

**SİNGÜLER TEDİRGEMELİ İKİ-NOKTA SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER YAKLAŞIMI TABANLI
ÇOK NOKTA SINIR DEĞER ÇÖZÜMÜNÜN BİLGİSAYARDA
YAPTIRILMASI**

Çelebi ULUYOL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK-BİLGİSAYAR EĞİTİMİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

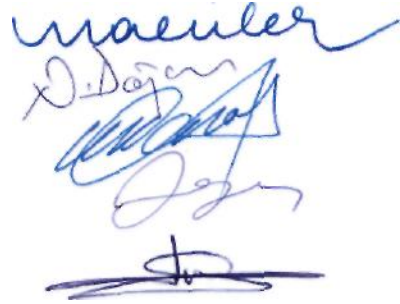
**NİSAN 2006
ANKARA**

Çelebi ULUYOL tarafından hazırlanan SİNGÜLER TEDİRGEMELİ İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER YAKLAŞIMI TABANLI ÇOK NOKTA SINIR DEĞER ÇÖZÜMÜNÜN BİLGİSAYARDA YAPTIRILMASI adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Yrd.Doç.Dr. Nurettin DOĞAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Elektronik ve Bilgisayar Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İnan GÜLER
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin DOĞAN
Üye: : Yrd. Doç. Dr. M. Rahmi CANAL
Üye : Yrd. Doç. Dr. H. Hüseyin SAYAN
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mahir DURSUN
Tarih : 18 / 04 / 2006



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Çelebi ULUYOL

**SİNGÜLER TEDİRGEMELİ İKİ-NOKTA SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER YAKLAŞIMI TABANLI ÇOK
NOKTA SINIR DEĞER ÇÖZÜMÜNÜN BİLGİSAYARDA YAPTIRILMASI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Çelebi ULUYOL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2006**

ÖZET

Tedirgeme teorisi, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin genel davranışının sistematik analizi için oluşturulan metotlar bütünüdür. Singüler tedirgemeli ikinci mertebeden iki-nokta sınır değer problemleri pratikte çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Uygulamalı matematiğin diğer dallarında, akışkanlar mekaniğinde ve yörünge sistemlerinde çok sık kullanılmaktadır. Dolayısıyla problemlerin çözümü için elde edilen sayısal sonuçlar bir kez daha önem kazanmaktadır. Bu çalışmada başlangıç değer yaklaşımı ile çok nokta sınır değer probleminin çözümü için bir algoritma verilmiş, bu algoritmanın bilgisayarda uygulanması için MATLAB kullanılmıştır. MATLAB yardımıyla elde edilen sonuçların, gerçek çözümler ve elde edilen diğer çözümlerle karşılaştırıldığında oldukça iyi sonuçların elde edildiği görülmüştür.

Bilim Kodu : 702.1.014
Anahtar Kelimeler : Singüler tedirgeme, iki nokta sınır değer problemi, atış metodu, sonlu fark metodu, başlangıç değer yaklaşımı
Sayfa Adedi : 77
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Nurettin DOĞAN

**MULTIPOINT BOUNDARY VALUE SOLUTION OF SINGULARLY
PERTURBED TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS BASED ON
INITIAL-VALUE APPROACH**

(M.Sc. Thesis)

Çelebi ULUYOL

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

April 2006

ABSTRACT

Perturbation theory is total of methods for systematic analysis of general behaviours of the differential equation solutions. Singular perturbed second order two-point boundary value problems are applied in a wide area. That problems are most used in applied mathematics, fluid mechanics and orbit systems. Consequently, numerical results obtained after the solution of problems are especially considerable. In this thesis, an algorithm was given for solving multipoint boundary value problems with initial value approach and MATLAB was used for the application of this algorithm on computer. It was obvious that results are quite well when it was compared with the real and the other solutions.

Science Code	: 702.1.014
Key Words	: Singular perturbation, two-point boundary value problem, shooting method, finite difference method, initial-value approach
Page Number	: 77
Adviser	: Assist.Prof. Dr. Nurettin DOĞAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nurettin DOĞAN' a, tez çalışmamda hep yanımda olan değerli hocam ve bölüm başkanım Prof. Dr. H. İbrahim YALIN' a, kıymetli katkılarıyla çalışmama yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Tolga GÜYER' e, yine kıymetli katkılarıyla her zaman yanımda olan manevi desteğini aldığım arkadaşım araştırma görevlisi Oğuzhan KÜÇÜK' e ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	5
2.1. Diferensiyel Denklemler	5
2.2. Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri	9
2.3. Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözüm Metotları	10
2.3.1. Euler metodu	10
2.3.2. Runge-Kutta metodu	14
3. İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	22
3.1. Temel Bilgiler	22
3.2. İki Nokta Sınır Değer Probleminin Kullanıldığı Yerler	28
3.3. Atış Metodu	29
3.3.1. Sonraki α' yı seçme	31
3.4. Sonlu Fark Metodu	43
4. SİNGÜLER TEDİRGEMELİ İKİ NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ ...	46

Sayfa

4.1. Singüler Tedirgemenin Doğuşu ve Kullanıldığı Yerler.....	47
4.2. Singüler Tedirgemeli İki Nokta Sınır Değer Problemlerinin Çözümünde Başlangıç Değer Yaklaşımı.....	50
4.2.1. Başlangıç değer yaklaşımı	51
4.3. Başlangıç Değer Yaklaşımı Kullanılarak Singüler Tedirgemeli İki- Nokta Sınır Değer Problemlerinin Çok Nokta Sınır Değer Çözümü	52
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	73
KAYNAKLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ.....	77

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ denklemin Euler metodu kullanılarak yaklaşık çözümü.....	10
Çizelge 2.2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ denkleminin Euler metodu kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri.....	11
Çizelge 2.3. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için Euler ve Runge- Kutta metodu sonuçları.....	15
Çizelge 2.4. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için $h=0,1$ değeri kullanılarak elde edilen Euler, Runge-Kutta metodu ve gerçek fonksiyon sonuçları.....	15
Çizelge 2.5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar.....	16
Çizelge 2.6. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,5) = 2,0670$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar.....	17
Çizelge 2.7. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,9) = 14,3049$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar.....	17
Çizelge 3.1. Durum 1 için elle yapılan SHOOT1.M isimli Matlab çözüm prosedürü.....	33
Çizelge 3.2. SHOOT1.M dosyasını çözen SHOOTF.M Matlab fonksiyon dosyası.....	34
Çizelge 3.3. SHOOT1.M prosedürünün çalıştırılması sonucunda Matlab günlüğünden alınan açıklayıcı notlar.....	34

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.4. ALF' nin her bir değerini oluşturan SHOOT2.M Matlab çözüm prosedürü.....	35
Çizelge 3.5. Otomatik iterasyon prosedürü (SHOOTA.M Matlab prosedürü).....	38
Çizelge 4.1. Singüler tedirmeli iki nokta sınır değer problemlerinin çözümü ile ilgili özet bilgiler.....	53
Çizelge 4.2. $y(x) = e^{x-1} + e^{x-0.4585} \cdot e^{-\frac{(x+1)}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar.....	56
Çizelge 4.3. $y(x) = (x^2 + x - 1) + e^{-\frac{x}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar.....	60
Çizelge 4.4. $y(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\frac{x^2}{4}}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar.....	64

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Atış metodunun şematik olarak gösterilmesi.....	27
Şekil 3.2. Durum 1 için ALF' nin üç farklı değeri kullanılarak elde edilen çözüm eğrileri.....	37
Şekil 3.3. Otomatik iterasyon prosedürü sonucunda elde edilen çözüm eğrisi.....	40
Şekil 4.1. $y(x) = e^{x-1} + e^{x-0.4585} \cdot e^{-\frac{(x+1)}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler.....	57
Şekil 4.2. $y(x) = (x^2 + x - 1) + e^{-\frac{x}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler.....	61
Şekil 4.3. $y(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\frac{x^2}{4}}{\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler.....	65

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklama
BDY	Başlangıç Değer Yaklaşımı

1. GİRİŞ

Bir bilinmeyen fonksiyonu, bir veya birkaç türevini içeren denklemler diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Bir diferensiyel denklem içerisindeki bilinmeyen fonksiyon yalnız bir tek bağımsız değişkene bağlıysa diferensiyel denklem adi diferensiyel denklem adını alır. Eğer bilinmeyen fonksiyon iki ya da daha fazla değişkene bağlıysa diferensiyel denklem kısmi türevler içerir ve denklem kısmi diferensiyel denklem adını alır.

Diferensiyel denklem çalışmalarının başlıca amacı, özel bir durumu ifade etmek ve bu duruma uygun kesin ya da yaklaşık çözümleri bulmaktır. Ayrıca bulunan bu çözümleri yorumlayıp davranışın nasıl olacağına karar vermektir.

Diferensiyel denklem çalışmaları içerisinde denklemin bir çözümü olabilir, denklemin birden fazla ya da sonsuz çözümü olabileceği gibi denklemin hiç çözümü de olmayabilir. Denklem sistemlerinin çözümünde bazen çok fazla zorluklarla karşılaşmak mümkündür. Bütün bu zorlukları gidermek için, diferensiyel denklemin çözümüne çeşitli yaklaşık yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemler sayısal ve analitik olmak üzere iki gruba ayrılabilir:

1. Sayısal yöntem: Bu yöntemin uygulanmasıyla ele alınan problemin çözümünün belli noktalarda yaklaşık değerleri bulunur.
2. Analitik yöntem: Bu yöntemin uygulanmasıyla ele alınan problemin çözümü analitik şekilde, yani yaklaşık veya kesin belli bir ifade şeklinde bulunur.

Adi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin en belirgin özelliği, belirli bir diferensiyel denklemin, değişen başarı ve etkinlik derecelerinde oldukça fazla sayıda yöntemle çözülebilmesidir. Var olan sayısal teknikler, diferensiyel denklemlerin doğrusal veya doğrusal olmayan özelliklerinden ya da başlangıç ve sınır koşullarından fazlaca etkilenmeden küçük değişikliklerle farklı tipte diferensiyel denklem çözümlerine uygulanabilirler. Bir diferensiyel denkleme analitik bir çözüm

ararken, söz konusu diferensiyel denklemin tipine uygun bir yöntem arama zorunluluğu karşısında, sayısal çözümler genel olarak diferensiyel denklemin biçiminden bağımsızdır. Lineer diferensiyel denklemlerin tam analitik çözümlerinde bile kayda değer güçlüklerle karşılaşılabilir. Buna ek olarak lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam analitik çözümleri ise bazen olanaksızdır. Bu koşullar, diferensiyel denklemlerin çözümü için etkin sayısal yöntemlerin geliştirilmesini zorlamıştır.

Diferensiyel denklemler için var olan sayısal çözüm teknikleri oldukça güçlü olmasına rağmen, bu sayısal yöntemlerin kendilerine özgü güçlükleri de vardır.

Bu tez içerisinde diferensiyel denklemlerin çözümünün belli noktalardaki yaklaşık değerlerini bulan sayısal yöntemlerle ilgili örnekler verilmiş, diferensiyel denklemlerin sayısal yöntemlerle çözümünde pratikte çok yaygın şekilde kullanılan Euler ve Runge-Kutta yöntemleri açıklanmıştır. Ayrıca Euler ve Runge-Kutta yöntemleri kullanılarak diferensiyel denklemlerin çözümüne örnekler verilmiştir.

Euler yöntemi diferensiyel denklemlerin, dolayısıyla yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin sayısal çözümü için kolaylıkla genelleştirilebilir. Euler yöntemi basit ve kullanışlıdır. Ancak kesinliği yüksek değildir. Kesinliği yükseltmek için h adımını çok daha küçük almak gerekir. Bu ise daha fazla hesaplama gerektirecektir. Bu eksiklikleri gidermek için Euler yönteminin, düzenlenmiş Euler yöntemi gibi çeşitli geliştirilmiş biçimleri kullanılmaktadır.

Bir diferensiyel denklem hem Euler hem de Runge-Kutta uygulanarak çözüldüğünde, Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen sonuçların Euler yöntemi ile elde edilen sonuçlara göre daha doğru olduğu görülmektedir.

Tüm koşulların bağımsız değişkenin bir tek değerinde tanımlandığı problem başlangıç değer problemi olarak adlandırılır. Koşulların bağımsız değişkenin iki ve daha fazla değeri için belirlendiği problem ise sınır değer problemi olarak

adlandırılır. Bu tez içerisinde başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin sayısal olarak çözümü anlatılmış ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Sınır değer problemleri içerisinde geniş bir kullanım alanına sahip problemlerden bir tanesi de iki-nokta sınır değer problemleridir. İki-nokta sınır değer problemleri uygulamalı matematik, teorik fizik, mühendislik, sınır teorisi, yıldızlarla ilgili iç çalışmalarda ve kontrol teorisi gibi alanlarda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Pratikte karşılaşılan iki-nokta sınır değer problemlerine elde edilen analitik çözümlerin genellikle imkansız olması, bu problemlerin sayısal metotlarla çözülmesini gerekli kılmıştır.

İki-nokta sınır değer problemleri içerisinde değinilmesi gereken çok önemli bir nokta da tedirgeme teorisidir. Tedirgeme teorisi, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin genel davranışının sistematik analizi için oluşturulan metotlar bütünüdür. Tedirgeme teorisinin genel prosedürü küçük bir parametre tanımlamaktır. Tanımlanan bu parametre genellikle ϵ ile gösterilir. ϵ içeren problemlere yaklaşık çözümler bulmak için kullanılan geniş metotlar topluluğu tedirgeme teorisi olarak adlandırılır.

Singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemlerinin pratikte çok yaygın olarak kullanılması, ayrıca bu problemlere uygulanan analitik çözümlerin genellikle yetersiz kalması, bu metotların sayısal yöntemlerle çözümünün önemini ortaya koymaktadır. İki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde farklı yöntemler kullanılmaktadır. Atış metodu ve sonlu fark metodu bu problemlere etkili çözümler sunmaktadır. Bu çalışma içerisinde atış metodu ve sonlu fark metodu çeşitli örneklerle detaylı olarak ele alınmıştır. Örnekler MATLAB içerisinde yürütülmüş ve nümerik olarak elde edilen sonuçlar ortaya konmuştur.

Bu tez çalışması içerisinde singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer probleminin çözümünde başlangıç değer tabanlı yaklaşım ele alınmıştır. Ele alınan bu yaklaşım detaylı olarak sunulmuş, bu konu üzerine yayınlanmış makaleler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemlerinin atış metodu

ve sonlu fark metodu ile çözümünü örnekler üzerinde anlatılmıştır. Literatür taraması yapılmış ve bu konu üzerine yayınlanan basılı kaynaklar taranmıştır. Yapılan bütün araştırmalar sonucunda singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer probleminin başlangıç değer tabanlı yaklaşımı ile çok nokta sınır değer çözümü yapılmıştır. Başlangıç değer tabanlı yaklaşım ile yapılan çok nokta sınır değer çözümleri MATLAB içerisinde yürütülmüştür. Bu yaklaşım sonucunda elde edilen sayısal değerlerin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu sonucuna varılmıştır. Bu yöntem ile gerçeğe çok yakın sayısal sonuçların elde edilmesi yöntemin etkili olduğunu ortaya koymaktadır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Diferansiyel Denklemler

Bir bilinmeyen fonksiyonu ve fonksiyonun bağımsız değişkene göre türev ve diferansiyellerini içeren denklemler, diferansiyel denklem olarak adlandırılır[1].

2.1. Örnek

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

diferansiyel denklemi hem bilinmeyen $x(t)$ fonksiyonunu hem de fonksiyonun birinci türevi olan $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, yi içermektedir[1].

2.2. Örnek

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

diferansiyel denklemi bilinmeyen y fonksiyonunu, fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri olan y' ve y'' ifadelerini içermektedir.

Aşağıda diferansiyel denklemlere çeşitli örnekler verilmiştir.

a) $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$

b) $e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

$$c) 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0$$

$$d) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Bir diferensiyel denklem içerisindeki bilinmeyen fonksiyon yalnız bir tek bağımsız değişkene bağlıysa bu denklem adi diferensiyel denklem adını alır. Bağımlı değişken iki ya da daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonuysa, kısmi türevler içerilir ve denklem kısmi türevli denklem adını alır. Yukarıdaki örneklerde ilk üç denklem sadece bir değişkene (x) bağlı olduğu için adi diferensiyel denklemlerdir. Son örnekte ise bilinmeyen fonksiyon birden fazla değişkene (t ve x) bağlı olduğu için kısmi türevli denklemdir.

