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

biçiminde gösterilebilir. Yakınsaklık oranı

$$q_{\varepsilon}^N = \frac{\ln(e_{\varepsilon}^N / e_{\varepsilon}^{2N})}{\ln 2}$$

şeklinde ifade edilir. e^N maksimum hata

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

ile hesaplanır. q^N düzgün yakınsaklık oranı ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$q^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}.$$

Sonuç olarak (4.90)-(4.91) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 6, 12, 18, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.88)-(4.89) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.5.'te gösterilmiştir.

Tablo 4.5.'te görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak birinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.3.'te verilen birinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

Tablo 4.5. (4.90)-(4.91) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε ’a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Amiraliyev ve Yapman, 2019).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,033904	0,019338	0,010435	0,005515	0,002835
	0,81	0,89	0,92	0,96	
2^{-6}	0,043189	0,024464	0,013293	0,006977	0,003562
	0,82	0,88	0,93	0,97	
2^{-12}	0,059090	0,033471	0,018187	0,009612	0,004907
	0,82	0,88	0,92	0,97	
2^{-18}	0,064587	0,036332	0,019470	0,010290	0,005253
	0,83	0,90	0,92	0,97	
2^{-24}	0,066203	0,037500	0,020096	0,010621	0,005422
	0,82	0,90	0,92	0,97	
e^N	0,066203	0,037500	0,020096	0,010621	0,005422
q^N	0,82	0,90	0,92	0,97	

4.3. Uyarlanmış Şebekelerde İkinci Dereceden Kesinliğe Sahip Sonlu Fark Yöntemleri

Bu bölümde birinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli gecikmeli ve gecikmesiz Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Her bir problem için uyarlanmış şebekede ikinci dereceden kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri incelenmiştir.

4.3.1. Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi

Bu bölümde, aşağıda tanımlanan singüler pertürbe özellikli lineer birinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi ele alınmıştır.

$$Lu := \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4.92)$$

$$u(0) = A. \quad (4.93)$$

Burada $\varepsilon \in (0,1]$ pertürbasyon parametresi, $a(t) \geq \alpha > 0$ (α sabit), $K(t,s)$ ve $f(t)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A verilmiş sabittir. $u(t)$ çözümünün küçük ε değerleri için $t=0$ civarında sınır katı mevcuttur.

4.3.1.1. Kesin çözümün özellikleri

Bu bölümde (4.92)-(4.93) başlangıç değer probleminin $u(t)$ çözümü ve türevleri için asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır. Bu değerlendirmeler daha sonra uygun nümerik çözümün yakınsaklık ve hata analizinde kullanılacaktır.

Lemma 4.12. $a, f \in C^2[0,T]$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial t^m}, \frac{\partial^n K}{\partial s^n} \in C^2([0,T]^2)$, $m=0,1,2$; $n=0,1$ olsun.

Bu durumda (4.92)-(4.93) probleminin $u(t)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \quad (4.94)$$

$$|u^{(k)}(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k=1,2 \quad (4.95)$$

değerlendirmeleri doğrudur.

İspat. (4.94) eşitsizliğinin ve $k=1$ için (4.95) eşitsizliğinin doğruluğu Lemma 4.2.'den kolayca elde edilebilir.

Şimdi (4.95)'in $k=2$ için doğruluğu gösterilecektir. (4.92) denkleminin iki kez türevi alınırsa,

$$\varepsilon v'(t) + a(t)v(t) = \Phi(t) \quad (4.96)$$

elde edilir. Burada

$$v(t) = u''(t),$$

$$\Phi(t) = f''(t) - 2a'(t)u'(t) - a''(t)u(t) - (K(t,t)u(t))' - \frac{\partial K}{\partial t}(t,t)u(t) - \int_0^t \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t,s)u(s)ds$$

biçimindedir. Yukarıdaki varsayımlar altında kolaylıkla görülebilir ki;

$$|\Phi(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) \quad (4.97)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + a'(t)u(t) + K(t, t)u(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)u(s)ds = f'(t)$$

eşitsizliğinden $|u''(0)|$ için;

$$|u''(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \quad (4.98)$$

yazılabilir. (4.96) eşitliğinden

$$u''(t) = u''(0) + e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\eta)d\eta} d\xi$$

elde edilir. Burada (4.97) ve (4.98) eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} |u''(t)| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} \right) e^{-\frac{\alpha(t-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &= \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + C\alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) + \frac{C}{\varepsilon^2} t e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $k = 2$ için (4.95)'in doğruluğunu gösterir.

4.3.1.2. Fark şemasının kurulması

$\bar{\omega}_N, [0, T]$ aralığı üzerinde herhangi bir düzgün olmayan şebeke olsun:

$$\bar{\omega}_N = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0-1} < t_N = T; \quad h_i = t_i - t_{i-1}\},$$

$$\omega_N = \bar{\omega}_N \setminus \{t = 0\}.$$

Bu şebekede tanımlı $v_i = v(t_i)$ fonksiyonu için aşağıdaki ayrık maksimum norm kullanılacaktır:

$$\|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|.$$

(4.92)-(4.93) probleminin fark şemasını kurmak için aşağıdaki özdeşlik ele alınacaktır.

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu\varphi_i(t)dt = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\varphi_i(t)dt, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.99)$$

burada

$$\chi_i = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t)dt = \frac{1 - e^{-a_i \rho_i}}{a_i \rho_i}, \quad \rho_i = \frac{h_i}{\varepsilon}$$

ve

$$\varphi_i(t) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. $\varphi_i(t)$ fonksiyonu;

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi'(t) + a_i \varphi(t) &= 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ \varphi(t_i) &= 1 \end{aligned} \quad (4.100)$$

probleminin çözümüdür. (4.99) bağıntısının diferansiyel kısmı için (4.100) problemi ile kesin fark şemaları yöntemini (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev ve Şevgin, 2006; Amiraliyev ve Yılmaz, 2014; ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili kapsamlı bilgi için Samarskii, 2001, s. 207-214) kullanarak,

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u' + a(t)u] \varphi_i(t)dt = \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a(t_i)] \varphi_i(t)u(t)dt \quad (4.101)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho_i}{1 - e^{-a_i \rho_i}} e^{-a_i \rho_i} \quad (4.102)$$

biçimindedir. t_{i-1}, t_i şebeke noktalarına göre Newton interpolasyon formülünü uyguladıktan sonra

$$a(t) - a(t_i) = (t - t_i)a_{\bar{t},i} + \frac{a''(\eta_i(t))}{2}(t - t_{i-1})(t - t_i)$$

ve

$$u(t) = u(t_i) - \int_t^{t_i} u'(s) ds$$

yazılabilir. Yukarıdaki formüller dikkate alınarak (4.101) bağıntısı

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u' + a(t)u] \varphi_i(t) dt = \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + \left(a_{\bar{t},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) dt \right) u_i + R_i^{(1)} \quad (4.103)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{a''(\eta_i(t))}{2} (t - t_{i-1})(t - t_i) \varphi_i(t) u(t) dt - a_{\bar{t},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) \left(\int_t^{t_i} u'(s) ds \right) dt, \quad \eta_i - \text{ara nokta} \quad (4.104)$$

biçimindedir. Basit bir hesaplamayla

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) dt = h_i \delta_i$$

yazılabilir. Burada

$$\delta_i = \frac{e^{-a_i \rho_i}}{1 - e^{-a_i \rho_i}} - \frac{1}{a_i \rho_i}, \quad (-1 \leq \delta_i \leq 0) \quad (4.105)$$

biçimindedir. Böylece (4.103) bağıntısı

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u' + a(t)u] \varphi_i(t) dt = \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + (a_i + h_i \delta_i a_{\bar{t},i}) u_i + R_i^{(1)} \quad (4.106)$$

haline dönüşür. Burada $R_i^{(1)}$ kalan terimi (4.104)'de ifade edilmiştir.

$R_i^{(2)}$ hatasını değerlendirmek için yukarıdaki işlemlere benzer şekilde

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt = \bar{f}_i + R_i^{(2)} \quad (4.107)$$

elde edilir. Burada

$$\bar{f}_i = f_i + h_i \delta_i f_{\bar{i},i} \quad (4.108)$$

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f''(\gamma_i(t)) (t - t_{i-1})(t - t_i) \varphi_i(t) dt, \quad \gamma_i - \text{ara nokta} \quad (4.109)$$

biçimindedir.

(4.99) bağıntısındaki integral terim için

$$K(t, s) = K(t_i, s) + (t - t_i) \frac{\partial}{\partial t} K(t_i, s) + \frac{(t - t_i)^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} K(\xi_i(t), s)$$

Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) \left(\int_0^t K(t, s) u(s) ds \right) dt = \left(\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt \right) \int_0^{t_i} K(t_i, s) u(s) ds \\ & + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t K(t, s) u(s) ds \right) \Big|_{t=t_i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) dt \\ & + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_0^\xi K(\xi, s) u(s) ds \right) T_1(\xi - t) d\xi \\ & = \int_0^{t_i} K(t_i, s) u(s) ds + h_i \delta_i \left\{ K(t_i, t_i) u_i + \int_0^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s) u(s) ds \right\} + R_i^{(3)} \\ & = \int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds + h_i \delta_i K(t_i, t_i) u_i + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (4.110)$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{K}(t_i, s) = K(t_i, s) + h_i \delta_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s) \quad (4.111)$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_0^\xi K(\xi, s) u(s) ds \right) T_1(\xi - t) d\xi \quad (4.112)$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s / s!, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0$$

biçimindedir.

