

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİVRİLTİLMİŞ ANKASTRE KİRİŞ YAPILARDA KİRİŞ TEORİLERİNİN
İNCELENMESİ VE TİTREŞİM ANALİZİ UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nejat Göker SUNGUROĞLU

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİVRİLTİLMİŞ ANKASTRE KİRİŞ YAPILARDA KİRİŞ TEORİLERİNİN
İNCELENMESİ VE TİTREŞİM ANALİZİ UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Nejat Göker SUNGUROĞLU
(511131164)**

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL

HAZİRAN 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511131164 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ne-jat Göker SUNGUROĞLU**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yer-ine getirdikten sonra hazırladığı “**SİVRİLTİLMİŞ ANKASTRE KİRİŞ YAPILARDA KİRİŞ TEORİLERİNİN İNCELENMESİ VE TİTREŞİM ANALİZİ UYGULA-MALARI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin Orhan KAYA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr.Erol UZAL
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : **04 Mayıs 2015**
Savunma Tarihi : **04 Haziran 2015**

Aileme ve dostlarıma,

ÖNSÖZ

Üniversite lisans ve yüksek lisans öğrenim hayatım boyunca yoğun programına rağmen benimle ilgilenen, tezlerime danışmanlık yapan rektör yardımcımız Sn. Prof. Dr. İbrahim Özkol'a, lisansa ilk başladığım yıllarda araştırma görevlisi olan aldığım tüm derslerde bana yardımcı olmaya çalışan zamanla arkadaş olduğumuz hocam Sn. Serhat Yılmaz'a, aynı ilkokul, lise, yüksek lisansı beraber okuduğumuz arkadaşım araştırma görevlisi Kaan Yıldız'a, tez yazım aşamasında sürekli beraber çalıştığımız aynı lise, lisans, yüksek lisansı beraber okuduğumuz Evren Yenigelen'e ve son olarak maddi manevi hiçbir desteği esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

Haziran 2015

Nejat Göker SUNGUROĞLU
(Uzay Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Araştırması	2
2. TİTREŞİM	3
2.1 Titreşim Hareketleri ve Görülme Alanları.....	3
2.2 Titreşimin Sınıflandırılması.....	5
2.2.1 Serbestlik derecesine göre titreşim hareketinin sınıflandırılması	5
2.2.2 Dış etkilere göre titreşim hareketinin sınıflandırılması	7
2.2.3 Enerji kaybına göre titreşim hareketinin sınıflandırılması	7
2.2.4 Lineer ve Nonlineer titreşim hareketleri.....	7
2.3 Rezonans Durumu	8
3. KİRİŞ TEORİLERİ	9
3.1 Kiriş Teorilerine Genel Bakış	9
3.2 Euler Bernoulli Kiriş Teorisi	9
3.2.1 Euler-Bernoulli kiriş teorisinin tarihçesi	10
3.2.2 Euler-Bernoulli kiriş teorisi.....	10
3.2.3 Euler-Bernoulli kiriş teorisinde varsayılan kabuller.....	12
3.2.4 Euler-Bernoulli kiriş teorisi genel denklemleri	13
3.2.5 Sürekli sistemlerin enerji yöntemiyle doğal frekanslarının hesaplan- ması.....	14
3.2.6 Sivriltilmiş ankastre kirişin formülleri ve boyutsuzlaştırılması.....	15
3.2.7 Kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması.....	16
3.2.8 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının hesaplan- ması.....	17
3.2.9 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının hesaplanması	19
3.2.10 Kirişin burulmadan kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması	22
3.2.11 Ankastre kirişin burulmadan kaynaklanan doğal frekansı	23
3.3 Timoshenko Kiriş Teorisi	24

3.3.1 Timoshenko kiriş teorisi tarihçesi.....	24
3.3.2 Timoshenko kiriş teorisi	24
3.3.3 Timoshenko kiriş teorisi genel denklemleri	26
3.3.4 Kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması.....	28
3.3.5 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması .	31
3.3.6 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının bulunması	32
3.4 Shear(Kayma) Kiriş Teorisi.....	33
3.4.1 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması .	33
3.4.2 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının bulunması	35
3.5 Kiriş Teorilerinin Genel Karşılaştırılması	35
4. KİRİŞLERDE KULLANILAN ANALİZ YÖNTEMLERİ.....	37
4.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi	38
4.1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin kullanıldığı bazı paket programlar	39
4.2 Kirişin Eğilmeden Kaynaklanan Doğal Frekansının Bulunması.....	40
4.3 Sivriltilmiş Kirişin Eğilmeden Kaynaklanan Doğal Frekansı	43
4.4 SEY ile Dış Etkiler Altındaki Kirişin Yer Değiştirmelerinin Hesaplanması..	46
5. ÇALIŞMADA KULLANILAN PAKET PROGRAMLAR.....	49
5.1 Wolfram Mathematica	49
5.2 MSC/Nastran	50
5.2.1 Nastran'ın kullanıldığı bazı alanlar	51
5.2.2 Nastran'ın kullanıldığı bazı sektörler	52
5.3 MSC/Patran	52
6. ANALİZ.....	55
6.1 Geometrik Yapının Oluşturulması.....	56
6.2 Malzeme Özelliklerinin Atanması.....	57
6.3 Sonlu Elemanlar Oluşturulması.....	57
6.4 Elemana Özellik Atanması	59
6.5 Sınır Şartlarının Uygulanması	60
6.6 Analiz Yapılması	61
6.7 Sonuçların Alınması	62
6.8 Elde Edilen Frekans Değerlerinin İncelenmesi	63
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	67
7.1 Mod Şekillerinin Karşılaştırılması	67
7.2 Düz Ankastre Kiriş İçin Literatür Sonuçlarının Karşılaştırılması	68
7.2.1 Birinci referans çalışma.....	68
7.2.2 İkinci referans çalışma.....	75
7.3 Düz Ankastre Kiriş İçin Tez Çalışması Sonuçlarının Karşılaştırılması	78
7.4 Sivriltilmiş Ankastre Kiriş İçin Literatür Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	81
7.4.1 Üçüncü referans çalışma.....	81
7.5 Sivriltilmiş Ankastre Kiriş İçin Çalışma Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	83
7.6 Gelecek Çalışmalar.....	88
KAYNAKLAR.....	91
ÖZGEÇMİŞ	93

KISALTMALAR

D	: Deney
DTM	: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi
E-B	: Euler-Bernoulli kiriş teorisi
LÇF	: Lagrange Çarpımları Formülleri
Ns	: Nastran
R	: Rayleigh kiriş teorisi
SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
Sh	: Shear kiriş teorisi
T1	: Timoshenko kiriş teorisi genel çözümü
T2	: Timoshenko kiriş teorisi matris çözümü

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: $a_n L$ Değerleri	18
Çizelge 3.2: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(1.Mod)	19
Çizelge 3.3: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(2.Mod)	20
Çizelge 3.4: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(3.Mod)	20
Çizelge 3.5: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(4.Mod)	20
Çizelge 3.6: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(5.Mod)	21
Çizelge 3.7: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(6.Mod)	21
Çizelge 3.8: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(7.Mod)	21
Çizelge 3.9: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(8.Mod)	22
Çizelge 3.10 Kiriş teorileri karşılaştırması	36
Çizelge 4.1: SEY ile analitik çözüm karşılaştırması	43
Çizelge 4.2: Modellenen kirişin geometrik ve malzeme özellikleri	44
Çizelge 4.3: Sivriltilmiş kiriş için SEY ile analitik çözüm karşılaştırması	46
Çizelge 6.1: Sivriltilmiş kirişin parametrik değerleri	55
Çizelge 6.2: Alüminyum özellikleri	57
Çizelge 7.1: Birinci çalışmada kullanılan malzeme	68
Çizelge 7.2: Kullanılacak kiriş parametreleri	68
Çizelge 7.3: Bir numaralı kiriş($h/L=0.011$)	69
Çizelge 7.4: İki numaralı kiriş($h/L=0.0055$)	70
Çizelge 7.5: Üç numaralı kiriş($h/L=0.02$)	72
Çizelge 7.6: Dört numaralı kiriş($h/L=0.01$)	73
Çizelge 7.7: İkinci çalışmada kullanılan malzeme	76
Çizelge 7.8: Kullanılacak kiriş parametreleri	76
Çizelge 7.9: Beş numaralı kiriş($h/L=0.03$)	76
Çizelge 7.10 Altı numaralı kiriş($h/L=0.08$)	78
Çizelge 7.11 Yedi numaralı kiriş($h/L=0.1$)	79
Çizelge 7.12 Üçüncü çalışmada kullanılan kiriş parametreleri	81
Çizelge 7.13 Üçüncü çalışmada kullanılan malzeme	82
Çizelge 7.14 Sekiz numaralı kiriş($h/L=0.01$)	82
Çizelge 7.15 Dokuzuncu kirişte kullanılan malzeme	83
Çizelge 7.16 Dokuz numaralı kiriş($h/L=0.01$)	83
Çizelge 7.17 Onuncu kirişte kullanılan malzeme	85
Çizelge 7.18 Onuncu kirişte kullanılan kiriş parametreleri	85
Çizelge 7.19 On numaralı kiriş($h/L=0.004$)	85

Çizelge 7.20 On bir numaralı kiriş($h/L=0.1$).....	87
---	----

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : Uçak kanadı	2
Şekil 2.1 : Basit harmonik hareket(periyodik hareket)	4
Şekil 2.2 : Rastgele titreşim hareketi	4
Şekil 2.3 : Periyodik hareket.....	4
Şekil 2.4 : Basit sarkaç.....	6
Şekil 2.5 : Serbestlik derecelerine örnekler	6
Şekil 2.6 : Ankastre kiriş ve serbestlik derecesi	7
Şekil 3.1 : Uçak kanadının kesit alanı ve kiriş eksenini.....	11
Şekil 3.2 : Euler-Bernoulli kirişinde eğilme durumu.....	11
Şekil 3.3 : Euler-Bernoulli kirişinde kiriş kesitine etkiyen gerilmeler	12
Şekil 3.4 : Maksimum potansiyel ve kinetik enerjilerin eşitliği	14
Şekil 3.5 : Ankastre kiriş için eksen takımı	14
Şekil 3.6 : Sivriltilmiş bir ankastre kirişin parametreleri.....	15
Şekil 3.7 : Ankastre kiriş örneği	17
Şekil 3.8 : Ankastre kiriş için ilk üç mod şekli	18
Şekil 3.9 : Deformasyon karşılaştırılması.....	25
Şekil 3.10 : Dikdörtgen kesitli kiriş örneği.....	25
Şekil 3.11 : Kiriş kesit alanına etkiyen ifadeler	26
Şekil 4.1 : Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde çözüm alanı.....	39
Şekil 4.2 : Yolcu uçağı için bilgisayar görüntüsü	39
Şekil 4.3 : Ankastre kirişin iki elemana bölünmesi	40
Şekil 4.4 : Sivriltilmiş kiriş modelleme mantığı	43
Şekil 4.5 : Kirişin şekli ve modellenmesi	43
Şekil 4.6 : Lineer değişen yayılı yük	47
Şekil 4.7 : Sıcaklık etkisi	47
Şekil 5.1 : Mathematica ekran görüntüsü	50
Şekil 5.2 : Nastran'da uçak kanadı örneği	51
Şekil 5.3 : Patran 2013 Student Edition arayüzü	54
Şekil 6.1 : Sivriltilmiş ankastre kiriş modeli.....	56
Şekil 6.2 : Geometri oluşturulması	56
Şekil 6.3 : Malzeme atanması	57
Şekil 6.4 : Sonlu elemanlara ayırma	58
Şekil 6.5 : Elemana özellik atanması	59
Şekil 6.6 : Sınır şartlarının uygulanması.....	60
Şekil 6.7 : Analiz yaptırma	61
Şekil 6.8 : Sonuçların alınması ve incelenmesi	62