Diferensiyel denklem çalışmalarının başlıca üç amacı vardır [1]:

- Özel bir fiziksel durumu tarif eden denklemi bulmak
- Bu denkleme uygun kesin ya da yaklaşık çözümü bulmak
- Bulunan çözümü yorumlamak

Diferensiyel denklemin mertebesi denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. Yukarıda verilmiş olan diferensiyel denklemlerden a' daki denklem birinci mertebeden, b ve d' deki diferensiyel denklem ikinci mertebeden, c' deki diferensiyel denklem ise üçüncü mertebeden diferensiyel denklemdir [2].

Bir diferensiyel denklem $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = F(x)$ formunda ise, burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ ve F , x ' e bağlı fonksiyonlardır ve diferensiyel denklem lineer diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Bu formda yazılamayan diferensiyel denklemler ise lineer olmayan diferensiyel denklem olarak adlandırılır[3].

2.3. Örnek

$y'' + x^2 y' + (\sin x)y = e^x$ diferensiyel denklemi ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemdir.

$xy''' + 4x^2 y' - \frac{2}{1+x^2} y = 0$ diferensiyel denklemi üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemdir.

$y'' + x \sin(y') - xy = x^2$ diferensiyel denklemi ikinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemdir.

$y'' - x^2 y' + y^2 = 0$ diferensiyel denklemi ikinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemdir [3].

Birinci ve ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemler genel olarak şu şekilde gösterilir:

$$a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x)y = F(x)$$

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

Ayrıca birinci mertebeden bir diferensiyel denklem $x' = p(t)x + q(t)$ formunda da yazılabilir. Burada $p(t)$ ve $q(t)$, $a < t < b$ aralığında tanımlı sabitlerdir. Eğer bu formda yazılmış diferensiyel denklem içerisinde $q(t)$ değeri 0 ise denklem homojendir. $q(t)$ değeri 0'a eşit değilse denklem homojen değildir [4].

$x' = -rx$ diferensiyel denklemi homojen bir diferensiyel denklemdir.

$x' = g - cx$ diferensiyel denklemi homojen olmayan bir diferensiyel denklemdir.

$y' = t^2 y$ diferensiyel denklemi lineer homojen bir diferensiyel denklemdir.

$(\cos t)y' + e^t y = \sin t$ diferensiyel denklemi lineer fakat homojen değildir.

$\frac{y'}{y} + t^3 = \sin t$ diferensiyel denklemi lineer ve homojen bir diferensiyel denklemdir.

Bir başlangıç şartı ile verilen diferensiyel denklem başlangıç değer problemi olarak ifade edilir. Başlangıç değer problemleri, diferensiyel denklemin genel çözümüne başlangıç şartlarını uygulayarak çözülür [5].

Genel halde bir diferensiyel denklemin çözümü sonsuz sayıda olabilir. Bir diferensiyel denklem tek bir sürecin değil, benzer yapıdaki sonsuz sayıda sürecin matematiksel ifadesi olarak meydana çıkar. Bu süreçlerden herhangi birini incelemek için denklemin çözüm kümesinden verilmiş sürece karşı gelenini bulmak gerekir.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ şeklinde olan denklem için bu problem başlangıç değerleri denilen iki değeri göz önüne almakla çözülür. Bu denklemin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan $y(x)$ çözümünün bulunmasına başlangıç değer problemi veya Cauchy problemi denir. x_0, y_0 değerleri başlangıç değerleri olarak adlandırılır [6].

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

Yukarıda ilk olarak diferensiyel denklem verilmiştir. Altında ise başlangıç noktasında y fonksiyonunun aldığı değer belirtilmiştir. Başlangıç durumu, denklem çözümü içindeki sabit değer hesabında kullanılır [5].

2.2. Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Diferensiyel denklemde yerine konulduğunda denklemi özdeş olarak sağlayan bağıntılara diferensiyel denklemin çözümleri adı verilir.

Diferensiyel denklemlerin çözümünde çeşitli zorlukları giderebilmek için, diferensiyel denklemlerin çözümüne çeşitli yaklaşık yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemler sayısal ve analitik olmak üzere iki ana gruba ayrılır [7]:

1. Sayısal yöntem: Bu yöntemin uygulanmasıyla, ele alınan problemin çözümünün belli noktalarda yaklaşık değerleri bulunur
2. Analitik yöntem: Bu yöntemin uygulanmasıyla, ele alınan problemin çözümü analitik şekilde, yani belli bir ifade (yaklaşık veya kesin) şeklinde bulunur

Çoğu diferensiyel denklemin kesin çözümü yoktur. Kesin çözüm olsa bile çözüm amaçlara hizmet etmeyecek şekilde karışık olabilir. Bunun yanında birçok diferensiyel denklemi çözmede kullanılan çok çeşitli sayısal metotlar bulunmaktadır. Diferensiyel denklemin türüne göre çözümü kolaylaştıran sayısal metotlar tercih edilir[8].

Diferensiyel denklemlerin sayısal çözümünde en basit yöntem Euler metodudur[9].

Diferensiyel denklemlerin sayısal olarak çözümünde problemin türüne göre Euler metodundan çok daha yaklaşık çözümler sunan metotlar şunlardır[10]:

- Integral denklemleri
- Heun metodu
- Taylor Serileri
- Runge-Kutta metodu

2.3. Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözüm Metotları

2.3.1. Euler metodu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemi verilsin. h adım büyüklüklü Euler yöntemi, $x_1, x_2, x_3, \dots$ noktalarında $y = y(x)$ tam çözümünün $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$ gerçek değerlerine yaklaşıklıklar olan, $y_1, y_2, y_3, \dots$ değerlerini hesaplamak için aşağıdaki ardışık formülün uygulanmasından ibarettir:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \quad n \geq 0$$

Verilen bu ardışık yaklaşım formülü, y_n ile y_{n+1} arasındaki tipik bir adımın nasıl olması gerektiğini anlatmaktadır. Bu, Euler yönteminin özüdür[11].

2.4. Örnek

$0 \leq x \leq 1$ aralığındaki $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemine $h=0,1$ değeriyle Euler metodunu uygulayarak yaklaşık çözümü bulalım [1].

Çözüm

$f(x, y) = x + y$ ve $y_{n+1} = y_n + h * (x_n + y_n)$ formülleri verilmiştir. Ayrıca $x_0 = 0$ da $y_0 = 1$ değeri verilmiştir. Bu değer yerine konulursa ilk üç yaklaşık değer aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y_1 = 1,0000 + (0,1) * (0,0 + 1,0000) = 1,1000$$

$$y_2 = 1,1000 + (0,1) * (0,1 + 1,1000) = 1,2200$$

$$y_3 = 1,2200 + (0,1) * (0,2 + 1,2200) = 1,3620$$

Çizelge 2.1 on adım sonunda elde edilen yaklaşık değerleri göstermektedir. Ayrıca Çizelge 2.1’ de gerçek değerle beraber her bir adımdaki $y_{gerçek} - y_{yaklaşık} = y(x_n) - y_n$ hata değeri de verilmiştir. Çizelge 2.1’ deki son sütun ise her bir yaklaşım değerinde $100 * (y_{gerçek} - y_{yaklaşık}) / y_{gerçek}$ hata yüzdesini vermektedir. Bu hata yüzdesi $x_1 = 0,1$ noktasında 0,93 % iken $x_{10} = 1,0$ ’ da 7,25 % olmaktadır [1].

Çizelge 2.1. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ denklemin Euler metodu kullanılarak yaklaşık çözümü

n	x_n	Yaklaşık y_n	Gerçek $y(x_n)$	Hata $y(x_n) - y_n$	Hata Yüzdesi
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
1	0,1	1,1000	1,1103	0,0103	0,93%
2	0,2	1,2200	1,2428	0,0228	1,84%
3	0,3	1,3620	1,3997	0,0377	2,69%
4	0,4	1,5282	1,5836	0,0554	3,50%
5	0,5	1,7210	1,7974	0,0764	4,25%
6	0,6	1,9431	2,0442	0,1011	4,95%
7	0,7	2,1974	2,3275	0,1301	5,59%
8	0,8	2,4872	2,6511	0,1639	6,18%
9	0,9	2,8159	3,0192	0,2033	6,73%
10	1,0	3,1875	3,4366	0,2491	7,25%

2.5. Örnek

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin $[0,1]$ aralığındaki $h=0,1$ Euler metodu ile yaklaşık çözümünü bulalım [1].

Çözüm

$f(x, y) = x^2 + y^2$, dolayısıyla Euler formülü $y_{n+1} = y_n + h * (x_n^2 + y_n^2)$ şeklindedir. $h = 0,1$ ile,

$$\begin{array}{ll} y_1 = 1,1000 & y_6 = 2,1995 \\ y_2 = 1,2220 & y_7 = 2,7193 \\ y_3 = 1,3753 & y_8 = 3,5078 \\ y_4 = 1,5735 & y_9 = 4,8023 \\ y_5 = 1,8371 & y_{10} = 7,1895 \text{ olarak bulunur.} \end{array}$$

Çizelge 2.2, $h=0,1$, $h=0,02$ ve $h=0,005$ adımlarında bulunan fonksiyon değerlerini göstermektedir [1].

Çizelge 2.2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ denkleminin Euler metodu kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri

x	y (h=0,1)	y (h=0,02)	y (h=0,005)
0,1	1,1000	1,1088	1,1108
0,2	1,2220	1,2458	1,2512
0,3	1,3753	1,4243	1,4357
0,4	1,5735	1,6658	1,6882
0,5	1,8371	2,0074	2,0512

Çizelge 2.2. (Devam) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ denkleminin Euler metodu kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri

x	y (h=0,1)	y (h=0,02)	y (h=0,005)
0,6	2,1995	2,5201	2,6104
0,7	2,7193	3,3612	3,5706
0,8	3,5078	4,9601	5,5763
0,9	4,8023	9,0000	12,2061
1	7,1895	30,9167	1502,209

Çizelge 2.2' ye bakılarak bulunan sonuçlar şu şekilde yorumlanabilir:

Kesin başlangıç değerlerinin sayısal çözümünde çeşitli tuzaklar bulunmaktadır. Seçilen bir h adımı ile uygulanan Euler metodu tam doğru sonucu vermeyebilir. $h/2$, $h/5$ ya da $h/10$ gibi daha küçük adımlarla uygulanan Euler metodu daha doğru sonuçlar verebilir. Bazı problemler doğru sonuçlar elde edilebilmesi için daha güçlü ve daha doğru metotlar gerektirir.

2.6. Örnek

$\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini $h=0,1$ değerini kullanarak Euler metoduyla MATLAB programında çözelim [1].

Çözüm

Function $yp=f(x,y)$

$yp=x+y$;

function $[X,Y]=rk(x,y,x1,n)$

$h=(x1-x)/n$;

```

X=x;
Y=y;
For i=1:n
    y=y+h*f(x,y);
    x=x+h;
    X=[X;x];
    Y=[Y;y];
end

```

Örnekte verilmiş olan $\frac{dy}{dx} = x + y$ ifadesi MATLAB programı içerisinde fonksiyon olarak tanımlanmış ve fonksiyon sonucunda dönen değeri tutacak değişken ismi yp olarak adlandırılmıştır. Fonksiyon içerisindeki h değişkeni Euler içindeki adım aralığı için tanımlanmıştır. n ise toplam adım sayısını göstermektedir. Adım aralığını artırmak veya azaltmak için adım sayısı n değerini değiştirmek yeterli olacaktır. Euler metodunu $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ gibi farklı bir denkleme uygulamak için sadece f değerini bulan fonksiyonu değiştirmek yeterlidir. rk fonksiyonu , başlangıç değeri x' i, başlangıç değeri y' yi, x' in son değeri olan x1' i ve adım sayısı olan n değerini giriş olarak alır. MATLAB içerisinde kullanılan [X,Y]=rk(x,y,x1,n) komut satırı sonucunda fonksiyonun döndüreceği değer X ve Y değişkenlerinde tutulmaktadır.

2.3.2. Runge-Kutta metodu

Pratikte geniş bir kullanım alanına sahip olan Runge-Kutta metodu, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemine Euler metoduna göre oldukça doğru çözümler sunmaktadır. Alman matematikçiler Carl Runge (1856–1927) ve Wilhelm Kutta (1867–1944) tarafından geliştirilmiştir [1].

Runge-Kutta metodu diferensiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanımı en

yaygın olan metotlardan birisidir. Runge-Kutta metodunun belirleyici özellikleri şöyle özetlenebilir [12]:

- Programlanması basittir
- Kararlılık karakteristikleri olumludur
- Herhangi bir karmaşıklığa neden olmadan adım büyüklükleri isteğe göre değiştirilebilir
- Çözümün başında özel hesaplamaları gerektirmez

Bütün olumlu taraflarının yanında bu yöntemin belirli olumsuzlukları da vardır. Bunlardan birisi, eş duyarlılıktaki diğer yöntemlere kıyasla daha fazla bilgisayar zamanına gereksinim duymasıdır. Bir başka olumsuzluk ise, yerel hatanın hesaplanmasında belirli güçlükler çıkarmasıdır [12].

Olumlu yanları olumsuz yanlarına kıyasla fazla olan Runge-Kutta metodu diferensiyel denklemin biçiminden bağımsız olarak başarı ile uygulanabilir [12].

Klasik dördüncü mertebe Runge-Kutta bağıntılarında kullanılan genel algoritma şöyledir [1]:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$y_1, y_2, y_3, \dots$ yaklaşımlarını hesap etmek için bu formülün kullanılması Runge-Kutta

metodunu oluşturur. $k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ ifadesi yerine yazılacak olursa $y_{n+1} = y_n + hk$ eşitliği bulunur.

2.7. Örnek

$\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini $h=0,5$ değerini kullanarak Runge–Kutta metoduyla çözelim [1].

Çözüm

Problemin tam çözümü $y(x) = 2e^x - x - 1$ ’ dir. $h=0,5$ olarak verildiği için $x=0$ değerinden $x=1$ değerine yalnızca iki adım atılır. İlk olarak k değerleri hesap edilir.

$$k_1 = 0 + 1 = 1$$

$$k_2 = (0 + 0,25) + (1 + 0,25 * 1) = 1,5$$

$$k_3 = (0 + 0,25) + (1 + 0,25 * 1,5) = 1,625$$

$$k_4 = 0,5 + (1 + 0,5 * 1,625) = 2,3125 \text{ olarak bulunur. Sonra,}$$

$$y_1 = 1 + \frac{0,5}{6}[1 + 2 * 1,5 + 2 * 1,625 + 2,3125] \approx 1,7969 \text{ olarak bulunur. Aynı şekilde}$$

$$y_2 \approx 3,4347 \text{ olarak elde edilir.}$$

Çizelge 2.3, $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemine $h=0,1$ değeri alınarak uygulanan Euler metodu sonuçlarını ve $h=0,5$ değeri kullanılarak Runge–Kutta metodu uygulanması sonucunda çıkan değerleri göstermektedir [1].

Çizelge 2.3. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için Euler ve Runge-Kutta metodu sonuçları

Euler metodu sonuçları			Runge-Kutta metodu sonuçları		
x	y(h=0,1)	Hata	y(h=0,5)	Hata yüzdesi	Gerçek y
0,0	1,0000	0,00%	1,0000	0,00%	1,0000
0,5	1,7949	0,14%	1,7969	0,03%	1,7974
1,0	3,4282	0,24%	3,4347	0,05%	3,4366

$\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için $h=0,1$ adım değeri için $[0,1]$ aralığındaki Euler, Runge-Kutta ve gerçek y fonksiyon değerleri Çizelge 2.4' de görülmektedir [1].

Çizelge 2.4. $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için $h=0,1$ değeri kullanılarak elde edilen Euler, Runge-Kutta metodu ve gerçek fonksiyon sonuçları

x	Euler y	Runge-Kutta y	Gerçek y
0,1	1,1100	1,110342	1,110342
0,2	1,2421	1,242805	1,242806
0,3	1,3985	1,399717	1,399718
0,4	1,5818	1,583648	1,583649
0,5	1,7949	1,797441	1,797443
0,6	2,0409	2,044236	2,044238
0,7	2,3231	2,327503	2,327505
0,8	2,6456	2,651079	2,651082
0,9	3,0124	3,019203	3,019206
1	3,4282	3,436559	3,436564

Çizelge 2.4 yorumlanırsa, $x=1$ noktasında elde edilen Euler değeri içindeki hata 0,24% civarında iken, Runge–Kutta ile elde edilen değerdeki hata 0,00012% civarındadır. Buradan şu sonuca varılabilir: Runge–Kutta metoduyla yapılan çözüm yaklaşık 2000 kez daha doğrudur [1].

2.8. Örnek

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemine Runge–Kutta metodunun uygulayalım.