Şimdi ise kullanılacak olan kalan terimi integral şeklinde olan bileşik yamuk kuralı verilsin:

$$\int_a^b F(s) ds = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} (F_{i-1} + F_i) + R_N \equiv \sum_{i=0}^N \hbar_i F_i + R_N \quad (4.113)$$

burada

$$\hbar_0 = \frac{h_1}{2}, \quad \hbar_i = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \hbar_N = \frac{h_N}{2}$$

ve

$$R_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - \xi)(t_{i-1} - \xi) F''(\xi) d\xi$$

biçimindedir. (4.110)'da $\mathcal{K}(t_i, s)u(s)$ için $[0, t_i]$ aralığı üzerinde (4.113) formülü uygulanırsa,

$$\int_0^{t_i} \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = \sum_{j=0}^i \hbar_j \mathcal{K}_{ij} u_j + R_i^{(4)}$$

elde edilir. Burada

$$R_i^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi)(t_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (\mathcal{K}(t_i, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (4.114)$$

biçimindedir. Böylece (4.110) eşitliği aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) \left(\int_0^t K(t,s) u(s) ds \right) dt = \sum_{j=0}^i \hbar_j \mathcal{K}_{ij} u_j + h_i \delta_i K_{i,i} u_i + R_i^{(3)} + R_i^{(4)}. \quad (4.115)$$

Sonuç olarak (4.106), (4.107) ve (4.115) eşitlikleri (4.99) özdeşliğinde dikkate alınırsa, $u(t)$ için kesin bağıntı

$$\varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + \bar{a}_i u_i + \sum_{j=0}^i \hbar_j \mathcal{K}_{ij} u_j + R_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.116)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$R_i = \sum_{k=1}^4 R_i^{(k)} \\ \bar{a}_i = a_i + (a_{\bar{t},i} + K_{ii}) h_i \delta_i \quad (4.117)$$

biçimindedir ve δ_i , (4.105)'de ifade edilmiştir.

(4.116) bağıntısında R_i kalan terim ifadesi ihmal edilirse, (4.92)-(4.93) problemi için aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$\varepsilon \theta_i y_{\bar{t},i} + \bar{a}_i y_i + \sum_{j=0}^i \hbar_j \mathcal{K}_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.118)$$

$$y_0 = A, \quad (4.119)$$

burada θ_i , $\bar{a}_i$, $\mathcal{K}_{ij}$ ve $\bar{f}_i$ sırasıyla (4.102), (4.117), (4.111) ve (4.108) denklemlerinde ifade edilmiştir.

(4.118)-(4.119) fark şemasının ε 'a göre düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde bir geçiş noktası içeren düzgün olmayan Shishkin şebeke kullanılacaktır. Bu şebeke sınır katı civarında yoğunlaşan uyarlanmış parçalı düzgün bir şebekedir. N çift sayı olmak üzere, şebekeye karşılık gelen t_i düğüm noktaları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$t_i = \begin{cases} ih^{(1)} \equiv \frac{2\sigma}{N}i, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ \sigma + (i - \frac{N}{2})h^{(2)} \equiv \sigma + 2(i - \frac{N}{2})\frac{T - \sigma}{N}, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \end{cases}$$

burada σ bir geçiş noktasıdır ve

$$\sigma = \min \left\{ \frac{T}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln N \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

4.3.1.3. Hata değeriendirmesi

$z_i = y_i - u_i$, (4.118)-(4.119) fark şemasının hatası olsun. Bu durumda (4.116) ve (4.118) özdeşliklerine göre z_i aşağıda verilen ayrık problemin çözüdür:

$$\varepsilon \theta_i z_{\bar{i},i} + \bar{a}_i z_i + \sum_{j=0}^i h_j \mathcal{K}_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.120)$$

$$z_0 = 0. \quad (4.121)$$

Lemma 4.13. $a, f \in C^2[0, T]$ ve $\frac{\partial^n K}{\partial t^n}, \frac{\partial^n K}{\partial s^n} \in C^2([0, T]^2)$, $n = 0, 1, 2$ olsun. Bu durumda R_i hata fonksiyonu için

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-2} \ln N$$

değeriendirmesi doğrudur (Yapman ve Amiraliyev, 2020).

İspat. Her bir $R_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) hatası ayrı ayrı değeriendirilecek.

İlk olarak $R_i^{(1)}$ hatası için $a \in C^2[0, T]$ olduğundan ve (4.104) denkleminde

$$|R_i^{(1)}| \leq Ch_i^2 + |a_{\bar{t},i}| h_i |\delta_i| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t)| dt \leq Ch_i \left(h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t)| dt \right) \quad (4.122)$$

yazılabilir.

$R_i^{(2)}$ hatasını değerlendirmek için yukarıdaki gibi benzer şekilde (4.109) eşitliği ve $f \in C^2[0, T]$ şartıyla birlikte

$$|R_i^{(2)}| \leq Ch_i^2 \quad (4.123)$$

elde edilir.

$R_i^{(3)}$ hata değerlendirmesi için (4.112) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &= h_i \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_0^\xi K(\xi, s) u(s) ds \right) d\xi \right| \\ &\leq h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \left| (K(\xi, \xi) u(\xi))' \right| + \left| \frac{\partial K}{\partial \xi}(\xi, \xi) u(\xi) \right| + \int_0^\xi \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}(\xi, s) \right| |u(s)| ds \right\} d\xi \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan Lemma 4.13.'ün şartları altında ve (4.94) eşitsizliğinden

$$|R_i^{(3)}| \leq Ch_i \left(h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t)| dt \right) \quad (4.124)$$

olduğu görülür.

Son olarak $R_i^{(4)}$ hata terimi değerlendirilecektir. (4.114) bağıntısından

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi)(\xi - t_{j-1}) \left\{ \left| \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \xi^2}(t_i, \xi) \right| |u(\xi)| \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi}(t_i, \xi) \right| |u'(\xi)| + |\mathcal{K}(t_i, \xi)| |u''(\xi)| \right\} d\xi \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^i h_j^3 + \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \right) \end{aligned} \quad (4.125)$$

yazılabilir.

(4.122)-(4.125) eşitsizlikleri (4.95) eşitsizliği ile birlikte dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
 |R_i| &\leq C \left(h_i^2 + \sum_{j=1}^i h_j^3 + h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt + \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right) \\
 &\leq C \left(h_i^2 + \sum_{j=1}^i h_j^3 + h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt + \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right) \quad (4.126)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi parçalı düzgün olmayan ω_N şebekesi üzerinde (4.126) eşitsizliğinin sağ tarafı için hata değerlendirmesi elde edilecektir. İlk olarak aşağıdaki değerlendirmeler σ 'nın her iki durumu için geçerlidir:

$$h_i^2 = \begin{cases} |h^{(1)}|^2 = \left(\frac{\sigma}{N/2} \right)^2 \leq CN^{-2}, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \\ |h^{(2)}|^2 = \left(\frac{T-\sigma}{N/2} \right)^2 \leq CN^{-2}, & \frac{N}{2} \leq i \leq N \end{cases} \quad (4.127)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^i h_j^3 &\leq \sum_{j=1}^N h_j^3 = \sum_{j=1}^{N/2} |h^{(1)}|^3 + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N |h^{(2)}|^3 \\
 &= \frac{N}{2} |h^{(1)}|^3 + \frac{N}{2} |h^{(2)}|^3 = 4\sigma^3 N^{-2} + 4(\sigma - T)^3 N^{-2} \\
 &\leq CN^{-2}. \quad (4.128)
 \end{aligned}$$

(4.126) eşitsizliğinin sağ tarafının diğer terimleri için ilk olarak $\sigma = \frac{T}{2} \left(\alpha^{-1} \varepsilon \ln N > \frac{T}{2} \right)$

durumu incelenecektir. O halde $h^{(1)} = h^{(2)} = h = T / N$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt + \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq \frac{h^2}{\varepsilon} + \frac{h^2}{\varepsilon^2} \int_0^{t_i} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \\
& = (1 + \alpha^{-1}) \frac{h^2}{\varepsilon} = 2\alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1})TN^{-2} \ln N = CN^{-2} \ln N
\end{aligned} \tag{4.129}$$

elde edilir.

Şimdi ise $\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon \ln N < \frac{T}{2}$ durumu için (4.126) eşitsizliğinin sağ tarafının üçüncü terimi incelenecektir.

$$h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq \frac{|h^{(1)}|^2}{\varepsilon} = \frac{4\alpha^{-2} \varepsilon \ln^2 N}{N^2} \leq 2\alpha^{-1} TN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt &= \alpha^{-1} h^{(2)} e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha h^{(2)}}{\varepsilon}} \right) \\
&\leq \alpha^{-1} h^{(2)} N^{-1} = 2\alpha^{-1} (T - \sigma) N^{-2} \leq CN^{-2}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N
\end{aligned}$$

olduğundan

$$h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq N \tag{4.130}$$

elde edilir.

(4.126) eşitsizliğinin son terimi için

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \\
& = \sum_{j=1}^{N/2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt
\end{aligned} \tag{4.131}$$

yazılabilir.

(4.131) eşitsizliğinde sağ taraftaki ilk terim için

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N/2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq |h^{(1)}|^2 \int_0^\sigma \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \\
& = |h^{(1)}|^2 \alpha^{-1} \varepsilon^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha \sigma}{\varepsilon}} \right) \leq 2\alpha^{-2} TN^{-2} \ln N = CN^{-2} \ln N
\end{aligned} \tag{4.132}$$

elde edilir.

(4.131) eşitsizliğinde sağ taraftaki ikinci terim için iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve ayrıca $\varepsilon \leq CN^{-1}$ eşitsizliği dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt = \alpha^{-2} h^{(2)} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \left(e^{-\frac{\alpha t_j}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha t_{j-1}}{\varepsilon}} \right) \\
& - 2\alpha^{-3} \varepsilon \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \left(e^{-\frac{\alpha t_{j-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_j}{\varepsilon}} \right) \leq \alpha^{-2} h^{(2)} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \left(e^{-\frac{\alpha t_j}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha t_{j-1}}{\varepsilon}} \right) \\
& = \alpha^{-2} h^{(2)} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N e^{-\frac{\alpha t_{j-1}}{\varepsilon}} \left(1 + e^{-\frac{\alpha h^{(2)}}{\varepsilon}} \right) \leq 2\alpha^{-2} h^{(2)} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N e^{-\frac{\alpha t_{j-1}}{\varepsilon}} \leq 2\alpha^{-2} h^{(2)} \frac{e^{-\frac{\alpha \sigma}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{\alpha h^{(2)}}{\varepsilon}}} \\
& \leq 2\alpha^{-2} h^{(2)} \frac{N^{-1}}{1 - e^{-\frac{2\alpha(T-\sigma)}{N\varepsilon}}} \leq 2\alpha^{-2} h^{(2)} \frac{N^{-1}}{1 - e^{-\frac{\alpha T}{C}}} \leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.133}$$

elde edilir.