Şekil 6.9	: 1.Mod.....	63
Şekil 6.10	: 2.Mod.....	63
Şekil 6.11	: 3.Mod.....	64
Şekil 6.12	: 4.Mod.....	64
Şekil 6.13	: 5.Mod.....	64
Şekil 6.14	: 6.Mod.....	65
Şekil 6.15	: 7.Mod.....	65
Şekil 6.16	: 8.Mod.....	65
Şekil 7.1	: Mod şekillerinin karşılaştırılması	67
Şekil 7.2	: Bir numaralı giriş($h/L=0.011$)	69
Şekil 7.3	: Hata oranı($h/L=0.011$)	70
Şekil 7.4	: İki numaralı giriş($h/L=0.0055$)	71
Şekil 7.5	: Hata oranı($h/L=0.0055$)	71
Şekil 7.6	: Üç numaralı giriş($h/L=0.02$)	72
Şekil 7.7	: Hata oranı($h/L=0.02$)	73
Şekil 7.8	: Dört numaralı giriş($h/L=0.01$)	74
Şekil 7.9	: Hata oranı($h/L=0.01$)	74
Şekil 7.10	: Hata oranları ortalaması.....	75
Şekil 7.11	: Beş numaralı giriş($h/L=0.03$)	77
Şekil 7.12	: Hata oranı($h/L=0.03$)	77
Şekil 7.13	: Altı numaralı giriş($h/L=0.08$)	78
Şekil 7.14	: Hata oranı($h/L=0.08$)	79
Şekil 7.15	: Hata oranları ortalaması 2.....	79
Şekil 7.16	: Yedi numaralı giriş($h/L=0.1$)	80
Şekil 7.17	: Hata oranı($h/L=0.1$)	80
Şekil 7.18	: Sekiz numaralı giriş($h/L=0.01$)	82
Şekil 7.19	: Sivriltilmiş giriş hata oranı($h/L=0.01$)	83
Şekil 7.20	: Dokuz numaralı giriş($h/L=0.01$)	84
Şekil 7.21	: Sivriltilmiş giriş hata oranı 2 ($h/L=0.01$)	84
Şekil 7.22	: On numaralı giriş($h/L=0.004$)	86
Şekil 7.23	: Sivriltilmiş giriş hata oranı 3 ($h/L=0.004$)	86
Şekil 7.24	: On bir numaralı giriş($h/L=0.1$)	87
Şekil 7.25	: Sivriltilmiş giriş hata oranı 4 ($h/L=0.1$)	87
Şekil 7.26	: Hata oranları ortalaması 3.....	88

SİVRİLTİLMİŞ ANKASTRE KİRİŞ YAPILARDA KİRİŞ TEORİLERİNİN İNCELENMESİ VE TİTREŞİM ANALİZİ UYGULAMALARI

ÖZET

Bu tez çalışması, yine aynı öğrencinin lisans tezi olarak verdiği ‘Sivriltilmiş(Tapered) kirişte Euler-Bernoulli ve Timoshenko çözümlerinin sıcaklık altında incelenmesi ve titreşim analizi’ konusunun temeline dayanmaktadır. Çalışmada bahsedilen kiriş teorileri, kirişlerin mekaniğinin anlaşılmasını sağlayan temel denklemlerden oluşur. Bu çalışmada bu teorilerin yardımıyla kiriş yapıların doğal titreşim frekansının bulunması ve literatür sonuçlarıyla karşılaştırılması amaçlanmaktadır. Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear(kayma) ve Timoshenko kiriş teorileri bilinen en yaygın teorilerdir. Bu tez çalışmasında, en temel ve basit teori olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile en kapsamlı kiriş teorisi olan Timoshenko kiriş teorisi genel hatlarıyla incelenip, formülleri verilip karşılaştırılmıştır. Bu detaylı anlatımlar sonucunda sistemlerin doğal frekansının hesaplanabildiği formüller çıkarılıp gösterilmiştir. Tez yazım aşamasında gelecek çalışmalara vesile olması amacıyla sonradan Shear(kayma) kiriş teorisi de konular arasına dahil edilmiştir. Yine aynı şekilde bu teori için de genel formüller verilip, doğal frekans hesabı anlatılmıştır. Daha sonrasında bu kiriş teorilerinin genel karşılaştırılmaları, artıları ve eksileri ayrı bir konu altında incelenmiştir.

Titreşim konusu, tez çalışmasının bir nevi temeli olduğundan çalışmanın başında detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bu konu hakkındaki genel bilgilendirmeler yine tezde yer alan üç kiriş teorisi için yapılacak olan analitik hesaplamalara yön vermiştir. Bu çalışmadaki titreşimin türü serbest titreşim olacaktır. Bu tez çalışmasının asıl amacı bu anlatılanların sivriltilmiş ankastre kiriş için uygulanmasıdır. Bununla beraber bu tarz kirişin temelini düz ankastre kiriş olması sebebiyle bu kiriş tipleri de detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Düz ankastre kiriş hakkında literatürde oldukça fazla çalışma vardır, bu durum tez çalışması için sonuç kısmında oldukça işe yaramıştır.

Gelecek çalışmalara yol göstermek amacıyla kirişlerde kullanılan analiz yöntemleri anlatılmıştır. Bu yöntemlerden çalışmanın analiz kısmında kullanılacak olan Sonlu Elemanlar Yöntemi(SEY) detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Bununla beraber, bu konu altında hem düz ankastre hem de sivriltilmiş ankastre kiriş için doğal frekans hesabı yapıp sonuca ulaşılmıştır. Bu konu altında elde edilen doğal frekans sonuçları Euler-Bernoulli kiriş teorisinden yararlanılarak ifade edilip tablo halinde verilmiştir. Aynı zamanda yer değiştirme hesaplamaları için çeşitli kuvvetlerin ve sıcaklık etkilerinin bu yöntem üzerinden nasıl ifade edilip sonuca ulaşılacağı anlatılmıştır.

Sivriltilmiş ankastre kirişin formülleri ve boyutsuzlaştırılmaları detaylıca anlatılmıştır. Bu tip kiriş için literatürde olmayan bir kabul yapılıp Euler-Bernoulli kiriş teorisi için farklı sivrilik parametrelerine göre formüller çıkarılmıştır. Aynı kabuller Timoshenko ve Shear(Kayma) teorisinde de yapılmıştır.

Tez çalışmasında kullanılacak olan paket programlar genel hatlarıyla anlatılmıştır. Literatürde sivrtilmiş ankastre kiriş hakkında çok fazla çalışma olmaması sebebiyle bu tarz kiriş için MSC/Patran ve MSC/Nastran paket programıyla analiz yapılması çok detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bunun amacı bu tarz kirişler için MSC/Patran programının nasıl uygulandığına dair kısa bir rehber(tutorial) oluşturmaktır.

Sonuç bölümü oldukça kapsamlı oluşturulmaya çalışılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, Shear(kayma) kiriş teorisi, Timoshenko kiriş teorisi ve MSC/Nastran analizleri yapılmış, bu sonuçlar literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırılıp yorumlanmıştır. Aynı zamanda çalışma için belirlenen iki farklı malzemeye sahip ve iki farklı parametrelere sahip kirişler için bu işlemler yapıp yorumlanmış, sonraki çalışmalar için temel oluşturulmuştur.

INVESTIGATION OF BEAM THEORIES APPLIED ON TAPERED CANTILEVER BEAMS AND FREE VIBRATION APPLICATIONS

SUMMARY

Beam theories consist of equations that help people understand the mechanics of beam type structures. The studies on this subject has been started with the works of Euler and Bernoulli, resulting the most renowned beam theory, Euler-Bernoulli Theory, late 19th century. The most important and comprehensive beam theory is named after Russian scientist, Stephen Timoshenko in early 20th century. Different from Euler-Bernoulli Theory, it includes shear and rotary inertia effects.

This master's thesis is based on graduation project of "Investigation of Euler-Bernoulli and Timoshenko solutions of a tapered beam under thermal loads and free vibration analysis" which is also graduation project of same student. In this study, the beam theories consist of basic beam equations which provide an understanding for mechanics of beams. In this thesis, it is aimed to find natural frequencies of tapered beams with considered beam theories and their comparisons with literature results. Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear and Timoshenko beam theories are the most common beam theories for analyzing the beam type structures. Most basic and simple theory, Euler-Bernoulli, and most detailed theory, Timoshenko, have been investigated in general, equations are provided and compared. As a result of these detailed examinations, the equations which make it possible to calculate natural frequencies are derived. During the study, in order to enlighten the next possible studies, Shear beam theory is also included and taken into account. In the same way, for Shear beam theory, general equations are provided and natural frequency calculations are explained. Afterwards, the comparisons of these beam theories are made and their pros and cons are investigated in a chapter. In this chapter, pros and cons of the shear theories have been tabulated to provide a better understanding for people to see the comparison. Besides, derivation of vibration equations and logic have been extensively mentioned in related sections for all the beam theories mentioned in this study. Their history, easiness and rate of employment have been explained. The calculation of the natural frequencies of the beam due to torsion have been explained in Euler-Bernoulli section, however, this application is not given among the results and discussion chapter.

Vibration subject is told profoundly since it is the fundamental subject of this thesis study. Under vibration chapter, definition and classification of vibration, resonance phenomena are briefly explained. Especially, degrees of freedom is investigated deeply and several examples are provided. General information about the subject is provided for three different beam theories and their analytic solutions are mentioned. In this study, free vibration is chosen as the main subject since no external force is considered. Even though, there is no external force, the study has an utmost importance due to presentation of preliminary results for forced vibration, natural frequencies.