Çözüm

Çizelge 2.5, $[0,0-0,9]$ aralığındaki $h=0,1$, $h=0,05$ ve $h=0,025$ adım aralıkları kullanılarak elde edilen Runge–Kutta sonuçlarını vermektedir [1].

Çizelge 2.5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar

x	y(h=0,1)	y(h=0,05)	y(h=0,025)
0,1	1,1115	1,1115	1,1115
0,3	1,4397	1,4397	1,4397
0,5	2,0670	2,0670	2,0670
0,7	3,6522	3,6529	3,6529
0,9	14,0218	14,2712	14,3021

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,5) = 2,0670$ başlangıç değer problemine Runge–Kutta metodu uygulansın. Çizelge 2.6, $[0,5-0,9]$ aralığındaki $h=0,01$, $h=0,005$ ve $h=0,0025$ değerleri kullanılarak elde edilen sonuçları göstermektedir [1].

Çizelge 2.6. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,5) = 2,0670$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar

X	y(h=0,01)	y(h=0,005)	y(h=0,0025)
0,5	2,0670	2,0670	2,0670
0,6	2,6440	2,6440	2,6440
0,7	3,6529	3,6529	3,6529
0,8	5,8486	5,8486	5,8486
0,9	14,3048	14,3049	14,3049

Burada $y(0,9) \approx 14,3049$ sonucu çıkmaktadır. Son olarak Çizelge 2.7, $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,9) = 14,3049$ başlangıç değer problemi için $[0,90-0,95]$ aralığındaki sonuçları göstermektedir. Burada ise adım aralıkları $h=0,002$, $h=0,001$ ve $h=0,0005$ olarak alınmıştır [1].

Çizelge 2.7. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0,9) = 14,3049$ başlangıç değer probleminin Runge-Kutta ile çözümünden elde edilen sonuçlar

x	y(h=0,002)	y(h=0,001)	y(h=0,0005)
0,90	14,3049	14,3049	14,3049
0,91	16,7024	16,7024	16,7024
0,92	20,0617	20,0617	20,0617
0,93	25,1073	25,1073	25,1073
0,94	33,5363	33,5363	33,5363
0,95	50,4722	50,4723	50,4723

Çıkan yaklaşık son değer $y(0,95) \approx 50,4723$ olarak çıkmaktadır. $x=0,95$ noktasındaki çözümün gerçek değeri $y(0,95) \approx 50,471867$ ' dir. Noktadan sonraki dört hane için gerçek çözüme epey yaklaşıldığı görülmektedir.

2.9. Örnek

$\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini $h=0,1$ değerini kullanarak Runge-Kutta metoduyla MATLAB programında çözelim [1].

Çözüm

```
Function yp = f(x,y)
yp=x+y;
function [X,Y] = rk(x,y,x1,n)
h=(x1-x)/n;
X=x;
Y=y;
For i=1:n
    k1=f(x,y);
    k2=f(x+h/2,y+h*k1/2);
    k3=f(x+h/2,y+h*k2/2);
    k4=f(x+h,y+h*k3);
    k=(k1+2*k2+2*k3+k4);
    x=x+h;
    y=y+h*k;
    X=[X,x];
    Y=[Y,y];
end
```

Programda adım sayısını değiştirmek için ilk satırdaki n değerini değiştirmek yeterli

olacaktır. Runge-Kutta metodunu $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ gibi farklı bir denkleme uygulamak için sadece f değerini bulan fonksiyonu değiştirmek yeterlidir [1].

rk fonksiyonu giriş olarak başlangıç değeri x , başlangıç değeri y , x 'in son hali x_1 ve adım sayısı olan n değerlerini alır. Sonuç olarak da X ve Y değerlerini verir. Program içerisinde öncelikle k_1 , k_2 , k_3 ve k_4 değerleri bulunur. Sonra x değeri h değeri kadar artırılır ve y değeri hesap edilir. Çıkan değerler X ve Y değişkenlerine aktarılır ve döngü şart sağlandığı sürece devam eder [1].

3. İKİ NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

3.1. Temel Bilgiler

İki-nokta sınır değer problemleri uygulamalı matematik, teorik fizik, mühendislik, sınır teorisi, yıldızlarla ilgili iç çalışmalarda ve kontrol teorisi gibi alanlarda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Pratikte karşılaşılan iki-nokta sınır değer problemlerine elde edilen analitik çözümlerin genellikle imkansız olması, bu problemlerin nümerik metotlarla çözülmesini gerekli kılmıştır[13].

Başlangıç değer problemlerinde diferensiyel denklemle birlikte bağımsız değişkenin başlangıç noktasında aldığı değer açıkça belirtilir. Yani başlangıç değer probleminde tek bir noktadaki n adet şart belirtilir. Aynı şekilde iki-nokta sınır değer problemlerinde de bağımsız değişkenin iki değeri açıkça belirtilir. Sınır değer problemlerinde iki ya da daha fazla noktada n adet sınır şartı belirtilir. Başlangıç ve son noktaya sınır noktaları adı verilir. Dolayısıyla sınır değer problemlerinin çözümünde, özellikle de problemin çözümünde kullanılan sayısal çözüm planlarında tamamen farklı algoritmalar kullanılmaktadır[13].

İkinci mertebeden lineer diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemleri $y = y(x)$ fonksiyonunun çözümü için $x=a$ noktasındaki $y(a)$ ve $y'(a)$ değerlerini içermektedir. Bu şekilde verilen problemler tek çözüme sahiptir. $x = a$ ve $x = b$ gibi iki noktadaki $y(a)$ ve $y(b)$ çözüm değerleri bulmak için uğraşılsa çözümün varlığı ile ilgili çeşitli yargılara ulaşılabilir [13]:

- i. Tek bir çözüm olabilir
- ii. Birden çok çözüm olabilir
- iii. Hiçbir çözüm olmayabilir

Verilen iki nokta ile birlikte bir çözümün araştırılması sınır değer problemi olarak

adlandırılır. Bu durumda verilen iki nokta aralığının sınırlarını belirtmektedir [13].

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, $a < x < b$ formundaki ikinci mertebeden lineer bir diferensiyel denkleme çözüm arama çalışmaları içerisinde,

$$k_1y(a) + k_2y'(a) = \alpha$$

$$h_1y(b) + h_2y'(b) = \beta$$

problemin verilen bu başlangıç koşullarına uyması durumunda denklem iki-nokta sınır değer problemi olarak adlandırılır. Burada $k_1, k_2, \alpha, h_1, h_2, \beta$ bilinen sabitlerdir. Eğer şartlar içerisinde $\alpha = \beta = 0$ ise, sınır koşulları homojen olarak adlandırılır, aksi durumda homojen olmayan olarak adlandırılır[14].

İki-nokta sınır değer problemi içerisinde verilen α ve β , sınır koşulları olarak adlandırılır[15].

Sınır şartlarının uygulamalarda karşılaşılan çok özel tipleri bulunmaktadır. Bunlar,

Ayrılmış:	$a_1y(a) + a_2y'(a) = c_1,$ $b_1y(b) + b_2y'(b) = c_2$
Dirichlet:	$y(a) = c_1, y(b) = c_2$
Neumann:	$y'(a) = c_1, y'(b) = c_2$ $y(-T) = y(T), y'(-T) = y'(T)$
Peryodik:	$ya da$ $y(0) = y(2T), y'(0) = y'(2T)$ Burada peryot $2T$ dir.

Dirichlet ve Neumann şartları ayrılmış sınır şartlarının özel tipleridir [5].

Başlangıç değer problemi ile sınır değer problemlerinin çözümü bazen oldukça

benzer olabilmektedir. Çözüm esnasında sadece aralarındaki önemli bazı yollar arasında farklılıklar bulunmaktadır[16].

Başlangıç değer problemlerinin bir tek çözümü olabilir. Bir tek çözüm olabileceği gibi hiç çözümü de olmayabilir ya da iki nokta sınır değer problemlerindeki gibi sonsuz çözüm de olabilir. Örneğin[17],

$$y'' + y = 0,$$

$$y(0) = c_1,$$

$$y'(0) = c_2$$

başlangıç değer probleminin c_1 ve c_2 'nin her bir değeri için $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ gibi tek bir çözümü vardır. Bununla birlikte,

$$y'' + y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(\pi) = 0$$

iki-nokta sınır değer probleminin çözümü yoktur.

$$y'' + y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(2) = 0$$

iki-nokta sınır değer probleminin ise $y(x) = \cos x - (\cotan 2) \sin x$ gibi tek bir çözümü vardır.

$$y'' + y = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(\pi) = 0$$

iki-nokta sınır değer problemi ise B' 'nin herhangi bir değeri için $y(x) = B \sin x$ gibi bir sonsuz çözüme sahiptir.

Yukarıdaki örneklerde, iki aralıktaki çözüm değerleri belirtilmiştir ve bitiş noktasındaki değerlerin farklı kombinasyonları çözümün tek olmasına ya da farklı durumlara götürmektedir.

İki-nokta sınır değer problemlerinin çeşitli yöntemlerle çözümleri mevcuttur. Bu problemlerin çözümlerinin varlık ve teklik teorisi, başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik teorisinden daha az yeterli durum içindedir. Genel olarak şöyle bir sonuç çıkarılabilir:

Verilen bir diferensiyel denklem için iki-nokta sınır değer probleminin nümerik çözümü benzer başlangıç değer probleminin nümerik çözümüne göre daha zordur.

Başlangıç değer problemlerinin adım adım nümerik çözümü için etkili ve verimli metotlar vardır. Runge-Kutta gibi standart bir adım metotlarının kullanımını ve Milne metodunun Hamming' in değişikliği gibi çok adımsal metotlar mevcuttur. Genelde bu metotlarda çözüm birbirini izleyen $x_1, x_2, x_3, \dots$ gibi bağımsız değişkenlerle hesaplanır x_0 burada başlangıç noktasıdır. x_0 'daki başlangıç durumu x_1 'deki hesabın yapılabilmesi için yeterli bilgiyi içerir. Problem çözümü x_0 'dan x_1 'e, x_2 'ye... şeklinde devam eder. Bu başlangıç değer problemlerine ara sıra adım adım yürüyüş (marching) problemleri denilmesini açıklamaktadır. x_i noktasındaki iterasyon ara sıra nümerik doğruluğu (tamlığı) geliştirmek için kullanılır, fakat tahmin anlaşılmaz çünkü metot iyi bir yaklaşım zaten vermiştir. İki nokta sınır değer problemleri içinde, diğer bir yandan, adım adım çözüme başlamak için başlangıç noktasında yeterli bilgi yoktur. Bundan dolayı bilinmeyen durumların hesabı için bir yol bulunmalıdır ya da diğer adım adım integrasyonlardan farklı bir yaklaşım kullanılmalıdır. Ayrıca iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde iterasyon gerekli bir özelliktir ve genellikle bilinmeyen başlangıç durumları, hatta çözüm profilleri bir öncelik bilgisi olmadan tahmin edilmelidir[17].

İki-nokta sınır değer problemleri çeşitli tekniklerle çözülür, bunların arasında şunlar bulunmaktadır[17]:

1. Interpolasyon metotları: Diferensiyel denklemlerin çözümü bilinmeyen başlangıç durum değerleri için nümerik integral almayla bulunur. Bu çözümler genelde verilen sınır durumlarını gidermeyecektir. Bilinmeyen başlangıç durumlarındaki doğru değerler interpolasyon kullanılarak bulunur.
2. Değişimsel metotlar: İki nokta sınır değer probleminin yerine kesin bir integral değişimsel problemi geçer ve sonuçta değişimsel problem Rayleigh- Ritz metotlarıyla çözülür.
3. Sıralama (collocation) metodu: İki nokta sınır değer probleminin çözümü başlangıç durumlarını karşılayan birkaç parametre fonksiyonu tarafından temsil edilir. Yaklaşık çözüm diferensiyel denklemlerdeki yerine geçer ve parametreler bazı hata kriterleri tarafından hesaplanır.
4. Picard' ın metodu: İki nokta sınır değer problemi $x=F(x)$ ile sembolik olarak temsil edilen bir form içine konulur. Ardışık olarak yaklaşık çözümler $x^{(n)}=F(x^{(n-1)})$ şeklinde geliştirilir. Bu işlem kesin durumlar altında orijinal problemin çözümünü bir noktada birleştirir.
5. Ayrık metotlar: Diferensiyel denklemlerde olan türevlerin yerine yaklaşık sınırlı farklılıklar geçer. Sonuçta cebirsel ya da deney üstü denklem çözüm problemi orijinal problemin yerini alır.
6. Yarı-Linearleştirme (quasilinearization): Bu metot, yalnız lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemleri için iki-nokta sınır değer problemlerine uygulanabilir. Orijinal lineer olmayan problemin yerini daha basit olan çözülmüş lineer problemler dizisi alır ve çözümler orijinal problem çözümü için yaklaşık

durumlar altında bir noktada birleşir.

7. Atış metotları: Adını, başlangıç ve bitiş değerleriyle verilen bir tek ikinci mertebe diferensiyel denklem için iki-nokta sınır değer problemi içindeki durumdan alır. Başlangıç eğiminin değişimi başlangıç noktasından bir mermi atış yörüngesini gösteren profillerin doğuşunu verir. Başlangıç eğimi hedefe vuran yörünge içinde sonuçlanır, bu da bitiş değeridir.
8. Sonlu fark metodu: Probleme tamamen farklı bir açıdan bakar. Metot, adi diferensiyel denklemi bir çift denklem sistemi haline dönüştürür. Çözüm seçilen noktalar üzerinde sonlu fark yaklaşımlarıyla devamlı türevleri yerine koyarak bulunur.

Lineer problemler iterasyon olmadan atış metotlarıyla çözülebilir ve lineer olmayan problemler için gerekli iterasyonlar yaklaşık durumlar altında bir noktada birleştirmek için gösterilebilir.

Green fonksiyonu da lineer iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan kullanışlı metotlardan biridir. Problemin türüne göre doğru sonuçlar verebilmektedir[18].

Lineer olmayan diferensiyel denklemler için, atış metotlarının problemi çözenler için kesin avantajları vardır. Birincisi, metotlar geneldir ve diferensiyel denklemlerin geniş çeşidine uygulanabilir. Atış metotlarının uygulanabilmesi için denklemlerin özel tiplerde olmasına gerek yoktur. İkincisi, atış metotları problemin analizi ve hazırlığını içerir. Lineer cebirsel denklemler, adi diferensiyel denklemlerin nümerik integralleri için standart subroutine' leri kullanarak dijital bilgisayarlar üzerindeki atış metotlarının tamamlanması nispeten daha kolaydır. Yazılan bir kodla, yalnızca bir subroutine probleminden probleme değişebilir. Kodun diğer parçaları problemi geniş bir sınıf içinden kontrol altında tutacaktır[17].

Avantajlarına rağmen, atış metotlarının da diğer metotlar gibi dezavantajları bulunmaktadır. Atış metotları başlangıç durumlarına duyarlı problemleri bir noktada birleştirmeyi başaramamaktadır. Makine akışı gibi başlangıç durumları içindeki makul değişimli bazı problemler içinde çözüm yetersiz kalabilmektedir[17].

Bununla birlikte, pratikte erişilen atış metotları tarafından bile çözülemeyen problemlerle de ara sıra karşılaşılır. Bu sonuç için sonlu farklı metotların kısa bir davranışını kapsadık, bunun bir avantajı sayısal hassas problemlerin yönetilmesidir.

Literatürde farklı atış metotları gösterilebilir. Ayrıca atış metotları Newton–Raphson metodunun bir çeşidi olarak gösterilir. İlave olarak, pratik bilgisayar gelişimindeki tekniklerde, çözümü mühendislik uygulamalarında ve bilimsel çalışmalarda ortaya çıkmaktadır[17].