(4.132) ve (4.133) eşitsizlikleri (4.131)'de dikkate alınır,

$$\sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)(t - t_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq N \tag{4.134}$$

bulunur.

Böylece (4.126) eşitsizliği, (4.127)-(4.130) ve (4.134) bağıntılarıyla birlikte Lemma 4.13.'ün ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.14. (4.120)-(4.121) probleminin bir çözümü z_i olsun. Bu durumda

$$\|z\|_{\infty, \omega_N} \leq C \|R\|_{\infty, \omega_N}$$

değerlendirmesi doğrudur (Yapman ve Amiraliev, 2020).

İspat. $\bar{a}_i$ için $a(t)$ ve $K(t, s)$ 'in düzgünlüğü göz önüne alındığında, yeterince büyük N değerleri için $\bar{a}_i \geq \bar{\alpha} > 0$ yazılabilir.

$$\left| \sum_{j=0}^i \hbar_j \mathcal{K}_{ij} z_j \right| \leq \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^i \hbar_j |z_j|$$

$\left(\bar{\mathcal{K}} = \max_{[0, T]^2} |\mathcal{K}(t, s)| \right)$ olduğundan daha sonra Lemma 4.3. dikkate alınır (4.120)-(4.121)

probleminin çözümü için

$$|z_i| \leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + (\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^i \hbar_j |z_j|$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu

$$|z_i| \leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \exp \left((\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^i \frac{\hbar_j}{1 - (\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \hbar_j} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da yeterince büyük N değerleri için istenilen sınırı verir. Böylece Lemma 4.14.'ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.4. (4.92)-(4.93) probleminin çözümü u ve (4.118)-(4.119) fark şemasının çözümü y_i olsun. O zaman Lemma 4.13.'ün şartları altında aşağıdaki eşitsizlik vardır (Yapman ve Amiraliev, 2020):

$$\|y - u\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-2} \ln N.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.13. ve Lemma 4.14. kullanılarak elde edilebilir.

4.3.1.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.92)-(4.93) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örnekler ile denetlenmiştir. Bu örnekler (4.118)-(4.119) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{\bar{f}_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} y_{i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} h_j \mathcal{K}_{ij} y_j}{\frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} + \bar{a}_i + h_i \mathcal{K}_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.135)$$

$$y_0 = A \quad (4.136)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülüyor. Burada $\bar{f}_i$, θ_i , $\mathcal{K}_{ij}$ ve $\bar{a}_i$ sırasıyla (4.108), (4.102), (4.111) ve (4.117) denklemleriyle tanımlanmıştır.

Örnek 4.5. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için test edilecektir:

$$\varepsilon u'(t) + u(t) + \int_0^t t u(s) ds = -\frac{\varepsilon}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} + t\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right) + t \ln(1+t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.137)$$

$$u(0) = 2. \quad (4.138)$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{1}{1+t}$$

şeklindedir.

(4.137)-(4.138) problemin yakınsaklık durumunu araştırmak için, q_ε^N düzgün yakınsaklık oranı

$$q_\varepsilon^N = \frac{\ln(e_\varepsilon^N / e_\varepsilon^{2N})}{\ln 2}$$

formülü ile hesaplanır. Burada kesin hata e_ε^N aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$e_\varepsilon^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\partial}_N}.$$

Bununla beraber y , u başlangıç değer probleminin çeşitli N ve ε değerleri için hesaplanmış fark denkleminin çözümünü ifade etmektedir.

Sonuç olarak (4.137)-(4.138) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 12, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.135)-(4.136) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.6.'da gösterilmiştir.

Tablo 4.6. (4.137)-(4.138) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_N şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar ve q_ε^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2020).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,009021	0,002555	0,000699	0,000181	0,000045
	1,82	1,87	1,95	2,01	
2^{-12}	0,010261	0,002886	0,000784	0,000203	0,000051
	1,83	1,88	1,95	1,99	
2^{-24}	0,010744	0,003022	0,000821	0,000211	0,000053
	1,83	1,88	1,96	1,99	
e^N	0,010744	0,003022	0,000821	0,000211	0,000053
q^N	1,83	1,88	1,96	1,99	

Yukarıda tabloda görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak ikinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.4.'te verilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

Örnek 4.6.

$$\varepsilon u'(t) + 2u(t) - \int_0^t (t-s)e^{1-ts}u(s)ds = e^t - t, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.139)$$

$$u(0) = 1, \quad (4.140)$$

problemi verilsin. Bu problemin kesin çözümü elde edilemediğinden nümerik sonuçlardan hata yaklaşımı ve yakınsama oranının hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Bu ise, nümerik sonuçları iki kat daha ince bir şebeke üzerindeki sonuçlarla karşılaştırmaktır. Kesinliği ayrık maksimum norm ile hesaplanmaktadır.

$$e_{\varepsilon}^N = \max_i |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}|$$

burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$ aşağıda belirtilen şebeke üzerindeki yaklaşık çözümlerdir:

$$\tilde{\omega}_{2N} = \left\{ t_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, 2, \dots, 2N \right\}$$

burada

$$t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

biçiminde gösterilebilir. Yakınsaklık oranı

$$q_{\varepsilon}^N = \frac{\ln(e_{\varepsilon}^N / e_{\varepsilon}^{2N})}{\ln 2}$$

şeklinde ifade edilir. e^N maksimum hata ise

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

ile hesaplanır. Son olarak q^N düzgün yakınsaklık oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$q^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}.$$

Sonuç olarak (4.139)-(4.140) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 6, 12, 18, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.135)-(4.136) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.7.'de gösterilmiştir.

Aşağıda tabloda görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak ikinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.4.'te verilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

Tablo 4.7. (4.139)-(4.140) test probleminin çözümünden elde edilen ve ω_N şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε ’a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2020).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,024006	0,006894	0,001912	0,000502	0,000128
	1,80	1,85	1,93	1,97	
2^{-6}	0,032078	0,009148	0,002555	0,000666	0,000169
	1,81	1,84	1,94	1,98	
2^{-12}	0,048989	0,013971	0,003902	0,001024	0,000260
	1,81	1,84	1,93	1,98	
2^{-18}	0,053476	0,015146	0,004172	0,001095	0,000276
	1,82	1,86	1,93	1,99	
2^{-24}	0,055192	0,015632	0,004306	0,001130	0,000284
	1,82	1,86	1,93	1,99	
e^N	0,055192	0,015632	0,004306	0,001130	0,000284
q^N	1,82	1,86	1,93	1,99	

4.3.2. Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için homojen tipli sonlu fark şeması

Bu bölümde birinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemin nümerik çözümü ele alınmıştır. Uyarlanmış şebekede ikinci mertebeden yakınsaklığa sahip homojen tipli sonlu fark şemasının kurulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri incelenmiştir.

4.3.2.1. Kesin çözümün özellikleri

Bu bölümde (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin $u(t)$ çözümü ve türevleri için asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır. Bu değerlendirmeler daha sonraki bölümlerde uygun nümerik çözümün yakınsaklık ve hata analizinde kullanılacaktır.

Lemma 4.15. $a, f \in C^2[0, T]$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial t^m}, \frac{\partial^n K}{\partial s^n} \in C^2([0, T]^2)$, $m = 0, 1, 2$;

$n = 0, 1$ olsun. Bu durumda (4.1)-(4.2) probleminin $u(t)$ çözümü için

$$|u^{(k)}(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad t \in \bar{I}, \quad k = 0, 1 \quad (4.141)$$

$$|u''(t)| \leq \begin{cases} C \left(1 + \frac{(t-r)^{p-1}}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \right), & t \in I_p, \quad p = 1, 2 \\ C, & t \in I_p, \quad 3 \leq p \leq m \end{cases} \quad (4.142)$$

değerlendirmeleri doğrudur.

İspat. (4.141) eşitsizliğinin doğruluğu Lemma 4.2.'den kolayca elde edilebilir.

(4.142)'nin doğruluğunu göstermek için (4.1) denkleminin iki kez türevi alınır,

$$\varepsilon v'(t) + a(t)v(t) = \Phi(t) \quad (4.143)$$

elde edilir. Burada

$$v(t) = u''(t),$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & f''(t) - 2a'(t)u'(t) - a''(t)u(t) - (K(t,t)u(t))' - \frac{\partial K}{\partial t}(t,t)u(t) \\ & - \int_{t-r}^t \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t,s)u(s)ds + \frac{\partial K}{\partial t}(t,t-r)u(t-r) + (K(t,t-r)u(t-r))' \end{aligned}$$

biçimindedir. Yukarıdaki varsayımlar altında kolaylıkla görülebilir ki

$$|\Phi(t)| \leq C(1 + |u'(t)| + |u'(t-r)|)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada (4.141) eşitsizliği dikkate alınır

$$|\Phi(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + |\varphi'(t-r)| \right) \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad t \in I_1 \quad (4.144)$$

$$|\Phi(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} \right) \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} \right), \quad t \in I_2 \quad (4.145)$$

$$|\Phi(t)| \leq C, \quad t \in I_p, \quad 3 \leq p \leq m \quad (4.146)$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi (4.142)'nin $p=1$ için doğruluğu gösterilecektir.

$$\varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + a'(t)u(t) + \int_{t-r}^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)u(s)ds + K(t, t)u(t) - K(t, t-r)u(t-r) = f'(t)$$

bağıntısı ve (4.141) eşitsizliği kullanılarak

$$|u''(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \quad (4.147)$$

elde edilir. Ayrıca (4.143), (4.144) ve (4.147)'den

$$\begin{aligned} |u''(t)| &\leq |u''(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\Phi(\tau)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \\ &= \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \tau}{\varepsilon}}\right) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $p=1$ için (4.142)'nin doğruluğunu gösterir. Burada

$$|u''(r)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha r}{\varepsilon}}\right) \leq C$$

şeklindedir.

