

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN
BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Matematik Müh. Arzu TURAN

106285

F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

106285

**Tez Danışmanı
Jüri Üyeleri**

**: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU
: Prof. Tahir ŞİŞMAN
: Prof. Dr. Akın TAŞDİZEN**

M. Bayramoğlu
T. Şişman
A. Taşdizen

İSTANBUL, 2001

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. WEYL-LİMİT ÇEMBERİ ve WEYL-LİMİT NOKTASI.....	7
3. WEYL TITCHMARSH FONKSİYONUNUN MEROMORF OLDUĞU HALDE SPEKTRAL AÇILIM FORMÜLÜ ve PARSEVAL EŞİTLİĞİ.....	21
4. BÜTÜN REEL EKSEN HALİ.....	43
5. WEYL-LİMİT NOKTASINI GEREKTİREN KOŞUL	48
6. SONUÇ.....	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ.....	64

ÖNSÖZ

Bu tezin gerçekleşmesinde onunla çalışmaktan büyük zevk aldığım, her türlü yardımını benden esirgemeyen saygıdeğer hocam; Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU'na teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Ayrıca emeklerini hiçbirzaman ödeyemeceğim biricik anneme ve babama, son olarak da değerli arkadaşlarım Dr. Yasemen UÇAN ve Yük.Müh Ramazan TEKERCİOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2001

Arzu TURAN



ÖZET

Tez çalışmasında $L^2[0, \infty)$ Hilbert uzayında

$$-y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ve

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

koşulu ile oluşturulan singular sınır değer probleminin Weyl-Titchmarsh fonksiyonun meromorf olduğu durumda spektral özellikleri incelenmiştir. Bunun yanısıra sınır değer probleminin $L^2[0, \infty)$ uzayında esaslı kendine eş operatör oluşturduğu gösterilmiştir. Ayrıca bulunan sonuçlar ısı denkleminin çözümüne uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, özfonksiyon, meromorf fonksiyon, Green fonksiyonu, esaslı kendine eş operatör.



ABSTRACT

In this thesis, in Hilbert space $L^2[0, \infty)$ investigated spectral property of boundary value problem associated with singular Sturm-Liouville differential expression,

$$-y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty$$

with boundary conditions

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

in the case that Weyl-Titchmarsh function is meromorphic. Moreover it was showed in $L^2[0, \infty)$ space that boundary value problem formed essentially self-adjoint operator. In addition this, results which obtained were applied to solution of the heat equation.

Keywords: Eigenvalue, eigenfunction, meromorphic function, Green function, essentially self-adjoint operator.

1. GİRİŞ

Matematiğin çok sayıda kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin çözümünde Fourier yöntemi kullanılabilir. Çoğu kez bu yöntemle problemin incelenmesi Sturm-Liouville denkleminin spektral özelliklerinin incelenmesine indirgenir. Diğer yandan Sturm-Liouville denkleminin incelenmesi pür matematiğin problemi olarak önem taşımaktadır. Sturm-Liouville denklemi denildiğinde ikinci mertebeden,

$$l(y) \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y \quad a < x < b \quad (1.1)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem anlaşılr. (1.1) ile tanımlanan $l(y)$ diferansiyel ifadesine (a,b) de Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi denir. Burada, $q(x)$ sonlu veya sonsuz aralıkta tanımlı reel fonksiyon, λ ise kompleks parametredir. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığı sonlu ve $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise o zaman $l(y)$ Sturm-Liouville ifadesine regular, aksi takdirde ise singular Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi denir. $l(y)$ Sturm-Liouville ifadesi, regular iken (1.1)denklemini ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (1.2)$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0 \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad (1.3)$$

sınır koşullarına birlikte Sturm-Liouville sistemi denir. λ sayı olmak üzere (1.1)-(1.3) Sturm-Liouville sistemini sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonu varsa o zaman λ ya sistemin özdeğeri, $y(x)$ e ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir. (1.1)-(1.3) sisteminin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının bulunmasına ise regular Sturm-Liouville problemi denir. Regular Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri katlılığı bir'e eşit olan reel

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty)$$

sonsuz sayılar dizisinden ibarettir (Levitan ve Sargsyan, 1991). Bu özdeğerlere karşılık gelen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

özfonksiyonları ikişer diktirler,yani

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad k \neq j \text{ iken}$$

Eğer $\varphi_k(x)$ yerine,

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx}}$$

alınırsa o zaman,

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$$

dizisi (1.1)-(1.3) Sturm-Liouville probleminin ortonormalize edilmiş, yani

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{jk}, \quad \text{koşulunu sağlayan özfonksiyonları olur. Burada } \delta_{jk} \text{ Kronecker}$$

sembolüdür.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ sayılarına (1.1)-(1.3) probleminin spektrumu da denir. Bilindiği gibi (Levitan ve Sargsyan, 1991) (1.1)-(1.3) probleminin özfonksiyonları, $L^2(a, b)$ Hilbert uzayında tam sistem oluşturur. Yani $f(x) \in L^2(a, b)$ iken,

$$\int_a^b f(x) \psi_k(x) dx = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \dots$$

eşitlikleri ancak ve ancak $f(x)=0$ halinde sağlanır.

$\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminin tam sistem olması, aşağıdaki teoremlerin herbirine denktir.

Teorem 1.1: $f(x) \in L^2(a, b)$ olsun. O zaman

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \quad (1.4)$$

açılım formülü doğrudur.

Bu açılım formülüne (1.1)-(1.3) problemi için spektral açılım formülü denir. Burada c_k , Fourier katsayıları olmak üzere,

$$c_k = \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx$$

formülü ile tanımlanır. (1.4) eşitliğinin sağ tarafında seri $f(x)$ fonksiyonuna $L^2(a, b)$ nin normu anlamında yakınsar yani,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(x) \right]^2 dx = 0$$

Teorem 1.2: $f(x) \in L^2(a, b)$ olsun. O zaman,

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad c_k = \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx \quad (1.5)$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu sürekli 2. türeve sahipse ve (1.2), (1.3) sınır koşullarını sağlıyorsa o zaman (1.4) ün sağ tarafındaki seri $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Yukarıda söz ettiğimiz gibi (1.4) spektral açılım formülünü yardımıyla bazı kısmi türevli diferansiyel denklemler için, örneğin

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) \quad (1.6)$$

$$a \leq x \leq b, t > 0$$

$$u(a, t) \cos \alpha + u_x'(a, t) \sin \alpha = 0 \quad (1.7)$$

$$u(b, t) \cos \beta + u_x'(b, t) \sin \beta = 0 \quad (1.8)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.9)$$

ısı denklemi için sınır değer problemi veya

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) \quad (1.10)$$

$$a \leq x \leq b, t > 0$$

$$u(a, t) \cos \alpha + u_x'(a, t) \sin \alpha = 0 \quad (1.7)$$

$$u(b, t) \cos \beta + u_x'(b, t) \sin \beta = 0 \quad (1.8)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.9)$$

$$u_t'(x, 0) = \psi(x) \quad (1.11)$$

telin titreşim denklemi için sınır değer problemleri çözülebilir.

Eğer (1.6)-(1.9) veya (1.10)-(1.11) problemlerinde x değişkeni $[0, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıklarında değişiyor ise o zaman singular Sturm-Liouville problemini incelemek gerekir. Bu durumda problemin çözülebilmesi için daha doğrusu Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarının tam ortonormal sistem oluşturması için singular uç noktasında da koşul vermek gerekir.(Weyl çember durumunda)

Biz bu çalışmamızda (1.1) in $[0, \infty)$ aralığında verildiğini ,sıfır noktasında ise

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (1.2')$$

koşulunu sağlandığını varsayacağız.

Böylece biz ,

$$l(y) = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad 0 < x < \infty \quad (1.1)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (1.2')$$

sınır değer probleminin $L^2(0, \infty)$ uzayında spektral özelliklerini inceleyeceğiz. Buna dayanarak bütün eksende verilmiş Sturm-Liouville probleminin bazı özellikleri gösterilecektir.

Bu problem farklı yöntemlerle incelenebilir:

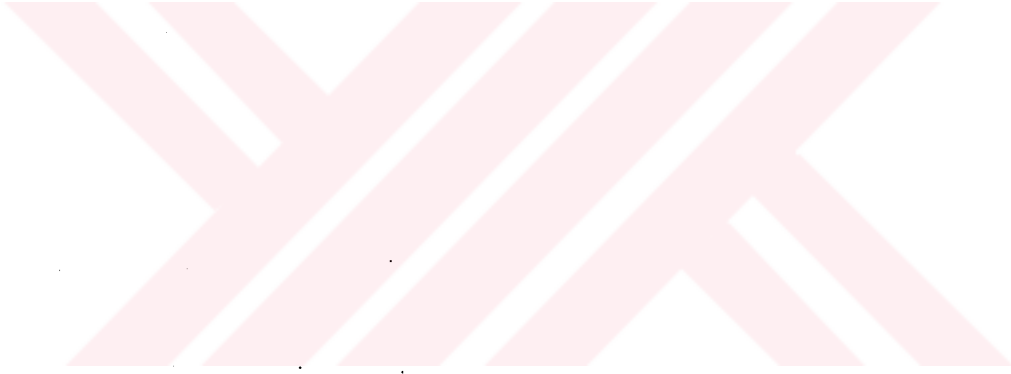
1. Weyl-Titchmarsh yöntemi: Bu yöntem kompleks değişkenli fonksiyonların kontur integral teorisine dayanır (Weyl,1910;Titchmarsh,1962).

2. Kendine eş operatörlerin spektral teorisi: Bu yöntem ilk olarak Kodaira ve M.G. Krein tarafından kullanılmıştır (Kodaira,1949;Krein,1950).

3.B.Levitan,N.Levinson,K.Yosida yöntemi: Bu yöntem $[0, b]$ sonlu aralığında verilmiş regular kendine eş Sturm-Liouville probleminden yola çıkarak $b \rightarrow \infty$ iken limite geçmekle kullanılan yöntemdir (Coddington ve Levinson,1955; Yosida,1960; Levitan ve Sargsyan,1991).

Biz Weyl-Titchmarsh yöntemini kullanacağız. Ve (1.1)-(1.2') probleminin bir özel hali ile yetineceğiz .Daha doğrusu ileride tanımlayacağımız Weyl-Titchmarsh fonksiyonun meromorf olduğu halde çalışmaya sürdüreceğiz.

Ayrıca Weyl limit noktası halinin sağlanması için $q(x)$ fonksiyonu üzerine yeterli bir koşul göstereceğiz. En sonda da Weyl limit noktasına ait örnek vereceğiz ve açılım formülünün bir taraftan sonsuz çubuk için ısı denkleminin çözümünde uygulanmasını göstereceğiz.



2. WEYL LİMİT –ÇEMBERİ ve WEYL LİMİT- NOKTASI

Önemli örneklerin birçoğunda $q(x)$ fonksiyonu tanım aralığının, bir veya her iki uç noktasında tekilliğe sahiptir. Bazen de tanım aralığı bir taraftan veya her iki taraftan sonsuza eşit olur . Girişte söylediğimiz gibi biz $[0, \infty)$ aralığında verilmiş Sturm-Liouville problemin bir özel durumda, daha doğrusu Weyl-Titchmarsh fonksiyonunun meromorf olduğu hali inceleyeceğiz.