3.2. İki Nokta Sınır Değer Probleminin Kullanıldığı Yerler

İki-nokta sınır değer problemleri akışkanlar mekaniği ve uygulamalı matematiğin diğer dallarında çok sık kullanılmaktadır. Dolayısıyla problemlerin çözümünde elde edilen sayısal sonuçların önemi bir kez daha önem kazanmaktadır. İki-nokta sınır değer problemleri[19]:

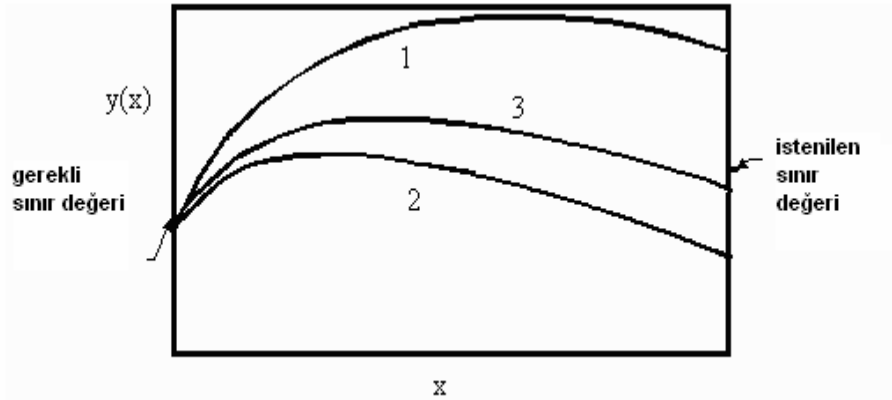
- Petrol ve yağ arıtma sistemleri içerisinde
- Su arıtma ve su temizleme sistemleri içerisinde
- Elektrik devrelerinde
- Yörünge hareket sistemlerinde
- Atom teorisi içerisinde
- Stefan-Boltzman denklemi ile ısıma ve radyasyon tepkimelerinde
- Yörünge hareket sistemlerinde
- Robot sistemleri içerisinde kol ve bacakların hareketlerinde
- Diyaliz makinesinde kanın basıncını ayarlayan sistem içerisinde

kullanılmaktadır. İki-nokta sınır değer problemleri pratikte çok geniş bir kullanım alanına sahiptir.

3.3. Atış Metodu

Atış metodu prosedürü, sınır değer problemlerini çözmek için, problemi sıralı başlangıç değer problemi haline indirgeyerek çözüm yapan bir prosedürdür. Kullanılan problemin özelliğine göre atış metodu çok iyi sonuçlar verebildiği gibi çok uzak sonuçlar da verebilmektedir[20].

Atış metodunun arkasındaki temel düşünce Şekil 3.1’ de gösterilmiştir. Bir son noktadaki sınır şartına uyan üç integral başlatılır. Her iki son noktadaki sınır koşulları nihayetinde uyana kadar, diğer son noktadaki istenilen sınır şartındaki başkalıklar başlangıç şartlarını düzeltmek için kullanılır[21].



Şekil 3.1 Atış metodunun şematik olarak gösterilmesi

Atış metodu için geliştirilmiş olan algoritma şu şekildedir[21]:

1. n. mertebeden verilen adi diferensiyel denklem, n tane sınır şartıyla birinci mertebeden denkleme dönüştürülür.

$$\underline{Z} = [y \ y' \ y'' \dots y^{(n-1)}]^T$$

2. Problem bir başlangıç değer problemi gibi düşünülür. Başlangıç değer problemi için başlangıç şartları ifadesi içerisinde bağımsız x değişkeni için başlangıç noktası gibi kabul edildiğinde, $x_1 = p_1$ ' de n_1 şart kesinlikle belirtilir. Bundan dolayı, x_1 noktasında n_2 adet bilinmeyen ve özgür parametreye sahip olunur.

$$n_2 = n - n_1$$

α, n_2 uzunluğu içinde bağımsız parametre vektörü olsun. Bundan dolayı $x_1 = p_1$ ' de $\underline{z}(p_1) = \underline{z}(p_1, \underline{\alpha})$ ifadesi şunu açıklar:

p_1 ' deki durum gerçekten bilinmiyor, fakat bağımsız parametre vektörü fonksiyonları gibi yazılabilir. Amaç, iteratif davranış içerisinde α ' yı bulmaktır. Böylelikle $x_2 = p_2$ noktasındaki n_2 sınır şartı belirtilsin.

3. α^0 , $\underline{z}(p_1) = \underline{z}(p_1, \underline{\alpha}^0)$ ' ı verir. Bütün bu bilinenler sonucunda başlangıç değer problemi genel yoldan çözülebilir.

4. Şimdi başlangıç değer problemi, $\underline{z}^m(p_2) = \underline{z}(p_2, \underline{\alpha}^m)$ eşitliğini elde etmek için adi diferensiyel denklem çözümü kullanılarak çözülür. Burada m iterasyon sayacıdır. Birinci tahminde m=0' dır. Çünkü bazı başlangıç şartları için tek tahmin mümkündür. Bu başlangıç değer problemi istenilen sınır değer problemine eşit olmayacaktır. Özellikle p_2 noktasındaki n_2 sınır şartı kesin olarak açıkça belirtilmeyecektir.

5. Hatayı ölçmek için ayrı bir vektör tanımlanır, $\underline{\epsilon}^m$. Bu vektörün elemanları, ϵ_k^m , karşılar ki,

$$\epsilon_k^m = B_k(p_2, \underline{z}^m) \quad k = 1, 2, \dots, n_2$$

Burada kesin çözüm için, $\underline{z}$, $B_k(p_2, \underline{z}) = 0$ değeri bilinir. Bu, kesin sınır koşullarını karşılar.

6. Son olarak, kullanıcı tarafından açıkça belirtilen kritere karşı (tol) bir noktada birleşme kontrol edilir. Özellikle, eğer $|\epsilon_k^m| < tol$ bütün k'ler için doğruysa, sonra birisi iteratif işleme son verir ve sonuçları gösterir. Bununla birlikte, $|\epsilon_k^m| > tol$, herhangi bir k değeri için sonra yeni bir α^{m+1} tahmini yapılır ve diğer adımı yerine getirmek için dördüncü adıma geri gidilir.

Yukarıdaki algoritma uygulama açısından gerçekten çok basittir ve bir bağımsız değişkene bağlı iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde çok güçlü bir metottur[21].

3.3.1. Sonraki α 'yı seçme

Atış metodu, standart başlangıç değer problemi için başlangıç şart vektörü içerisinde n_2 bağımsız parametre üzerine geliştirilen sınır değer problemleri için sayısal bir plandır. Hata şartı, ikinci sınır noktası p_2 'deki istenilen sınır şartları ve başlangıç şart vektörünün bir kısmındaki tahmin kullanılarak hesaplanan gerçek değerler arasındaki farklılıklara bağlanır. m iterasyonu için verilen bir hata vektörü ϵ^m 'dir. Buradaki hedef, α^{m+1} gibi hatayı sıfıra doğru yöneltecek bağımsız bir parametre vektörü seçmektir. Bu hedefle, α^{m+1} şöyle seçilir[21]:

$$\alpha^{m+1} = \alpha^m + \Delta\alpha^m$$

Burada $\Delta\alpha^m$ şunun çözümüdür:

$$\underline{\underline{A}}\Delta\alpha^m = -\varepsilon^m \text{ ve } \underline{\underline{A}} = [a_{ij}] = \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_j} \right]$$

Dikkat edilirse denklemin sağ tarafındaki hata vektörü negatiftir. Böylelikle, $\Delta\alpha^m$, hatayı sıfıra doğru indirmeye yöneltmek için hesaplanır. Genel formda bu açıklama,

$$\Delta \varepsilon_i = -\varepsilon_i^m = \sum_j \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j^m \text{ gibi yazılabilir.}$$

Pratikte, bağımsız değişkenlere bağlı hata sürelerinin parçalı türevleri sonlu bir fark yaklaşımı tarafından hesaplanır:

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_j} = \left[\frac{\varepsilon_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j + \Delta\alpha_j, \dots) - \varepsilon_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_2})}{\Delta\alpha_j} \right]$$

$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_j}$, nin hesabındaki basit bir algoritma şöyledir[21]:

1. Bağımsız parametreler için şimdiki seçimle birleştirilen hata vektörü hesaplanır.

$$\alpha^m \rightarrow \varepsilon^m$$

2. Yalnızca bir element tedirgenir. Bu j^{th} elementine ve yeni hata vektörü ε_j^m , ye

$$\text{ulaştırır. Sonra, uygunluk için iterasyon indeksinin düşüşüyle, } \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_j} = \frac{\varepsilon_j - \varepsilon}{\Delta\alpha_j}$$

değerine sahip olunur. Bu da tek bir j' deki bütün i' ler için $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_j}$ değerini verecektir.

3. İkinci adım α ' nın bütün elementleri için tekrar edilir.

Bu prosedür her iterasyon işlemindeki her adımda tekrarlanır.

Son olarak, çoğu pratik uygulamada, burada özetlenen genel prosedür görüldüğünden daha basittir. Örneğin çok yaygın kullanılan ikinci mertebeden sınır değer problemleri için yalnızca bir bağımsız değişken ve bir hata bileşeni vardır. Böylece yukarıda anlatılmış olan noktalar çok daha basitleşir[21].

İkinci mertebeden sistemlerle çok sık karşılaşılmaktadır. İkinci mertebeden bir denklem atış metodu ile çözülürken yukarıda özetlenen temel algoritma şu şekilde izlenir[21]:

Adım 1: İkinci mertebeden sistemler her zaman birinci mertebe denklem sistemleri halinde yazılabilir ya da

$$\frac{d}{dx} \underline{z} = \underline{f}(x, \underline{z}) \quad \text{ile} \quad \underline{z} = [y, y']^T, \text{ dır.}$$

Bu formun sınır şartları ise şöyledir:

$$\begin{aligned} a_1 y(x_1) + a_2 y'(x_1) - W_1 &= 0 \\ b_1 y(x_2) + b_2 y'(x_2) - W_2 &= 0 \end{aligned}$$

Burada x_1 ve x_2 sınır nokta yerleridir. Kolaylık açısından sınır nokta yerleri, her iki sınır noktasında değeri bilinen $y(x)$ fonksiyonu gibi özel bir durumla ifade edilir. Bu durumda sınır şartları şu hale gelir:

$$y(x_1) = W_1 \text{ ve } y(x_2) = W_2$$

Adım 2: Sistem bilinmeyen başlangıç değeriyle başlangıç değer problemi gibi yazılır:

$$\frac{d}{dx} \underline{z} = \underline{f}(x, \underline{z}, \alpha), \quad \underline{z} = (x_1) = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Burada $\alpha = y'(x_1)$ değeri hesaplanır. Böylece ikinci sınır şartı $y(x_2) = W_2$ karşılanır.

Adım 3: α_1 tahmin edilir, $y(x_2, \alpha_1)$ için başlangıç değer problemi çözülür ve α_2 tahmin edilir ve $y(x_2, \alpha_2)$ için başlangıç değer problemi çözülür. α 'nın iki değeriyle ve onların uygun sınır değerleriyle ikinci sınır şartındaki hatalar hesaplanır:

$$\epsilon_1 = y(x_2, \alpha_1) - W_2 \quad \text{ve} \quad \epsilon_2 = y(x_2, \alpha_2) - W_2$$

Bulunan bu hata değerleriyle yaklaşık bir $\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}$ kurulabilir:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Adım 4: Hatadaki istenilen değişimin önceki durumdakine göre negatif olduğunun farkında olunmalıdır. Bu nedenle,

$$\Delta \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \Delta \alpha = -\epsilon_2 \quad \text{ve} \quad \Delta \alpha = \frac{-\epsilon_2}{\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}}$$

değeri bağımsız değişkende yeni bir artışa neden olacaktır. Şimdi α_3 , $\alpha_3 = \alpha_2 + \Delta \alpha$ gibi hesaplanabilir ve ϵ_3 ile başlangıç değer problemi yeniden çözülebilir ($\epsilon_3, \dots, \dots$).

Bu temel prosedür kullanıcı tarafından belirtilen kritere kadar devam ettirilir. Bu kriter $|\epsilon^m| < tol$ şartıdır. Uygulamada problemlere tam çözüm sunmak için belki üç

beş ya da bazı durumlarda daha az adım sıkça uygulanır[21].

3.1. Örnek

Aşağıda verilen iki-nokta sınır değer problemini atış metodunu kullanarak çözelim

$$y'' + 3xy' + 7y = \cos(2x)$$

$$y(0) = 1$$

$$y(\Pi) = 0$$

Çözüm

Durum 1: Elle yapılan iterasyon [22]

1. Problem öncelikle bir denklem sistemine dönüştürülür. $\underline{z} = [y \ y']^T$ şunu verecektir:

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -3xz_2 - 7z_1 + \cos(2x)$$

ya da genel formda $\underline{z}' = \underline{f}(x, \underline{z})$ şeklinde yazılacaktır.

2. Sonra bu başlangıç değer problemi gibi yazılır ve sistemi sayısal olarak

çözebilmek için $\underline{z}(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ tarafından bulunan başlangıç koşulları ile

MATLAB içerisinde sıradan bir denklem çözümleyicisi kullanılır.

3. Bu interaktif örnekte, α için bir giriş değerine sevk edilir ve MATLAB' ın ODE rutininin çağrılmasından sonra ikinci sınır noktasındaki hata hesaplanır:

$$\epsilon = z_1(\Pi, \alpha) - y(\Pi)$$

4. α 'nın doğru değeri hesaplanana kadar üçüncü adım tekrar edilir. Bu, ϵ değeri çok küçük olana ya da istenilen toleranstan daha az olana kadardır.

Durum 1 için elle yapılan bu interaktif çözüm prosedürü SHOOT1.M MATLAB scripti içerisinde geliştirilmiştir. Fonksiyon dosyası da SHOOTF.M' dir. Bu dosyalar Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2' de sırasıyla listelenmiştir. Burada verilen bu ayrıntılı gelişim çok basittir ve α 'nın gelecek değerine karar verme aşamasında kullanıcıya yardımcı hesaplar sunacaktır. Sıradaki rasgele seçilmiş ilk iki tahmin, önceki iki bölümdeki meselenin ana noktaları kullanılarak yapılmalıdır[22].

Çizelge 3.1. Durum 1 için elle yapılan SHOOT1.M isimli MATLAB çözüm prosedürü

```
% SHOOTM1.M İki nokta sınır değer problemlerinin atış metodu ile çözülmesi
% ( Elle yapılan iterasyon prosedürü )
%
% y'' + 3xy' + 7y = cos(2x) with y(0) = 1 and y(pi) = 0
% iki-nokta sınır değer problemini tanımlayan fonksiyon dosyası Çizelge 3.2' de
% verilmiştir
% program başlangıcı
clear all, close all
% ODE23 için tolerans ve sınır değerlerinin ataması yapılır
xo = 0; xf = pi; tol = 1e-6;
% istenilen sınır koşulları belirtilir
yxo = 1.0; yxf = 0;
format long
% başlangıç koşulundaki ALF değeri kullanıcıya sorulur
ALF = input('Başlangıç parametresi (ALF) değerini giriniz = ')
% döngü başlangıcı
```


Çizelge 3.1. (Devam) Durum 1 için elle yapılan SHOOT1.M isimli MATLAB çözüm prosedürü

```

options = odeset('RelTol',tol);
while ALF ~= 0
    zo = [yxo ALF]';
% ODE23 rutininin çağırılması
    [x,z] = ode23('shootf',[xo xf],zo,options);
% Her bir iterasyonda bulunan sonuçların çizdirilmesi
    plot(x,z(:,1)),title('ODE için Atış Metodu')
    xlabel('x değerleri'),ylabel('y değerleri'),grid
% ikinci sınır noktasındaki (x = xf) hatanın bulunması
    [nr,nc] = size(z);
    eps = z(nr,1)-yxf;
    disp(' ')
    disp(' İkinci sınır koşulundaki hata'),    eps
    ALF = input('ALF için ikinci bir tahmin (sıfır ya da çıkış)? ')
end
disp('El İterasyon Prosedürü kullanıcı tarafından kesildi...')

```

Çizelge 3.2. SHOOT1.M dosyasını çözen SHOOTF.M MATLAB fonksiyon dosyası

```

% SHOOTF.M    SHOOTM1.M, SHOOTM2.M ve SHOOTA.M dosyaları için
    oluşturulmuş fonksiyon dosyası
% Verilen diferensiyel denklem:  $y'' + 3xy' + 7y = \cos(2x)$ 
function zp = shootf(x,z)
    zp = zeros(length(z),1);
    zp(1) = z(2);
    zp(2) = -3*x*z(2) - 7*z(1) + cos(2*x);

```

SHOOT1.M ile tipik bir oturum MATLAB' ın günlüğüne kaydedildi ve sonra bu dosya α ' nın üçüncü ve son değerinin hesaplanmasında kullanılan bilgiyle açıklayıcı notlar alındı. Alınan bu açıklayıcı notların listesi Çizelge 3.3' de verilmiştir. Dikkat edilirse α ' nın yalnızca üç değeriyle bir noktada birleşen çok iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 3.3. SHOOT1.M prosedürünün çalıştırılması sonucunda MATLAB günlüğünden alınan açıklayıcı notlar

SHOOTM1.M dosyasının çalıştırılmasıyla elde edilen sonuçlar

» shootm1

Başlangıç parametresi (ALF) değerini giriniz = 1

İkinci sınır koşulundaki hata

eps = -0.03479395271931

ALF için ikinci bir tahmin (sıfır ya da çıkış)?