The main goal of this thesis study is to apply these theories on a clamped beam. The beam is chosen is clamped since it has more application field than other support types in industry and it is more difficult to determine natural frequencies resulting from bending. In addition, these kinds of beams are regular beams and also they are explained in a detailed way. There are many studies in literature which comes in handy at the end of the thesis, comparing the results.

Even though, the analyses are conducted with a software, MSC/Nastran, the employed finite element method is tried to be explained. In order to guide the future studies, utilized analyses methods for beams are recounted. From these methods, Finite Element Method (FEM) which is employed to analyze the structure is investigated and explained. This method is investigated deeply and the history is narrated. Using FEM, the natural frequency results are obtained for both regular clamped beams and tapered clamped beams. Implementation of finite element method to other support types apart from clamped support, is also mentioned. Obtained natural frequency results are expressed in Euler-Bernoulli beam theory results and tabulated. Moreover, for displacement calculations the effects of various forces and thermal loads and how they are going to be employed using FEM is mentioned.

Tapered clamped beams are basically mentioned. Their cross section varies with length of the beam. As a result, varying cross section changes the area and moment of inertia, making it harder to solve the equations. The equations of tapered clamped beam and their nondimensionalizations are given profoundly. For these kinds of beams, some assumptions have been taken into account which does not exist in previous studies and different taper parameters are obtained. Using Euler-Bernoulli beam theory, this type of beams' natural frequency due to bending have been calculated and first eight modes have been tabulated for natural frequency values. Same assumptions are used in Timoshenko and Shear beam theories. In the continuous sections, how these kinds of approaches are applied is explained.

For the employed software, another section has been created and they are introduced. Their application fields are investigated and some screenshots from software are provided in order to extend the coverage of the study. It is tried to supply enough knowledge for one to achieve free vibration analysis for beams.

The analysis software is explained generally. Since there is no study for tapered beams in literature, MSC/Patran and MSC/Nastran software and how analyses can be conducted with them are explained in a very detailed way. This study has been done in order to create a simple tutorial for MSC/Patran software. All the screenshots starting from modeling to analyses have been provided. Afterwards, first eight mode shapes of the beam are also given by screenshots.

The results chapter is tried to be composed as comprehensive as possible. Analyses were conducted with Euler-Bernoulli Beam Theory, Shear Beam Theory, Timoshenko Beam Theory, as well as MSC/Nastran software. Obtained results are compared with the results provided in the previous studies and interpreted. Furthermore, same processes are made for two different beams with two different materials providing a basis for future possible studies.

In results section, eleven different beam configurations are taken into account. Seven of these are chosen from reference studies while remaining four are considered in

order to extend the tables. Each of these configurations, all the results with different beam theories have been tabulated and output of analyses are given. Additionally, error functions are also plotted and discussed.

Eventually, future studies are also mentioned in the results and discussion chapter. As future studies, it planned to extend the work to be applicable different boundary conditions, support types. Also as a solution method, differential transform method (DTM) can be used and compared with the other results.

1. GİRİŞ

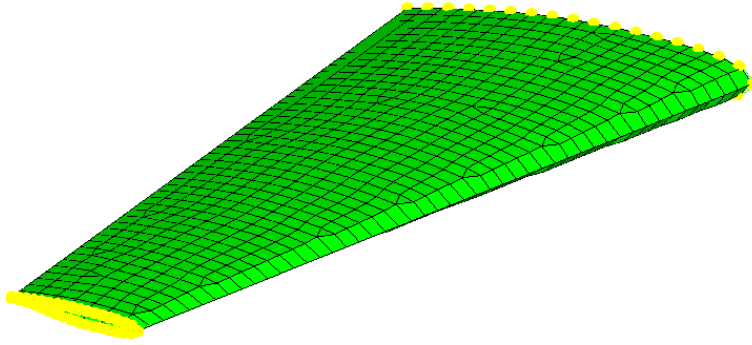
Kiriş teorileri, giriş yapıların mekaniğinin daha rahat anlaşılmasını sağlayan temel denklemlerden oluşan teorilerdir. Günümüzde, Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanan paket programlar ile çok daha doğru sonuçlar elde edilebilmektedir. Buna rağmen giriş teorileri de halen kullanılmakta ve çözüm yöntemleri geliştirilmeye çalışılmaktadır.

1.1 Tezin Amacı

Bu yüksek lisans tez çalışmasında öncelikli amaç giriş teorileri hakkında temel bilgilerin verilmesi ve dikdörtgen kesitli düz ankastre ve sivriltilmiş ankastre girişler için serbest titreşim frekansının hesaplanmasıdır. Günümüzde kullanılan dört tane temel giriş teorisi vardır. Bunlar Euler-Bernoulli, Shear(Kayma), Rayleigh ve Timoshenko giriş teorileridir. Bu tezde kullanılacak olan iki teori Euler-Bernoulli giriş teorisi ve Timoshenko giriş teorisidir. Tez yazım aşamasında daha sonradan Shear(Kayma) giriş teorisi de çalışmaya eklenmiştir. Bu üç giriş teori ile sistemlerin doğal frekansı hesaplanacak daha sonrasında ise MSC/Nastran paket programı yardımıyla analizleri yapılacaktır. Tez çalışmasının temelini oluşturan titreşim konusu temel olarak anlatılacak ve çalışmayla ilgili olan kısımları ön plana çıkarılacaktır. SEY'in düz ve sivriltilmiş girişler için modellenmesi ve hesaplanması da anlatılacaktır. Sivriltilmiş bir ankastre giriş için MSC/Patran programı yardımıyla analizinin yapılması detaylı bir şekilde anlatılacak ve bir rehber(tutorial) oluşturulacaktır. Sonuçlar kısmı oldukça kapsamlı olacak hem düz ankastre hem de sivriltilmiş ankastre için literatür karşılaştırmaları da olacaktır. Kapsamlı sonuç bölümünde yapılan karşılaştırmalar ve grafikler sonucunda mühendislik yorumları yapılacaktır.

1.2 Literatür Araştırması

Titreşim, kiriş teorileri, SEY ve SEY analizi hakkında oldukça fazla literatür çalışması vardır. Düz ankastre kirişin serbest titreşim frekansını bulmaya yönelik çalışmalar yine oldukça fazladır [1, 2]. Sonuçlar kısmında bu çalışmalarla karşılaştırmalar yapılacak ve bu yaklaşımlar geliştirilmeye çalışılacaktır. Sivriltilmiş ankastre için kiriş teorileri hakkında literatürdeki çalışma sayısı çok azdır. Bu tarz kirişler için genelde SEY, Lagrange çarpanları ve diferansiyel dönüşüm yöntemi(DTM) hakkında makaleler bulunmaktadır [3,4]. Yine bu çalışmalar tez çalışmasıyla karşılaştırılacak ve yorumlanacaktır. Şekil 1.1’de sivriltilmiş bir ankastre kiriş örneği olan uçak kanadının eleman ağına(mesh) bölünmüş bir ekran görüntüsü verilmiştir.



Şekil 1.1: Uçak kanadı

2. TİTREŞİM

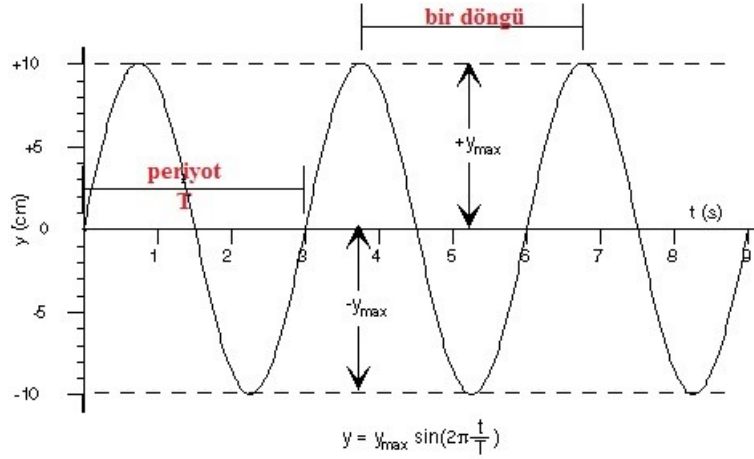
2.1 Titreşim Hareketleri ve Görülme Alanları

Titreşim en basit haliyle denge konumuna veya sabit bir referans eksene göre kendini tekrar eden mekanik bir salınım olarak tanımlanır. Titreşim hareketleri dinamiğin bir alt koludur ve kendi kendini tekrar eden hareketler ile ilgilenir. Bu titreşim hareketleri bazı durumlarda istenen ve bazı durumlarda da istenmeyen bir hadisedir. İstenen durumlara örnek verilmesi gerekirse müzik sektörü temel alınabilir. Bunun sebebi bu dalda özellikle telli müzik aletlerinde bu titreşim hareketlerine ihtiyaç duyulmasıdır. Ses veren her cisim titreşmektedir. Bütün müzik aletleri kendine has bir titreşim frekansına sahip olması prensibinden faydalanarak yapılmaktadır. Titreşim hareketleri, bizim ele aldığımız mühendislik alanında ise çoğunlukla istenmeyen bir durumdur. Bu durumlara örnek olarak, uçak gövdesindeki ve kanadındaki titreşim hareketlerinin uzun dönemde yorulmaya sebep olması ve buna bağlı olarak kalıcı hasar oluşturması söylenebilir [5].

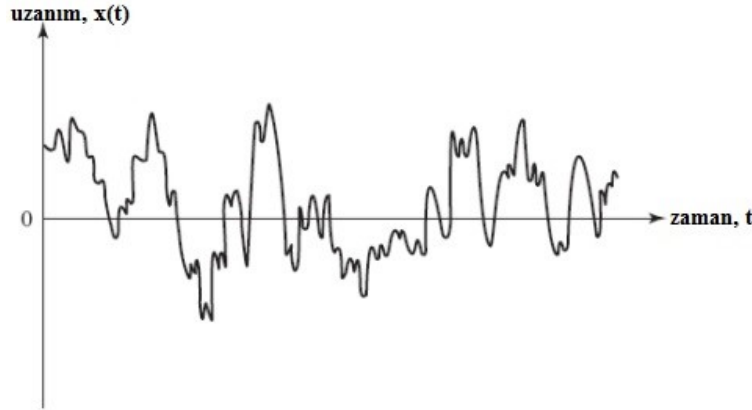
Titreşim hareketleri aynı zamanda, mevcut durumdaki elastik sistemlerin denge konumundan uzaklaştırıldığında dengelenmemiş iç kuvvetler sebebiyle bir ivme oluşturması ve bununla beraber sistemin denge konumu etrafında hareketlenmeye başlaması olarak da ifade edilebilir. Bu hareketler genelde mühendislik tasarımlarının yapısını etkileyen bir hadisedir. Bunun nedeni genellikle mekanik yapılarda istenmeyen titreşim hareketlerinin görülmesidir. Bu titreşim hareketleri yapıda boş enerji harcanmasına ve istenmeyen sesler oluşmasına neden olmaktadır. Titreşimin nasıl analiz edilip nasıl kontrol edileceği mühendislik dalı için oldukça önemlidir. Dikkatli tasarımlarda titreşim hareketleri asgari seviyeye indirilir, bu sayede azami verim elde edilebilmektedir.