Şimdi ise (4.142)'nin $p=2$ için doğruluğu gösterilecektir. (4.145) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |u''(t)| &\leq |u''(r)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_r^t a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_r^t |\Phi(\tau)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \\ &\leq C e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_r^t \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha(\tau-r)}{\varepsilon}}\right) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\ &\leq C + C \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}}\right) + \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} (t-r), \quad r < t \leq 2r \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $p=2$ için (4.142)'nin doğruluğu açıktır. Ayrıca bu eşitsizlikten

$$|u''(2r)| \leq C$$

olduğu görülebilir.

Son olarak (4.146) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |u''(t)| &\leq |u''(2r)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{2r}^t a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{2r}^t |\Phi(\tau)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \\ &\leq C e^{-\frac{\alpha(t-2r)}{\varepsilon}} + C \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha(t-2r)}{\varepsilon}} \right) \leq C \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve $p \geq 3$ için (4.142)'nin doğruluğu da gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.3.2.2. Fark şemasının kurulması

$[0, T]$ aralığı üzerinde düzgün olmayan şebeke

$$\bar{\omega}_{N_0} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0-1} < t_N = T; \quad h_i = t_i - t_{i-1}\}$$

olsun. Burada her bir alt aralık I_p ($1 \leq p \leq m$), N tane şebeke noktası içerir:

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N+1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m,$$

ve sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p}$$

şeklindedir.

Notasyon kolaylığı için, herhangi bir $v(t)$ fonksiyonu için $v_i = v(t_i)$, $v_{i-\frac{1}{2}} = v(t_i - \frac{h}{2})$ ve

$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ile gösterilsin. $\bar{\omega}_{N_0}$ üzerinde tanımlanan herhangi bir v_i şebeke

fonksiyonu için kullanılan maksimum norm

$$\|v\|_{\infty,p} \equiv \|v\|_{\infty,\omega_{N,p}} := \max_{(p-1)N \leq i \leq pN} |v_i|$$

olarak tanımlanmaktadır. ω_{N_0} üzerinde fark şeması oluşturmak için aşağıdaki özdeşlik ele alınacaktır:

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t) \varphi_i(t) dt = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.148)$$

burada

$$\chi_i = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i(t) dt = \frac{1 - e^{-a_i \rho_i}}{a_i \rho_i}, \quad \rho_i = \frac{h_i}{\varepsilon}$$

ve

$$\varphi_i(t) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(t_i - t)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0$$

olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. $\varphi_i(t)$ fonksiyonu;

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi'(t) + a_i \varphi(t) &= 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \\ \varphi(t_i) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. (4.148) özdeşliğinin diferansiyel kısmı için kesin fark şemaları yöntemini kullanarak (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev ve Şevgin, 2006; Amiraliyev ve Yılmaz, 2014; Amiraliyev vd., 2020; Yapman ve Amiraliyev, 2020; ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili kapsamlı bilgi için Samarskii, 2001, s. 207-214)

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u' + a(t)u] \varphi_i(t) dt &= \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + \left(a_{\bar{t},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) dt \right) u_i + R_i^{(1)} \\ &\equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + (a_i + h_i \delta_i a_{\bar{t},i}) u_i + R_i^{(1)} \end{aligned} \quad (4.149)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho_i}{1 - e^{-a_i \rho_i}} e^{-a_i \rho_i}, \quad \delta_i = \frac{e^{-a_i \rho_i}}{1 - e^{-a_i \rho_i}} - \frac{1}{a_i \rho_i} \quad (-1 \leq \delta_i \leq 0) \quad (4.150)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{a''(\eta_i(t))}{2} (t - t_{i-1})(t - t_i) \varphi_i(t) u(t) dt \\ - a_{\bar{t},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \varphi_i(t) \left(\int_t^{t_i} u'(s) ds \right) dt, \quad \eta_i - \text{ara nokta} \quad (4.151)$$

biçimindedir. Benzer şekilde (4.148) özdeşliğinin sağ tarafındaki terim için

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \varphi_i(t) dt = \bar{f}_i + R_i^{(2)} \quad (4.152)$$

elde edilir. Burada

$$\bar{f}_i = f_i + h_i \delta_i f_{\bar{t},i} \quad (4.153)$$

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f''(\gamma_i(t)) (t - t_{i-1})(t - t_i) \varphi_i(t) dt, \quad \gamma_i - \text{ara nokta} \quad (4.154)$$

biçimindedir. (4.148) özdeşliğinin integral teriminin nümerik yaklaşımı için kalan terimleri integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren aşağıdaki dikdörtgen kuralı kullanılacaktır:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = f(\bar{x}) \int_a^b p(x) dx + R(f), \quad a \leq \bar{x} \leq b, \quad (4.155)$$

burada

$$R(f) = \int_a^b d\xi f''(\xi) \int_a^b p(x) \left[T_1(x - \xi) - T_1(\bar{x} - \xi) + (b - a)^{-1} (b - \xi)(\bar{x} - x) \right] dx \\ + f[a, b] \int_a^b p(x) (x - \bar{x}) dx \quad (4.156)$$

$$T_1(x-\xi) = \begin{cases} x-\xi, & x \geq \xi \\ 0, & x \leq \xi \end{cases}, \quad f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

biçimindedir. (4.155) formülünde baz fonksiyonu $p(x) \equiv 1$ ve $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ alınırsa orta dikdörtgen formülü

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + R(f) \quad (4.157)$$

yazılır. Burada kalan terim

$$R(f) = \int_a^b f''(\xi) \left[\frac{(b-\xi)^2}{2} - (b-a)T_1\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) \right] d\xi$$

biçimindedir.

(4.148) bağıntısının integral teriminde (4.157) formülü $[a,b] = [t_{i-1}, t_i]$ için uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \right] \varphi_i(t)dt = \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}},s)u(s)ds \\ & + \frac{d}{dt} \left(\int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \right) \Big|_{t=t_{i-\frac{1}{2}}} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_{i-\frac{1}{2}}) \varphi_i(t)dt \\ & + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi,s)u(s)ds \right) \left\{ (t-\xi) \left[T_0(t-\xi) - T_0(t_{i-\frac{1}{2}}-\xi) \right] \right\} d\xi \\ & = \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}},s)u(s)ds + \mu_i h_i \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} K(t_{i-\frac{1}{2}},s)u(s)ds \\ & + \mu_i h_i \left(K(t_{i-\frac{1}{2}},t_{i-\frac{1}{2}})u(t_{i-\frac{1}{2}}) - K(t_{i-\frac{1}{2}},t_{i-\frac{1}{2}}-r)u(t_{i-\frac{1}{2}}-r) \right) \\ & + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi,s)u(s)ds \right) \left\{ (t-\xi) \left[T_0(t-\xi) - T_0(t_{i-\frac{1}{2}}-\xi) \right] \right\} d\xi \\ & = \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}},s)u(s)ds + \mu_i h_i \left(K(t_{i-\frac{1}{2}},t_{i-\frac{1}{2}})u(t_i) - K(t_{i-\frac{1}{2}},t_{i-\frac{1}{2}}-r)u(t_i-r) \right) + R_i^{(3)} \quad (4.158) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
R_i^{(3)} = & \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\int_{\xi-r}^{\xi} K(\xi, s) u(s) ds \right) \left\{ (t-\xi) \left[T_0(t-\xi) - T_0(t_{i-\frac{1}{2}}-\xi) \right] \right\} d\xi \\
& + \mu_i h_i \left(K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i-\frac{1}{2}}) \left\{ u(t_{i-\frac{1}{2}}) - u(t_i) \right\} - K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i-\frac{1}{2}}-r) \left\{ u(t_{i-\frac{1}{2}}-r) - u(t_i-r) \right\} \right)
\end{aligned} \tag{4.159}$$

$$\mu_i = \chi_i h_i^{-2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-\frac{1}{2}}) \varphi_i(t) dt = \delta_i + \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{-a_i \rho_i}}{2(1 - e^{-a_i \rho_i})} - \frac{1}{a_i \rho_i}, \quad (|\mu_i| \leq \frac{1}{2})$$

$$\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, s) = K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) + \mu_i h_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_{i-\frac{1}{2}}, s)$$

biçimindedir.

(4.158) eşitliğinin sağ tarafındaki integral terimin ayrıklaştırılması için

$$\int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds = \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds$$

eşitliği dikkate alınarak, (4.156) formülü $p(x) \equiv 1$, $[a, b] = [t_{j-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}]$ ve $\bar{x} = t_j$ için kullanılırsa

$$\int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds = \sum_{j=i-N}^{i-1} h_j \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j) u_j + R_i^{(4)} \tag{4.160}$$

elde edilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned}
R_i^{(4)} = & \sum_{j=i-N}^{i-1} \left\{ \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} d\xi \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, \xi) u(\xi) \right) \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[T_1(t-\xi) - T_1(t_j-\xi) + h_j^{-1} (t_{j+\frac{1}{2}}-\xi)(t_j-t) \right] dt \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \left(\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) u_{j+\frac{1}{2}} - \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{j-\frac{1}{2}}) u_{j-\frac{1}{2}} \right) (h_{j+1} - h_j) \right\} \\
= & \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-\xi)^2}{2} - T_1(t_j-\xi) h_j - \frac{1}{4} (t_{j+\frac{1}{2}}-\xi)(h_{j+1} - h_j) \right] \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, \xi) u(\xi) \right) d\xi \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=i-N}^{i-1} \left(\mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}) u_{j+\frac{1}{2}} - \mathcal{K}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{j-\frac{1}{2}}) u_{j-\frac{1}{2}} \right) (h_{j+1} - h_j), \quad (p-1)N \leq i \leq pN
\end{aligned} \tag{4.161}$$

biçimindedir. Böylece (4.149), (4.152), (4.158) ve (4.160) eşitlikleri (4.148) özdeşliğinde dikkate alınırsa,

$$\varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + \bar{a}_i u_i + \sum_{j=i-N}^{i-1} h_j \bar{\mathcal{K}}_{ij} u_j + R_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.162)$$

fark özdeşliği elde edilir. Burada

$$R_i = \sum_{k=1}^4 R_i^{(k)}$$

$$\bar{a}_i = a_i + h_i \delta_i a_{\bar{t},i} + h_i \mu_i K_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \quad (4.163)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{ij} = \begin{cases} \mathcal{K}_{ij} - \mu_i \frac{h_i}{h_j} K_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}, & j = i - N \\ \mathcal{K}_{ij}, & j = i - N + 1, \dots, i - 1 \end{cases} \quad (4.164)$$

olup, δ_i ve $R_i^{(k)}$ ($k=1,2,3,4$) kalan terimleri sırasıyla (4.150), (4.151), (4.154), (4.159) ve (4.161) denklemleriyle açıkça ifade edilmiştir.