ALF = -1

İkinci sınır koşulundaki hata

eps = -0.02404080244781

ALF için ikinci bir tahmin (sıfır ya da çıkış)?

ALF = -5.471500000000000

İkinci sınır koşulundaki hata

eps = 4.088124867279892e-007

ALF için ikinci bir tahmin (sıfır ya da çıkış)?

ALF = 0 (eps değeri yeterince küçük, dolayısıyla çıkılabilir)

El İterasyon Prosedürü kullanıcı tarafından kesildi...

Oturum günlüğüne ek olarak, bu örnek içinde kullanılan α ' nın üç farklı değeri için hesaplanan $y_i(x)$ çözümleri Şekil 3.2' de çizilmiştir. Eğriler SHOOT2.M dosyasıyla oluşturulmuştur. Bu dosya Çizelge 3.4 içerisinde verilmiştir. Doğru çözümü veren y' başlangıç değeri, $\alpha = y'(0) = -5,4715$ ' dir. Rasgele seçilmiş ilk iki tahminler,

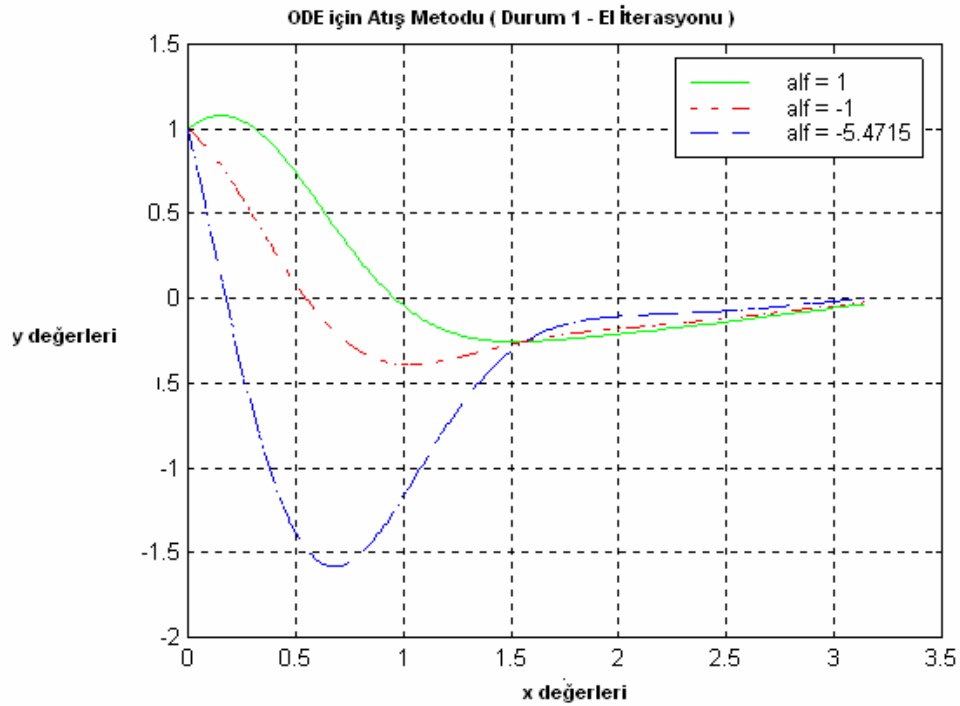
$\alpha = \pm 1$, doğru sonuçlardan oldukça farklıdır. Özellikle $x = \Pi$ ' de yanlış son nokta değerini verir. Dikkat edilirse son nokta değerleri oldukça benzerdir. Böylece bir noktadaki sıkı birleşime ihtiyaç vardır. Farkına varılırsa bununla birlikte, tek bağımsız değişkenin tam değeri üzerinde birleşmesi oldukça basittir[22].

Çizelge 3.4. ALF' nin her bir değerini oluşturan SHOOT2.M MATLAB çözüm prosedürü

```
% SHOOT2.M İki nokta sınır değer probleminin
% Atış Metodu kullanılarak çözülmesi
% Bu dosya SHOOT1.M dosyasını takip eder.Bu dosya SHOOT1.M
% dosyasında kullanılan ALF' nin her bir tahmin değerini oluşturur
% Buradaki amaç verilen  $x = 0$  ve  $y(\pi) = 0$  noktalarındaki
% ALF değerini bulmaktır
% Denklemleri tanımlayan fonksiyon dosyası SHOOTF.M' dir
%  $y'' + 3xy' + 7y = \cos(2x)$  with  $y(0) = 1$  and  $y(\pi) = 0$ 
% program başlangıcı
clear all, close all
% SHOOTM1.M içerisinde kullanılan ALF' nin 1, -1, ve -5.4713 değerleriyle
% çizimin yapılması
gs = [1 -1 -5.4715];
% sınır değerlerinin atanması ve başlangıç değer probleminin çözülmesi
xo = 0; xf = pi; tol = 1.0e-6; yxo = 1.0;
options = odeset('RelTol',tol);
[x1,z1] = ode23('shootf',[xo xf],[yxo gs(1)],options);
[x2,z2] = ode23('shootf',[xo xf],[yxo gs(2)],options);
[x3,z3] = ode23('shootf',[xo xf],[yxo gs(3)],options);
% sonuçların çizdirilmesi
figure(1)
plot(x1,z1(:,1),'g-',x2,z2(:,1),'r-',x3,z3(:,1),'b--')
title('ODE için Atış Metodu ( Durum 1 - El İterasyonu )')
```

Çizelge 3.4. (Devam) ALF' nin her bir değerini oluşturan SHOOT2.M MATLAB çözüm prosedürü

```
xlabel('x değerleri'),ylabel('y değerleri'),grid
legend('alf = 1','alf = -1','alf = -5.4715')
```



Şekil 3.2. Durum 1 için ALF' nin üç farklı değeri kullanılarak elde edilen çözüm eğrileri

Çizelge 3.1 ve 3.4, atış metoduyla birleştirilen temel prosedürleri özetlemektedir. Bu metot iyi anlaşılacak istendiğinde bunlara gerek duyulacaktır. Bu interaktif yaklaşım bütün iteratif planlar boyunca anlaşılabilir bir mekanizma vermiştir. Bununla beraber pratikteki uygulamalarda el hesaplamalarından kaynaklanan hataları önlemek ve α 'nın elle hesap edilmesini elemek için, bu prosedür otomatikleştirilmelidir. Otomatikleştirilen bir prosedür gerçekten daha basittir ve rutin uygulamaları için daha etkilidir.

Durum 2: Otomatik İterasyon

Durum 1' de olduğu gibi aynı problem otomatik bir iterasyon planı kullanılarak SHOOTA.M dosyasıyla çözülür. Bu dosya Çizelge 3.5' de listelenmiştir. Buradaki başlangıç noktası Durum 1' deki ile tamamen aynıdır. Özellikle, Durum 1' in birinci ve ikinci adımında olduğu gibi problem bir başlangıç değer problemi gibi hazırlanır ve aynı ODE fonksiyon dosyası olan SHOOTF.M kullanılır (Bkz. Çizelge 3.2). α için rasgele seçilmiş bir tahmin iteratif prosedürünü başlatır, ikinci sınır şartı içerisindeki nispi hata üzerinde özel merkezi noktayla birlikte çözüm için birinci tahmini verir. Eğer ikinci sınır şartı içerisindeki nispi hata kullanıcının seçtiği toleranstan daha büyükse, α üzerinde %1 değişim yapıp yeni bir başlangıç değer problem çözümü elde edilir ve $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ için bir sonlu fark tahmini yapılır. Bu türev tahmini kullanılarak, amaç olan nispi hatayı sıfıra doğru indirecek yeni bir α değeri seçilir. Yeni α ile, önceden ayarlanmış bir noktada birleşme kriteriyle karşılaşıncaya kadar ya da maksimum iterasyona ulaşınca kadar işlem devam eder. Hedeflenen birleşme sonucundaki çözüm Şekil 3.3' de verilmiştir. Dikkat edilirse bu çözüm Durum 1' deki çözümle hemen hemen aynıdır[22].

Çizelge 3.5. Otomatik iterasyon prosedürü (SHOOTA.M MATLAB prosedürü)

```
% SHOOTA.M İki nokta sınır değer probleminin atış metodu ile çözülmesi
%          ( Otomatik İterasyon Prosedürü )
% Amaç ALF = y'(0) bağımsız parametresini bulmaktır
% Verilen denklem için Fonksiyon dosyası SHOOTF.M ' dir (Bkz. Çizelge 3.2).
%   y'' + 3xy' + 7y = cos(2x)   with y(0) = 1 and y(pi) = 0
% program başlangıcı
%   clear all, close all
% başlangıç değerlerinin atanması
%   xo = 0;   xf = pi;
% istenen sınır koşullarının belirtilmesi
```

Çizelge 3.5. (Devam) Otomatik iterasyon prosedürü (SHOOTA.M MATLAB prosedürü)

```

yxo = 1.0; yxf = 0;
% toleransın ve başlangıç koşullarının tahmini
alfo = 1.0; rerr = 1e10; tol = 1e-6; icnt = 1; icntmax = 10;
options = odeset('RelTol',tol);
% iterasyon başlangıcı
while abs(rerr) > tol & icnt <= icntmax
    ypxo = alfo; zo = [yxo ypxo]';
    [xs,zs] = ode23('shootf',[xo xf],zo,options);
    [nr,nc] = size(zs);
    e1 = zs(nr,1)-yxf;
    if yxf == 0 rerr = e1; else rerr = e1/yxf; end
    disp(' ')
    disp(['İterasyon için # ',num2str(icnt),' :'])
    disp([' ypxo için geçerli tahmin = ',num2str(ypxo,6)])
    disp([' Sağ sınırdaki hata = ',num2str(rerr,5)])
    disp(' ')
% alf için yeni değerin tahmini ( gerekliyse )
    if abs(rerr) > tol
        alfp = 1.01*alfo; zo = [yxo alfp]';
        [xs,zs] = ode23('shootf',[xo xf],zo,options);
        [nr,nc] = size(zs);

        e2 = zs(nr,1)-yxf;;
        deda = (e2-e1)/(0.01*ypxo); alfn = ypxo-e1/deda;
        icnt = icnt+1; alfo = alfn;
    end
end
% iterasyon döngüsünün sonu

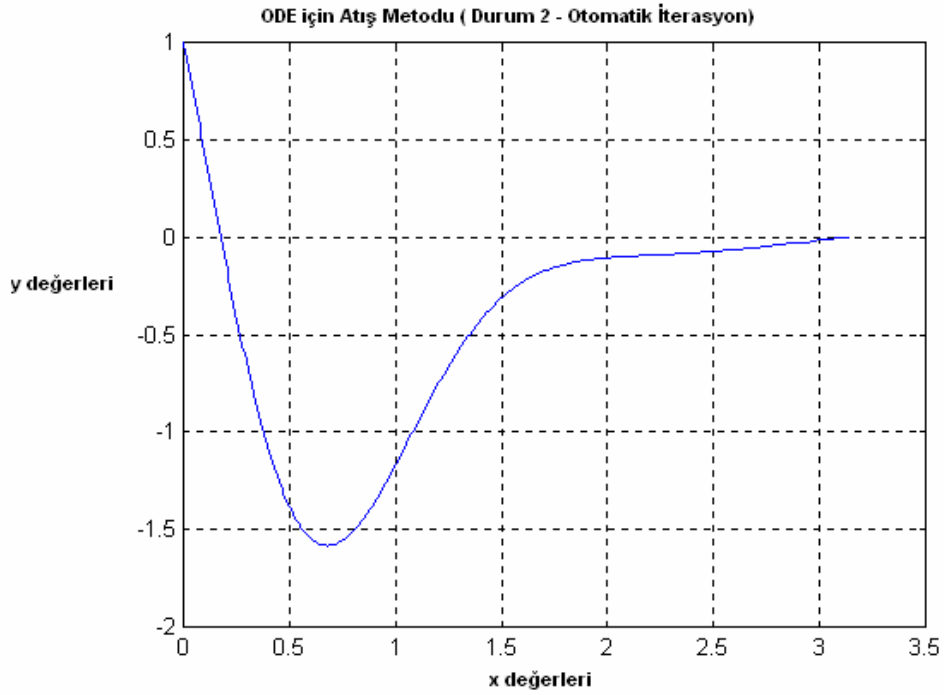
```

Çizelge 3.5. (Devam) Otomatik iterasyon prosedürü (SHOOTA.M MATLAB prosedürü)

```

if icnt >= icntmax disp(' UYARI -- maximum iterasyon limiti!!!'); end
% son fonksiyon değerlerinin çizimi
plot(xs,zs(:,1)),grid
title('ODE için Atış Metodu ( Durum 2 - Otomatik İterasyon )')
xlabel('x değerleri'),ylabel('y değerleri')

```



Şekil 3.3 Otomatik iterasyon prosedürü sonucunda elde edilen çözüm eğrisi

3.4. Sonlu Fark Metodu

Sonlu fark metodu, sistem içerisindeki her bir sonlu kısım için bir denge denklemiyle adi diferensiyel denklemi cebirsel denklem sistemi haline dönüştürür. Genel teknik ızgara üzerinde seçilen noktalar üzerinde sonlu fark yaklaşımlarıyla adi diferensiyel denklem içerisinde devamlı türevleri yerine koymaktır. Sınır noktaları, özel bir

durum gibi düşünülür. Sonucu veren denklem sistemi bir çok teknikle çözülebilir[23].

Bu metot içerisindeki semboller sonlu fark operatörleri olarak adlandırılır. Çoğu fark yaklaşımları bu operatörlerin kombinasyonu ile açıklanabilir. En sık kullanılan sonlu fark operatörleri şunlardır[24]:

- Δ İleri fark operatörü
- ∇ Geri fark operatörü
- δ Merkezi fark operatörü
- μ Ortalama operatörü
- E Değişme operatörü
- I Özdeşlik operatörü

Lineer sistemlerde temel sonlu fark metodu için basit bir algoritma şöyle özetlenebilir[23]:

1. Sürekli değişkenler fark değişkenlerine dönüştürülür. Bağımsız değişken için ızgara eşit aralıklara bölünür veya gerekiyorsa kompleks sistemlerde düzgün olmayan ızgara da hazırlanabilir.
2. Taylor serilerinin açılımından gelen formül kullanılarak her bir noktadaki türevlerin karşılığı hesaplanır.
3. Sınır noktaları ayrı ayrı düşünülür. İstenen sınır şartlarına mümkün olan en iyi yaklaşımı elde etmek için dikkatli davranılır.
4. Sonuçta ortaya çıkan denklem sistemi ya doğrudan ya da iteratif yöntemler kullanılarak çözülür.

Orijinal adi diferensiyel denklem lineer değilse tüm  z m stratejilerinde ihtiyaç duyulan ekstra dış iterasyondan başka, bu algoritma hala geçerlidir. Çok yüksek mertebeli problemleri bir noktada birleştirmek çoğu zaman zordur, fakat biraz lineer olmayan veya değişken katsayılı problemler, basit bir dış iterasyon yöntemi kullanılarak genellikle  oz lebilir.

4. SİNGÜLER TEDİRGEMELİ İKİ NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Tedirgeme teorisi, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin genel davranışının sistematik analizi için oluşturulan metotlar bütünüdür. Tedirgeme teorisinin genel prosedürü küçük bir parametre tanımlamaktır. Tanımlanan bu parametre genellikle ϵ ile gösterilir. ϵ içeren problemlere yaklaşık çözümler bulmak için kullanılan geniş metotlar topluluğu tedirgeme teorisi olarak adlandırılır. ϵ sıfır olduğunda problem çözülebilir hale gelir. Genel çözüm $\epsilon=0$ hakkında yerel analiz tarafından çalıştırılabilir. Örneğin [25],

$y'' = \left[1 + \frac{\epsilon}{(1+x^2)}\right]y$ diferensiyel denklemi ancak $\epsilon=0$ olduğunda temel fonksiyonlarla çözülebilir. Bu tedirgeme çözümü ϵ serisi gibi yerel analizler tarafından yapılır:

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Bu seri tedirgeme serisi olarak adlandırılır. Şu nokta farkedilmelidir ki $y(x)$ için tedirgeme serisi, ϵ içerisinde yerel, x içerisinde ise globaldir. Eğer ϵ çok küçükse, $y(x)$ ' in yalnızca bazı tedirgeme serileri tarafından yaklaşılabileceği umulur. ϵ küçük bir parametre olmadığı zaman, yaklaşımlar zayıf sayısal sonuçlar verebilir[25].