Frekans(titreşim sayısı), bir hareketin birim zaman içinde ne sıklıkla kaç defa tekrar ettiğinin bir ölçümüdür. Bu ölçümü yapmak için o hareketin belirli bir zaman

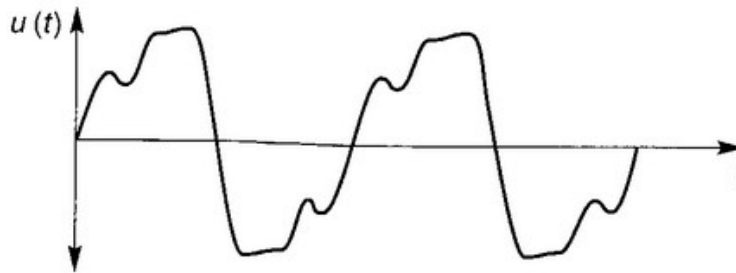
aralığında kendini kaç kez tekrar ettiği saptanır ve bu sayı zaman aralığına bölünür. Frekans, SI Birim Sistemi'nde(International System of Units) Hertz(Hz) adı verilen birimle ifade edilir. Periyot ise frekansın matematiksel olarak çarpmaya göre tersi ile ifade edilir. Bu bağıntı $f = 1/T$ şeklinde gösterilir. Bu denklemde f frekans, T periyottur. Titreşim, periyodik olabileceği gibi rastgele de olabilir. Bir sarkacın hareketi periyodiktir fakat çakıllı bir yolda giden tekerleğin hareketi rastgeledir [6]. Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'te titreşim hareketlerine örnekler gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Basit harmonik hareket(periyodik hareket)



Şekil 2.2: Rastgele titreşim hareketi



Şekil 2.3: Periyodik hareket

2.2 Titreşimin Sınıflandırılması

Titreşim hareketi, çeşitli temellere göre sınıflandırılabilir. Titreşim genel olarak 4 temel başlıkta incelenir [5].

1. Serbestlik Derecesine Göre Titreşim Hareketlerinin Sınıflandırılması

- (a) Sonlu Sayıda Serbestlik Derecesi Olan Sistemlerin Titreşim Hareketi
- (b) Sonsuz Sayıda Serbestlik Derecesi Olan Sistemlerin Titreşim Hareketi

2. Dış Etkilere Göre Titreşim Hareketlerinin Sınıflandırılması

- (a) Serbest Titreşim Hareketleri
- (b) Zorlanmış Titreşim Hareketleri

3. Enerji Kaybına Göre Titreşim Hareketlerinin Sınıflandırılması

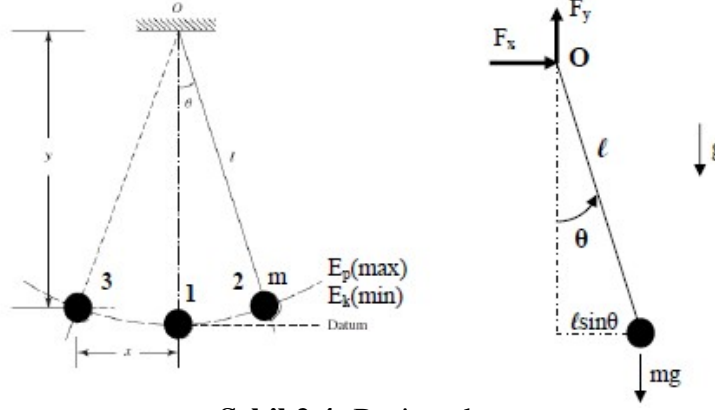
- (a) Sönümlü Titreşim Hareketleri
- (b) Sönümsüz Titreşim Hareketleri

4. Lineer ve Nonlineer Titreşim Hareketleri

2.2.1 Serbestlik derecesine göre titreşim hareketinin sınıflandırılması

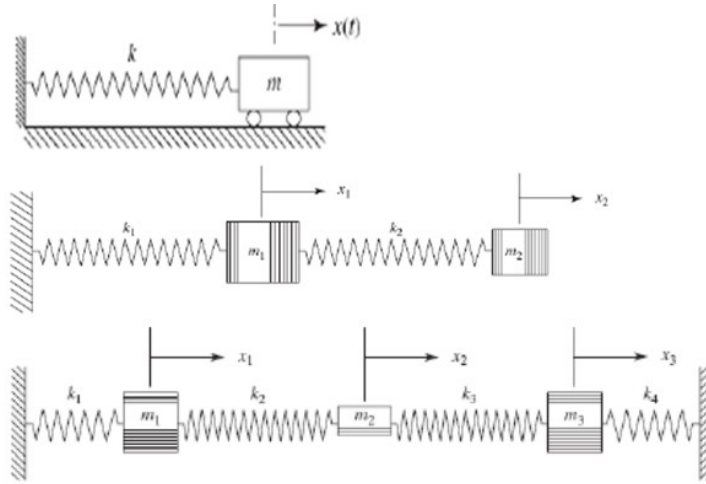
Herhangi bir zaman diliminde(t anında) bir sistem içerisindeki tüm noktaların bulunduğu koordinatları tümüyle elde edebilmek maksadıyla asgari sayıdaki bağımsız olan koordinat sayısına sistemin serbestlik derecesi denmektedir [5]. Bir sistemin n sayıda serbestlik derecesi var ise bu sistemin çözülebilmesi için n tane hareket denklemi yazılır. Bir sistemin serbestlik derecesi sonlu olabileceği gibi bunun yanında sürekli ortamlarda sonsuz da olabilmektedir. Sonlu sayıda serbestlik derecesi bulunan sistemlere süreksiz(ayrık) sistemler denir. Sonsuz sayıda serbestlik derecesi bulunan sistemlere ise sürekli sistemler denir. Genellikle sürekli sistemlerin çözümü mümkün değildir bununla beraber bazı özel geometrik yapılarda(plaka, çubuk, çerçeve ve kiriş gibi) çözüm yapılabilir. Bu tarz sistemler, süreksiz sistem yaklaşımı ile çözülmektedir. Çoğunlukla mekanik sistemlerin sürekli kütle dağılımı vardır. Bu nedenle bu tarz sistemler sonsuz serbestlik derecesi olan sistemlerdir.

Tek serbestlik derecesine örnek verilmesi ve bu serbestlik derecesini anlamak adına Şekil 2.4'te görülen klasik bir basit sarkaç ele alınabilir. Bu sarkacın hareketi θ değerine bağlı olarak ifade edilmektedir.



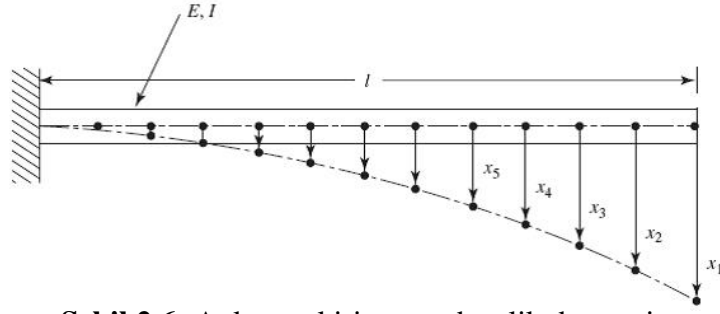
Şekil 2.4: Basit sarkaç

Bunun yanında basit sarkaç x ve y koordinatlarına göre de ifade edilebilmektedir. Bu ifade en basit şekilde $x^2 + y^2 = l^2$ tanımlanır. Bu ifadeye bağlı olarak x ve y birbirlerinin cinsinden yazılabilmektedir. Bu nedenle basit sarkaç sistemi, tek serbestlik derecesi olan sistemdir. Şekil 2.5'te sırasıyla tek, iki ve üç serbestlik derecesine sahip sistemler gösterilmiştir.



Şekil 2.5: Serbestlik derecelerine örnekler

Bu tez çalışmasında kullanılacak olan ankastre kiriş ve sivriltilmiş ankastre kiriş sonsuz serbestlik derecesine sahip sistemlerdir. Bu tarz sistemler sonsuz sayıda maddesel kütleye sahiptir. Bununla beraber, sonsuz sayıda sistem içindeki elemanların konumlarını ve durumlarını belirleyen parametrelere yani koordinatlara sahiptir. Bu durum Şekil 2.6'da gösterilmiştir.



Şekil 2.6: Ankastre kiriş ve serbestlik derecesi

2.2.2 Dış etkilere göre titreşim hareketinin sınıflandırılması

Bir sistem herhangi bir dış kuvvet altında değilse ve bu sistem titreşim hareketi yapıyorsa bu tarz titreşimler, serbest titreşim olarak adlandırılır. Bu kavramdan yola çıkarak bir sistemin dış kuvvetler altında titreşim hareketi yapmasından doğan titreşime ise zorlanmış titreşim adı verilir.

2.2.3 Enerji kaybına göre titreşim hareketinin sınıflandırılması

Bir sistem, herhangi bir sürtünme veya benzeri dirençler yüzünden sönümlemeye ve enerji kaybına neden olacak bir etki altındaysa bu tarz sistemlerin titreşimine sönümlü titreşim denir. Aynı şekilde bu tarz etki altında olmayan sistemlerin titreşimine de sönümsüz titreşim adı verilmektedir.

2.2.4 Lineer ve Nonlineer titreşim hareketleri

Titreşim hareketi yapmakta olan bir sistemin bütün bileşenleri lineer(doğrusal) davranışına sahip ise bu tarz titreşimlere lineer titreşim adı verilmektedir. Titreşim hareketi yapmakta olan bir sistemin bileşenlerinden biri lineer olmayan yani nonlinear bir davranışa sahip ise bu tarz titreşimlere nonlinear(doğrusal olmayan) titreşim denir. Titreşim hareketi yapan sistemlerin çoğu büyük titreşim genlikleri için nonlinear özellik gösterir. Örnek vermek gerekirse elastik elemanlar yani yaylar lineer ve nonlinear özelliğe sahip olabilir. Lineer özelliğe sahip olan yaylar Hooke yasasına uygun davranmaktadır. Buna bağlı olarak, yayda meydana gelen elastik kuvvet

yay üzerindeki şekil değişimi ile orantılıdır. Titreşim genliklerinin yüksek olduğu durumlarda yaylarda da nonlinear davranış gözlemlenmektedir.