Böylece (4.162) özdeşliği dikkate alınarak (4.1)-(4.2) problemi için

$$\varepsilon \theta_i y_{\bar{t},i} + \bar{a}_i y_i + \sum_{j=i-N}^{i-1} h_j \bar{\mathcal{K}}_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.165)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (4.166)$$

fark şeması elde edilmiştir. Burada θ_i , $\bar{a}_i$, $\bar{\mathcal{K}}_{ij}$ ve $\bar{f}_i$ sırasıyla (4.150), (4.163), (4.164) ve (4.153)'te ifade edilmiştir.

(4.165)-(4.166) fark şemasının ε 'a göre düzgün yakınsak olması için parçalı düzgün bir şebeke olan Shishkin tip şebeke kullanılacaktır. Ayırıklaştırma parametresi N bir çift sayı ve $\sigma_p = r_{p-1} + \min\{r/2, \alpha^{-1} \varepsilon \ln N\}$ şebeke geçiş parametresi olsun. $\omega_{N,p}$ parçalı düzgün şebekesini $[r_{p-1}, \sigma_p]$ aralığında (sınır katı bölgesinde) $N/2$ sayıda düğüm noktası ve $[\sigma_p, r_p]$ aralığında da (sınır katı dışında) $N/2$ sayıda düğüm noktası olmak

üzere iki alt aralığa bölünsün. Böylece bu alt aralıklara karşılık gelen adım uzunlukları sırasıyla $h^{(1)}$ ve $h^{(2)}$ olarak alınır;

$$h^{(1)} = \frac{2(\sigma_p - r_{p-1})}{N}, \quad h^{(2)} = \frac{2(r_p - \sigma_p)}{N}, \quad 1 \leq p \leq m$$

şeklinde tanımlanır. Buradan ise çalışmanın devamında kullanılacak alınacak olan parçalı düzgün şebeke aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\bar{\omega}_{N,p} = \begin{cases} t_i = r_{p-1} + (i - (p-1)N)h^{(1)}, & i = (p-1)N, \dots, (p-1/2)N \\ t_i = \sigma_p + (i - (p-1/2)N)h^{(2)}, & i = (p-1/2)N + 1, \dots, pN \end{cases}, \quad 1 \leq p \leq m.$$

4.3.2.3. Hata değerlendirme

(4.165)-(4.166) fark şemasının bir hatası $z_i = y_i - u_i$ olsun. Bu durumda (4.162) ve (4.165) özdeşliklerine göre z_i aşağıda verilen ayrık problemin çözümüdür:

$$\varepsilon \theta_i z_{\bar{i},i} + \bar{a}_i z_i + \sum_{j=i-N}^{i-1} h_j \bar{\mathcal{K}}_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.167)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0. \quad (4.168)$$

Lemma 4.16. Lemma 4.15.'in $n=0,1,2$ için şartları sağlanmış olsun. Bu durumda R_i hata fonksiyonu için

$$\|R\|_{\infty,p} \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq p \leq m \quad (4.169)$$

değerlendirmesi doğrudur (Yapman ve Amiraliev, 2021).

İspat. (4.169) eşitsizliğinin $R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}$ için doğruluğu gösterilecektir. Yukarıdaki varsayımlar altında kolaylıkla görülebilir ki;

$$\begin{aligned}
\left| R_i^{(1)} \right| + \left| R_i^{(2)} \right| + \left| R_i^{(3)} \right| \leq Ch_i \left(h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t)| dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t-r)| dt + \int_{t_{i-\frac{1}{2}}}^{t_i} |u'(t)| dt \right. \\
\left. + \int_{t_{i-\frac{1}{2}-N}}^{t_{i-N}} |u'(t)| dt \right), \quad 1 \leq i \leq N_0
\end{aligned} \tag{4.170}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada şebeke aralıklarına göre $h_i = h^{(1)}$ ya da $h_i = h^{(2)}$ dir.

İlk olarak $t_i \in \omega_{N,1}$ durumu incelenecektir. Eş. (4.141) ve $h_i \leq CN^{-1}$ dikkate alınır

$$\left| R_i^{(1)} \right| + \left| R_i^{(2)} \right| + \left| R_i^{(3)} \right| \leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right), \quad 1 \leq i \leq N$$

bulunur. Buradan ve Lemma 4.11.'den benzer şekilde

$$\left\| R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} \right\|_{\infty,1} \leq CN^{-2} \ln N$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi ise $t_i \in \omega_{N,2}$ durumu için Lemma 4.15. dikkate alındığında, (4.170) eşitsizliği

$$\left| R_i^{(1)} \right| + \left| R_i^{(2)} \right| + \left| R_i^{(3)} \right| \leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} dt + \int_{t_{i-\frac{1}{2}-N}}^{t_{i-N}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right), \quad N+1 \leq i \leq 2N$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\left\| R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} \right\|_{\infty,2} \leq CN^{-2} \ln N$$

sonucuna ulaşılır.

Son olarak $t_i \in \omega_{N,p}$ ($p \geq 3$) durumu incelenecektir. $[r, T]$ aralığında $u'(t)$ düzgün sınırlı olduğundan (4.170) eşitsizliği

$$\left| R_i^{(1)} \right| + \left| R_i^{(2)} \right| + \left| R_i^{(3)} \right| \leq Ch_i^2 \leq CN^{-2}, \quad 2N+1 \leq i \leq N_0$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak

$$\|R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)}\|_{\infty, p} \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq p \leq m \quad (4.171)$$

değerlendirilmesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Lemmanın ispatını tamamlamak için (4.169) eşitsizliğinin $R_i^{(4)}$ için doğruluğu gösterilecektir. (4.161)'in açık ifadesinden ve Lemma 4.15.'ten yararlanarak

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| \leq C & \left(N^{-2} + \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t)h_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}} - t)(h_{j+1} - h_j) \right] \right. \\ & \left. (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \right) + C \sum_{j=i-N}^{i-1} N^{-1} |h_{j+1} - h_j| + C \sum_{j=i-N}^{i-1} |h_{j+1} - h_j| \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt, \quad 1 \leq i \leq N_0 \end{aligned} \quad (4.172)$$

elde edilir.

İlk olarak (4.172) ifadesi $1 \leq i \leq N/2$ aralığında $\omega_{N,1}$ üzerinde değerlendirilecektir.

Burada $h_i = h^{(1)}$ olduğundan (4.172) eşitsizliğinin üçüncü ve dördüncü terimleri

$$N^{-1} |h_1 - h_0| \equiv N^{-1} |h^{(1)} - h^{(2)}| \leq CN^{-2} \quad (4.173)$$

ve

$$|h_1 - h_0| \int_{t_{-\frac{1}{2}}}^{t_{\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \int_0^{\frac{h^{(1)}}{2}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right) \leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \frac{h^{(1)}}{\varepsilon} \right) \leq CN^{-2} \ln N \quad (4.174)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(4.172) eşitsizliğinin ilk terimi için

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)h_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] (|u'(t)|+|u''(t)|) dt \\
& \leq CN^{-2} + \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - \frac{1}{4}(t_{\frac{1}{2}}-t)(h^{(1)}-h^{(2)}) \right] (|u'(t)|+|u''(t)|) dt \\
& \quad + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)h^{(1)} \right] (|u'(t)|+|u''(t)|) dt \\
& \leq C \left(N^{-2} + \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - \frac{1}{4}(t_{\frac{1}{2}}-t)(h^{(1)}-h^{(2)}) \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)h^{(1)} \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right) \\
& \leq CN^{-2} \ln N
\end{aligned} \tag{4.175}$$

biçiminde değerlendirme yapılabilir.

Böylece (4.173), (4.174) ve (4.175) eşitsizlikleri (4.172) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$|R_i^{(4)}| \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2} \tag{4.176}$$

elde edilir.

(4.172) eşitsizliği dikkate alınarak $\frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N$ aralığında $R_i^{(4)}$ değerlendirmesi

$$\begin{aligned}
|R_i^{(4)}| & \leq CN^{-2} + C \sum_{j=N/2}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)h_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] \\
& \quad (|u'(t)|+|u''(t)|) dt + C \sum_{j=N/2}^{i-1} N^{-1} |t_{j+1}-t_j| + C \sum_{j=N/2}^{i-1} |h_{j+1}-h_j| \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \\
& \leq CN^{-2} + C \sum_{j=N/2}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)h_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \\
& \quad + CN^{-1} |h^{(2)}-h^{(1)}| + C |h^{(2)}-h^{(1)}| \int_{\frac{t_{N/2-1}}{2}}^{\frac{t_{N+1}}{2}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt
\end{aligned} \tag{4.177}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca

$$\int_{t_{N/2-\frac{1}{2}}}^{t_{N/2+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt = \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha t_{N/2-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_{N/2+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} \right) \leq \alpha^{-1} N^{-1} e^{\frac{\alpha h^{(1)}}{2\varepsilon}} = \alpha^{-1} N^{-1} N^{\frac{1}{N}} \leq CN^{-1}$$

olduğundan Eşitsizlik (4.177)

$$\left| R_i^{(4)} \right| \leq CN^{-2} + C \sum_{j=N/2}^{N-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t)h_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}} - t)(h_{j+1} - h_j) \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt$$

biçimine dönüşür ve burada kısmi integrasyon uygulandıktan sonra

$$\begin{aligned} \left| R_i^{(4)} \right| &\leq CN^{-2} + C \sum_{j=N/2}^{N-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left| t - t_{j+\frac{1}{2}} + T_0(t_j - t)h_j + \frac{1}{4}(h_{j+1} - h_j) \right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \\ &\leq CN^{-2} + CN^{-1} \int_{t_{N/2-\frac{1}{2}}}^{t_{N-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt = CN^{-1} \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha t_{N/2-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \alpha^{-1} N^{-1} e^{\frac{\alpha h^{(1)}}{2\varepsilon}} \right) \leq CN^{-2}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Bu eşitsizlik ve (4.176) dikkate alınarak

$$\left\| R^{(4)} \right\|_{\infty,1} \leq CN^{-2} \ln N$$

ifadesi elde edilir.