Sözü edilen $[0, \infty)$ aralığında tanımlı $q(x)$ fonksiyonun her bir sonlu aralıkta sürekli olduğunu varsayacağız.

Eğer $F(x)$ ve $G(x)$ sırasıyla,

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\}F = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \{\lambda' - q(x)\}G = 0$$

diferansiyel denklemini sağlıyorsa, o zaman kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda) \int_a^b F(x)G(x)dx &= \int_a^b [F(x)\{q(x)G(x) - G''(x)\} - G(x)\{q(x)F(x) - F''(x)\}]dx \\ &= - \int_a^b \{F(x)G''(x) - G(x)F''(x)\}dx = W_a(F, G) - W_b(F, G) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir. Burada $W(F, G)$ fonksiyonun Wronski determinantını (Wronskiyanını) gösterir.

Eğer $\lambda = \mu + iv, \lambda' = \bar{\lambda} = \mu - iv, a = 0$ ve $G = \bar{F}$ ise o zaman (2.2) den,

$$2v \int_0^b |F(x)|^2 dx = iW_0(F, \bar{F}) - iW_b(F, \bar{F}) \quad (2.3)$$

elde edilir.

Şimdi (2.1) denkleminin $\phi(x) = \phi(x, \lambda)$, $\theta(x) = \theta(x, \lambda)$ çözümleri,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \sin \alpha, & \phi'(0) &= -\cos \alpha \\ \theta(0) &= \cos \alpha, & \theta'(0) &= \sin \alpha\end{aligned}\tag{2.4}$$

koşullarından tanımlansın. Burada α , $[0, \pi]$ ye ait reel bir sayıdır. O zaman, $W_x(\phi, \theta)$ wronskiyanı,

$$W_x(\phi, \theta) = W_0(\phi, \theta) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

olur.

(2.1) in $\phi(x)$ çözümü hariç genel çözümü $\theta(x) + l\phi(x)$ şeklindedir. $x=b$ noktasında aşağıdaki

$$\{\theta(b) + l\phi(b)\} \cos \beta + \{\theta'(b) + l\phi'(b)\} \sin \beta = 0,$$

sınır koşulunu sağlayan bu çözümü gözönüne alalım. Burada β , $[0, \pi]$ ye ait reel bir sayıdır. Bu denklemden,

$$l = l(\lambda) = -\frac{\theta(b) \cot \beta + \theta'(b)}{\phi(b) \cot \beta + \phi'(b)}\tag{2.5}$$

bulunur.

Her b için $\cot \beta$ değişirken l kompleks düzlemde C_b adı verilen bir çember belirtir. $\cot \beta$ yerine z kompleks değişkeni konursa,

$$l = l(\lambda, z) = -\frac{\theta(b)z + \theta'(b)}{\phi(b)z + \phi'(b)}$$

elde edilir.

Burada $l = \infty$ iken $z = -\phi'(b)/\phi(b)$ dir. O halde kesir lineer dönüşümün bilinen özelliğinden (Conway, 1978), C_b nin merkezi z 'nin eşleniğine karşılık gelir.

$\bar{z} = -\bar{\phi}'(b)/\bar{\phi}(b)$, l de yerine konursa;

$$l = -\frac{W_b(\theta, \bar{\phi})}{W_b(\phi, \bar{\phi})}$$

bulunur. Ayrıca ,

$$im\left\{-\frac{\phi'(b)}{\phi(b)}\right\} = \frac{1}{2}i\left\{\frac{\phi'(b)}{\phi(b)} - \frac{\bar{\phi}'(b)}{\bar{\phi}(b)}\right\} = -\frac{1}{2}i\frac{W_b(\phi, \bar{\phi}) - W_o(\phi, \bar{\phi})}{|\phi(b)|^2} = -\frac{1}{2}i\frac{W_b(\phi, \bar{\phi})}{|\phi(b)|^2}$$

olduğundan $F = \phi$ iken v ile aynı işarete sahiptir. Burada biz $W_o(\phi, \bar{\phi}) = 0$ olduğunu gözönünde bulundurduk.

Eğer $v > 0$ ise C_b çemberinin dışı z düzleminin üst yarı düzlemine karşılık gelir. $-\theta'(b)/\phi'(b)$, C_b çemberi üzerinde ($z=0$ için) olduğundan dolayı C_b 'nin yarıçapı r_b ,

$$r_b = \frac{\left|\frac{\theta'(b)}{\phi'(b)} - \frac{W_b(\theta, \bar{\phi})}{W_b(\phi, \bar{\phi})}\right|}{\left|\frac{W_b(\theta, \phi)}{W_b(\phi, \phi)}\right|} = \frac{1}{2v \int_0^b |\phi(x)|^2 dx} \quad (2.6)$$

dir. Eğer $imz < 0$ veya $i(z - \bar{z}) > 0$ ise;

Yani,

$$i\left\{-\frac{l\phi'(b) + \theta'(b)}{l\phi(b) + \theta(b)} + \frac{\bar{l}\bar{\phi}'(b) + \bar{\theta}'(b)}{\bar{l}\bar{\phi}(b) + \bar{\theta}(b)}\right\} > 0,$$

$$i\left\{l^2 W_b(\phi, \bar{\phi}) + l W_b(\phi, \bar{\theta}) + \bar{l} W_b(\theta, \bar{\phi}) + W_b(\theta, \bar{\theta})\right\} > 0,$$

$$iW_b(\theta + l\phi, \bar{\theta} + \bar{l}\bar{\phi}) > 0,$$

$$2\nu \int_0^b |\theta + l\phi|^2 dx < iW_0(\theta + l\phi, \bar{\theta} + \bar{l}\bar{\phi}),$$

dır.

$W_0(\phi, \theta) = 1, W_0(\phi, \bar{\phi}) = 0$,diğer ifadeler de sıfır olduğundan,

$$W_0(\theta + l\phi, \bar{\theta} + \bar{l}\bar{\phi}) = l - \bar{l} = 2i\,iml$$

dir. Eğer $\nu > 0$ ve

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2 dx < -\frac{iml}{\nu} \quad (2.7)$$

ise , l , C_b 'nin içindedir. Aynı sonuç $\nu < 0$ için de elde edilir. Her durumda iml ' nin işareti ν 'nün işaretinin tersidir.

Buradan gözüktüğü gibi l, C_b nin içindeyse ve $0 < b' < b$ ise, o zaman,

$$\int_0^{b'} |\theta + l\phi|^2 dx < \int_0^b |\theta + l\phi|^2 dx < -\frac{iml}{\nu}$$

dir. O halde $l, C_{b'}$ nin de içindedir. Dolayısıyla eğer $b' < b$ ise $C_{b'}$, C_b 'yi içine alır.

Buradan anlaşıldığı gibi $b \rightarrow \infty$ iken C_b çemberi limit noktası veya limit çemberine yakınsar. Eğer $m = m(\lambda)$, limit noktası ya da limit çemberinde herhangi bir nokta ise b nin tüm değerleri için,

$$\int_0^b |\theta + m\phi|^2 dx \leq -\frac{im\,m}{\nu} \quad (2.8)$$

yazılır. Buradan,

$$\int_0^{\infty} |\theta + m\phi|^2 dx \leq -\frac{im m}{\nu} \quad (2.9)$$

dır.

Açıkça görüldüğü gibi reel değerlerden farklı her λ değeri için (2.1) denklemi aşağıdaki çözüme sahiptir.

$$\psi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda)\phi(x, \lambda)$$

ve çözüm $L^2(0, \infty)$ uzayına aittir. Limit çember durumunda $r_b, b \rightarrow \infty$ iken pozitif limite sahiptir. Buradan ve (2.6)'dan $\phi(x)$ fonksiyonun $L^2(0, \infty)$ 'a ait olduğu görülür. Bu durumda (2.1)'in her çözümü $L^2(0, \infty)$ 'a aittir.

Görüldüğü gibi herhangi bir β için $l = l(\lambda)$, λ 'nın analitik fonksiyonudur. Aslında reel ekseninde kutup noktaları hariç holomorf fonksiyondur. $l(\lambda)$ nın kutup noktaları da

$$\phi(b, \lambda) \cos \beta + \phi'(b, \lambda) \sin \beta$$

ifadesini sıfır yapan değerlerdir.

Ayrıca, $C_b (\nu > 0)$ çemberinde;

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2 dx = -\frac{iml}{\nu} \leq \frac{|l|}{\nu}$$

$$\geq \frac{1}{2} |l|^2 \int_0^b |\phi|^2 dx - \int_0^b |\theta|^2 dx$$

dir.

Bunu ispatlayalım.

$$|\theta + l\phi|^2 = (\theta + l\phi)(\bar{\theta} + \bar{l}\bar{\phi}) = |\theta|^2 + \theta\bar{l}\bar{\phi} + \bar{\theta}l\phi + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 + 2\operatorname{Re}(\theta\bar{l}\bar{\phi}) + |l\phi|^2$$

$$\geq |\theta|^2 - 2|\theta\bar{l}\bar{\phi}| + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 - 2|\theta||l\phi| + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 - 2|\theta|^2 - \frac{|l\phi|^2}{2} + |l\phi|^2$$

$$= \frac{|l\phi|^2}{2} - |\theta|^2$$

$$|\theta + l\phi|^2 \geq \frac{|l\phi|^2}{2} - |\theta|^2.$$

Buna göre,

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2 dx \geq \frac{1}{2}|l|^2 \int_0^b |\phi|^2 dx - \int_0^b |\theta|^2 dx$$

dir.

Buradan $|l|$ çözülürse,

$$|l| \leq \frac{1}{\sqrt{\int_0^b |\phi|^2 dx}} + \left\{ \frac{2 \int_0^b |\theta|^2 dx}{\int_0^b |\phi|^2 dx} + \frac{1}{\sqrt{\left(\int_0^b |\phi|^2 dx \right)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Fakat λ değeri için yukarıdaki tartışma C_b çemberleriyle kaplı I düzlem bölgesinin, b artarken daralacağını gösterir. Böylece $I(\lambda)$, λ düzleminin üst veya alt yarısına ait her bir sınırlı bölgesinde $b \rightarrow \infty$ iken limite yakınsar. O halde limit noktası durumunda, limiti olan $m(\lambda)$ her iki bölgede de analitiktir. Limit çemberi durumunda, limit çemberi üzerindeki $m(\lambda)$ noktaları $b \rightarrow \infty$ iken $I(\lambda, b, \beta)$ nın limiti şeklinde yazılabilir. Burada β , b nin uygun bir fonksiyonudur. Limit noktası durumuna Weyl noktası, limit çemberi durumuna ise Weyl çemberi denir. $m(\lambda)$ fonksiyonuna ise Weyl-Titchmarsh fonksiyonu denir.

$v \rightarrow 0$ iken yukarıdaki ifadenin sağ tarafı herhangi sabit b değeri için $O(1/v)$ mertebesinde olduğu için $m(\lambda) = O(1/v)$ olduğu görülmektedir. Aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.1:

Reel olmayan herhangi λ ve λ' sayıları için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W\{\psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} = 0 \quad (2.10)$$

dir.