2.3 Rezonans Durumu

Titreşim hareketi yapan bir sistemdeki bazı durumlarda zorlanmış titreşim frekansı sistemin doğal frekansı üzerine düşebilmektedir. Bu durumlara rezonans(tınlaşım) adı verilir [5]. Rezonans'ın 1602 yılında müzik aletleri ve sarkaç üzerinde araştırmaları sonucu Galileo Galilei tarafından bulunduğu söylenmektedir. Rezonans titreşim hareketi yapan mekanik sistemlerde oldukça zararlıdır. Örnek olarak, 1940 yılında Washington'da yapılmış 1524 metre uzunluğundaki Tacoma Asma Köprüsü'nün rüzgârdan oluşan zorlama frekansın köprünün doğal frekansı üstüne düşmesiyle yıkılması verilebilir [7]. Titreşim hareketi ile ilgili problemleri çözümlerken sönüm ihmal edilerek çözüm basitleştirilebilir ama bununla beraber sönümleme etkilerinin rezonans durumu için çok önemli olduğunu da unutmamak gerekmektedir.

3. KIRIŞ TEORİLERİ

3.1 Kiriş Teorilerine Genel Bakış

Kiriş teorileri, günümüzde kiriş yapıların mekaniğinin anlaşılmasına yarar sağlayan temel ve basit teorilerdir. Kiriş teorileri, kirişin boyunun genişliğine ve kalınlığına göre çok daha uzun olan yapılarda kullanılmakta olan tek boyutlu modellerdir. Günümüzde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde de bahsedileceği üzere Sonlu Elamanlar Yöntemi(SEY) sayesinde kirişlerin eğilmeleri, yükleri ve doğal frekanslarını bulmaya yönelik başarılı analizler ve çözümlemeler yapılabilmektedir. Bu sayede tasarlanan yapının analizleri kolayca yapılabilir. Bunun yanında yapısal çözümlemelerde çeşitli kabullere dayanan kiriş teorileri vardır. Euler-Bernoulli, Timoshenko, Rayleigh ve Kayma(Shear) kiriş teorileri en yaygın olarak kabul gören kiriş teorileridir. Bu tez çalışmasında, bu kiriş teorileri arasından en yaygın olarak kullanılan iki kiriş teorisi üzerinde durulacaktır. Bunlardan biri, kullanımı diğerlerine göre nispeten daha kolay ve kullanışlı olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi, diğeryse diğer kiriş teorilerine göre daha kapsamlı ve net sonuçlar veren Timoshenko kiriş teorisi olacaktır. Diğer kiriş teorilerinden kısaca kiriş teorilerinin karşılaştırılması kısmında bahsedilecektir. İlerleyen bölümlerde Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerinin ankastre ve sivrtilmiş ankastre kirişleri için karşılaştırılması, titreşim analizleri ve sonuçları sunulacaktır.

3.2 Euler Bernoulli Kiriş Teorisi

Bu bölümde Euler-Bernoulli kiriş teorisi tarihçesi, varsayılan kabulleri, genel denklemleri, düz ve sivrtilmiş ankastre kirişler için doğal frekans hesapları anlatılacaktır. Bütün kiriş teorileri için kullanılacak olan sivrtilmiş ankastre kirişin formülleri ve boyutsuzlaştırılması yine bu başlık altında toparlanacaktır.

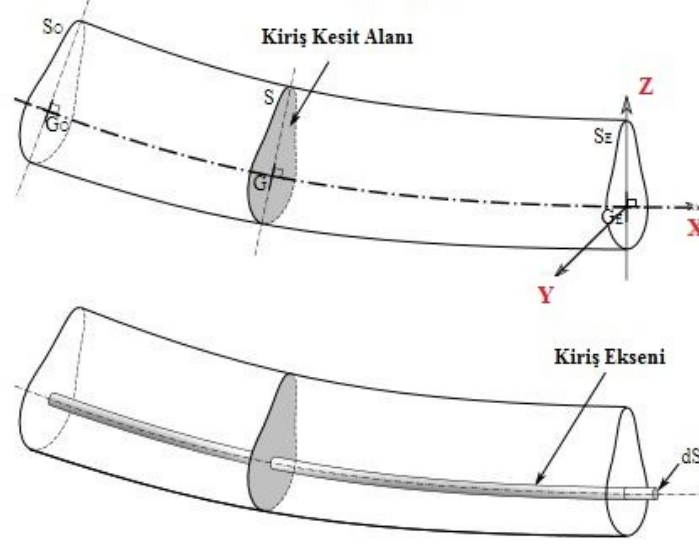
3.2.1 Euler-Bernoulli kiriş teorisinin tarihçesi

Bu kiriş teorisinin tarihçesini kavrayabilmek için bu iki bilim adamının yaşamlarına kısaca bakılması gerekir. Leonhard Euler, 18.yüzyıla damgasını vurmuş matematik dehalarından biridir. Euler, geometri, trigonometri, cebir, sayı teorisi, uzay-zaman teorileri ve bunun gibi bir sürü alanda bilime katkıda bulunmuştur. Euler, makine, havacılık, inşaat ve elektrik gibi mühendislik dallarında fiziksel uygulamalarının çoğunun kurucusu olarak kabul görmektedir. Daniel Bernoulli ise aynı Leonhard Euler gibi 18.yüzyılda yaşamıştır. Bununla beraber astronomi, hidrodinamik ve fizik gibi alanlarda çalışmalar yapmıştır. Bernoulli'nin ilkeleri aerodinamik alanında çok önemlidir ve kullanımı yaygındır. Bunlara ek olarak Bernoulli, babası Johann ve amcası Jacop gibi diferansiyel denklemlerle uğraşmıştır. Bernoulli ve Euler bu kiriş teorisini bulan kişilerdir. Buldukları bu teori ile kirişlerin çökme ve yük taşıma davranışları hesaplanmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, 1750 yılında ortaya konmuştur ama o zamanlarda bilim ve endüstri alanları tarafından bu teori hoş karşılanmamıştır. Euler ve Bernoulli gibi akademisyenlerin ortaya koyduğu bu matematiksel çözümlemelere şüphe ile yaklaşılmıştır. Bu çözümlemeler yerine güvenilir ve pratik uygulamalara sıcak bakılmıştır. Bu teori, dönme dolaplar ve Eiffel kulesi gibi yapılara kadar geçen süre içerisinde kabul görmemiştir. Ancak bu başarılı örnekler sayesinde bu teorinin önemi artmış ve bugün de halen kullanılmakta olan mühendisliğin yapıtaşlarından biri haline gelmiştir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinin ikinci endüstriyel devrimde önemi oldukça büyüktür [8].

3.2.2 Euler-Bernoulli kiriş teorisi

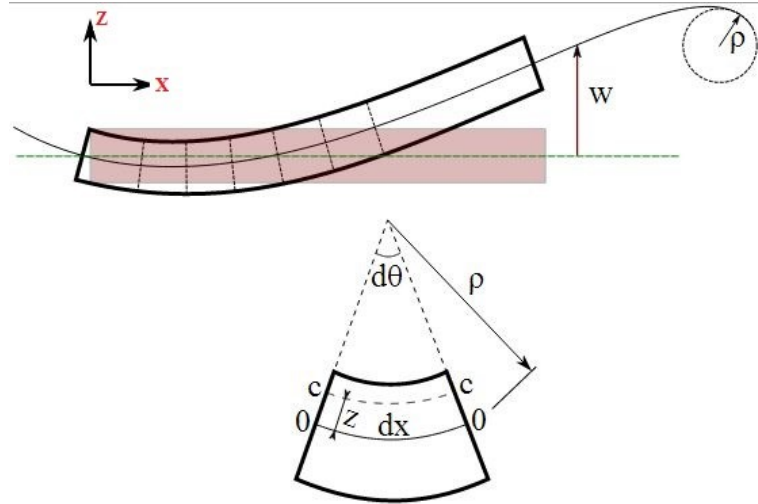
Euler-Bernoulli kiriş teorisi, klasik kiriş teorisi, ince kiriş teorisi ya da mühendislik kiriş teorisi olarak da bilinmektedir. Bu kiriş teorisinde çökme ve yük taşıma davranışları hesaplanır. Bu kiriş teorisi düzgün homojen olan bir kirişin elastiklik özelliğinin basitleştirilmiş bir ifadesidir. Bu kiriş teorisinde basit olarak yalnızca eksenel birim uzamalar hesaba katılır, yanal birim uzamalar katılmaz. Euler-Bernoulli kiriş teorisinin temeli, eğilme momentinin kiriş yapısına etkisinin incelenmesine dayanır. Kesme kuvvetinden dolayı oluşan kayma gerilmesi hesaba katılmaz, ihmal edilir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kiriş eksenine dik olarak alınacak olan

düzlemsel kesitler, deformasyondan sonra düzlemselliğini ve bununla beraber kiriş eksenine olan dikliğini korur. Sivriltilmiş bir ankastre kiriş olan uçak kanadını göz önüne alırsak kiriş eksenini, tüm dik kesit alanların ağırlık merkezlerini birleştiren doğru üzerinde olmalıdır, bu durum Şekil 3.1’de gösterilmiştir. [6].



Şekil 3.1: Uçak kanadının kesit alanı ve kiriş eksenini

Euler-Bernoulli kiriş teorisinin kinematik yaklaşımında eğilme halinde her kiriş kesiti kiriş eksenine dik durumda bulunur. Bu özellik Şekil 3.2’de teorik olarak gösterilmiştir.