İkinci olarak (4.172) ifadesi $N+1 \leq i \leq \frac{3N}{2}$ aralığında $\omega_{N,2}$ üzerinde değerlendirilecektir. (4.141) ve (4.142) eşitsizlikleri dikkate alınarak ve yukarıdaki gibi benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i-N}^{i-1} |h_{j+1} - h_j| \left(N^{-1} + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) = \sum_{j=i-N}^{N/2} |h_{j+1} - h_j| \left(N^{-1} + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) \\
& + \sum_{j=N/2+1}^N |h_{j+1} - h_j| \left(N^{-1} + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) + \sum_{j=N+1}^{i-1} |h_{j+1} - h_j| \left(N^{-1} + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) \\
& \leq C |h^{(1)} - h^{(2)}| \left(N^{-1} + \int_{t_{\frac{N-1}{2}}}^{t_{\frac{N+1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{at}{\varepsilon}} dt + \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_{N+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{at}{\varepsilon}} dt \right) \leq CN^{-2} \ln N
\end{aligned} \tag{4.178}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t) \hbar_j - \frac{1}{4} (t_{j+\frac{1}{2}} - t) (h_{j+1} - h_j) \right] (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \\
& \leq C \left\{ N^{-2} + \sum_{j=i-N}^N \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t) \hbar_j - \frac{1}{4} (t_{j+\frac{1}{2}} - t) (h_{j+1} - h_j) \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{at}{\varepsilon}} dt \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t) \hbar_j - \frac{1}{4} (t_{j+\frac{1}{2}} - t) (h_{j+1} - h_j) \right] \frac{t-r}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} dt \right\} \\
& \leq CN^{-2} \ln N
\end{aligned} \tag{4.179}$$

elde edilir.

(4.178) ve (4.179) eşitsizlikleri (4.172)'de yerine yazılırsa

$$|R_i^{(4)}| \leq CN^{-2} \ln N, \quad N+1 \leq i \leq \frac{3N}{2} \tag{4.180}$$

değerlendirmesine ulaşılır.

Şimdi ise (4.172) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci ve dördüncü terimleri $\frac{3N}{2} + 1 \leq i \leq 2N$ aralığında ele alınacaktır. Burada $\bar{I}_2$ üzerinde $|u'(t)|$ düzgün sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)\hbar_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \\
&= \sum_{j=i-N}^N \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)\hbar_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \\
&+ \sum_{j=N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)\hbar_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] (|u'(t)| + |u''(t)|) dt \\
&\leq C \left\{ N^{-2} + \sum_{j=i-N}^N \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)\hbar_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right. \\
&+ \left. \sum_{j=N+1}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}}-t)^2}{2} - T_1(t_j-t)\hbar_j - \frac{1}{4}(t_{j+\frac{1}{2}}-t)(h_{j+1}-h_j) \right] \frac{t-r}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} dt \right\} \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i-N}^{i-1} |h_{j+1}-h_j| \left(N^{-1} + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) = |h^{(1)}-h^{(2)}| \left(N^{-1} + \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_{N+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) \\
&+ |h^{(2)}-h^{(1)}| \left(N^{-1} + \int_{t_{\frac{3N}{2}-\frac{1}{2}}}^{t_{\frac{3N}{2}+\frac{1}{2}}} |u'(t)| dt \right) \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece bu durum için Eşitsizlik (4.172)'den

$$|R_i^{(4)}| \leq CN^{-2}, \quad \frac{3N}{2}+1 \leq i \leq 2N$$

elde edilir. Buradan ve Eşitsizlik (4.180)'den

$$\|R^{(4)}\|_{\infty,2} \leq CN^{-2} \ln N$$

ifadesi sağlanır.

$2N+1 \leq i \leq 3N$ aralığında, $t \geq 3r$ için $|u''(t)|$ düzgün sınırlı olduğundan ve Eşitsizlik (4.172)'den

$$|R_i^{(4)}| \leq C \left(N^{-2} + \sum_{j=i-N}^{2N} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{(t_{j+\frac{1}{2}} - t)^2}{2} - T_1(t_j - t) \hbar_j - \frac{1}{4} (t_{j+\frac{1}{2}} - t)(h_{j+1} - h_j) \right] \frac{t-r}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha(t-r)}{\varepsilon}} dt \right),$$

$2N+1 \leq i \leq 3N$

eşitsizliği yazılır. Böylece

$$\|R^{(4)}\|_{\infty,3} \leq CN^{-2}$$

değerlendirmesi doğrudur.

Son olarak $p \geq 4$ için, Eşitsizlik (4.172)'de yer alan türev içeren ifadeler düzgün sınırlı olduğundan

$$\|R^{(4)}\|_{\infty,p} \leq CN^{-2}, \quad 4 \leq p \leq m$$

değerlendirmesi elde edilir. Yukarıda elde edilen tüm değerlendirmeler dikkate alınarak

$$\|R^{(4)}\|_{\infty,p} \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq p \leq m$$

sonucuna ulaşılır. Buradan ve Eşitsizlik (4.171)'den (4.169)'un doğruluğu gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.17. (4.167)-(4.168) probleminin bir çözümü z_i olsun. Bu durumda

$$\|z\|_{\infty,\omega} \leq C \|R\|_{\infty,\omega} \tag{4.181}$$

değerlendirmesi doğrudur (Yapman ve Amiraliev, 2021).

İspat. $a(t)$ ve $K(t,s)$ 'in düzgünlüğü göz önüne alındığında, yeterince büyük N değerleri için $\bar{a}_i \geq \bar{\alpha} > 0$ yazılabilir. Ayrıca

$$\left| \sum_{j=i-N}^{i-1} \hbar_j \bar{\mathcal{K}}_j z_j \right| \leq \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=i-N}^{i-1} \hbar_j |z_j| \leq \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{i-1} \hbar_j |z_j|$$

$\left(\bar{\mathcal{K}} = \max_{i,j} |\mathcal{K}_{ij}|\right)$ olduğundan ve Lemma 4.3. dikkate alınır (4.167)-(4.168) probleminin çözümü için

$$|z_i| \leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} + (\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{i-1} h_j |z_j|$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu

$$|z_i| \leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} \exp\left((\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{i-1} h_j\right) \leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega} \exp\left((\bar{\alpha})^{-1} \bar{\mathcal{K}} \left(t_{i-1} + \frac{h_i - h_1}{2}\right)\right)$$

değerlendirmesi elde edilir. Buradan (4.181)'in doğruluğu gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü u ve (4.165)-(4.166) fark şemasının çözümü y olsun. Bu durumda Lemma 4.16. ve Lemma 4.17.'ye göre aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Yapman ve Amiraliyev, 2021):

$$\|y - u\|_{\infty, \omega} \leq CN^{-2} \ln N.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.16. ve Lemma 4.17.'den elde edilir.

4.3.2.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örnek ile denetlenmiştir. Bu örnek (4.165)-(4.166) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{\bar{f}_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} y_{i-1} - \sum_{j=i-N}^{i-1} h_j \bar{\mathcal{K}}_{ij} y_j}{\frac{\varepsilon \theta_i}{h_i} + \bar{a}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.182)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad i = -N, \dots, 0, \quad (4.183)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülüyor. Burada $\bar{f}_i$, θ_i , $\bar{\mathcal{K}}_{ij}$ ve $\bar{a}_i$ sırasıyla (4.153), (4.150), (4.164) ve (4.163) denklemlerinde ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Örnek 4.7. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için test edilecektir:

$$\varepsilon u'(t) + u(t) + \int_{1-t}^t su(s)ds = 5t^2 - 2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (4.184)$$

$$u(t) = 5 + t, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (4.185)$$

Bu problemin kesin çözümü bilinmiyor. Hata yaklaşımı ve yakınsama oranının hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Bu amaçla, ω_{N_0} şebekesi düzgün olarak iki parçaya ayrılıp elde edilen şebeke üzerinde başka bir yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}$ çözümü hesaplanacaktır. Burada nümerik sonuçlar iki kat daha ince bir şebeke üzerindeki sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Farklı ε ve N değerleri için maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^N = \max_i |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

biçiminde ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum noktasal hata

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

şeklindedir. Burada $\tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}$ aşağıda belirtilen şebeke üzerindeki yaklaşık çözümlerdir.

$$\tilde{\omega}_{2N} = \left\{ t_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, 2, \dots, 2N \right\}$$

ve

$$t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

şeklindedir. Ayrıca düzgün yakınsama ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranları sırasıyla

$$q_{\varepsilon}^N = \frac{\ln(e_{\varepsilon}^N / e_{\varepsilon}^{2N})}{\ln 2},$$

$$q^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}$$

biçiminde hesaplanmıştır.

Sonuç olarak (4.184)-(4.185) probleminin çözümünden $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 6, 12, 18, 24$ ve $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.182)-(4.183) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.8.'de gösterilmiştir.