İspat:

$\theta(x, \lambda) + I(\lambda)\phi(x, \lambda)$ ifadesi $x = b$ 'de λ 'dan bağımsız olarak sınır koşullarını sağlar.

$$W_b\{\theta(x, \lambda) + I(\lambda)\phi(x, \lambda), \theta(x, \lambda') + I(\lambda')\phi(x, \lambda')\} = 0,$$

$$W_b[\psi(x, \lambda) + \{I(\lambda) - m(\lambda)\}\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') + \{I(\lambda') - m(\lambda')\}\phi(x, \lambda')] = 0,$$

$$W_b\{\psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} + \{I(\lambda) - m(\lambda)\}W_b\{\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} + \quad (2.11)$$

$$+ \{I(\lambda') - m(\lambda')\}W_b\{\psi(x, \lambda), \phi(x, \lambda')\} +$$

$$+ \{I(\lambda) - m(\lambda)\}\{I(\lambda') - m(\lambda')\}W_b\{\phi(x, \lambda), \phi(x, \lambda')\} = 0$$

$b \rightarrow \infty$ iken λ ve λ' sabit tutulduğunda ,

$$\begin{aligned} W_b \{ \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') \} &= (\lambda - \lambda') \int_0^b \phi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') dx + W_0 \{ \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') \} \\ &= 0 \left\{ \int_0^b |\phi(x, \lambda)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + o(1) \end{aligned}$$

dır. Weyl noktasında ,

$$|l(\lambda) - m(\lambda)| \leq 2r_b =$$

$$= \left\{ v \int_0^b |\phi(x, \lambda)|^2 dx \right\}^{-1} ,$$

dır. Öyle ki ,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \{l(\lambda) - m(\lambda)\} W_b \{ \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') \} = 0$$

eşitliği Weyl çemberinde de sağlanır. Eğer $l(\lambda) \rightarrow m(\lambda)$ ise o zaman $\int_0^b |\phi(x, \lambda)|^2 dx$ ifadesi sınırlıdır. Aynı şekilde diğer terimler de elde edilebilir.

Lemma 2.2:

$f_n(x)$ fonksiyonlarının,

$$\int_0^\infty |f_n(x)|^2 dx \leq K \quad , (n=1, 2, 3, \dots)$$

olmak üzere her sonlu aralıkta orta kuadratik anlamda $f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım. Bu takdirde $f(x)$ fonksiyonu $L^2(0, \infty)$ uzayına aittir ve $g(x) \in L^2(0, \infty)$ ise o zaman ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx$$

dir. Her sonlu $X > 0$ için ,

$$\int_0^X |f(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^X |f_n(x)|^2 dx \leq K$$

dır. Buradan $f(x) \in L^2(0, \infty)$ olduğu görülür.

$$\left| \int_0^{\infty} (f - f_n)g dx \right| \leq \left| \int_0^X \right| + \left| \int_X^{\infty} \right| \leq \left\{ \int_0^X |f - f_n|^2 dx \int_0^{\infty} |g|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_0^{\infty} |f - f_n|^2 dx \int_X^{\infty} |g|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Burada ikinci terim tüm n değerleri için X 'in seçimiyle verilen bir ε değerinden daha küçük yapılabilir. X sabit tutularak birinci terim $n \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider.

(2.2) den,

$$(\lambda' - \lambda) \int_0^b \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') = W_0 \{ \psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') \} - W_b \{ \psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda') \} \text{ dir.}$$

Sağdaki ilk terim,

$$\{ \cos \alpha + m(\lambda) \sin \alpha \} \{ \sin \alpha - m(\lambda') \cos \alpha \} -$$

$$- \{ \cos \alpha + m(\lambda') \sin \alpha \} \{ \sin \alpha - m(\lambda) \cos \alpha \} = m(\lambda) - m(\lambda')$$

dir. Eğer λ ve λ' reel değillerse, ikinci terim lemma 2.1 den $b \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider. Öyleyse

$$\int_0^{\infty} \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') dx = \frac{m(\lambda) - m(\lambda')}{\lambda' - \lambda} \quad (2.12)$$

dir.

Özel olarak $\lambda' = \bar{\lambda}$ alırsak,

$$\int_0^{\infty} |\psi(x, \lambda)|^2 dx = -\frac{im\{m(\lambda)\}}{\nu} \quad (2.13)$$

olur. Bu da (2.9) eşitsizliğini sağlar.

Şimdi λ_n özdeğer olsun. Ve $\nu \rightarrow 0$ iken $\lambda' = \lambda_n + i\nu$ olduğunu kabul edelim. O zaman herhangi sabit X için,

$$\int_0^X |\nu \psi(x, \lambda') + ir_n \phi(x, \lambda_n)|^2 dx \rightarrow 0$$

dır. Sol taraf,

$$\int_0^X |\nu \theta(x, \lambda') + \{vm(\lambda') + ir_n\} \phi(x, \lambda') - ir_n \{\phi(x, \lambda') - \phi(x, \lambda_n)\}|^2 dx$$

dir. Burada her terimin sıfıra gittiği açıktır. Ayrıca (2.13)'den $\nu \rightarrow 0$ iken,

$$\int_0^{\infty} |\nu \psi(x, \lambda')|^2 dx \leq |vm(\lambda')| = O(1)$$

dir. Ve $m(\lambda')$ 'nin λ_n deki kutupları basit kutuptur. (2.12) 'i, $i\nu/r_n$ ile çarparak, $\nu \rightarrow 0$ götürerek ve Lemma 2.2'ü kullanarak $\phi(x, \lambda_n)$ 'nin $L^2(0, \infty)$ 'a ait olduğunu görürüz.

$$\int_0^{\infty} \psi(x, \lambda) \phi(x, \lambda_n) dx = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \quad (2.14)$$

olur. Eğer λ farklı bir λ_m özdeğerine sahipse (2.14)'ü iv/r_m ile çarpıp $v \rightarrow 0$ a götürerek

$$\int_0^{\infty} \phi(x, \lambda_m) \phi(x, \lambda_n) dx = 0 \quad (2.15)$$

elde ederiz.

Eğer λ aynı λ_n özdeğerine sahipse ;

$$\int_0^{\infty} \{\phi(x, \lambda_n)\}^2 dx = \frac{1}{r_n} \quad (2.16)$$

olarak yazabiliriz.

Buradan,

$$\psi_n(x) = r_n^{1/2} \phi(x, \lambda_n) \quad (2.17)$$

fonksiyonları normalize edilmiş ortogonal küme şeklindedir.

Artık (2.14)'ü

$$\int_0^{\infty} \psi(x, \lambda) \psi_n(x) dx = \frac{r_n^{1/2}}{\lambda - \lambda_n} \quad (2.18)$$

olarak yazabiliriz.

$f(y)$ fonksiyonu $L^2(0, \infty)$ da olsun ve

$$\Phi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \phi(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy \quad (2.19)$$

olarak tanımlasın. Burada ϕ ve ψ yukarıda tanımlanmıştır. Her x için $\Phi(x, \lambda)$, λ 'nın analitik fonksiyonudur. Ve $im\lambda > 0$ veya $im\lambda < 0$ için regulerdir. Ayrıca $f(y)$ sürekli ise;

$$\Phi'(x, \lambda) = \psi'(x, \lambda) \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \phi'(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi''(x, \lambda) &= \psi''(x, \lambda) \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \phi''(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy + \\ &\quad + \{\psi'(x, \lambda)\phi(x, \lambda) - \phi'(x, \lambda)\psi(x, \lambda)\}f(x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$= \{q(x) - \lambda\}\Phi(x, \lambda) + f(x)$$

dır.

Böylece $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonu,

$$\Phi(0, \lambda) = \phi(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy,$$

$$\Phi'(0, \lambda) = \phi'(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy,$$

başlangıç koşullarını ve diferansiyel denklemi sağlar. Burada, Φ

$$\Phi(0, \lambda) \cos \alpha + \Phi'(0, \lambda) \sin \alpha = 0. \quad (2.21)$$

sınır koşulunu sağlar. Eğer $\Phi_x(x, \lambda)$; $y > x$ için $f(y) = 0$ a karşı gelen fonksiyon ise; o zaman,

$$\begin{aligned}\Phi_x(x, \lambda) = & \theta(x, \lambda) \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \phi(x, \lambda) \int_x^X \theta(y, \lambda) f(y) dy + \\ & + m(\lambda) \phi(x, \lambda) \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy.\end{aligned}$$

dir.

Fonksiyonun ifadesinden açıkça görülür ki, bu fonksiyon; $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots$ noktaları hariç bütün

düzlemde regulardır ve $r_n \phi(x, \lambda_n) \int_0^X \phi(y, \lambda_n) f(y) dy$ rezidüleriyle basit kutuplara sahiptir.

C ; bütün λ_n ları içermeyen $\xi_1 \leq \text{rez} \leq \xi_2$, $-\eta \leq \text{im } z \leq \eta$, dikdörtgen formunu belirtsin.

Eğer λ , C nin içindeyse Cauchy'nin integral formuna göre,

$$\Phi_x(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi_x(x, z)}{z - \lambda} dz \text{ dir.}$$

Eğer λ reel değilse $\Phi_x(x, \lambda) \rightarrow \Phi(x, \lambda)$ ve eğer λ özdeğer olmayan bir değerse (2.13) den $v = \text{im } \lambda \rightarrow 0$ iken;

$$\Phi_x(x, \lambda) = O\left\{\int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy\right\} = O\left\{\int_0^\infty |\psi(y, \lambda)|^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} = O(v^{\frac{1}{2}}) \text{ dir.}$$

Böylece $X \rightarrow \infty$ iken,

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(x, z)}{z - \lambda} dz$$

olur.

Buradan gözükür ki $\Phi(x, \lambda)$, C boyunca analitiktir. Yani üst ve alt yarı düzlemde tanımlanan fonksiyonlar birbirlerinin analitik devamlarıdır. Eğer C , bir λ_n noktası içeriyorsa, rezidüsü

orada $\Phi(x, \lambda)$ nın rezüdüsünün limitine eşit olduğundan benzer şekilde $\Phi(x, \lambda)$ nın λ_n noktasında basit kutupa sahip olduğunu bulabiliriz ve $\Phi_x(x, \lambda)$ nın resüdüsünün limiti $\Phi(x, \lambda)$ ' nın resüdüsüne eşittir. Yani ,

$$r_n \phi(x, \lambda_n) \int_0^\infty \phi(y, \lambda_n) f(y) dy = \psi_n(x) \int_0^\infty \psi_n(y) f(y) dy = c_n \psi_n(x)$$

dir.



3.WEYL-TITCHMARCH FONKSİYONUN MEROMORF OLDUĞU HALDE SPEKTRAL AÇILIM FORMULÜ VE PARSEVAL EŞİTLİĞİ

Aşağıdaki teoremler doğrudur.