Tedirgeme teorisi içerisinde bulunan metotlar problemlerin çözümünde çok güçlü metotlar sunmaktadır.

4.1. Örnek

$$x^3 - 4,001x + 0,002 = 0$$

Çözüm

Bu problem bir tedirgeme problemi değildir. Çünkü herhangi bir küçük ϵ parametresi yoktur. Bir problemi tedirgeme problemi haline çevirmek çok kolay yapılabilecek bir şey değildir, ancak yukarıdaki denklemi şu formda bir denkleme çevirebilmek mümkündür:

$$x^3 - (4 + \epsilon)x + 2\epsilon = 0,$$

$$\epsilon = 0,001$$

Bu denklemde yaklaşık kökleri hesap etmek öncekine nazaran daha kolaydır.

Tedirgeme teorisi üç basamaktan oluşur[25]:

1. Verilen problem küçük ϵ parametresi kullanılarak tedirgeme problemine çevrilir.
2. Tedirgeme serisi içerisinde cevap için bir açıklama farzedilir ve bu serilerin katsayıları hesaplanır.
3. ϵ değeri için tedirgeme serilerinin toplamıyla cevap orijinal probleme geri çevrilir.

4.1. Singüler Tedirgemenin Doğuşu ve Kullanıldığı Yerler

Bilim ve teknolojinin yoğun bir şekilde gelişimi içerisinde, sınır değer teorisi ve küçük veya geniş parametreler ihtiva eden diferensiyel denklemler ile tarif edilen birçok problemin matematiksel çözümü daha karışık hale gelmiştir. Bundan dolayı problemlerin analizinde asimptotik metotların kullanımı doğal hale gelmiştir. Bununla beraber diferensiyel operatörler için asimptotik analiz, düzenli tedirgeme durumu için gelişmiş bir teoriye sahiptir. Bazı problemlerde tedirgemeler bağımlı

değişkenin çok çabuk değiştiği sınırlı bölgelerde etkindir. Tedirgemeler akışkanlar mekaniğinde, elektrik uygulamalarında, kuantum mekaniğinde ve matematiğin birçok alanında kullanılmaktadır[26].

Singüler tedirgemenin doğumu 1904 yılında Heidelberg’ deki III. Uluslar arası Matematik Kongresi’ nde oldu. Prandtl’ nin yedi sayfalık raporu sempozyumda ele alındı. Bununla beraber singüler tedirgeme terimi ilk olarak, New York Üniversitesi’ ndeki lineer olmayan titreşimler üzerine yapılan seminerde Fried ve Wasow’ un çalışmasında kullanıldı. Prandtl singüler tedirgeme içerisinde sınır tabakası deyimini kullandı[26].

Singüler tedirgeme 1960’ lardan beri gelişmektedir. Konu şu an çeşitli mühendislik alanları ve uygulamalı matematik içerisinde eğitim gören lisans öğrencilerinin ilgisini çekmektedir[26].

Singüler tedirgeme uygulamalı matematiğin birçok alanında etkin biçimde kullanılmaktadır. Örneğin akışkanlar mekaniğinde, akışkanlar dinamiğinde, esneklikte, kuantum mekaniğinde, plastiklikte, kimyasal reaktör teorisinde, aerodinamikte, plazmadinamikte, hidrodinamikte, seyrek gaz dinamiğinde, oşinografide, ışınların sapma teorisinde, meteorolojide, difüzyon işlemlerinde, ışın yayma akışında ve akışkan teorilerinde çok geniş biçimde kullanılmaktadır. Singüler tedirgeme modeli içerisinde yapılan bazı çalışmalar şunlardır[26]:

Tek boyutlu Schrödinger denklemi:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \psi_\varepsilon}{dx^2} + (\lambda_\varepsilon - V(x)) \psi_\varepsilon = 0, \quad \|\psi_\varepsilon\| = 1$$

Zaman bağımlı Fokker-Planck denklemi:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + b(x) \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad x \in (0,1),$$

$$\phi(0, \varepsilon) = A, \quad \phi(1, \varepsilon) = B$$

Young-Laplace denlemi:

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} = \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dZ}{dR} \right)^2 \right\} \left\{ Z \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dZ}{dR} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{R} \frac{dZ}{dR} \right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan \phi, \quad x = r_0$$

$$y \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Navier-Stokes denklemi:

$$\varepsilon A(x) u u'' - \left[1 + \frac{\gamma}{2} - \varepsilon A'(x) \right] u u' + \frac{u'}{u} + \frac{A'(x)}{A(x)} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} u^2 \right) = 0,$$

$$0 < x < 1$$

Reissner-Mindlin denklemi:

$$\frac{1}{2} \left[(1 - \mu) \nabla^2 \psi - (1 + \psi) \nabla (\nabla \cdot \psi) \right] - \varepsilon^{-1} (\psi + \nabla \omega) = 0,$$

$$\varepsilon^{-1} (\nabla^2 \omega + \nabla \omega) = \frac{\rho}{D}$$

Ayçiçeğinin hareketini tarif eden model:

$$\varepsilon x''(t) + a x'(t) + b \sin x(t - \varepsilon) = 0,$$

$$\varepsilon > 0, \quad t \in [-\varepsilon, 0]$$

Yukarıda verilen örnekler singüler tedirgeme alanında yapılan çalışmalardan yalnızca bir kısmıdır. Pearson, 1968' den 1984' e kadar singüler tedirgeme problemlerinin sayısal metotlarla çözümü ile uğraştı. Ascher, adi diferensiyel denklemlerin singüler tedirgemeli sınır değeri üzerine çalıştı. Markowich özel amaçlı denklemlerle uğraştı. Enright iki-nokta sınır değer problemleri için sayısal metotların performansı içerisinde süren araştırmasını anlattı. Surla ve Jerkovic özel amaçlı singüler tedirgeme ile ilgili çalışmalar yürüttüler. Nijima lineer olmayan singüler tedirgeme probleminin çözümü için farklı şemaları analiz etti. Singüler tedirgeme konusunda çalışma yapan daha birçok bilim adamı bulunmaktadır. Bu bilim adamlarından bazıları şöyle özetlenebilir :

Erdelyi, Van Dyke, Bellman, Kaplaun, Carrier ve Pearson, Nayfeh, O'Malley, Hemker ve Miller, Bender ve Orszag, Hughes, Meyer ve Parter, Kevorkian ve Cole, Holmes, Morton[26].

4.2. Singüler Tedirgemeli İki Nokta Sınır Değer Problemlerinin Çözümünde Başlangıç Değer Yaklaşımı

Singüler tedirgemeli ikinci mertebeden iki-nokta sınır değer problemleri akışkanlar mekaniğinde ve uygulamalı matematiğin diğer dallarında çok sık kullanılmaktadır. Singüler tedirgemeli problemlerin çözümünde çeşitli çözüm teknikleri kullanılmaktadır. Bu çözüm metotlarının birisi de, Reddy ve Chakravarthy tarafından önerilen başlangıç değer yaklaşımı metodudur. Singüler tedirgemeli verilen iki-nokta sınır değer problemi üç tane birinci mertebeden başlangıç değer problemine dönüştürülür. İkinci başlangıç değer probleminin çözümü birincisine bağlıdır. Üçüncü başlangıç değer problemi ise ilk iki başlangıç değer probleminden bağımsızdır. Metot birçok lineer ve lineer olmayan örnekler üzerinde denenmiştir. Bu yaklaşımda gerçek çözüme yakın ve iyi sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir[27].

4.2.1. Başlangıç değer yaklaşımı

Aşağıda lineer singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \epsilon y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) &= h(x), \quad x \in [a, b] \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Burada ϵ küçük pozitif bir parametredir ($0 < \epsilon \ll 1$) ve α, β bilinen sabitlerdir. $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının ise $[a, b]$ aralığında yeterince sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olduğunu kabul edilir. Ayrıca $[a, b]$ aralığında $f(x) \geq M > 0$ olduğu da kabul edilir. Burada M pozitif sabittir. Bu kabul sınır tabakasının sadece $x=a$ 'nın komşuluğu içinde olacağını ifade eder[27].

Singüler tedirgemeli problemlerin çözümünün sınır tabaka davranışından dolayı yukarıda verilmiş olan denklemin çözümü,

$$y(x) = p(x) + q(x).e^{-r(x)/\epsilon} \quad (4.2)$$

olarak verilir. Burada,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \epsilon^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) \epsilon^n \text{ ve } r(x) = \int_a^x f(x) dx \text{ ' dir. Böylece,}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \epsilon^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) \epsilon^n \right) e^{-r(x)/\epsilon} \quad (4.3)$$

$$r(x) = \int_a^x f(x) dx$$

olur[28].

Reddy ve Chakravarthy bu metodu biraz daha basitleştirmiş ve singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer probleminin yerine üç tane başlangıç değer problemi elde etmiştir. Bu başlangıç problemleri:

- I. $f(x)p_0'(x) + g(x)p_0(x) = h(x), p_0(b) = \beta$
- II. $\frac{d}{dx}[f(x)q_0(x)] = g(x)q_0(x), q_0(a) = \alpha - p_0(a)$
- III. $r'(x) = f(x), r(a) = 0$

dır. Dikkat edilirse buradaki başlangıç değer problemleri ϵ parametresinden bağımsızdır.

İkinci başlangıç değer probleminin çözümü birincisine bağlıdır ve ikinci problemin çözümü ancak birinci problemin çözümünde $x=a'$ nın bilinmesiyle bulunabilir. Üçüncü başlangıç değer problemi ise ilk iki problemden bağımsızdır. Tek başına çözülebilir. Başlangıç değer problemlerinin sayısal çözümünde etkili yöntemler olmakla birlikte buradaki örneklerde dördüncü mertebeden Runge–Kutta metodu kullanılmıştır[27].

4.3. Başlangıç Değer Yaklaşımı Kullanılarak Singüler Tedirgemeli İki-Nokta Sınır Değer Problemlerinin Çok Nokta Sınır Değer Çözümü

Aşağıda başlangıç değer yaklaşımı kullanılarak singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer problemleri için bir çok nokta sınır değer çözümü algoritması üretilmiş ve çözüm için bir algoritma verilmiştir[29].

İlk olarak,

$$\varepsilon y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.4)$$

$$y(a) = \alpha \quad (4.4.a)$$

$$y(b) = \beta \quad (4.4.b)$$

formundaki lineer singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada ε küçük pozitif bir parametre ($0 < \varepsilon \ll 1$) ve α, β bilinen sabitlerdir. $f(x), g(x)$ ve $h(x)$, $[a, b]$ aralığında yeteri kadar sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bundan başka $[a, b]$ aralığı boyunca M pozitif bir sabiti belirtmek üzere $f(x) \geq M > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu kabul sınır katmanının yalnızca $x = a$ nın komşuluğunda yer almasını temin eder[29].

Şimdi bu problemi çözmek için önerilen metot tanıtılacaktır. Aralık m alt aralığa ayrılmıştır ve her bir alt aralıkta

$$\varepsilon y_j''(x) + f(x)y_j'(x) + g(x)y_j(x) = h(x), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

Eş. 4.4.a ve Eş. 4.4.b sınır şartlarını yani

$$y_1(a) = \alpha, y_m(b) = \beta$$

şartlarını sağlaması gereken m tane iki- nokta sınır değer problemi meydana gelmiştir. Arabağ noktalarında, bu problemlerden elde edilecek ortak çözümün sürekli olabilmesi için,

$$y_j(x_j) - y_{j+1}(x_j) = 0, \quad y_j'(x_j) - y_{j+1}'(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

süreklilik şartları sağlanmalıdır.

Yeni m tane sınır değer problemlerini çözmek için arabağ noktalarında [30] kayıp sınır şartlarına ihtiyaç vardır. Daha sonra bu sınır değer problemlerinin herhangi uygun bir metot ile paralel olarak çözülebileceği kabul edilebilir. Bundan sonra amaç bu çözümler için kayıp sınır şartlarını ortaya koymaktır. Bu sınır şartları tüm aralık üzerinde sürekli ve Eş. 4.4.a, Eş.4.4.b sınır şartlarını sağlayan belirli bir $y_0(x)$ ilk yaklaşım eğrisi ile başlanarak ardışık yaklaşımla bulunabilir. Bu çalışmada $y_0(x)$ ilk yaklaşım eğrisi bir başlangıç değer yaklaşımı metodu [27] kullanılarak elde edilmiştir. Bu metotta verilen Singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer probleminin yerine üç tane başlangıç değer problemi alınır. Eş. 4.4, Eş. 4.4.a ve Eş. 4.4.b' ye karşılık olarak bu üç tane başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned} f(x)p_0'(x) + g(x)p_0(x) &= h(x) \quad , \quad p_0(b) = \beta \\ \frac{d}{dx}[f(x)q_0(x)] &= g(x)q_0(x) \quad , \quad q_0(a) = \alpha - p_0(a) \\ r'(x) &= f(x) \quad , \quad r(a) = 0. \end{aligned}$$

şeklinde verilir[29].

Burada bu üç tane başlangıç değer probleminin ε tedirgeme parametresinden bağımsız olduğunu belirtmek yerinde olur. İkinci problem sadece birinci problemin çözümünün $x = a$ daki çözümünün bilinmesi halinde çözülür. Üçüncü problem ilk iki problemden bağımsızdır ve bu problem bağımsız olarak çözülebilir. Bu başlangıç değer problemlerini çözmek için çeşitli verimli metotlar vardır. Sayısal hesaplamalar için dördüncü mertebeden klasik Runge–Kutta metodunu kullanmak uygun olabilir. Aslında herhangi analitik veya sayısal metotlar da kullanılabilir. $p_0(x)$, $q_0(x)$ ve $r(x)$ bulunduktan sonra Eş. 4.4, Eş. 4.4.a ve Eş. 4.4.b' nin ilk yaklaşım çözümü

$$y_0(x) = p_0(x) + q_0(x)e^{-r(x)/\varepsilon}$$

olarak elde edilir. Artık yeni arabağ noktaları $(x_j, y_0(x_j))$ dır. Bundan sonra yerel çözümleri birleştirmek için bir işleme ihtiyaç vardır[29].

Aralığın uzunlukları $l_1, l_2, \dots, l_m$ olan m tane alt aralığa bölündüğü kabul edilsin.

Burada $x_1 = a + l_1, x_2 = x_1 + l_2, \dots, x_{m-1} = x_{m-2} + l_{m-1}, x_m = x_{m-1} + l_m = b$ ve aynı

zamanda $e = b - a = \sum_{i=1}^m l_i$ dır. Kayıp sınır şartlarının,

$$B_{01} = y_0(x_1), B_{02} = y_0(x_2), \dots, B_{0(m-1)} = y_0(x_{m-1}), \beta = y_0(x_m).$$

şeklinde olduğu kabul edilsin.

$y_0(x)$ ilk yaklaşım çözümü yardımıyla elde edilen yeni sınır şartları da kullanılarak aşağıdaki m tane singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer problemleri bir başlangıç değer yaklaşımı metodu kullanılarak paralel olarak çözülür :

$$a < x < x_1, \quad (4.5.a)$$

$$\varepsilon y_{11}''(x) + f(x)y_{11}'(x) + g(x)y_{11}(x) = h(x), \quad (4.5.b)$$

$$y_{11}(a) = \alpha, y_{11}(x_1) = B_{01}, \quad (4.5.c)$$

$$x_1 < x < x_2, \quad (4.5.d)$$

$$\varepsilon y_{12}''(x) + f(x)y_{12}'(x) + g(x)y_{12}(x) = h(x), \quad (4.5.e)$$

$$y_{12}(x_1) = B_{01}, y_{12}(x_2) = B_{02}, \quad (4.5.f)$$

.

.

.

$$x_{m-1} < x < x_m, \quad (4.5.g)$$

$$\varepsilon y_{1m}''(x) + f(x)y_{1m}'(x) + g(x)y_{1m}(x) = h(x), \quad (4.5.h)$$

$$y_{1m}(x_{m-1}) = B_{0(m-1)}, y_{1m}(x_m) = \beta, \quad (4.5.i)$$

Eş. 4.5' den $y_{11}(x), y_{12}(x), \dots, y_{1m}(x)$ çözüm eğrileri elde edilir. İlk alt indis global çözümün iterasyon sayısını gösterirken ikinci alt indis lokal alt aralık çözümleri ile ilgilidir. Bu m tane eğri x_i noktalarında tam çözümden iki çözümün farkının bir ölçüsü olan

$$\Delta y'_k(x_i) = y'_{k(i+1)}(x_i) - y'_{ki}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, (m-1)$$

$(m-1)$ tane süreksizliğe sahiptir.