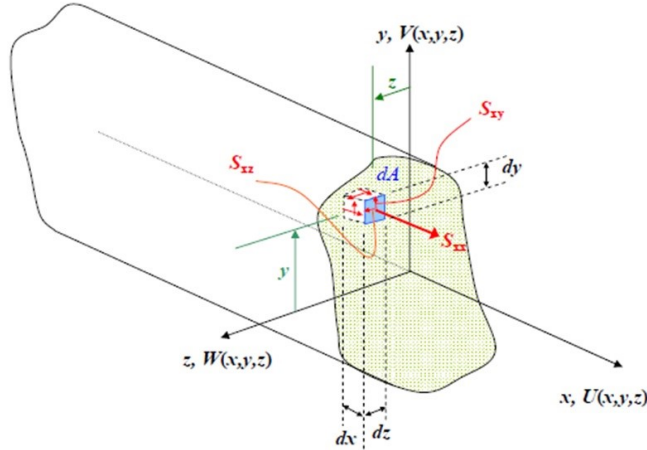


Şekil 3.2: Euler-Bernoulli kirişinde eğilme durumu

3.2.3 Euler-Bernoulli kiriş teorisinde varsayılan kabuller

1. Kiriş, sürekli ve prizmatik enine kesitli olarak kabul edilir. Bunun yanında esnek ve homojen olan malzemelerden yapılır. Kiriş, aynı elastisite modülüne(E) sahip malzemelerden oluşmaktadır. Bu sayede kiriş, aynı gerinim altında eşit uzayıp kısalır.
2. Kiriş, izotropik ve doğrusal elastik kabul edilir. Gerilme ve gerinim arasında matematiksel olarak orantısal bir ilişki vardır. Hooke yasası uygulanabilir. ($\sigma = E\epsilon$)
3. Kirişteki düzlem kesitleri eğilme durumundan önce ve sonra değişmez.
4. Kirişin eksen uzunluğu deformasyon ile değişmez.

Bu maddeler Euler-Bernoulli kiriş teorisinin temel varsayılan kabulleridir. Bu kiriş teorisinde kirişe etkiyen gerilmeler Şekil 3.3'te detaylı bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Euler-Bernoulli kirişinde kiriş kesitine etkiyen gerilmeler

3.2.4 Euler-Bernoulli kiriş teorisi genel denklemleri

Aşağıdaki denklem Euler-Bernoulli kiriş denklemidir. Kirişin x eksenini doğrultusunda tek boyutlu bir yapı olduğu kabul edildiğinde, $u(x)$ parametresi kiriş üzerindeki çökmeyi tanımlamaktadır [8].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q \quad (3.1)$$

Yayıllı yükün ifadesi olan q ise u , x gibi değişkenlerin fonksiyonudur. Denklemlerde kullanılan I eylemsizlik momentini, E ise elastisite modülünü temsil etmektedir. Bu denklemlerde EI sabittir. Bunun yanında $u = u(x)$ ve $q = q(x)$ olduğundan denklem şu şekilde ifade edilebilir;

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = q(x) \quad (3.2)$$

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde genel olarak kullanılan başlıca terimler şunlardır;

- Kirişin çökmesi: u
- Kirişin eğimi: $\frac{\partial u}{\partial x}$
- Kirişin eğilme momenti: $EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- Kirişin kayma gerilmesi: $-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$

Kirişler düzgün olmalı ve yayılı yükler düzlem içerisinde bulunmalıdır. Kirişte burulma olmamalıdır. Bu özelliklere sahip kirişin çekme gerilmesi denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = Ec \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

Yukarıdaki denklemde M eğilme momentini temsil eder. Denklemdaki c , u doğrultusunda bulunmaktadır. Kirişin kesit alanının en üst kısmında çekme ve en

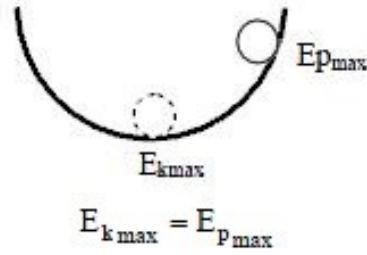
alt kısmında basma gerilmelerinin oluşması beklenir. Aynı durumda kesitin normal ekseninde, çekme ve basma gerilmelerinin değeri sıfıra eşit olmaktadır.

3.2.5 Sürekli sistemlerin enerji yöntemiyle doğal frekanslarının hesaplanması

Her ne kadar bu tezde kullanılmayacak olsa da kirişler gibi sürekli sistemlerin doğal frekansları enerji yöntemi ile de hesaplanabilmektedir. Titreşim hareketi yapmakta olan bir sistemde kinetik enerji azami değere ulaştığında potansiyel enerji sıfıra eşittir. Bu durum sistemde sönüm olmadığı zaman geçerlidir. Sürekli sistemler için enerji konumu şu şekilde yazılır [6];

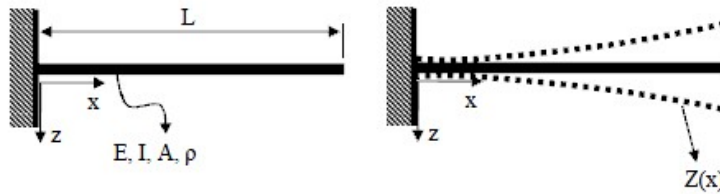
$$E_{kmax} + E_{pmin} = E_{kmin} + E_{pmax} \quad (3.4)$$

Sönümsüz bir sürekli ankastre kiriş sistemde enerji kaybı olamayacağından dolayı kirişin maksimum kinetik enerjisiyle maksimum potansiyel enerjisi birbirlerine eşittir. Bu durum Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3.4: Maksimum potansiyel ve kinetik enerjilerin eşitliği

Bu tezde kullanılacak olan ankastre bir kiriş sisteminde, sistemin cevabı E , A , I , ρ ve L gibi değişkenlere bağlıdır. Bunun yanında zamana(t) da bağlıdır. Bu tarz bir sistemin eksen takımı Şekil 3.5'te gösterilmiştir.



Şekil 3.5: Ankastre kiriş için eksen takımı

3.2.6 Sivriltilmiş ankastre kirişin formülleri ve boyutsuzlaştırılması

Bu konu tez çalışması için temel olan konudur. Sivriltilmiş(tapered) bir ankastre kirişin hesaplamalarını yapmak düz olan bir kirişe göre oldukça zordur. Bunun nedeni bu tarz kirişlerin sabit bir eylemsizlik momenti ve sabit bir kiriş kesit alanının olmamasıdır. Şekil 3.6’da verilen sivriltilmiş ankastre kiriş için denklemler ve boyutsuzlaştırmalar aşağıda verilmiştir [9].

$$c_b = 1 - \frac{b}{b_0} \quad (3.5)$$

$$c_h = 1 - \frac{h}{h_0} \quad (3.6)$$

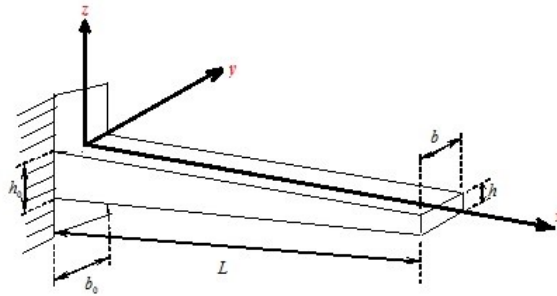
$$b(x) = b_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \quad (3.7)$$

$$h(x) = h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n \quad (3.8)$$

$$I_y(x) = I_{y0} \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^{3n} \quad (3.9)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n \quad (3.10)$$

Bu formüllerdeki c_b ve c_h kirişteki sivriliğin genişlik ve kalınlık oranlarının boyutsuzlaştırılmış halleridir. Denklemlerdeki m ve n kirişin sivrililiğinin türüne bağlı olan sabitlerdir. Bu tezde m ve n değerleri 1’e eşit olacaktır, bunun nedeni kullanılacak olan kirişin sivrililiğinin lineer yani doğrusal olmasıdır. Denklemlerdeki $b(x)$, $h(x)$, $I_y(x)$ ve $A(x)$ sırasıyla kirişin genişliğinin, kalınlığının, atalet momentinin ve kesit alanının formülleridir.



Şekil 3.6: Sivriltilmiş bir ankastre kirişin parametreleri

3.2.7 Kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması

Aşağıda verilen denklem eğilme momentini(M) ifade etmektedir [5]. Denklemdaki u ifadesi, eğilme deformasyonunu temsil etmektedir.

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

Aşağıdaki denklemlerde sırasıyla moment ve kuvvet dengesi verilmiştir.

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x,t) dx \quad (3.13)$$

Bu ifadeler düzenlendiğinde Denklem 3.16'daki titreşim denklemi oluşur. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x,t) \quad (3.15)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.16)$$

Bu denklemlerdeki $f(x,t)$ ifadesi zorlanmış titreşimdeki kuvveti temsil etmektedir. Serbest titreşimlerde bu parametrenin değeri sıfırdır. Dolayısıyla yeni serbest titreşim denklemi şu şekilde olur;

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.17)$$

Diferansiyel denklem şeklinde yazarsak denklemin son hali şu şekilde olur;

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.18)$$

Kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansı 2 tane birbirinden bağımsız değişkenle ifade edilir.

$$u(x,t) = X(x)Y(t) \quad (3.19)$$

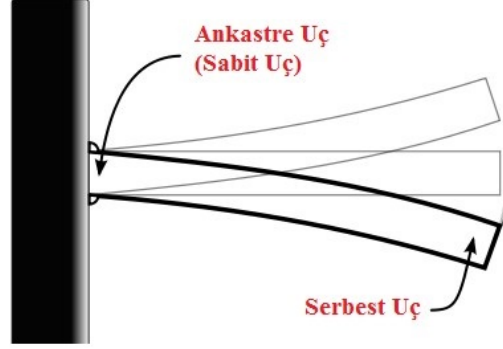
Bu denklemlerin çözümleri, $X(x)$ ve $Y(t)$ şu şekilde açılabilir;

$$X(x) = e^{(\lambda, x)} \quad (3.20)$$

$$Y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (3.21)$$

3.2.8 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması

Şekil 3.7’de gösterilen bir ankastre kirişin doğal frekansının hesaplanabilmesi için sınır şartlarının yazılması gerekmektedir [5].



Şekil 3.7: Ankastre kiriş örneği

Ankastre uç için ($x = 0$) $\Rightarrow u(0, t) = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$

Bu sınır şartıyla beraber Denklem 3.22 yazılır.

$$X(0) = X'(0) = 0 \quad (3.22)$$

Serbest uç için ($x = L$) $\Rightarrow M(L, t) = 0$ ve $V(L, t) = 0$

Bu sınır şartıyla beraber Denklem 3.23 yazılır.

$$X''(L) = X'''(L) = 0 \quad (3.23)$$

Denklem 3.20’nin çözümü aşağıdaki denklemdeki gibi ifade edilebilir.

$$X(x) = E_1(\sin \alpha x + \sinh \alpha x) + E_2(\sin \alpha x - \sinh \alpha x) \\ + E_3(\cos \alpha x + \cosh \alpha x) + E_4(\cos \alpha x - \cosh \alpha x) \quad (3.24)$$

Bütün sınır şartları Denklem 3.24’e uygulandığında $E_1 = E_3 = 0$ olur ve ortaya çıkan matris şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L + \sinh \alpha L & \cos \alpha L + \cosh \alpha L \\ \cos \alpha L + \cosh \alpha L & \sin \alpha L - \sinh \alpha L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Bu matriste $\alpha_n L$ katsayılarını hesaplayabilmemiz için determinantını alıp sıfıra eşitlememiz gerekir. Wolfram Mathematica yardımıyla bulunan $\alpha_n L$ değerleri aşağıda Çizelge 3.1’de verilmiştir.