Teorem 3.1 (i):

$f(x)$ ve $f'(x)$, $[0, \infty)$ aralığının her kapalı sonlu alt aralığında mutlak sürekli fonksiyon,

$\tilde{f}(x) = q(x)f(x) - f''(x)$, ifadesi $L^2(0, \infty)$ a ait olsun,

$$f(0)\cos\alpha + f'(0)\sin\alpha = 0 \quad (3.1)$$

ve her reel olmayan λ sayısı için,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W\{\psi(x, \lambda), f(x)\} = 0 \quad (3.2)$$

olsun. O zaman,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad (0 \leq x < \infty), \quad (3.3)$$

serisi herhangi sonlu aralıkta mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.1 (ii):

$f(x)$, $L^2(0, \infty)$ 'a ait bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$\int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \quad (3.4)$$

dir. Bu eşitliğe Parseval eşitliği denir. Teoremlerden herhangi biri diğeri ispatı olarak kullanılabilir. Önce (3.1) (ii)'yi ispatlayarak (3.1) (i)'yi elde edelim. Sonrada yeni bir alternatif prosedür verelim. Ve bunun için bazı lemmaları ispatlamamız gerekiyor.

Lemma 3.1: Eğer $f(x) \in L^2(0,\infty)$ uzayının herhangi bir fonksiyonu ise

$$\int_0^\infty |\Phi(x,\lambda)|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx. \quad (3.5)$$

dir.

İspat:

Önce $x \geq X$ için $f(x) = 0$ olduğunu varsayarsak, o halde ,

$$\int_0^\infty \Phi(x,\lambda) L\Phi(x,\lambda') dx = \int_0^\infty \Phi(x,\lambda') L\Phi(x,\lambda) dx \quad (3.6)$$

kendine eşlik durumu sağlanır.

$$\int_0^\xi \{\Phi(x,\lambda) L\Phi(x,\lambda') - \Phi(x,\lambda') L\Phi(x,\lambda)\} dx \text{ için}$$

$$= - \int_0^\xi \{\Phi(x,\lambda) \Phi''(x,\lambda') - \Phi(x,\lambda') \Phi''(x,\lambda)\} dx$$

$$= - [\Phi(x,\lambda) \Phi'(x,\lambda') - \Phi(x,\lambda') \Phi'(x,\lambda)]_0^\xi.$$

dir. İntegralli terim $x = 0$ 'da ortadan kalkar. Çünkü,

$$\Phi(0,\lambda) = \sin \alpha \int_0^\infty \psi(y,\lambda) f(y) dy,$$

$$\Phi'(0,\lambda) = -\cos \alpha \int_0^\infty \psi(y,\lambda) f(y) dy$$

dir. İntegralli terim $\xi \rightarrow 0$ iken $x = \xi$ da 0 dir. Eğer $x > X$ ise

$$\Phi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \int_0^X \phi(y, \lambda) f(y) dy,$$

$$\Phi'(x, \lambda) = \psi'(x, \lambda) \int_0^X \phi(y, \lambda) f(y) dy$$

dir. Ve sonuç lemma 2.1' den görülür.

(3.6) 'da $\lambda' = \bar{\lambda}$ dönüşümü yapılarak ve (2.20)'de yerine konularak,

$$\int_0^\infty \Phi(x, \lambda) \{ \bar{\lambda} \Phi(x, \bar{\lambda}) - f(x) \} dx = \int_0^\infty \Phi(x, \bar{\lambda}) \{ \lambda \Phi(x, \lambda) - f(x) \} dx,$$

yani,

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^\infty |\Phi(x, \lambda)|^2 dx = \int_0^\infty \{ \Phi(x, \bar{\lambda}) - \Phi(x, \lambda) \} f(x) dx$$

olur.

Eğer $\lambda = \mu + iv$, $v > 0$, ise

$$2v \int_0^\infty |\Phi(x, \lambda)|^2 dx \leq 2 \int_0^\infty |\Phi(x, \lambda) f(x)| dx$$

$$\leq 2 \left\{ \int_0^\infty |\Phi(x, \lambda)|^2 dx \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dir. Buradan istenen sonuç,

$$\int_0^{\infty} |\Phi(x, \lambda)|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

elde edilir.

Eğer $f(x)$, $L^2(0, \infty)$ uzayının bir fonksiyonu bir X' sabit ise o zaman yukarıdaki fonksiyon,

$$\lim_{X' \rightarrow \infty} \int_0^{X'} |\Phi_X(x, \lambda)|^2 dx = \int_0^{X'} |\Phi(x, \lambda)|^2 dx$$

şeklinde mutlak yakınsaklığa sahiptir.

$$\int_0^{X'} |\Phi_X(x, \lambda)|^2 dx \leq \int_0^{\infty} |\Phi_X(x, \lambda)|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} |f_X(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{v^2} \int_0^X |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Sonuca önce $X \rightarrow \infty$ ve sonra $X' \rightarrow \infty$ yapılarak gidilir.

Lemma 3.2: Eğer $f(x)$ teorem 3.1 (i) in şartlarını sağlıyorsa ve $\Phi(x, \lambda)$ (2.19) ile tanımlanıyorsa ve aynı zamanda $\Phi(x, \lambda, f)$ ile belirtiliyorsa, o zaman,

$$\Phi(x, \lambda, f) = \frac{1}{\lambda} \{f(x) + \Phi(x, \lambda, \tilde{f})\} \quad (3.7)$$

dır.

İspat:

İki kez kısmi integrasyonu kullanırsak,

$$\begin{aligned} \int_0^x \phi(y, \lambda) f(y) dy &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x \{q(y)\phi(y) - \phi''(y)\} f(y) dy \\ &= \frac{1}{\lambda} [\phi(y)f'(y) - \phi'(y)f(y)]_0^x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \{q(y)f(y) - f''(y)\}\phi(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.1) den integralli terim alt limiti yok eder. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y) dy &= \frac{1}{\lambda} [\psi(y)f'(y) - \psi'(y)f(y)]_x^\infty + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty \{q(y)f(y) - f''(y)\}\psi(y) dy, \end{aligned}$$

(3.2) den de integralli terim üst limiti yok eder. Böylece (2.19) de yerine koyarak sonuca ulaşırız.

$G(x, y, \lambda)$, Green fonksiyonu x ve y de simetrik olan basit denklemin çözümüdür ve Green fonksiyonu her y için x in sürekli fonksiyonudur.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=y+0} - \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=y-0} = -1;$$

denklemini sınır koşullarını sağlar. Yani

$$G(0, y, \lambda) \cos \alpha + G_x(0, y, \lambda) \sin \alpha = 0$$

dir.

Green fonksiyonu,

$$G(x, y, \lambda) = -\psi(x, \lambda)\phi(y, \lambda) \quad (y \leq x), \quad -\phi(x, \lambda)\psi(y, \lambda) \quad (y > x)$$

olarak tanımlanır. O zaman,

$$\Phi(x, \lambda, f) = -\int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) f(y) dy,$$

$$\Phi(x, \lambda, \tilde{f}) = -\int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) \tilde{f}(y) dy$$

ve (3.7) den,

$$f(x) = \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) \{ \tilde{f}(y) - \lambda f(y) \} dy. \quad (3.8)$$

dir.

$$(\lambda - \lambda') \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = G(x, u, \lambda) - G(x, u, \lambda') \quad (3.9)$$

Bu ifadeyi ispatlayalım.

Bunun için $(\lambda - \lambda') \int_a^b F(x).G(x) = W_b(F, G) - W_a(F, G)$ eşitliğinden yararlanalım.

$x \neq u, x = u$ hallerini ayrı ayrı inceleyelim.

1) $x \neq u, x > u$ hali;

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy &= (\lambda - \lambda') \int_0^u G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy + (\lambda - \lambda') \int_u^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy \\ &\quad + (\lambda - \lambda') \int_x^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy \end{aligned}$$

Üç terimi hesaplarsak,

$$(\lambda - \lambda') \int_0^u G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_0(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_u(G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda))$$

$$= -G(x, u, \lambda') G'(u - 0, u, \lambda) + G'(x, u, \lambda') G(u, u, \lambda)$$

$$(\lambda - \lambda') \int_u^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_u(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_x(G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda))$$

$$= G(x, u, \lambda') G'(u + 0, u, \lambda) - G'(x, u, \lambda') G(u, u, \lambda) - G(x, x, \lambda') G'(x, u, \lambda) +$$

$$+ G'(x, x - 0, \lambda') G(x, u, \lambda)$$

$$(\lambda - \lambda') \int_x^\infty G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_x(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_\infty(G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda))$$

$$= G(x, x, \lambda') G'(x, u, \lambda) - G'(x, x + 0, \lambda') G(x, u, \lambda)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \int_0^\infty G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy &= (\lambda - \lambda') \int_0^u G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy + (\lambda - \lambda') \int_u^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy \\ &\quad + (\lambda - \lambda') \int_x^\infty G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy \end{aligned}$$

$$= G(x, u, \lambda') - G(x, u, \lambda') \text{ elde edilir.}$$

2) $x = u$ hali;

$$(\lambda - \lambda') \int_0^\infty G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = (\lambda - \lambda') \int_0^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy + (\lambda - \lambda') \int_x^\infty G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy$$

$$\begin{aligned} &= G(x, x, \lambda') G'(x + 0, x, \lambda) - G'(x, x + 0, \lambda') G(x, x, \lambda) - G(x, x, \lambda') G'(x - 0, x, \lambda) + \\ &\quad + G'(x, x - 0, \lambda') G(x, x, \lambda) \end{aligned}$$

$$= G(x, x, \lambda) - G(x, x, \lambda')$$

3) $x < u$ hali;

$$(\lambda - \lambda') \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = (\lambda - \lambda') \int_0^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy + (\lambda - \lambda') \int_x^u G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy + (\lambda - \lambda') \int_u^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy$$

$$(\lambda - \lambda') \int_0^x G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_0(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_x(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda))$$

$$= -G(x, x, \lambda') G'(x, u, \lambda) + G'(x, x - 0, \lambda') G(x, u, \lambda)$$

$$(\lambda - \lambda') \int_x^u G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_x(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_u(G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda))$$

$$= G(x, x, \lambda') G'(x, u, \lambda) - G'(x, x + 0, \lambda') G(x, u, \lambda) - G(x, u, \lambda') G'(u - 0, u, \lambda) + G'(x, u, \lambda') G(u, u, \lambda)$$

$$(\lambda - \lambda') \int_u^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = W_u(G(x, y, \lambda'), G(y, u, \lambda)) - W_{\infty}(G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda))$$

$$= G(x, x, \lambda') G'(u + 0, u, \lambda) - G'(x, u, \lambda') G(u, u, \lambda)$$

$$= G(x, u, \lambda) - G(x, u, \lambda')$$

Böylece üç durumda da,

$$(\lambda - \lambda') \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') G(y, u, \lambda) dy = G(x, u, \lambda) - G(x, u, \lambda')$$

olduğu ispatlanır.

Bu formül $f(u)$ ile çarpılarak ve integre edilerek ,

$$(\lambda - \lambda') \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') \Phi(y, \lambda) dy = \Phi(x, \lambda) - \Phi(x, \lambda') \quad (3.10)$$

elde edilir.