H.Pasic' in metodundan [31] esinlenerek $y_k(x)$ [25] nin k -ıncı iterasyon çözümü olmak üzere, [25] den yeni arabağ noktalarını kullanarak $B_{ki} = y_k(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$ olur. Böylece yeni lokal çözümler $y_{(k+1)1}(x), y_{(k+1)2}(x), \dots, y_{(k+1)m}(x)$ şeklinde elde edilir. Böyle bir işlem

$$y_k(x_i) = B_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, (m-1); \quad k = 1, 2, \dots$$

dizisini üretir. Böylece $x_{s-1} \leq x \leq x_s$, $s = 1, 2, \dots, m$ için

$$y_k(x) = y_{ks}(x) + \frac{1}{e} \left[\sum_{i=1}^{m-s} \left(\sum_{p=1}^i l_{m-(p-1)} \right) \Delta y'_k(x_{m-i}) \right] x + \frac{1}{e} \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{p=1}^j l_p \right) \Delta y'_k(x_j) \right] (e - x);$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$s = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq x_1 \\ 2, & x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ m, & x_{m-1} < x \leq x_m \end{cases}$$

şeklinde yeni çözüm elde edilir.

Lokal çözümlerin başarı ile bulunduğu ve yakınsaklık kriterlerine göre başarılı çözümlerin kullanıldığı kabul edilirse, yakınsaklık sadece arabağ noktalarında test edilmelidir. Böylece eğer arabağ noktaları tam çözümlere yakınsarsa, parçalı sürekli çözüm tam çözümlerden birine (belki çok olabilir) yakınsamalıdır. Eğer bütün sıralı i noktalarında

$$\|y_{k+1}(x_i) - y_k(x_i)\| \leq \text{tolerans} , \quad k = 1, 2, \dots \text{ ve } i = 1, 2, \dots, (m-1)$$

sağlanırsa, yakınsama k iterasyon sonra sağlanır[29].

Algoritma

Burada bir başlangıç değer yaklaşımı kullanarak singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer probleminin çok nokta sınır değer çözümü için bir algoritma verilmiştir.

Adım 1: Başlangıç değer yaklaşımını [27] kullanarak singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer probleminin bir $y_0(x)$ ilk yaklaşım çözümünü bul.

Adım 2: Aralığı m tane alt aralığa böl.

Adım 3: Her alt aralıkta m tane singüler tedirgemeli iki- nokta sınır değer problemini başlangıç değer yaklaşımını kullanarak çöz. Yeni lokal çözümleri $y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{km}(x)$ şeklinde elde et.

Adım 4: $y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{km}(x)$ lokal çözümlerini kullanarak, $x_{s-1} \leq x \leq x_s, s = 1, 2, \dots, m$ için yeni lokal çözüm eğrilerini

$$y_k(x) = y_{ks}(x) + \frac{1}{e} \left[\sum_{i=1}^{m-s} \left(\sum_{p=1}^i l_{m-(p-1)} \right) \Delta y'_k(x_{m-i}) \right] x + \frac{1}{e} \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{p=1}^j l_p \right) \Delta y'_k(x_j) \right] (e-x)$$

$$\begin{aligned} & s = 1, 2, \dots, m \\ & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

yardımları ile bul.

Adım 5: Böyle bir işlemle yeni lokal çözümler için yeni sınır değerleri olan $B_{ki} = y_k(x_i), k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, (m-1)$ dizisini üret.

Adım 6: Eğer $\|y_{k+1}(x_i) - y_k(x_i)\| \leq \text{tolerans}$, $k = 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, (m-1)$ ise dur değilse Adım 3'ü izle.

Eş. 4.4, Eş. 4.4.a ve Eş. 4.4.b 'de verilmiş olan genel singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde bazı bölgelerde ani değişimin olduğu gözlenmektedir. Bu ani değişim problemin türüne göre farklı bölgelerde olabilmektedir. Genellikle bu değişim belli bir sınırdır ve bu bölge çoğunlukla ince bir bölgedir. Bu ince bölge sınır katmanı olarak adlandırılır[32].

Çizelge 4.1, Eş. 4.4' de genel olarak verilmiş olan singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümü ve sınır katmanları ile ilgili olarak özet bilgiler sunmaktadır[26].

Çizelge 4.1. Eş. 4.4' de verilen singüler tedirmeli iki-nokta sınır değer probleminin çözümü ile ilgili özet bilgiler

$f(x)$ ' in durumu	Çözüm tipi
$f(x) \neq 0, x \leq a \leq b$:	
$f(x) > 0$ ise	sınır katmanı $x=a$ noktasında
$f(x) < 0$ ise	sınır katmanı $x=b$ noktasında

Çizelge 4.1. (Devam) Eş. 4.4' de verilen singüler tedirmeli iki-nokta sınır değer probleminin çözümü ile ilgili özet bilgiler

$f(x)=0$:	
$g(x)>0$ ise	sınır katmanları $x=a$ ve $x=b$ noktalarında
$g(x)<0$ ise	çok hızlı titreşen çözüm
$g(x)$ ' deki değişim işareti	klasik dönüş noktası
$f'(x) \neq g(x)$, $f(0)=0$:	
$f'(x)<0$ ise	sınır katmanı yok, iç katman $x=0$ ' da
$f'(x)>0$ ise	sınır katmanları $x=a$ ve $x=b$ ' de, $x=0$ ' da iç katman yok

4.2. Örnek

Aşağıda verilmiş olan singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemini başlangıç değer yaklaşımıyla çözelim[27].

$$\in y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 1$$

Çözüm

Öncelikle başlangıç değer yaklaşımı içerisinde farzedilen değerler tespit edilir.

$$f(x) = 1, g(x) = -1, h(x) = 0$$

$$a = 0, b = 1$$

$$\alpha = 1, \beta = 1$$

Sonra, bilinen bu değerler ile üç farklı başlangıç değer problemi çözülür:

I. Bilinen fonksiyon değerleri başlangıç değer yaklaşımı içerisindeki bir numaralı denklemde yerine yazılır:

$$1. p_0'(x) + (-1).p_0(x) = 0, \quad p_0(1) = 1$$

Bu başlangıç değer problemi çözülecek olursa,

$$p_0'(x) - p_0(x) = 0,$$

bulunur. Buradan da,

$$p_0'(x) = p_0(x)$$

olarak bulunur. Bu denklemi çözebilmek için $y = p_0(x)$ olarak düşünülürse,

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} dy = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 1 dx$$

$$\ln y = x + c \Rightarrow \ln p_0(x) = x + c$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulları bulunan denklemde yerine yazılırsa,

$$\ln p_0(1) = 1 + c$$

$$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

elde edilir. Bulunan bu sabit yerine yazılırsa,

$$p_0(x) = e^{x-1}$$

olarak bulunmuş olur.

$$\text{II. } \frac{d}{dx}[1 \cdot q_0(x)] = (-1) \cdot q_0(x), \quad q_0(0) = 1 - p_0(0)$$

denklemini elde edilir. Öncelikle başlangıç şartının bulunması gerekir. Bunun içinde,

$$p_0(x) = e^{x-1}$$

$$p_0(0) = e^{0-1} \Rightarrow p_0(0) = e^{-1}$$

olarak bulunur. Bulunan bu ifade $q_0(0) = 1 - p_0(0)$ denkleminde yerine yazılırsa başlangıç koşulu,

$$q_0(0) = 1 - p_0(0) \Rightarrow q_0(0) = 1 - e^{-1}$$

elde edilir. Başlangıç şartı bulunduktan sonra denklem çözülecek olursa,

$$q_0'(x) = -q_0(x)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemini çözebilmek için,

$y = q_0(x)$ olarak kabul edilirse,

$$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{1}{y} dy = -dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -1 dx$$

$$\ln y = -x + c \Rightarrow \ln q_0(x) = -x + c$$

olarak bulunur. Başlangıç şartı burada yerine yazılacak olursa,

$$\ln q_0(0) = 0 + c \Rightarrow c = e^{q_0(0)}$$

elde edilir.

III. $r'(x) = 1$, $r(0) = 1$ başlangıç değer problemi çözülür.

$$y = r(x) \Rightarrow y' = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$$

$$\int dy = \int dx \Rightarrow y = x + c$$

olarak bulunur. Başlangıç şartı denklemde yerine yazılırsa,

$$1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

bulunur. Bulunan bu sonuç yerine yazılacak olursa,

$$y = x + 1 \Rightarrow r(x) = x + 1$$

elde edilmiş olur.

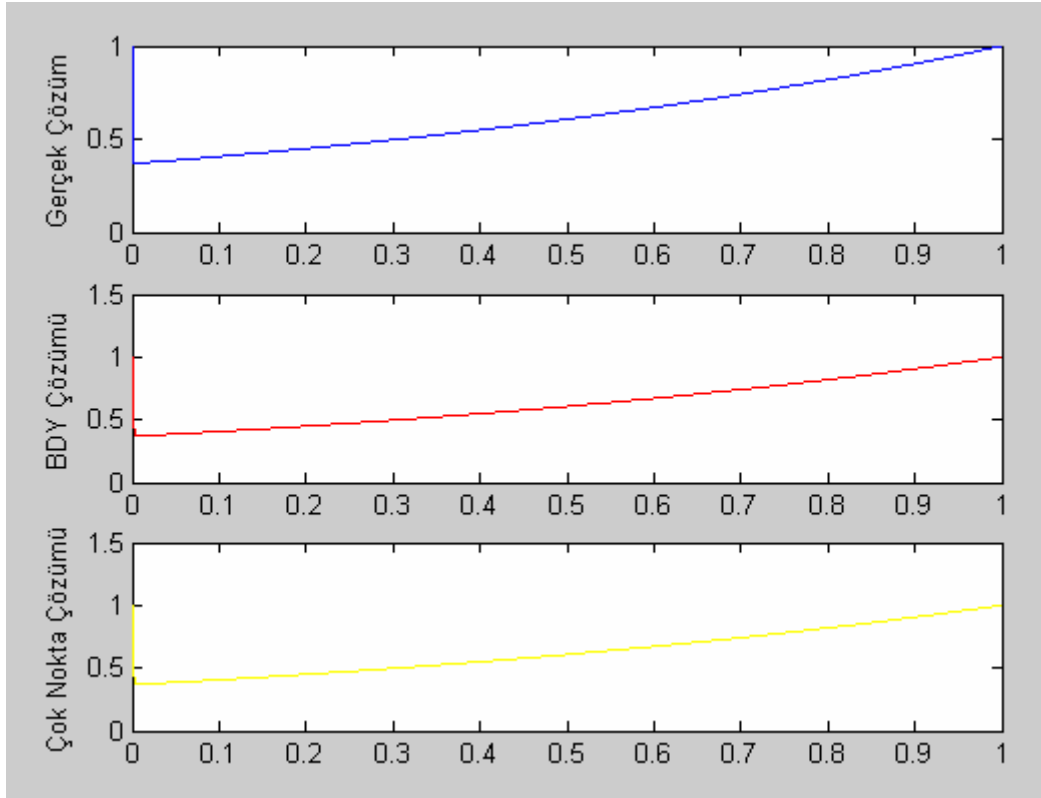
Bulunan üç farklı denklem birleştirilirse,

$$y(x) = e^{x-1} + e^{x-0.4585} \cdot e^{-(x+1)/\epsilon}$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu denklemin başlangıç değer yaklaşımı ile çözümünden elde edilen sonuçlar bu çalışmada sunulan algoritmayla çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2' de birlikte gösterilmektedir. Programın grafiksel görüntüsü ise Şekil 4.1' de verilmiştir.

Çizelge 4.2. $y(x) = e^{x-1} + e^{x-0.4585} \cdot e^{-(x+1)/\epsilon}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar

X	Tam çözüm	BDY çözümü	Çok nokta çözümü	Hata oranı
0,000	1,0000000	1,0000000	1,00000	0,00000
0,010	0,3719724	0,3712379	0,37164	0,00033
0,020	0,3756784	0,3749439	0,37539	0,00028
0,030	0,3794502	0,3787160	0,37920	0,00025
0,040	0,3832599	0,3825260	0,38305	0,00020
0,050	0,3871079	0,3863742	0,38694	0,00016
0,100	0,4069350	0,4062043	0,40696	0,00003
0,300	0,4969324	0,4962382	0,49834	0,00141
0,500	0,6068334	0,6062278	0,60805	0,00122
0,700	0,7410401	0,7405963	0,74273	0,00169
0,900	0,9049277	0,9047471	0,90596	0,00104
1,000	1,0000000	1,0000000	1,00000	0,00000



Şekil 4.1. $y(x) = e^{x-1} + e^{x-0.4585} \cdot e^{-(x+1)/\epsilon}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler

4.3. Örnek

Aşağıda verilmiş olan singüler tedişgemeli iki-nokta sınır değeri problemini başlangıç değeri yaklaşımı ile çözelim[27].

$$\epsilon y''(x) + y'(x) = 1 + 2x$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

Çözüm

Öncelikle tespit edilen fonksiyonların değeri belirlenir:

$$f(x) = 1, g(x) = 0, h(x) = 1 + 2x,$$

$$a = 0, \alpha = 0,$$

$$b = 1, \beta = 1$$

I. $1.p_0'(x) + 0.p_0(x) = 1 + 2x, \quad p_0(1) = 1$ başlangıç değer problemi çözülür.

$$p_0'(x) = 1 + 2x \Rightarrow y = p_0(x)$$

$$y' = 1 + 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + 2x$$

$$\int dy = \int (2x + 1)dx \Rightarrow y = x^2 + x + c \Rightarrow p_0(x) = x^2 + x + c$$

olarak bulunur. Başlangıç şartı yerine yazılacak olursa,

$$1 = 1^2 + 1 + c \Rightarrow c = -1$$

elde edilir. Bulunan bu sabit denklemde yerine yazılırsa,

$$p_0(x) = x^2 + x - 1$$

elde edilir.

$$\text{II. } \frac{d}{dx}[1, q_0(x)] = 0.q_0(x), \quad q_0(0) = 0 - p_0(0)$$

Başlangıç değer problemi çözülecek olursa, öncelikle başlangıç şartını bulmak gerekir:

$$p_0(x) = x^2 + x - 1 \Rightarrow p_0(0) = -1$$

$$q_0(0) = 0 - (-1) \Rightarrow q_0(0) = 1$$

elde edilir. Şimdi denklem çözülecek olursa,

$$y = q_0(x) \Rightarrow y' = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \int dy = \int 0 \cdot dx \Rightarrow y = c$$

bulunur. Başlangıç şartı yerine yazılacak olursa,

$$y = 1 \Rightarrow q_0(x) = 1$$

elde edilir.

III. $r'(x) = 1$, $r(0) = 0$ başlangıç değer problemi çözülmüşse,

$$y = r(x) \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\int dy = \int dx \Rightarrow y = x + c$$

bulunur. Başlangıç şartı yerine yazılacak olursa,

$$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$y = x \Rightarrow r(x) = x$$

olarak bulunur.

Bulunan üç denklem başlangıç değer yaklaşımı içerisinde yerine yazılacak olursa,

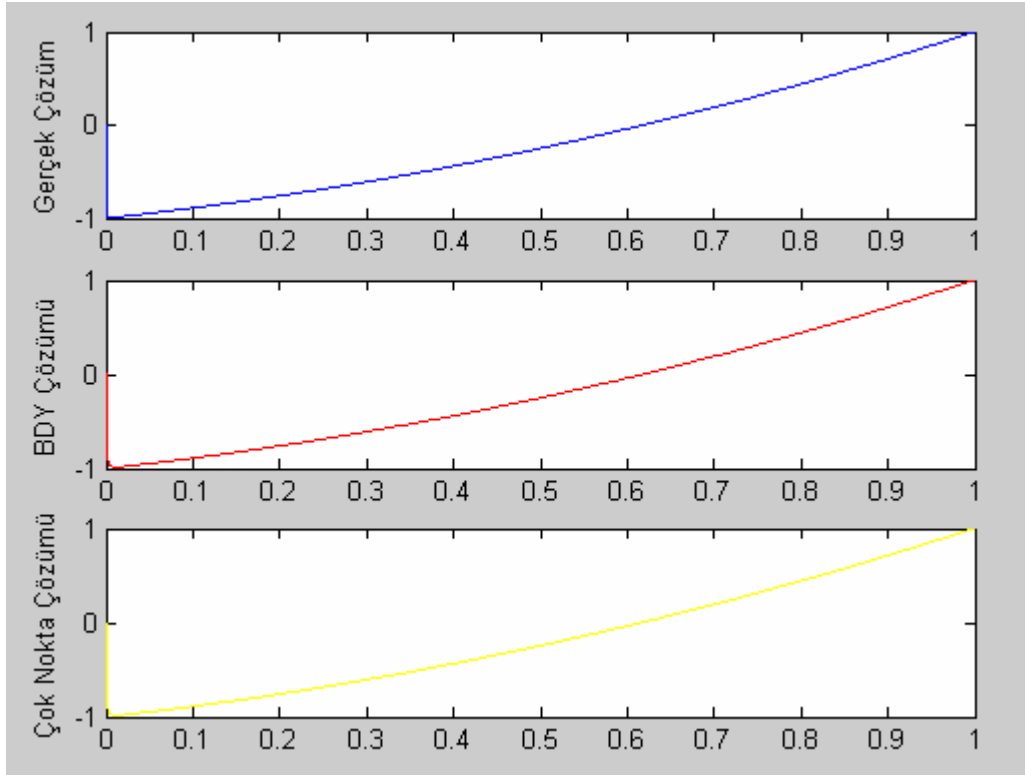
$$y(x) = (x^2 + x - 1) + e^{-x/\epsilon}$$

elde edilir. Bu denklemin başlangıç değer yaklaşımı ile çözümünden elde edilen

sonuçlar ve bu çalışmada sunulan algoritmayla çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 4.3’ de birlikte gösterilmektedir. Programın grafiksel görüntüsü ise Şekil 4.2’ de verilmiştir.