Tablo 4.8. (4.184)-(4.185) test probleminin çözümünden elde edilen ve $\bar{\omega}_{N_0}$ şebekesi üzerinde; e_ε^N kesin hatalar, e^N ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve q^N yakınsaklık oranları (Yapman ve Amiraliyev, 2021).

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,029153	0,008607	0,002455	0,000649	0,000167
	1,76	1,81	1,92	1,96	
2^{-6}	0,036476	0,010695	0,003008	0,000795	0,000203
	1,77	1,83	1,92	1,97	
2^{-12}	0,057323	0,016808	0,004695	0,001232	0,000312
	1,77	1,84	1,93	1,98	
2^{-18}	0,061048	0,017653	0,004897	0,001285	0,000323
	1,79	1,85	1,93	1,99	
2^{-24}	0,063525	0,018243	0,005060	0,001319	0,000332
	1,80	1,85	1,94	1,99	
e^N	0,063525	0,018243	0,005060	0,001319	0,000332
q^N	1,80	1,85	1,94	1,99	

Yukarıda tabloda görüldüğü üzere N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı olan q^N 'in yakınsama derecesi monoton bir şekilde artarak ikinci dereceden olmuştur. Böylece Teorem 4.5.'te verilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde bir önceki bölümde ele alınan problemlerin kısa bir incelemesine yer verilip, bu çalışmayla birlikte elde edilen ana sonuçlar vurgulanarak literatüre katkı sağlayabilecek sonraki çalışmalar hakkında tavsiyelerde bulunulacaktır. Bu tez çalışmasında SPGVİDD'leri çözmek için uygun nümerik yöntemlerin araştırılması, tasarlanması ve analizi üzerine yoğunlaşmıştır.

Bu çalışmada SPGVİDD için dört farklı durum ve SPVİDD için ise bir durum ele alınmıştır.

İlk olarak, birinci mertebeden lineer SPGVİDD'in nümerik çözümü için düzgün şebekede üstel katsayılı fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının yakınsaklık ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Yaklaşık çözümün, kesin çözüme ayrık maksimum normda ε pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve birinci mertebeden $O(h)$ yakınsama hızı belirlenmiştir. İki farklı örnek ile nümerik sonuçların teorik olarak sunulan yöntemi desteklediği görülmüştür.

İkinci olarak, birinci mertebeden lineer olmayan SPGVİDD'in nümerik çözümü için düzgün şebekede üstel katsayılı sonlu fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının kararlılık ve yakınsaklık incelemesi yapılmıştır. Yaklaşık çözümün, kesin çözüme ayrık maksimum normda ε 'a göre $O(h)$ kesinlikli birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçlara uygunluğu bir örnek ile desteklenmiştir.

Üçüncü olarak, ilk ele alınan birinci mertebeden lineer SPGVİDD için üstel katsayı bulundurmeyen klasik fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının ε 'a göre düzgün yakınsaklığını sağlaması için uygun parçalı düzgün bir şebeke oluşturulmuştur. Kullanılan bu şebekeyle üstel katsayılı olmayan fark şeması ε 'a göre düzgün yakınsak olmaktadır. Kesin çözümü bilinmeyen bir örnek ele alınmıştır. Burada çift şebeke metodu kullanılmıştır. Yakınsaklık mertebesi deneysel olarak hesaplandığında teorik sonuçlarda olduğu gibi fark şemasının birinci mertebeden bir düzgün yakınsama verdiği görülmüştür.

Dördüncü olarak, birinci mertebeden lineer SPVİDD'in nümerik çözümü için parçalı düzgün şebeke (Shishkin şebeke) üzerinde üstel katsayılı fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının yakınsaklık ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Şemanın ayırık maksimum normda ε 'a göre $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli ikinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Uygulanan metodun etkinliğini göstermek için ele alınan problem iki farklı örnek üzerinde test edilmiştir. Sonuç olarak kullanılan yöntemin teorik bulgularla örtüştüğü gözlemlenmiştir.

Beşinci olarak, ilk ele alınan birinci mertebeden lineer SPGVİDD için parçalı düzgün şebeke (Shishkin şebeke) üzerinde homojen tipli sonlu fark şeması kurulmuştur. Oluşturulan bu fark şemasının kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiştir. Şemanın ayırık maksimum normda ε 'a göre $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli ikinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar kesin çözümü bilinmeyen bir problemle test edilip, bu sonuçların teorik verileri ispatlar nitelikte olduğu anlaşılmıştır. Burada problemin kesin çözümüne ulaşamadığından çift şebeke metodu kullanılmıştır.

Bu beş durumda da fark şemaları kurulurken; üçüncü bölümünde açıkça ifade edilen kalan terimi integral şeklinde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerden yararlanılmıştır. Ayrıca her bir problem için sonuçlar Maple 10 programı yardımıyla elde edilip, farklı ε ve N değerleri için maksimum hata sonuçları ve yakınsama hızları tablolarda sunulmuştur.

Sonuç ve tavsiye olarak; bu çalışmada ele alınan birinci mertebeden SPGVİDD'ler için uygulanan sonlu fark metodu oldukça etkili ve ekonomiktir. Literatür taraması yapıldığında bu tür problemlerin henüz yaygın bir şekilde çalışılmadığı anlaşılmıştır. Bu bakımdan bu tez çalışması araştırmacılara katkı sağlayabilecek niteliktedir. Bu çalışmadan faydalanılarak ikinci mertebeden SPGVİDD, birinci ve ikinci mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler, lineer olmayan ve daha karmaşık başlangıç şartları içeren SPVİDD ve SPGVİDD'ler üzerine yoğunlaşılabilir. Ayrıca SPGVİDD'lerin nümerik çözümleri için bu tez çalışmasında uygulanan sonlu fark yöntemleri dışında araştırmacılar farklı nümerik metotları da uygulayabilirler.

KAYNAKLAR

- Aigo M. (2013) "On the numerical approximation of Volterra integral equations of the second kind using quadrature rules", *International Journal of Advanced Scientific and Technological Research*, 1, 558-564.
- Aksoy, Y. (1998) "İntegral denklemler, Cilt I.", *Y.T.Ü. Yayınları*, İstanbul, 13-66.
- Amirali, G. and Amirali, İ. (2018) "Nümerik Analiz (Teori ve Uygulamalarla)", *Seçkin Yayıncılık*, Ankara.
- Amirali, G. and Duru, H. (2002) "Nümerik Analiz", *Pegem A Yayıncılık*, Ankara.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2018) "Uniform convergence results for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation", *Journal of Mathematical Analysis*, 9(6), 55-64.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2020) "Fitted second order numerical method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation", *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 27(1), 71-88.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2021) "A numerical method for a second order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation", *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 37-48.
- Amiraliyev, G. M. and Erdoğan, F. (2007) "Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations", *Computers and Mathematics with Applications*, 53(8), 1251-1259.
- Amiraliyev, G. M. and Mamedov, Y. D. (1995) "Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations", *Turkish Journal of Mathematics*, 19, 207-222.
- Amiraliyev, G. M. and Şevgin S. (2006) "Uniform difference method for singularly perturbed Volterra integro-differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 179(2), 731-741.
- Amiraliyev, G. M. and Yapman, Ö., (2019) "On the Volterra delay-integro-differential equation with layer behavior and its numerical solution", *Miskolc Mathematical Notes*, 20(1), 75-87.
- Amiraliyev, G. M., Yapman, Ö. and Kudu, M. (2019) "A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(5), 1417-1429.
- Amiraliyev, G. M. and Yilmaz, B. (2014) "Fitted difference method for a singularly perturbed initial value problem", *International Journal of Mathematics and Computation*, 22(1), 1-10.

- Angell, J. S. and Olmstead, W. E. (1985) "Singular perturbation analysis of an integrodifferential equation modelling filament stretching", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 36, 487-490.
- Angell, J. S. and Olmstead, W. E. (1985) "Singularly perturbed Volterra integral equations", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(1), 1-14.
- Angell, J. S. and Olmstead, W. E. (1985) "Singularly perturbed Volterra integral equations II", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(6), 1150-1162.
- Bai, C. and Ma, J. (2005) "Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions to boundary value problems of second-order delay differential equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 301(2), 457-476.
- Bakhvalov, N. S. (1969) "On optimization of methods for solving boundary-value problems in the presence of a boundary layer", *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 9(4), 841-859.
- Bellen, A. and Zennaro, M. (2003) "Numerical Methods for Delay Differential Equations", *Oxford University Press*, New York.
- Bellman, R. and Cooke, K. L. (1963) "Differential Difference Equations", *Academic Press*, New York.
- Bhalekar, S. and Patade, J. (2016) "A novel third order numerical method for solving Volterra integro-differential equations", *arXiv Preprint*, 1604.08863.
- Bijura, A. M. (2002) "Singularly perturbed Volterra integro-differential equations", *Quaestiones Mathematicae*, 25, 229-248.
- Bobodzhyanov, A. A. and Safonov, V. F. (2004) "Singularly perturbed integro-differential equations with diagonal degeneration of the kernel in reverse time", *Differential Equations*, 40, 120-127.
- Boglaev, I. (2004) "Uniform numerical methods on arbitrary meshes for singularly perturbed problems with discontinuous data", *Applied Mathematics and Computation*, 154(3), 815-833.
- Doolan, E. R., Miller, J. J. H. and Schilders, W. H. A. (1980) "Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers", *Boole Press*, Dublin.
- Driver, R. D. (1977) "Ordinary and Delay Differential Equations", *Springer-Verlag*, New York.
- Durmaz, M. E. and Amiraliyev, G. M., (2021) "A Robust Numerical Method for a Singularly Perturbed Fredholm Integro-Differential Equation", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(24), 1-17.
- El'sgol'ts, L. E. (1966) "Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments", *Holden-Day Inc.*, San Francisco.