Bu durum; $f(u)$, L^2 uzayına ait ve $u > X$ için $f(u) = 0$ ise doğrulanır. $\Phi_X, X \rightarrow \infty$ iken $u > X$ için $f(u) = 0$ olduğu durumu gösteriyorsa, $L^2(0, \infty)$ ın, herhangi fonksiyonu $f(u)$ için ,

$$\Phi(x, \lambda) - \Phi_X(x, \lambda) = - \int_X^{\infty} G(x, y, \lambda) f(y) dy \rightarrow 0$$

olur ve

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') \{ \Phi(y, \lambda) - \Phi_X(y, \lambda) \} dy \right| \\ & \leq \left\{ \int_0^{\infty} |G(x, y, \lambda')|^2 dy \int_0^{\infty} | \Phi(y, \lambda) - \Phi_X(y, \lambda) |^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left\{ \int_0^{\infty} |G(x, y, \lambda')|^2 dy \cdot \frac{1}{v^2} \int_X^{\infty} |f(u)|^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Lemma 3.3: Eğer $f(x)$ $L^2(0, \infty)$ ın herhangi fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx.$$

Buna “Bessel eşitsizliği” denir.

İspat:

Her N için ,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^\infty \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(x) \right\}^2 dx \\
&= \int_0^\infty \{f(x)\}^2 dx + \sum_{n=0}^N c_n^2 - 2 \sum_{n=0}^N c_n \int_0^\infty f(x) \psi_n(x) dx \\
&= \int_0^\infty \{f(x)\}^2 dx - \sum_{n=0}^N c_n^2
\end{aligned}$$

dir.

Lemma 3.4: $F(\lambda)$, $-r \leq \mu \leq r$ ve $-r \leq v \leq r$ için reguler olan $\lambda = \mu + iv$ nin analitik fonksiyonu ve bu karede $|F(\lambda)| \leq \frac{M}{|v|}$ olsun. O zaman $|F(\lambda)| \leq \frac{3M}{r}$ ($\mu = 0, -r \leq v \leq r$) dir.

İspat:

$G(\lambda) = (\lambda^2 - r^2) F(\lambda)$ olsun. Karenin alt ve üst tarafında,

$$|G(\lambda)| \leq (|\lambda|^2 + r^2) \frac{M}{r} \leq 3rM$$

dir. Sağ ve sol tarafında,

$$|G(\lambda)| \leq |v| (|\lambda| + r) \frac{M}{|v|} \leq 3rM$$

dir. Böylece kare boyunca reguler fonksiyonların modülünün maksimum prensibine (Conway, 1978) göre $|G(\lambda)| \leq 3rM$ 'dir. Dolayısıyla sanal ekseninde,

$$|F(\lambda)| \leq \frac{3rM}{|\lambda^2 - r^2|} = \frac{3rM}{v^2 + r^2} \leq \frac{3M}{r}$$

dir.

Şimdi teorem 3.1 (ii) 'yi ispatlayalım. Önce $f(x)$ in teorem 3.1 (i)' nin şartlarını sağladığını varsayalım ve aynı zamanda yeteri kadar büyük seçilmiş x için $f(x) = 0$ olsun.

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \Phi(x, \lambda) dx, \quad (3.11)$$

O zaman $\psi(\lambda)$ rezidüleri,

$$c_n \int_0^{\infty} \psi_n(x) f(x) dx = c_n^2$$

olduğu yerde λ_n noktalarında basit kutuplar hariç regulardır.

(3.7)' den

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \Phi(x, \lambda, \tilde{f}) f(x) dx, \quad (3.12)$$

Son terim lemma 3.1' den $\tilde{f}$ 'ye uygulanarak,

$$O \left\{ \frac{1}{|\lambda|} \left[\int_0^{\infty} |\Phi(x, \lambda, \tilde{f})|^2 dx \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = O \left(\frac{1}{|\lambda v|} \right)$$

elde edilir.

$C(R)$ merkezleri $\pm i$ 'den ve R yarıçaplı yarım dairelerden oluşan $(R-i, R+i)$ ve $(-R-i, -R+i)$ 'den geçen doğru parçalarını belirtir. O zaman eğer λ_n 'lerin hiçbirisi $\pm R$ 'ye eşit değilse ;

$$\int_{C(R)} \psi(\lambda) d\lambda = 2\pi i \sum_{-R < \lambda_n < R} c_n^2$$

dir. Yarım dairenin üst tarafında, ilk çeyrek dairede,

$$\lambda = i + Re^{i\phi} \quad \left(0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi \right)$$

dir.

Böylece (3.12) 'deki son terim çeyrek dairede integre edilirse ,

$$\begin{aligned} O \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R d\phi}{R(1 + R \sin \phi)} \right\} &= O \left\{ \int_0^{1/R} d\phi \right\} + O \left\{ \int_{1/R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{R\phi} \right\} \\ &= O \left(\frac{1}{R} \right) + O \left(\frac{\log R}{R} \right) = o(1) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde diğer çeyrek dairelere uygulanır. Böylece $R \rightarrow \infty$ iken her yarım dairede $\psi(\lambda)$ 'nın integrali,

$$\pi i \int_0^\infty \{f(x)\}^2 dx$$

dır.

Teoremi ispatlamak için,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R-i}^{R+i} \psi(\lambda) d\lambda = 0$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir ve R yerine $-R$ alınarak da benzer sonuç elde edilir.

$$\chi(\lambda) = \psi(\lambda) - \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} \frac{c_n^2}{\lambda - \lambda_n}$$

olsun. $\chi(\lambda)$, $R-1 \leq \lambda \leq R+1$ iken regulardır ve

$$|\chi(\lambda)| < \frac{K}{|\lambda v|} + \frac{1}{|v|} \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} c_n^2 \leq \frac{\varepsilon(R)}{|v|}$$

dir. Burada $R \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ dir. Böylece lemma 3.4 'den $(R-i, R+i)$ aralığında

$$|\chi(\lambda)| \leq 3\varepsilon(R) \text{ ' dir.}$$

Buradan,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R-i}^{R+i} \chi(\lambda) d\lambda = 0$$

dir. Ayrıca

$$\int_{R-i}^{R+i} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_n} = O(1)$$

integrasyon sınırları λ_n 'e karşıt kenar üzerindeki yarım daire ile yer değiştirebilir ve bu yarım dairede integral sınırlı olduğundan,

$$\int_{R-i}^{R+i} \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} \frac{c_n^2}{\lambda - \lambda_n} d\lambda = O \left\{ \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} c_n^2 \right\} = o(1)$$

yazılabilir.

Bu da fonksiyonların özel sınıfı için teoremi ispatlar. Teorem karesi integrallenebilir tüm fonksiyonlara genişletilebilir. Burada gözüküyor ki, eğer $g(x)$, fourier katsayısı d olan L^2 'nin başka bir fonksiyonu ise o zaman,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \{f(x) + g(x)\}^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \{f(x) - g(x)\}^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)^2 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - d_n)^2 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Bu formül reel ve sanal bölümlere ayrılan $f(x)$, $g(x)$ kompleks fonksiyonları için de doğrudur.

Teorem 3.1(ii) kullanarak teorem 3.1(i)' yi ispatlayalım.

$$(\lambda_n - \lambda) \int_0^b \psi(x, \lambda) \phi(x, \lambda_n) dx = W_o \{ \psi(x, \lambda), \phi(x, \lambda_n) \} - W_b \{ \psi(x, \lambda), \phi(x, \lambda_n) \},$$

formülü ve (2.14) ten sağ taraftaki ikinci terim $b \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. (3.8) de $f(x) = \psi_n(x)$ alabilir ve

$$\int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) \psi_n(y) dy = \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \tag{3.14}$$

eşitliğini elde edebiliriz.

Aynı zamanda x sonlu aralıkta ve λ reel olmamak üzere,

$$\int_0^{\infty} |G(x, y, \lambda)|^2 dy = |\psi(x, \lambda)|^2 \int_0^x |\phi(y, \lambda)|^2 dy + |\phi(x, \lambda)|^2 \int_x^{\infty} |\psi(y, \lambda)|^2 dy \leq K$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece Lemma 3.3 den ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \right|^2 \leq K \quad (3.15)$$

olur.

Şimdi $f(x)$, teorem 3.1(i) in şartlarını sağlasın ve $g(x) = \tilde{f}(x) - \lambda f(x)$ olsun. Eğer λ reel değilse,

$$\int_0^{\infty} [\psi(y, \lambda) \tilde{f}(y) - f(y) L\{\psi(y, \lambda)\}] dy = [f\psi' - f'\psi]_0^{\infty}$$

$$= f'(0)\cos\alpha - f(0)\sin\alpha$$

ve $L\psi = \lambda\psi$ dir. $\lambda = \lambda_n + i\nu$ alıp, ν ile çarpıp $\nu \rightarrow 0$ yaparsak ve Lemma 2.2'den,

$$\int_0^{\infty} \psi_n(y) \tilde{f}(y) dy = \lambda_n \int_0^{\infty} \psi_n(y) f(y) dy = \lambda_n c_n$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece eğer d_n , $g(x)$ in fourier katsayısı ise

$$d_n = (\lambda_n - \lambda)c_n \quad (3.16)$$

ve

$$\sum |\lambda_n - \lambda|^2 c_n^2 \quad (3.17)$$

yakınsaktır. (3.8) ve (3.13) den $f(y)$ yerine $G(x, y, \lambda)$ konarak istenen sonuç,

$$f(x) = \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) g(y) dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} (\lambda_n - \lambda) c_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x),$$

şeklinde elde edilir. Serilerin düzgün ve mutlak yakınsaklığı, (3.15) 'den ve (3.17) 'nin yakınsaklığından görülür.

Teorem 3.1(i)' i doğrudan ispatlamak için aşağıdaki lemma gereklidir.

Lemma 3.5: Eğer $f(x), L^2(0, \infty)$ uzayında; x sabit ve $v \neq 0$, $|\lambda| \geq A > 0$ ise

$$\Phi(x, \lambda) = O(|\lambda|^{1/4} |v|^{-1})$$

dir.

İspat:

$$\int_x^{\xi} (\xi - y)^2 (y - x) \Phi''(y) dy = (\xi - x)^2 \Phi(x) + \int_x^{\xi} (6y - 2x - 4\xi) \Phi(y) dy$$

formülü bir kez integrasyon ile doğrulanır. Sol taraf ,

$$\int_x^\xi (\xi - y)^2 (y - x) \{q(y)\Phi(y) - \lambda\Phi(y) + f(y)\} dy$$

dir.

$$C = \left[\int_0^\infty \{f(x)\}^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

yazarak Lemma 3.1' den,

$$\left| \int_x^\xi (\xi - y)^2 (y - x) \Phi(y) dy \right| \leq (\xi - x)^3 \int_x^\xi |\Phi(y)| dy$$

$$\leq (\xi - x)^3 \left\{ \int_x^\xi dy \int_x^\xi |\Phi(y)|^2 dy \right\}^{1/2} \leq C(\xi - x)^{7/2} / |v|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\left| \int_x^\xi (\xi - y)^2 (y - x) q(y) \Phi(y) dy \right| \leq C(\xi - x)^{7/2} \max_{y \leq \xi} |q(y)| / |v|$$

$$\left| \int_x^\xi (\xi - y)^2 (y - x) f(y) dy \right| \leq C(\xi - x)^{7/2},$$

$$\left| \int_x^\xi (6y - 2x - 4\xi) \Phi(y) dy \right| \leq 4C(\xi - x)^{3/2} / |v|$$

dir.