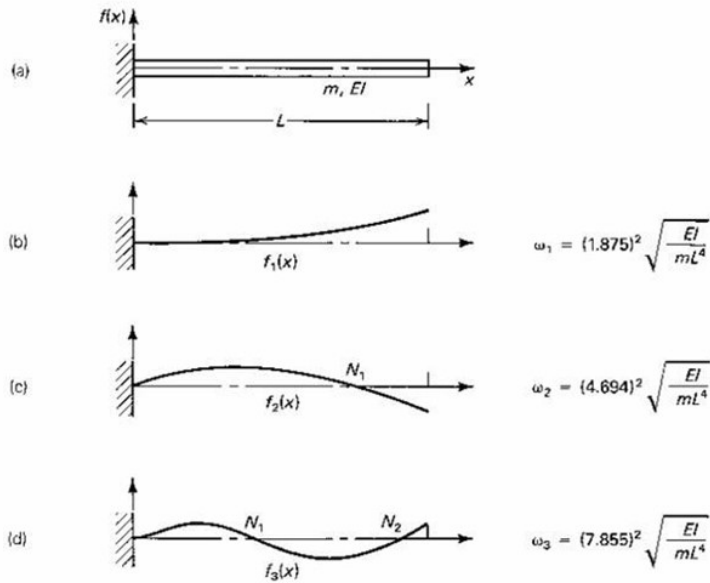
Çizelge 3.1: $a_n L$ Değerleri

n	$a_n L$
1	1.875104069
2	4.694091133
3	7.854757438
4	10.99554073
5	14.13716839
6	17.27875953
7	20.42035225
8	23.56194512
9	26.70354797
10	29.84505631

Eğilmeden kaynaklanan doğal titreşim frekansı aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$\omega_n = \frac{(\alpha_n L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3.26)$$

Bu tarz ankastre kiriş yapıların doğal titreşim frekanslarının ilk üç mod şekli Şekil 3.8’de gösterilmiştir [6].



Şekil 3.8: Ankastre kiriş için ilk üç mod şekli

3.2.9 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının hesaplanması

Daha önceki bölümlerde sivriltilmiş kirişler ile ilgili formüller verilmiştir. Bu kiriş yapıların doğal frekansları hesaplanırken düz ankastre kirişlerdeki işlemlerin aynıları yapılır fakat atalet momenti ve kiriş kesit alanı hesaplamaları farklıdır. Bunun yanında $a_n L$ katsayıları da farklıdır. Doğal titreşim frekansı Denklem 3.26'da verilmiştir. Aşağıda I ve A için denklemler gösterilmiştir. Bu parametreler sabit olmadığı için integralleri alınıp kiriş uzunluğuna(L) bölünmüştür. İntegralleri olan ifadeler I_g ve A_g olarak adlandırılmıştır. Çizelge 3.2, Çizelge 3.3, Çizelge 3.4, Çizelge 3.5, Çizelge 3.6, Çizelge 3.7, Çizelge 3.8 ve Çizelge 3.9'da çeşitli c_b ve c_h değerleri için $a_n L$ değerleri verilmiştir. Bu tablolar referans çalışma yardımıyla oluşturulmuştur [9].

$$A_g = \int_0^L A_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n dx \quad (3.27)$$

$$I_g = \int_0^L I_{y0} \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^{3n} dx \quad (3.28)$$

$$A = A_g / L \quad (3.29)$$

$$I = I_g / L \quad (3.30)$$

Çizelge 3.2: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(1.Mod)

$c_h - c_b$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	1.875	1.906	1.940	1.979	2.024	2.077	2.141	2.221	2.323
0.1	1.886	1.917	1.951	1.990	2.035	2.088	2.151	2.230	2.333
0.2	1.900	1.930	1.963	2.002	2.047	2.099	2.163	2.242	2.344
0.3	1.915	1.945	1.978	2.017	2.061	2.113	2.177	2.255	2.356
0.4	1.933	1.963	1.996	2.034	2.078	2.130	2.193	2.271	2.372
0.5	1.955	1.985	2.018	2.055	2.099	2.151	2.213	2.290	2.391
0.6	1.984	2.012	2.045	2.082	2.126	2.177	2.238	2.315	2.414
0.7	2.020	2.049	2.081	2.118	2.160	2.211	2.272	2.347	2.445
0.8	2.072	2.100	2.132	2.168	2.210	2.259	2.319	2.393	2.489

Çizelge 3.3: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(2.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	4.694	4.717	4.744	4.773	4.808	4.850	4.901	4.969	5.065
0.1	4.619	4.642	4.668	4.697	4.731	4.772	4.823	4.889	4.985
0.2	4.541	4.564	4.589	4.618	4.650	4.691	4.741	4.807	4.901
0.3	4.459	4.481	4.506	4.534	4.567	4.606	4.655	4.720	4.812
0.4	4.372	4.394	4.418	4.445	4.472	4.516	4.564	4.628	4.719
0.5	4.280	4.301	4.325	4.352	4.383	4.421	4.468	4.531	4.621
0.6	4.182	4.202	4.226	4.252	4.283	4.320	4.366	4.427	4.516
0.7	4.077	4.097	4.120	4.146	4.176	4.212	4.258	4.318	4.405
0.8	3.968	3.987	4.009	4.034	4.064	4.099	4.143	4.202	4.288

Çizelge 3.4: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(3.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	7.855	7.868	7.884	7.902	7.923	7.950	7.984	8.033	8.108
0.1	7.680	7.693	7.709	7.727	7.748	7.775	7.809	7.857	7.932
0.2	7.496	7.510	7.525	7.543	7.565	7.591	7.625	7.673	7.747
0.3	7.302	7.316	7.331	7.350	7.371	7.397	7.431	7.478	7.551
0.4	7.096	7.110	7.125	7.143	7.165	7.191	7.225	7.271	7.343
0.5	6.875	6.910	6.904	6.922	6.944	6.970	7.003	7.049	7.120
0.6	6.635	6.649	6.665	6.683	6.704	6.704	6.763	6.808	6.878
0.7	6.371	6.385	6.400	6.418	6.440	6.465	6.498	6.543	6.611
0.8	6.073	6.087	6.103	6.121	6.142	6.167	6.200	6.244	6.311

Çizelge 3.5: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(4.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	10.996	11.005	11.016	11.029	11.045	11.065	11.092	11.130	11.192
0.1	10.733	10.742	10.754	10.767	10.783	10.802	10.829	10.867	10.928
0.2	10.456	10.465	10.477	10.490	10.506	10.526	10.552	10.589	10.650
0.3	10.162	10.172	10.184	10.197	10.213	10.233	10.259	10.296	10.355
0.4	9.849	9.859	9.870	9.884	9.900	9.920	9.946	9.982	10.041
0.5	9.511	9.521	9.532	9.546	9.562	9.582	9.608	9.644	9.701
0.6	9.141	9.151	9.163	9.177	9.193	9.213	9.238	9.274	9.330
0.7	8.728	8.739	8.751	8.764	8.781	8.800	8.826	8.861	8.917
0.8	8.253	8.264	8.276	8.290	8.306	8.326	8.351	8.386	8.440

Çizelge 3.6: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(5.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	14.137	14.145	14.153	14.164	14.176	14.192	14.213	14.245	14.298
0.1	13.789	13.797	13.806	13.816	13.829	13.845	13.866	13.897	13.949
0.2	13.422	13.430	13.439	13.450	13.462	13.478	13.499	13.530	13.581
0.3	13.033	13.041	13.050	13.061	13.073	13.089	13.110	13.141	13.191
0.4	12.616	12.624	12.634	12.644	12.657	12.673	12.694	12.724	12.773
0.5	12.166	12.174	12.183	12.194	12.207	12.223	12.243	12.273	12.321
0.6	11.671	11.679	11.688	11.699	11.712	11.728	11.749	11.778	11.825
0.7	11.115	11.123	11.133	11.144	11.157	11.173	11.194	11.223	11.269
0.8	10.469	10.477	10.487	10.498	10.511	10.527	10.548	10.577	10.622

Çizelge 3.7: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(6.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	17.279	17.285	17.292	17.300	17.311	17.324	17.342	17.369	17.415
0.1	16.848	16.854	16.861	16.870	16.880	16.893	16.911	16.938	16.983
0.2	16.393	16.399	16.406	16.415	16.425	16.439	16.456	16.482	16.527
0.3	15.909	15.916	15.923	15.932	15.942	15.955	15.973	15.999	16.042
0.4	15.391	15.398	15.405	15.414	15.425	15.438	15.455	15.481	15.523
0.5	14.830	14.837	14.844	14.853	14.864	14.877	14.895	14.920	14.961
0.6	14.212	14.219	14.227	14.236	14.247	14.260	14.277	14.302	14.343
0.7	13.517	13.524	13.532	13.541	13.552	13.565	13.582	13.607	13.647
0.8	12.703	12.710	12.718	12.727	12.738	12.752	12.769	12.794	12.832

Çizelge 3.8: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(7.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	20.420	20.426	20.432	20.439	20.448	20.459	20.474	20.498	20.538
0.1	19.907	19.912	19.918	19.925	19.934	19.946	19.961	19.984	20.024
0.2	19.364	19.370	19.376	19.383	19.392	19.404	19.419	19.442	19.481
0.3	18.788	18.793	18.800	18.807	18.816	18.827	18.843	18.865	18.903
0.4	18.170	18.175	18.182	18.189	18.198	18.210	18.225	18.247	18.284
0.5	17.499	17.505	17.511	17.519	17.528	17.540	17.555	17.576	17.613
0.6	16.760	16.766	16.773	16.781	16.790	16.801	16.816	16.838	16.873
0.7	15.927	15.933	15.940	15.947	15.957	15.968	15.983	16.004	16.039
0.8	14.948	14.954	14.961	14.969	14.978	14.990	15.005	15.026	15.060