- El'sgol'ts, L. E. and Norkin, S. B. (1973) "Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments", **Academic Press**, New York.
- Enright, W. H. and Hayes, W. B., (2007) "Robust and reliable defect control for Runge-Kutta methods", **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, 33(1), 1-19.
- Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E. and Shishkin, G. I. (2000) "Robust computational techniques for boundary layers", **Chapman Hall/CRC**, New York.
- Fröhner, A. and Roos, H. G. (2001) "The ε -uniform convergence of a defect correction method on a Shishkin mesh", **Applied Numerical Mathematics**, 37(1-2), 79-94.
- Hairer, E., Norsett, S. P. and Wanner, G. (2008) "Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems", **Springer-Verlag**, Berlin Heidelberg.
- He, D. and Xu, L. (2009) "Integrodifferential inequality for stability of singularly perturbed impulsive delay integrodifferential equations", **Journal of Inequalities and Applications**, 2009 ID 369185, 1-11.
- Horvat, V. and Rogina, M. (2002) "Tension spline collocation methods for singularly perturbed Volterra integro-differential and Volterra integral equations", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 140, 381-402.
- Iragi, B. C. and Munyakazi J. B. (2018) "New parameter-uniform discretisations of singularly perturbed Volterra integro-differential equations", **Applied Mathematics and Information Sciences**, 12(3), 517-527.
- Iragi, B. C. and Munyakazi J. B. (2020) "A uniformly convergent numerical method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation", **International Journal of Computer Mathematics**, 97(4), 759-771.
- Isaacson, E. and Keller, B. H. (1994) "Analysis of Numerical Methods", **Dover Publications Inc.**, New York.
- Jiang, D. (2002) "Multiple positive solutions for boundary value problems of second-order delay differential equations", **Applied Mathematics Letters**, 15(5), 575-583.
- Jordan, G. S. (1978) "A nonlinear singularly perturbed Volterra integrodifferential equation of nonconvolution type", **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics**, 80(3-4), 235-247.
- Jordan, G. S. (1979) "Some nonlinear singularly perturbed Volterra integrodifferential equations", In: Londen, SO., Staffans, O.J. (eds) Volterra Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol 737. **Springer**, Berlin, Heidelberg.

- Kadalbajoo, M. K. and Patidar, K. C. (2002) "A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations", ***Applied Mathematics and Computation***, 130(2), 457-510.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V. (2009) "Numerical solution of singularly perturbed convection-diffusion problem using parameter uniform B-spline collocation method", ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 355(1), 439-452.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V. (2010) "A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems", ***Applied Mathematics and Computation***, 217(8), 3641-3716.
- Kauthen, J. P. (1993) "Implicit Runge-Kutta methods for some integrodifferential-algebraic equations", ***Applied Numerical Mathematics***, 13(1-3), 125-134.
- Kauthen, J. P. (1995) "Implicit Runge-Kutta methods for singularly perturbed integro-differential systems", ***Applied Numerical Mathematics***, 18(1-3), 201-210.
- Kauthen, J. P. (1997) "A survey of singularly perturbed Volterra equations", ***Applied Numerical Mathematics***, 24(2-3), 95-114.
- Kevorkian J. K. and Cole J. D. (1996) "Multiple Scale and Singular Perturbation Methods", ***Springer-Verlag***, New York.
- Khater, A. H., Shamardan, A. B., Callebaut, D. K. and Sakran, M. R. A. (2007) "Numerical solutions of integral and integro-differential equations using Legendre polynomials", ***Numerical Algorithms***, 46, 195–218.
- Krasnov, M., Kiselev, A. and Makarenko, G. (1971) "Problems and exercises in integral equations", ***Mir Publishers***, Moscow.
- Kuang, Y. (1993) "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics", ***Academic Press Inc.***, London.
- Kudu, M., Amirali, I. and Amiraliyev, G. M. (2016) "A finite-difference method for a singularly perturbed delay integro-differential equation", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 308, 379-390.
- Lee, J. W. and O'Regan, D. (1991) "Existence results for differential delay equations-II", ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications***, 17(7), 683-702.
- Lee, J. W. and O'Regan, D. (1993) "Existence results for differential delay equations, I", ***Journal of Differential Equations***, 102(2), 342-359.
- Lodge, A. S., McLeod, J. B. and Nohel, J. A. (1978) "A nonlinear singularly perturbed Volterra integrodifferential equation occurring in polymer rheology", ***Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics***, 80(1-2), 99-137.
- Miller, J. J. H. O'Riordan, E. and Shishkin, G. I. (2012) "Fitted numerical methods for singular perturbation problems: Error estimates in the maximum norm for

- linear problems in one and two dimensions (Rev. Ed.),” **World Scientific**, Singapore.
- Mishra, H. K. and Saini, S. (2014) “Various numerical methods for singularly perturbed boundary value problems”, **American Journal of Applied Mathematics and Statistics**, 2(3), 129-142.
- Nayfeh, A. H. (1993) “Introduction to perturbation techniques”, **Wiley**, New York.
- Norkin, S. B. (1972) “Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument”, **Translations of Mathematical Monographs Vol 31, American Mathematical Society**, Rhode Island.
- O’Malley, R. E. (2013) “Singular perturbations methods for ordinary differential equations”, **Springer**, New York.
- Prandtl, L. (1904) “Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung”, **III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, in Verhandlungen des**, Heidelberg, 484-491.
- Raffoul, Y. and Rai, H. (2016) “Uniform stability in nonlinear infinite delay Volterra integro-differential equations using Lyapunov functionals”, **Nonautonomous Dynamical Systems**, 3(1), 14-23.
- Ramos, J. I. (2008) “Exponential techniques and implicit Runge-Kutta methods for singularly-perturbed Volterra integro-differential equations”, **Neural, Parallel & Scientific Computations**, 16(3), 387–404.
- Roos, H. G., Stynes, M. and Tobiska, L. (2014) “Numerical methods for singularly perturbed differential equations: Convection-diffusion and flow problems”, **Springer-Verlag**, Berlin.
- Saadati, R., Raftari, B., Adibi, H., Vaezpour, S. M. and Shakeri, S. (2008) “A comparison between the variational iteration method and trapezoidal rule for solving linear integro-differential equations”, **World Applied Sciences Journal**, 4(3), 321-325.
- Salama, A. A. and Bakr, S. A. (2007) “Difference schemes of exponential type for singularly perturbed Volterra integro-differential problems”, **Applied Mathematical Modelling**, 31(5), 866-879.
- Salama, A. A. and Evans, D. J. (2001) “Fourth order scheme of exponential type for singularly perturbed Volterra integro-differential equations”, **International Journal of Computer Mathematics**, 77(1), 153-164.
- Samarskii, A. A. (2001) “The Theory of Difference Schemes”, **Marcel Dekker, Inc.**, New York.
- Selvakumar, K. (2014) “A computational method for solving singular perturbation problems using exponentially fitted finite difference schemes”, **Applied Mathematics and Computation**, 66(2-3), 277-292.

- Shishkin, G. I. and Shishkina, L. P. (2008) “Difference methods for singular perturbation problems (1st ed.)”, **Chapman and Hall/CRC**, New York.
- Shakourifar, M. and Enright, W. H. (2011) “Reliable approximate solution of systems of Volterra integro-differential equations with time-dependent delays”, **SIAM Journal on Scientific Computing**, 33(3), 1134-1158.
- Shakourifar, M. and Enright, W. H. (2012) “Superconvergent interpolants for collocation methods applied to Volterra integro-differential equations with delay”, **BIT Numerical Mathematics**, 52(3), 725-740.
- Skellam, J. G. (1991) “Random dispersal in theoretical populations”, **Bulletin of Mathematical Biology**, 53, 135-165.
- Stynes, M. and Tobiska, L. (1998) “A finite difference analysis of a streamline diffusion method on a Shishkin mesh”, **Numerical Algorithms**, 18, 337–360.
- Şevgin, S. (2014) “Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation”, **Advances in Difference Equations**, 171, 1-15.
- Wu, S. and Gan, S. (2009) “Errors of linear multistep methods for singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equations”, **Mathematics and Computers in Simulation**, 79(10), 3148-3159.
- Yapman, Ö., Amiraliev, G. M. and Amirali, I. (2019) “Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 355, 301-309.
- Yapman, Ö. and Amiraliev, G. M., (2020) “A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation”, **International Journal of Computer Mathematics**, 97(6), 1293-1302.
- Yapman, Ö., and Amiraliev, G. M., (2021) “Convergence analysis of the homogeneous second order difference method for a singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation”, **Chaos, Solitons and Fractals**, 150, 111100, 1-11.
- Zhao, Y. and Zhao, F. (2016) “The analytical solution of parabolic Volterra integro-differential equations in the infinite domain”, **Entropy**, 18(10), 344, 1-14.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

- Amirali, G. and Yapman, Ö. (2016) “Convergence analysis of difference method for Volterra delay-integro-differential equation”, **2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA2016)**, Kırşehir, 12-15 July, 228-228.
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G. M. and Amirali, İ. (2017) “A fitted numerical method for a quasilinear singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation”, **International Conference on Differential and Difference Equations & Applications 2017**, Amadora, Portugal, 05-09 June, 160-160.
- Amirali, G. and Yapman, Ö. (2017) “Fitted difference method for singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation”, **Caucasian Mathematics Conference II (CMC II)**, Van, 22-24 August, 31-32.
- Yapman, Ö. and Amirali, G. (2018) “Second order numerical method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation”, **7th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM18**, İstanbul, 20-24 June, 305-305.
- Amiraliyev, G. M., Yapman, Ö. and Kudu, M. (2019) “A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer”, **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, 48(5), 1417-1429.
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G. M. and Amirali, İ. (2019) “Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 355, 301-309.
- Amiraliyev, G. M. and Yapman, Ö. (2019) “On the Volterra delay-integro-differential equation with layer behavior and its numerical solution”, **Miskolc Mathematical Notes**, 20(1), 75-87.
- Yapman, Ö. and Amiraliyev, G. M. (2020) “A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation”, **International Journal of Computer Mathematics**, 97(6), 1293-1302.
- Yapman, Ö. and Amiraliyev, G. M. (2021) “Convergence analysis of the homogeneous second order difference method for a singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation”, **Chaos, Solitons and Fractals**, 150, 111100, 1-11.