Böylece,

$$|\Phi(x)| \leq \frac{C(\xi - x)^{3/2}}{|v|} \left(|\lambda| + \max_{y \leq \xi} |q(y)| + |v| \right) + \frac{4C}{|v|(\xi - x)^{1/2}}$$

dir. $\xi = x + |\lambda|^{-1/2}$ olarak sonuca gidilir.

Şimdi teorem 3.1(i)'yi direkt olarak ispatlayalım.

$$\int_{C(R)} \Phi(x, \lambda) d\lambda = 2\pi i \sum_{-R < \lambda_n < R} c_n \psi_n(x), \quad (3.18)$$

dir. Sol taraftaki $C(R)$ sembolü teorem 3.1(ii) nin ispatında kullandığımız konturdur.

(3.7) den ve Lemma 3.5' in $\Phi(x, \lambda, f)$ ' e uygulanmasından,

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{3/4} |v|}\right) \quad (3.19)$$

olur.

Son terimin yarım dairelerin çevresindeki integrali sıfıra gider. Bu durumda,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R-i}^{R+i} \Phi(x, \lambda) d\lambda \rightarrow 0$$

olduğunu ispatlamak hala bir sorundur. Aynı şekilde $-R$ için de durum böyledir. Şimdi

$$\Omega(\lambda) = \Phi(x, \lambda) - \frac{f(x)}{\lambda} - \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} \frac{c_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n}$$

olsun. O zaman $R-1 \leq \lambda \leq R+1$ için $\Omega(\lambda)$ regulardır ve $\mu \rightarrow \infty$ iken

$$\Omega(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda^{3/4} \nu|}\right) + O\left(\frac{1}{|\nu|} \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} |c_n \psi_n(x)|\right) = \frac{o(1)}{|\nu|}$$

dir. Böylece Lemma 3.4 den $-1 \leq \nu \leq 1$ için $\Omega(R + i\nu) = o(1)$ dir. Buradan,

$$\int_{R-i}^{R+i} \Omega(\lambda) d\lambda \rightarrow 0$$

olur. Ayrıca

$$\int_{R-i}^{R+i} \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} \frac{c_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} d\lambda = \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} c_n \psi_n(x) \int_{R-i}^{R+i} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_n}$$

$$= O\left\{ \sum_{R-1 \leq \lambda_n \leq R+1} |c_n \psi_n(x)| \right\} \rightarrow 0.$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1 (ii) 'yi, Teorem 3.1 (i)'den elde edelim

$f(x)$ teorem 3.1 (i)'nin şartlarını sağlasın ve

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(x)$$

olsun. O zaman $N \rightarrow \infty$ iken $f_N(x)$, $f(x)$ 'e herbir sonlu aralıkta düzgün yakınsar. $f_N(x)$ in ifadesinden,

$$\int_0^\infty \{f_N(x)\}^2 dx = \sum_{n=0}^N c_n^2 \leq \int_0^\infty \{f(x)\}^2 dx.$$

Böylece lemma 2.2'den,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_N(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx,$$

olur. Yani

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n^2 = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx.$$

dir. Bu, özel sınıf fonksiyonlar için gerekli sonuçtur.

Teorem 3.2 : $f(x) \in L^2(0, \infty)$ uzayına ait ve λ sayısı herhangi bir λ_n eşit olmamak üzere

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n}$$

dir.

İspat:

Seri mutlak yakınsaktır. Lemma 3.3 ve (3.15)'in yakınsaklığından, eğer λ reel değilse, her λ için ispatlanan sonuç, açık olarak tüm λ 'lar için geçerlidir. Şimdi

$$\int_{C(R)} \frac{\Phi(x, z)}{z - \lambda} dz$$

integralini gözönüne alalım. Lemma 3.5 'den,

$$\frac{\Phi(x, z)}{z - \lambda} = O\left(\frac{1}{|z|^{3/4} |\operatorname{Im} z|}\right)$$

dir. Dolayısıyla yarım daire çevresinde $R \rightarrow \infty$ iken integral sıfıra yaklaşır.

Şimdi teorem 3.1(i) nin yardımıyla aşağıdaki ifade edeceğimiz teorem ispatlanabilir. $L^2[0, \infty)$ Hilbert uzayında $-y'' + q(x)y$ Sturm-Lioville ifadesi ile bir L operatörünü oluşturalım. Bu operatörün tanım kümesi $D(L)$, teorem 3.1(i) de belirtilen $f(x)$ fonksiyonlarından ibaret olsun. Yani,

$$D(L) = \{ f(x) \in L^2[0, \infty) : f(x) \text{ ve } f'(x), [0, \infty) \text{ aralığının her kapalı sonlu alt aralığında mutlak sürekli} -f'' + q(x)f \in L^2[0, \infty), f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} W\{\psi(x, \lambda), f(x)\} = 0 \}$$

olsun ve $f(x) \in D(L)$ iken $Lf = -f'' + q(x)f$ olsun Burada $\psi(x, \lambda)$, teorem 3.1(i) deki fonksiyondur. Böyle tanımlanmış L operatörünün simetrik olduğu yani, $f(x), g(x) \in D(L)$ iken $(Lf, g) - (f, Lg) = \lim_{b \rightarrow \infty} W_b\{f, g\} = 0$ (Coddington ve Levinson, 1955) olduğu görülmektedir. Burada $(Lf, g), L^2[0, \infty)$ uzayında iç çarpımı gösterir.

Dolayısıyla $L^2[0, \infty)$ ' da ,

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

dir. Belirtmek gerekir ki Sturm-Lioville ifadesi Weyl noktası durumunda $D(L)$ nin tanımındaki $\lim_{x \rightarrow \infty} W\{\psi(x, \lambda), f(x)\} = 0$ koşulu eklenmeyecektir. Burada L simetrik operatörünün özfonksiyonlarının $L^2[0, \infty)$ uzayında ortonormal baz oluşturduğundan dolayı L operatörü esaslı kendine eş (essentially self-adjoint) operatördür (Davies, 1995). Böylece yukarıda sözü edilen teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 3.3: Weyl çemberi ve Weyl noktası durumunda , L operatörü $L^2[0, \infty)$ uzayında esaslı kendine eş operatördür.

En sonda kullanacağımız aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.4(i): Eğer $q(x) \geq -\gamma x^2$ ($\gamma > 0$) koşulunu sağlıyor ise o zaman L operatörü $L^2[0, \infty)$ uzayında kendine eştir (Levitan ve Sargsyan, 1991).

Teorem 3.4(ii): Eğer $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$ ise o zaman L operatörünün spektrumu sadece

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$) özdeğerlerinden ibarettir (Levitan ve Sargsyan, 1991).



4. BÜTÜN REEL EKSEN HALİ

Şimdi aralığın $(-\infty, \infty)$ 'a ve $q(x)$ 'in $-\infty < x < \infty$ için sürekli olduğunu varsayalım.

$(L - \lambda)y = 0$ 'ın çözümleri $\phi(x, \lambda)$ ve $\theta(x, \lambda)$ olsun. Öyle ki;

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = -1,$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0,$$

dır. O zaman $W(\phi, \theta) = 1$ 'dir. Önceki bölümde bulunan sonuçlara göre, $m_1(\lambda)$ ve $m_2(\lambda)$ fonksiyonları üst yarı düzlemde regular olmak üzere,

$$\psi_1(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_1(\lambda)\phi(x, \lambda) \quad (4.1)$$

$L^2(-\infty, 0)$ 'a aittir ve

$$\psi_2(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_2(\lambda)\phi(x, \lambda) \quad (4.2)$$

$L^2(0, \infty)$ 'a aittir. Başlangıç koşullarına göre

$$W(\psi_1, \psi_2) = m_1(\lambda) - m_2(\lambda)$$

dir. Bu taktirde,

$$\int_{-\infty}^0 |\psi_1(x, \lambda)|^2 dx = \frac{im m_1}{v}, \quad \int_0^{\infty} |\psi_2(x, \lambda)|^2 dx = -\frac{im m_2}{v}. \quad (4.3)$$

dir. Burada $v > 0$ için $imm_1 > 0$ ve $imm_2 < 0$ 'dır.

$$G(x, y, \lambda) = \frac{\psi_2(x, \lambda)\psi_1(y, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)} \quad (y \leq x), \quad \frac{\psi_1(x, \lambda)\psi_2(y, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)} \quad (y > x), \quad (4.4)$$

$$\Phi(x, \lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \lambda) f(y) dy,$$

Burada $f \in L^2(-\infty, \infty)$ 'a ait keyfi bir fonksiyondur. Eğer $m_1(\lambda)$ ve $m_2(\lambda)$ 'nin her ikisi de meromorf fonksiyon ise açılım seriyeye dönüşür.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) = & \frac{\theta(x, \lambda) + m_2(\lambda)\phi(x, \lambda)}{m_1(\lambda) - m_2(\lambda)} \int_{-\infty}^x \{\theta(y, \lambda) + m_1(\lambda)\phi(y, \lambda)\} f(y) dy + \\ & + \frac{\theta(x, \lambda) + m_1(\lambda)\phi(x, \lambda)}{m_1(\lambda) - m_2(\lambda)} \int_x^{\infty} \{\theta(y, \lambda) + m_2(\lambda)\phi(y, \lambda)\} f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Üç olasılık vardır:

i) λ_n özdeğerinde,

$$m_1(\lambda_n) = m_2(\lambda_n) = a \neq 0,$$

$$m_1(\lambda) - m_2(\lambda) \sim (\lambda - \lambda_n)b.$$

O zaman $\phi(x, \lambda)$,

$$\frac{1}{b} \{\theta(x, \lambda_n) + a\phi(x, \lambda_n)\} \int_{-\infty}^{\infty} \{\theta(y, \lambda_n) + a\phi(y, \lambda_n)\} f(y) dy$$

rezüdüsüne sahiptir

ii) $m_1(\lambda)$ ve $m_2(\lambda)$ nin her ikisi de basit sıfırlara sahiptir. Yani

$$m_1(\lambda) \sim a_1(\lambda - \lambda_n), \quad m_2(\lambda) \sim a_2(\lambda - \lambda_n)$$

dir. O zaman $\phi(x, \lambda)$,

$$\frac{1}{a_1 - a_2} \theta(x, \lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y, \lambda_n) f(y) dy.$$

rezüdüsüne sahiptir.

iii) $m_1(\lambda)$ ve $m_2(\lambda)$ nın her ikisi de basit kutuplara sahiptir.

$$m_1(\lambda) \sim \frac{a_1}{\lambda - \lambda_n}, \quad m_2(\lambda) \sim \frac{a_2}{\lambda - \lambda_n}.$$

O zaman $\Phi(x, \lambda)$,

$$\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \phi(x, \lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y, \lambda_n) f(y) dy$$

rezüdüsüne sahiptir.

Özel olarak $q(x)$ 'in çift fonksiyon olduğunu farzedelim. O zaman $\phi(x, \lambda)$, x 'in tek fonksiyonudur. $\theta(x, \lambda)$ ise çift fonksiyondur. Buradan görülür ki eğer $\theta(x, \lambda) + m_2(\lambda)\phi(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$ 'a aitse $\theta(x, \lambda) - m_2(\lambda)\phi(x, \lambda) \in L^2(-\infty, 0)$ 'a aittir. Yani $m_1(\lambda) = -m_2(\lambda)$ dır. Tüm özdeğerler (ii) ve (iii) altında bulunur ve her öz fonksiyonu ya tektir ya da çifttir.