Çizelge 4.3. $y(x) = (x^2 + x - 1) + e^{-x/\epsilon}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar

X	Tam çözüm	BDY çözümü	Çok nokta çözümü	Hata oranı
0,000	0,0000000	0,0000000	0,00000	0,00000
0,010	-0,9878747	-0,9918800	-0,98975	0,00188
0,020	-0,9776400	-0,9815600	-0,97940	0,00176
0,030	-0,9671600	-0,9710400	-0,96881	0,00165
0,040	-0,9564800	-0,9603199	-0,95801	0,00153
0,050	-0,9456000	-0,9493999	-0,94701	0,00141
0,100	-0,8882000	-0,8918000	-0,88903	0,00083
0,300	-0,6086000	-0,6114000	-0,60455	0,00405
0,500	-0,2490000	-0,2510000	-0,24519	0,00381
0,700	0,1906001	0,1894000	0,19624	0,00564
0,900	0,7102001	0,7098000	0,71376	0,00356
1,000	1,0000000	1,0000000	1,00000	0,00000



Şekil 4.2. $y(x) = (x^2 + x - 1) + e^{-x/\epsilon}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler

4.4. Örnek

Aşağıda verilen singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemini başlangıç değer yaklaşımı ile çözelim[27].

$$\epsilon y''(x) + \left(1 - \frac{x}{2}\right)y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

Çözüm

Öncelikle bilinen fonksiyon değerleri tespit edilir:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2}, \quad h(x) = 0$$

$$a = 0, \quad \alpha = 0$$

$$b = 1, \quad \beta = 1$$

$$\text{I. } (1 - \frac{x}{2})p_0'(x) - \frac{1}{2}p_0(x) = 0, \quad p_0(1) = 1$$

Denklem çözülecek olursa,

$$(1 - \frac{x}{2})p_0'(x) = \frac{1}{2}p_0(x) \Rightarrow p_0'(x) = \frac{\frac{1}{2}p_0(x)}{1 - \frac{x}{2}}$$

$$p_0'(x) = \frac{p_0(x)}{2} \cdot \frac{2}{2-x} \Rightarrow p_0'(x) = \frac{1}{2-x}p_0(x)$$

$$y = p_0(x)$$

$$y' = \frac{1}{2-x}y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2-x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2-x} dx$$

$$y = \frac{1}{2-x} \Rightarrow p_0(x) = \frac{1}{2-x}$$

elde edilir.

$$\text{II. } \frac{d}{dx}[(1 - \frac{x}{2})q_0(x)] = -\frac{1}{2}q_0(x), \quad q_0(0) = 0 - p_0(0)$$

Başlangıç değer problemi çözülür. Öncelikle başlangıç şartı hesaplanır.

$$q_0(0) = 0 - p_0(0) \Rightarrow p_0(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow q_0(0) = -\frac{1}{2}$$

Denklem çözülecek olursa,

$$-\frac{1}{2}q_0(x) + (1 - \frac{x}{2})q_0'(x) = -\frac{1}{2}q_0(x)$$

$$(1 - \frac{x}{2})q_0'(x) = 0 \Rightarrow q_0'(x) = 0$$

bulunur.

$y = q_0(x)$ olarak kabul edilirse,

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \int dy = \int dx \Rightarrow y = c$$

olarak bulunur. Başlangıç şartı yerine yazılırsa,

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow q_0(x) = -\frac{1}{2}$$

elde edilir.

III. $r'(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $r(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözelim.

$$y = r(x) \Rightarrow y' = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{2}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{2}(2-x)dx \Rightarrow y = \frac{1}{2}(2x - \frac{x^2}{2}) + c$$

olarak bulunur. Başlangıç şartı yerine yazılırsa,

$$0 = \frac{1}{2}(2 \cdot 0 - \frac{0}{2}) + c \Rightarrow c = 0$$

olarak bulunur. Bulunan bu sabit denklemde yerine yazılacak olursa,

$$y = \frac{1}{2}(2x - \frac{x^2}{2}) \Rightarrow y = x - \frac{x^2}{4} \Rightarrow r(x) = x - \frac{x^2}{4}$$

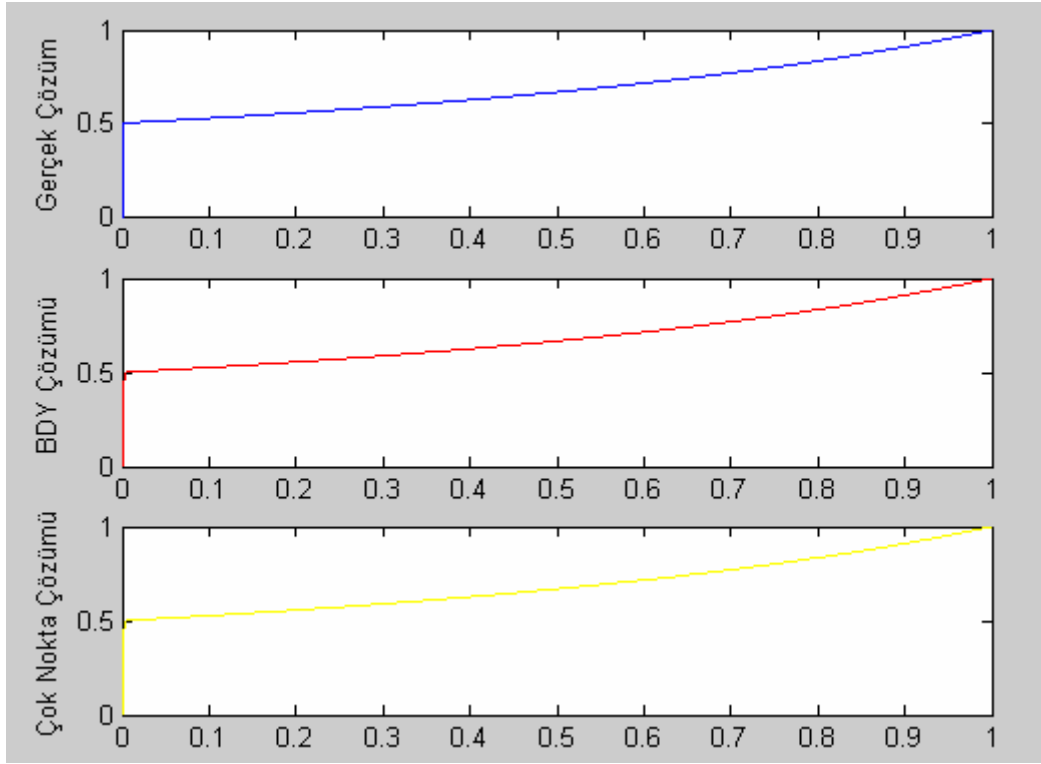
Bulunan üç denklemdeki ifadeler yerine yazılacak olursa,

$$y(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-x^2}{4}/\epsilon}$$

elde edilir. Bu denklemin başlangıç değer yaklaşımı ile çözümünden elde edilen sonuçlar ve bu çalışmada sunulan algoritmayla çözümünden elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4' de birlikte gösterilmektedir. Programın grafiksel görüntüsü ise Şekil 4.3' de verilmiştir.

Çizelge 4.4. $y(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-x^2}{4}/\epsilon}$ denkleminin çözümünden elde edilen sonuçlar

X	Tam çözüm	BDY çözümü	Çok nokta çözümü	Hata oranı
0,000	0,0000000	0,0000000	0,00000	0,00000
0,010	0,5024893	0,5020117	0,50254	0,00006
0,020	0,5050505	0,5045496	0,50516	0,00011
0,030	0,5076142	0,5071134	0,50778	0,00017
0,040	0,5102041	0,5097033	0,51042	0,00022
0,050	0,5128205	0,5123200	0,51309	0,00027
0,100	0,5263158	0,5258163	0,52687	0,00056
0,300	0,5882353	0,5877497	0,59012	0,00189
0,500	0,6666667	0,6662214	0,66847	0,00181
0,700	0,7692308	0,7688746	0,77116	0,00193
0,900	0,9090909	0,9089253	0,91008	0,00099
1,000	1,0000000	1,0000000	1,00000	0,00000



Şekil 4.3. $y(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-x^2}{4\epsilon}}$ denkleminin çözümünden elde edilen grafikler

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Singüler tedirgemeli ikinci mertebeden iki-nokta sınır değer problemleri pratikte çok geniş kullanım alanlarına sahiptir. Akışkanlar mekaniğinde, akışkanlar dinamiğinde, esneklikte, kuantum mekaniğinde, plastiklikte, kimyasal reaktör teorisinde, aerodinamikte, plazmadinamikte, hidrodinamikte, seyrek gaz dinamiğinde, oşinografide, ışınların sapma teorisinde, meteorolojide, difüzyon işlemlerinde, ışın yayma akışında ve uygulamalı matematiğin diğer dallarında çok sık kullanılmaktadır. Dolayısıyla problemlerin çözümünde elde edilen sayısal sonuçların önemi bir kez daha önem kazanmaktadır.

Singüler tedirgemeli iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümü için başlangıç değer yaklaşımı tabanlı çok nokta sınır değer çözümü metodu tanımlanmış ve bu metod için bir algoritma verilmiştir. Bu algoritmadaki başlangıç değer problemlerinin çözümü için klasik dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılmıştır. Hesaplamalar MATLAB 6.5 programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bu sonuçların gerçek çözümle ve daha önce elde edilen diğer yaklaşık çözümlerle karşılaştırıldığında oldukça iyi olduğu görülmüştür.

Verilen metot lineer denklemler için uygulanmıştır. Lineer olmayan denklemler için de, denklemi lineerleştirmek için kullanılan yarı-lineerleştirme (quasilinearization) metodu kullanılarak uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Edwards, C. H., Penney, D. E., “Differential Equations and Boundary Value Problems Computing and Modeling Third Edition”, **Pearson Prentice-Hall**, New Jersey, 1-41, 111-143 (2001).
2. Pakdemirli, E., “Diferensiyel Denklemler Teori ve Problemlerle”, **Güven Kitabevi**, Ankara, 1-7 (1978).
3. Goode, S. W., “Differential Equations and Linear Algebra (Second Edition)”, **Prentice-Hall**, New Jersey, 9-17, 29-35, 44-50, 61-82 (2000).
4. Cushing, J. M., “Differential Equations”, **Prentice-Hall**, New Jersey, 1-7, 19-25, 44-53 (2004).
5. Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A. D., “ Fundamentals Of Differential Equations and Boundary Value Problems Fourth Edition, **Pearson Education**, New York, 10-14, 661-670 (2004).
6. Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., “Diferensiyel Denklemler Teorisi”, **Papatya Yayıncılık**, İstanbul, 22-30 (2002).
7. Halilov, H., “Diferensiyel Denklemler ve Lineer Cebirin Elemanları”, **Literatür Yayıncılık**, İstanbul, 267-277 (2003).
8. Rai, B., Choudhury, D. P., Freedman, H.I., “ A Course in Ordinary Differential Equations ”, **Alpha Science**, India, 416-442 (2002).
9. Gray, A., Mezzino, M., Pinsky, M.A., “Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica”, **Telos**, New York, 407-443 (1997).
10. Kostelich, E. J., Armbruster, D., “Introductory From Differential Linearity Equations to Chaos”, **Addison-Wesley**, Massachusetts, 530-543 (1997).
11. Akın, Ö., “Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri 3.Baskıdan Çeviri”, **Palme Yayıncılık**, Ankara, 111-112 (2006).
12. Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç, G., “ Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları 6. Baskı ”, **Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi**, İzmir, 457-483 (2003).
13. Williamson, R. E., “Introduction To Differential Equations and Dynamical Systems”, **John Wiley & Sons**, Danver, 573-581 (2001).

14. Abell, M.L., Braselton, J.P., "Differential Equations with Maple V Second Edition", **Academic Press**, San Diego, 584-593 (2000).
15. Ortega, J.M., Poole, W.G., "An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations", **Pitman Publishing**, Massachussets, 69-104 (1981).
16. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Eighth Edition", **Wiley**, Danvers, 569-576 (2005).
17. Roberts, S. M., Shipman, J. S., "Two-Point Boundary Value Problems", **American Elsevier Publishing Company**, New York, 1-11 (1972).
18. Kohler, W., Johnson, L., "Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems", **Pearson Education**, New York, 759-789 (2004).
19. Meyer, G. H., "Initial Value Methods for Boundary Value Problems Theory and Application of Invariant Imbedding 100", **Academic Press**, New York And London, 51-99 (1973).
20. Ixaru, L. "Numerical Methods for Differential Equations and Applications", **D.Reidal Publishing Company**, Romania, 265-273 (1984).
21. Internet: 10/24.539 Lecture Notes by Dr. J. R. White, UMass-Lowell. <http://gershwin.ens.fr/vdaniel/Doc - Locale / Cours-Mirrored/Methodes-Maths/-white/math/s5/s5shmet/s5shmet.html> (2005).
22. Internet: 10/24.539 Lecture Notes by Dr. J. R. White, Umass - Lowell. http://gershwin.ens.fr/vdaniel/Doc - Locale / Cours-Mirrored/Methodes-Maths/-white/math/s5/ex5_1/ex5_1.html (2005).
23. Internet: 10/24.539 Lecture Notes by Dr. J. R. White, Umass - Lowell. <http://gershwin.ens.fr/vdaniel/Doc - Locale / Cours-Mirrored/Methodes-Maths/-white/math/s5/s5fdmet/s5fdmet.html> (2005).
24. Celia, A., Gray, W.G., "Numerical Methods for Differential Equations Fundemental Concepts for Scientific and Engineering Applications", **Prentice-Hall**, New Jersey, 44-50 (1992).
25. Bender, C. M., Orszag, S. A., "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers Asymtotic Methods and Perturbation Theory", **Springer**, New York, 319-335 (1999).
26. Kadalbajoo, M. K., Patidar, K. C., "A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations", **Applied Mathematics and Computation**, 130: 457-510 (2002).

27. Reddy, Y. N., Chakravarthy, P. P., “An initial – value approach for solving singularly perturbed two-point boundary value problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 155 (1): 95-110 (2004).
28. Smith, S. M., “Singular Perturbation Theory an Introduction with Applications”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 86-100 (1985).
29. Doğan, N., Sayan, H. H., Akın, Ö., “ Singüler Tedirgemeli İki - Nokta Sınır Değer Problemlerinin Başlangıç Değer Yaklaşımı Tabanlı Çok Noktalı Sınır Değer Çözümü”, *XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu*, İstanbul, (2005).
30. Jayakumar, J., “ Improvement of numerical solution by boundary value technique for singularly perturbed one dimensional reaction diffusion problem”, *Applied Mathematics and Computation*, 142: 417-447 (2003).
31. Pasic, H., “Multipoint Boundary- Value Solution of Two-Point Boundary-Value Problems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 100 (2): 397- 416 (1999).
32. Haberman, R. , “Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems Third Edition”, *Prentice-Hall*, USA, 677-689 (1998).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ULUYOL, Çelebi
Uyruğu : T.C
Doğum tarihi ve yeri : 20.11.1981 Keskin
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 212 09 60 / 405
e-mail : celebi@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Bilgisayar Sist. Öğretmenliği	2002
Lise	Ankara Kurtuluş Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2002-2005	Etimesgut Ticaret Meslek Lisesi	Öğretmen
2005-2006	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, futbol, müzik