Weyl noktası ve Weyl çemberi λ 'nin özel değerlerine uygulanabilir. Fakat gerçekten herhangi λ kompleks sayı için Weyl çemberi oluşuyorsa, her kompleks sayı için Weyl çemberi oluşur. Bunu ispatlamak için λ' , Weyl çemberi üzerinde kompleks sayı olsun. O zaman λ' ile esas denklemin her çözümü $L^2(0, \infty)$ dadır.

Bu yüzden $\phi(0, \lambda') = \sin x$, $\phi'(0, \lambda') = -\cos x$ sınır koşullarını sağlayan $\phi(x, \lambda')$ çözümü $L^2(0, \infty)$ 'a aittir.

$$\Phi(x, \lambda) = - \int_0^{\infty} G(x, y, \lambda) \phi(y, \lambda') dy,$$

Burada λ reel değildir ve

$$\chi(x) = \phi(x, \lambda') + (\lambda' - \lambda) \Phi(x, \lambda).$$

O zaman $\chi(x)$, λ ile esas denklemi sağlar ve

$$\chi(0) \cos \alpha + \chi'(0) \sin \alpha = 0.$$

Ayrıca $\chi(x)$ 'nin lemma 3.1'den $L^2(0, \infty)$ 'a ait olduğu görülür.

$$\int_0^{\infty} G(x, y, \lambda') \chi(y) dy = -\Phi(x, \lambda)$$

$\chi(y)$ aynı şekilde ortadan kalkıyorsa $\phi(x, \lambda)$ da kalkar ve buradan $\phi(x, \lambda')$ 'de kalkar. Bu bir çelişkidir.

Weyl noktası durumunda (3.7)'yi ispatlamak için (3.2) ve dolayısıyla teoremin hallerini dikkate almaya gerek yoktur. (2.20) ve $\tilde{f}$ arasındaki uygun ilişkiden,

$$\frac{d^2}{dx^2} \{ \Phi(x, \lambda, \tilde{f}) + f(x) - \lambda \Phi(x, \lambda, f) \} + \{ \lambda - q(x) \} \{ \Phi(x, \lambda, \tilde{f}) + f(x) - \lambda \Phi(x, \lambda, f) \} = 0$$

ifadesi her yerde sağlanır.

$g(x) = \Phi(x, \lambda, \tilde{f}) + f(x) - \lambda \Phi(x, \lambda, f)$ fonksiyonu sonuç olarak esas denklemi her yerde sağlar ve bu yüzden

$$\int_a^x \{ q(t) - \lambda \} g(t) (x-t) dt = \int_a^x g''(t) (x-t) dt = (a-x)g'(a) + g(x) - g(a).$$

dır. Burada A ve B sabitleri vardır. Öyleki,

$$g(x) - A\theta(x, \lambda) - B\phi(x, \lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{g(t) - A\theta(t, \lambda) - B\phi(t, \lambda)\} (x-t) dt.$$

Buyüzden $g(x) = A\theta(x, \lambda) + B\phi(x, \lambda)$ olduğunu gösterir. f ve $\bar{f}$, L^2 'ye ait olduğundan $\phi(x, \lambda, f)$, $\phi(x, \lambda, \bar{f})$ ve $g(x)$ de L^2 'dedir. Weyl noktasında, sadece çözüm $\psi(x, \lambda)$ 'dır ve bu yüzden $g(x) = A\psi(x, \lambda)$ dır. Ayrıca $g(x)$, (3.7) sınır koşullarını sağlar. Yani

$$A\{\psi(0, \lambda) \cos \alpha + \psi'(0, \lambda) \sin \alpha\} = 0$$

dır. Şimdi

$$\begin{aligned} \psi(0, \lambda) &= \cos \alpha + m(\lambda) \sin \alpha, \\ \psi'(0, \lambda) &= \sin \alpha - m(\lambda) \cos \alpha, \end{aligned}$$

olsun. Böylece,

$$\psi(0, \lambda) \cos \alpha + \psi'(0, \lambda) \sin \alpha = 1. \quad (4.6)$$

dir. Buradan $A = 0$ 'dır. Bu da (4.6)'yı ispatlar.

5. WEYL-LİMİT NOKTASINI GEREKTİREN KOŞUL

Gösterilebilir ki $x \rightarrow \infty$ iken $(0, \infty)$ da verilen denklem Weyl noktası halini sağlayıp $q(x)$, $-\infty$ 'a hızlı bir şekilde gidemez. Bu durum aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 5.1: $q(x) \geq -Q(x)$ olsun, burada $Q(x)$ pozitif, sürekli ve azalmayan fonksiyon ve

$$\int_0^{\infty} \{Q(x)\}^{-\frac{1}{2}} dx$$

ıraksak olsun. O zaman denklem Weyl noktası tipindedir.

İspat:

Bunun tersini farz edelim. Yani Weyl çemberin durumu olsun. O zaman standart sınır koşullarını sağlayan $\theta(x, \lambda)$ ve $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonları herhangi reel olmayan λ için $L^2(0, \infty)$ dadır. $W(\phi, \theta) = 1$ olduğunda

$$\int_0^{\infty} \{Q(2x)\}^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\infty} \{Q(2x)\}^{-\frac{1}{2}} |\phi(x, \lambda)\theta'(x, \lambda) - \phi'(x, \lambda)\theta(x, \lambda)| dx$$

$$\leq \left\{ \int_0^{\infty} |\phi(x, \lambda)|^2 dx \int_0^{\infty} \frac{|\theta'(x, \lambda)|^2}{Q(2x)} dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_0^{\infty} |\theta(x, \lambda)|^2 dx \int_0^{\infty} \frac{|\phi'(x, \lambda)|^2}{Q(2x)} dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Çelişkiyi elde etmek için aşağıdaki integrallerin,

$$\int_0^{\infty} \frac{|\theta'(x, \lambda)|^2}{Q(2x)} dx, \tag{5.1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{|\phi'(x, \lambda)|^2}{Q(2x)} dx \quad (5.2)$$

yakınsak olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 |\phi'(x, \lambda)|^2 dx &= \int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 \phi'(x, \lambda) \phi'(x, \bar{\lambda}) dx \\ &= -\phi(0, \lambda) \phi'(0, \bar{\lambda}) - \int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 \phi(x, \lambda) \phi''(x, \bar{\lambda}) dx + \frac{2}{X} \int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right) \phi(x, \lambda) \phi'(x, \bar{\lambda}) dx \end{aligned}$$

dir. Sağdaki ikinci terim,

$$\int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 \phi(x, \lambda) \{\bar{\lambda} - q(x)\} \phi(x, \bar{\lambda}) dx,$$

ve reel kısım,

$$|\lambda| \int_0^{\infty} |\phi(x, \lambda)|^2 dx + \int_0^X |\phi(x, \lambda)|^2 Q(x) dx$$

ifadesini aşmayacaktır. Üçüncü terimin modülü de aynı şekilde

$$\frac{2}{X} \left\{ \int_0^{\infty} |\phi(x, \lambda)|^2 dx \int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 |\phi'(x, \lambda)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ifadesini aşmayacaktır. Şimdi

$$\int_0^{\infty} |\phi(x, \lambda)|^2 dx = C,$$

$$\int_0^X \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 |\phi'(x, \lambda)|^2 dx = I,$$

$$\int_0^X |\phi(x, \lambda)|^2 Q(x) dx = J$$

olsun. O zaman,

$$I \leq 1 + C|\lambda| + J + 2X^{-1}C^{1/2}I^{1/2},$$

$$(I^{1/2} - X^{-1}C^{1/2})^2 \leq J + 1 + C|\lambda| + X^{-2}C \quad (5.3)$$

dir. Eğer J, X in bir sınırlı fonksiyonu ise I da sınırlı fonksiyonudur. $F(x) = \int_0^X |\phi'(x, \lambda)|^2 dx$ de sınırlıdır.

$$F\left(\frac{1}{2}X\right) < 4 \int_0^{\frac{1}{2}X} \left(1 - \frac{x}{X}\right)^2 |\phi'(x, \lambda)|^2 dx < 4I,$$

(5.2)'de aynıdır. Benzer şekilde (5.1) için de aynı şey söylenebilir. Bu şekilde sonuca gidilir. Aksi takdirde (5.3)

$$(I^{1/2} - X^{-1}C^{1/2})^2 \leq 2J$$

eşitsizliğini verir fakat eğer X yeterince büyük ve $X \geq T$ ise

$$I \leq (2^{1/2} J^{1/2} + X^{-1} C^{1/2})^2 < 3J,$$

$$F\left(\frac{1}{2}X\right) < 12J(X) \text{ olduğunu söyleyebiliriz.}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \int_{T/2}^X \frac{|\phi'(x, \lambda)|^2}{Q(2x)} dx &= \int_{T/2}^X \frac{F'(x)}{Q(2x)} dx \\ &= \left[\frac{F(x)}{Q(2x)} \right]_{T/2}^X + \int_{T/2}^X F(x) d\left\{ -\frac{1}{Q(2x)} \right\} \\ &< 12 \frac{J(2X)}{Q(2X)} + 12 \int_0^X J(2x) d\left\{ -\frac{1}{Q(2x)} \right\} \\ &= 24 \int_0^X \frac{J'(2x)}{Q(2x)} dx \\ &= 24 \int_0^X |\phi(2x, \lambda)|^2 dx. \end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ iken sınırlı olduğundan sonuca gidilebilir. Örnek olarak a ve b pozitif sabitler olmak üzere $Q(x) = ax^2 + b$ verilebilir.

Sınır koşulları $\psi(0) = 0$ ya da $\psi'(0) = 0$ ile $(0, \infty)$ aralığı durumu gözönünde bulundurulursa,

$$D(f) = \int_0^{\infty} \{f'^2(x) + q(x) f^2(x)\} dx. \quad (5.4)$$

O zaman,

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \{\psi_n'(x)\}^2 dx &= \psi_n(\xi) \psi_n'(\xi) - \int_0^{\xi} \psi_n(x) \psi_n''(x) dx \\ &= \psi_n(\xi) \psi_n'(\xi) - \int_0^{\xi} \psi_n^2(x) \{q(x) - \lambda_n\} dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Eğer $\xi \rightarrow \infty$ iken $\psi_n(\xi)$ ve $\psi_n'(\xi)$ sıfıra yaklaşıyorsa, formül şu hale gelir.

$$D(\psi_n) = \lambda_n \int_0^{\infty} \psi_n^2(x) dx = \lambda_n. \quad (5.6)$$

Bu ifade $q(x) \rightarrow \infty$ iken de doğrudur. Herhangi bir durumda, $(0, X)$ aralığında ξ ile ilişkili integralde, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_0^X \{\psi_n'^2(x) + q(x) \psi_n^2(x)\} (X - x) dx = \frac{1}{2} \psi_n^2(X) + \lambda_n \int_0^X \psi_n^2(x) (X - x) dx.$$

(0, T) aralığında X'e bağılı integral ve bu ifadenin $\frac{1}{2}T^2$ 'ye bölünmesiyle, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_0^T \left\{ \psi_n'^2(x) + q(x)\psi_n^2(x) \right\} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^2 dx = \frac{1}{T^2} \int_0^T \psi_n^2(X) dX + \lambda_n \int_0^x \psi_n^2(x) \left(1 - \frac{x}{T}\right)^2 dx.$$

Buradan,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left\{ \psi_n'^2(x) + q(x)\psi_n^2(x) \right\} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^2 dx = \lambda_n. \quad (5.7)$$

Eğer $q(x) \geq 0$ ise, (5.6) (5.7)'dan çıkar. Bu durumda eğer $q(x)$ alt değer ile sınırlandırılırsa, biz $q(x)$ ve λ_n ile $q(x)-c$ ve $\lambda_n -c$ 'yi yer değiştirirsek formülün hala aynı kaldığı görülür. (c =sabit).

Eğer,

$$D(f, g) = \int_0^\infty \{f'(x)g'(x) + q(x)f(x)g(x)\} dx \quad (5.8)$$

İki farklı özfonksiyon ile uygun formül,

$$D(\psi_m, \psi_n) = 0. \quad (5.9)$$

dır.

Şimdi teorem 3.1 (i) durumuna uygun herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu alalım. $f(x)$ ve $\tilde{f}(x)$ 'in fourier katsayıları C_n ve $\bar{C}_n$ olarak alalım ve daha sonra, $\bar{C}_n = \lambda_n C_n$ ve parseval formülü aşağıdaki ifadeyi verir.

$$\int_0^\infty f(x) \tilde{f}(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n c_n^2. \quad (5.10)$$

Aynı zamanda,

$$\int_0^X f \tilde{f} dx = \int_0^X (f^2 q + f'^2) dx - [f f']_0^X.$$

Eğer $x \rightarrow \infty$ iken $f(x)f'(x) \rightarrow 0$ ise, aşağıdaki formül elde edilir.

$$D(f) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n c_n^2. \quad (5.11)$$

Şimdi $q(x) \geq 0$ olduğunu ve aşağıdaki integrallerin

$$\int_0^\infty f^2(x) dx, \quad \int_0^\infty f^2(x) q(x) dx, \quad \int_0^\infty f'^2(x) dx$$

yakınsaklığını varsayalım.

$$\int_0^X f' \psi_n' dx = [f \psi_n']_0^X - \int_0^X f \psi_n'' dx = f(X) \psi_n'(X) - \int_0^X f(q - \lambda_n) \psi_n dx,$$

$$\int_0^X (f' \psi_n' + q f \psi_n) dx = f(X) \psi_n'(X) + \lambda_n \int_0^X f \psi_n dx.$$

İntegraller birbirine yaklaşır ve $f(X) \psi_n'(X)$, $X \rightarrow \infty$ 'a giderken a'ya gider ve $f \psi_n'$ fonksiyonu $L(0, \infty)$ iken limit 0 olmak zorundadır. Böylece,

$$D(f, \psi_n) = \lambda_n c_n. \quad (5.12)$$

Böylece,

$$\begin{aligned} D\left(f - \sum_{n=0}^N c_n \psi_n\right) &= D(f) + \sum_{n=0}^N \lambda_n c_n^2 - 2 \sum_{n=0}^N \lambda_n c_n^2 \\ &= D(f) - \sum_{n=0}^N \lambda_n c_n^2. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n^2 \leq D(f). \quad (5.13)$$

Eğer f yukarıdaki durumları sağlarsa ve $\int_0^{\infty} f^2 dx = 1$ ise, o zaman,

$$D(f) \geq \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \lambda_0.$$

Bu durumda, bu gibi fonksiyonlar için $D(f)$ 'in minimum değeri λ_0 'dır. Benzer olarak, λ_1 , ψ_0 gibi tüm ortogonal fonksiyonlar için minimumdur.

$[0, \infty)$ aralığında verilmiş Sturm-Liouville denkleminin Weyl noktasına ait bir örnek verelim.

λ reel olmayan sayı olmak üzere,

$$-y'' = \lambda y \quad 0 \leq x < \infty$$

Sturm-Liouville denkleminin sadece bir lineer bağımsız çözümünün $L^2[0, \infty)$ uzayına ait olduğunu gösterelim. $L^2[0, \infty)$ a ait lineer bağımsız çözümlerin sayısı $\text{im} \lambda \neq 0$ olmak üzere λ dan bağımsız olduğundan dolayı basitlik için $\lambda = -i$ alalım.

$$-y'' = -iy \quad 0 \leq x < \infty$$

denkleminin karakteristik denklemi

$$-r^2 = -i \text{ dir.}$$

$$r = \pm \sqrt{i}$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$$

$$-\sqrt{i} = -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Denklemin lineer bağımsız çözümleri,

$$y_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x}$$

$$y_2 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \text{ dir}$$

$$\int_0^{\infty} |y_1|^2 dx = \int_0^{\infty} \left| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \right|^2 dx = \int_0^{\infty} |e^{\sqrt{2}x}| |e^{\sqrt{2}ix}| dx = \int_0^{\infty} |e^{\sqrt{2}x}| dx = \left. \frac{e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \right|_0^{\infty} = \infty$$

Buradan $y_1 \notin L^2[0, \infty)$ dir.

$$\int_0^{\infty} |y_2|^2 dx = \int_0^{\infty} \left| e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x} \right|^2 dx = \int_0^{\infty} |e^{-\sqrt{2}x}| |e^{-\sqrt{2}ix}| dx = \int_0^{\infty} |e^{-\sqrt{2}x}| dx = \left. -\frac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Yani $y_2 \in L^2[0, \infty)$ dir.

Böylece

$$-y'' = \lambda y \quad 0 \leq x < \infty$$

denkleminin $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ iken $L^2[0, \infty)$ uzayına ait tek çözüme sahip olduğunu gösterdik. Bu ise tanıma göre $-y''$ ifadesinin Weyl noktası durumuna sahip olduğunu gösterir.

Başka bir örnek olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad u = u(x, t), \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0 \quad (5.14)$$

$$u(0, t) \cos \alpha + u'_x(0, t) \sin \alpha = 0 \quad (5.15)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (5.16)$$

problemini gözönüne alalım. Burada $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$ olduğu varsayılmaktadır. (5.14)

denkleminin (5.15) koşulunu sağlayan $T(t)y(x)$ şeklinde çözümlerini bulalım. Bu takdirde,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (5.17)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (5.18)$$

$$T'(t) = -\lambda T(t) \quad (5.19)$$

olur. (5.17)-(5.18), teorem 3.4(ii)'ye göre $\lambda = \lambda_n, y = \psi_n(x)$ özdeğer ve özfonksiyonlarında sağlanır. Böylece (5.14) -(5.15) probleminin $y(x)T(t)$ şeklindeki çözümü

$$\psi_n(x)T(t)$$

dir. (5.19) de $\lambda = \lambda_n$ olduğunu dikkate alalım.

$$T'(t) = -\lambda_n T(t) \quad (5.20)$$

(5.20) nin genel çözümü,

$$T(t) = a_n e^{-\lambda_n t} \quad (5.21)$$

dir. Burada a_n keyfi bir sabittir. Böylece (5.14)-(5.15) probleminin,

$$y(x)T(t) = a_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

şeklinde lineer bağımsız çözümleri vardır.

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (5.22)$$

şeklinde fonksiyon (5.14)-(5.15) probleminin çözümüdür. Ama bu fonksiyon (5.16) koşulunu $\varphi(x)$ 'in özel hallerinde sağlar. Bundan dolayı (5.22) yerine formal

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (5.23)$$

serisini alalım. Bu serinin a_n katsayılarını formal olarak $u(x, 0) = \varphi(x)$ olacak şekilde seçelim.

O zaman

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n 0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

olur.

Bu eşitliğin her iki tarafının $\psi_m(x)$ ile $L^2[0, \infty)$ anlamında iç çarpımını alalım. Bu taktirde,

$$(\varphi(x), \psi_m(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\psi_n(x), \psi_m(x)) = a_m (\psi_m(x), \psi_m(x)) = a_m$$

dir. Böylece $a_m = (\varphi(x), \psi_m(x))$ şeklinde alınır

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

serisi (5.14), (5.15) ve (5.16) probleminin formal çözümü olur.

Teorem 3.4(i) ye göre $q(x) \geq 0$ olduğundan (5.14)'ün sağ tarafındaki diferansiyel ifade ve (5.15) sınır koşuluyla tanımlanan L operatörü $L^2[0, \infty)$ uzayında kendine eş pozitif operatördür. (5.14), (5.15), (5.16)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu \quad (5.24)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (5.25)$$

operator denklemi şeklinde yazılabilir. Eğer $\forall t \geq 0$ için $u(t, x) = u(t) \in D(L)$ ve $\varphi(x) \in D(L)$ olduğunu varsayarsak o zaman (5.23)de tanımlanan $u(x, t)$ fonksiyonu (5.23), (5.24) sınır değer probleminin çözümü olur. Bu çözüme (5.14)-(5.16) denkleminin genelleştirilmiş çözümü denir. Burada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\| \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 = \int_0^{\infty} \left| \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \rightarrow 0, \\ \Delta t \rightarrow 0$$

ve (5.25) sınır koşulunun sağlanması

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^\infty |u(x, t) - \varphi(x)|^2 dx = 0$$

demektir.



6. SONUÇ

Sonraki çalışmamızda sınır koşulunda spektral parametre bulunan singular Sturm-Liouville problemi için spektral açılım ve özdeğerler sayısının asimtotik ifadelerinin bulunması konusunu ele alacağız.



KAYNAKLAR

Coddington, E.A. and Levinson, N., (1955), Theory of Ordinary Differential Equations, NewYork-Toronto: London-McGraw-Hill.

Conway,B., (1978), Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag, New York

Davies, E.B., (1995), Spectral Theory and Differential Operators, University Press, Cambrudige.

Fulton, T.C. and Pruesses, S. A.,(1994), "Eigenvalue and Eigenfunctions Asymptotics for Regular Sturm-Liouville Problems", J.Math. Anal. Appl. 188, 297-340.

Kodaira, K., (1949), Eigenvalue for Ordinary Differential Equations of The Second Order and Heisenbeg's Theory of S-matrices, Amer. J. of Math.71, 991-945.

Krein M. G., (1950), $(0, \infty)$ Aralığında Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi ve Bir Sınıf İntegral Denklemler Üzerine, Dokl. AN SSSR 74, 9-12. (R).

Levitan, B.M and Sargsyan,I.S., (1991), Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluzeer, Dordrechz..

Titchmarsh, E.C., (1962), Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations,Part I Oxford: Clarendan Press.

Weyl.G., (1910), Über Gewöhnliche Differential Glauchhengen Mit Singularitalen Und Die Zugehörigen Entwicklungen Willkürlicher Functioten, Math. Ann. 68, 222-269.

Yosida.K., (1960), Lectures on Differential and İntegral Equations, Interscience.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	25.05.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	Kazım İşmen Lisesi
Lisans	1994-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fak. Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Müh. Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1998-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