Çizelge 3.9: Sivriltilmiş ankastre için $a_n L$ değerleri(8.Mod)

c_h-c_b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	23.561	23.566	23.572	23.578	23.586	23.595	23.609	23.630	23.666
0.1	22.966	22.971	22.976	22.983	22.990	23.000	23.014	23.034	23.070
0.2	22.337	22.342	22.347	22.354	22.361	22.371	22.385	22.405	22.440
0.3	21.668	21.673	21.679	21.685	21.693	21.703	21.716	21.736	21.770
0.4	20.951	20.955	20.961	20.968	20.975	20.985	20.999	21.018	21.051
0.5	20.172	20.177	20.182	20.189	20.197	20.207	20.220	20.239	20.272
0.6	19.313	19.318	19.324	19.330	19.338	19.348	19.362	19.381	19.412
0.7	18.342	18.347	18.353	18.360	18.368	18.378	18.392	18.410	18.441
0.8	17.200	17.205	17.211	17.218	17.227	17.237	17.250	17.268	17.298

3.2.10 Kirişin burulmadan kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması

Kirişin burulmadan kaynaklanan doğal frekansı aynı eğilmede olduğu gibi diferansiyel denklemler yardımıyla çözülebilir. Aşağıda burulma denklemi verilmiştir. Buradaki G kayma modülünü, J ise polar atalet momentini ifade etmektedir [5].

$$T = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.32)$$

Bu denklemin her iki tarafı da $\frac{\partial}{\partial x}$ 'e bölündüğünde aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GJ}{\rho I_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.33)$$

Buradaki θ , burulma deformasyonunu temsil eder. Yukarıdaki diferansiyel denklemi çözmek için çarpanlara ayırma metodunu uygulandığında aşağıdaki ifade ortaya çıkar.

$$\theta(x, t) = X(x)Y(t) \quad (3.34)$$

Bu denklemlerin çözümleri, $X(x)$ ve $Y(t)$ şu şekilde açılabilir;

$$X(x) = A \sin(ax) + B \cos(ax) \quad (3.35)$$

$$Y(t) = C \sin\left(at \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}}\right) + D \cos\left(at \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}}\right) \quad (3.36)$$

3.2.11 Ankastre kirişin burulmadan kaynaklanan doğal frekansı

Ankastre uç için ($x = 0$) $\Rightarrow \theta(0, t) = 0$

Serbest uç için ($x = L$) $\Rightarrow T(L, t) = 0 \Rightarrow GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

Yukarıdaki sınır şartları Denklem 3.35'e uygulandığında aşağıdaki eşitlikler oluşur.

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.37)$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow Aa \cos(aL) = 0 \quad (3.38)$$

A ifadesi sıfıra eşit olamayacağından dolayı $\cos(aL) = 0$ olur.

$$a_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.39)$$

Burulmadan kaynaklanan doğal titreşim frekansı aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$w_n = a_n \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}} \quad (3.40)$$

Yukarıdaki denklemde a_n ifadesi yerine yazılıp, düzenlendiğinde sistemin burulmadan kaynaklanan doğal frekansı şu şekilde ifade edilir;

$$w_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}} \quad (3.41)$$

Bu formülde ki J burulma sabiti, I_p polar atalet momentidir. Bu ifadelerin dikdörtgen kesit için formülleri aşağıdaki gibidir [5].

$$J \approx bh^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{h}{b} \left(1 - \frac{h^4}{12b^4} \right) \right] \quad (3.42)$$

$$I_p = \frac{bh^3 + hb^3}{12} \quad (3.43)$$

3.3 Timoshenko Kiriş Teorisi

Bu bölümde Timoshenko kiriş teorisi tarihçesi, varsayılan kabulleri, genel denklemleri, düz ve sivriltilmiş ankastre kirişler için eğilmeden kaynaklanan doğal frekans hesapları anlatılacaktır.

3.3.1 Timoshenko kiriş teorisi tarihçesi

1878'de Rusya'da dünyaya gelen Ukrayna uyruklu Stephen Timoshenko modern mühendislik mekaniğinin babası olarak kabul edilen bir mühendistir. Stephen Timoshenko mühendislik mekaniği, mukavemet ve elastisite konularında çok önemli çalışmalar yapmıştır ve günümüzde halen bu çalışmaların ürünleri kullanılmaktadır. Bu çalışmalarının büyük emeği olan kendi adını verdiği Timoshenko kiriş teorisi bunun en güzel örneğidir. Bu teoriyi 20.yüzyılın başlarında sunmuştur [8]. Daha önce de belirtildiği üzere bu teori Euler-Bernoulli kiriş teorisiyle beraber en çok kullanılan kiriş teorisidir.

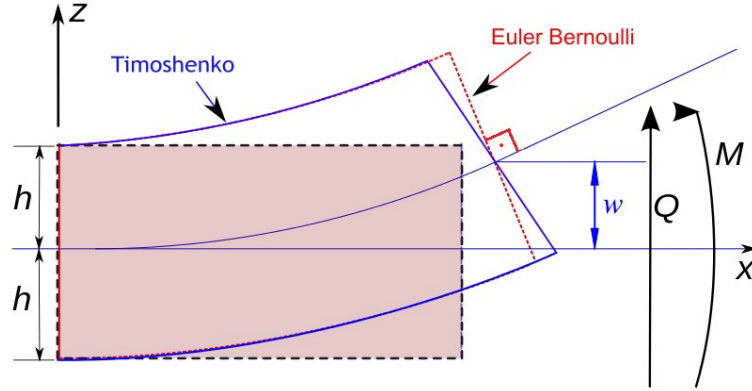
3.3.2 Timoshenko kiriş teorisi

Bu kiriş teorisinde, Euler-Bernoulli kiriş teorisine ek olarak kesme kuvvetinden kaynaklanan kayma gerilmesi de hesaba katılır. Eğilmeden kaynaklanan gerilme dağılımı, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kullanılan yöntemle birebir aynıdır. Bu nedenle Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin gelişmiş formu olarak kabul görür. Bu kiriş teorisinde analitik hesaplar yapılırken kayma gerilmeleri ve eylemsizlik momentinin durumu göz önüne alındığında sonuçların her zaman daha gerçeğe yakın çıkması beklenir. Euler-Bernoulli kiriş teorisini anlatırken kiriş eksenine dik alınan düzlemsel kesitlerin deformasyon durumdan sonra da değişmediği belirtilmiştir. Bu özellik Timoshenko kiriş teorisi için geçerli değildir. Bu iki kiriş teorisi arasındaki farklılık Şekil 3.9'da net bir şekilde gösterilmiştir. Timoshenko kiriş teorisinde kesme kuvvetinden kaynaklanan kayma gerilmesi etkilerinin uygulanabilmesi için efektif bir kayma alanına ihtiyaç duyulmaktadır. Timoshenko bu kayma alanını κA şeklinde ifade etmiştir. Buradaki κ kayma

faktörünü ($\kappa < 1$) temsil etmektedir. Bu faktör malzemenin Poisson oranına bağlıdır. Ayrıca bu faktör malzemenin geometrik yapısına göre değişmektedir. Aşağıda katı bir dikdörtgen ve dairesel kesit için kayma faktörlerinin formülleri verilmiştir [8].

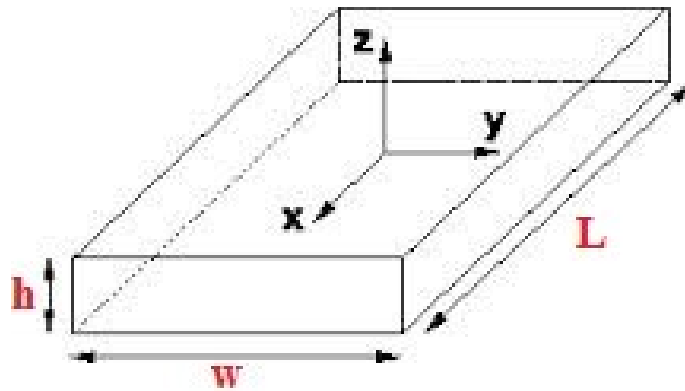
Katı dikdörtgen bir kesit alanı için: $\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$

Katı dairesel bir kesit alanı için: $\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$



Şekil 3.9: Deformasyon karşılaştırılması

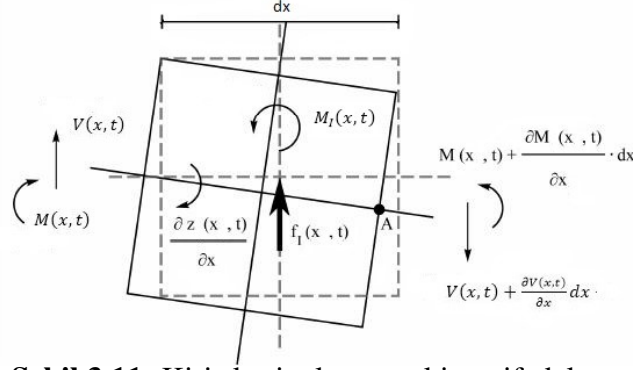
Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli kiriş teoriyle karşılaştırıldığında her zaman gerçeğe daha yakın sonuçlar verir. Şekil 3.10'daki gibi uzunluğu L , kalınlığı h ve genişliği w olan bir kiriş, Timoshenko kiriş teorisi kullanarak çözüldüğünde L/h oranı küçüldükçe teorinin daha iyi sonuçlar verdiği görülür. Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli'ye göre bu tarz kalın kirişlerde daha iyi sonuç verdiği için, kalın kiriş teorisi olarak da bilinmektedir.



Şekil 3.10: Dikdörtgen kesitli kiriş örneği

3.3.3 Timoshenko kiriş teorisi genel denklemleri

Timoshenko kiriş teorisinde kirişin kesit alanına etkiyen iç kuvvetler, momentler ve yer değiştirmeler Şekil 3.11’de belirtilmiştir [10].



Şekil 3.11: Kiriş kesit alanına etkiyen ifadeler

Kiriş üzerinde z doğrultusunda yazılan kuvvet dengesi aşağıda verilmiştir.

$$V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - f_I(x,t) dx - V(x,t) = 0 \quad (3.44)$$

Buradaki $f_I(x,t)$ ifadesi aşağıdaki denklemle gösterilir.

$$f_I(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.45)$$

Denklem 3.44 ve Denklem 3.45 birbiri içine yazıldığında aşağıdaki denklem oluşur.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.46)$$

Şekil 3.11’de belirtilen kesit alanı üzerindeki A noktasına göre moment dengesi yazarsak aşağıdaki eşitlik oluşur.

$$M(x,t) - M(x_I,t) - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) - V(x,t) dx = 0 \quad (3.47)$$

Yukarıdaki denklemde $M(x_I,t)$ ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Buradaki I_0 kütle ataletidir. Dikdörtgen kesitli kirişler için $I_0 = \rho I$ bağıntısıyla tanımlanır. Aşağıdaki denklemde $M(x_I,t)$ ifadesi gösterilmiştir [10].

$$M(x_I,t) = I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial z(x_I,t)}{\partial x} \right] = \rho I \frac{\partial^3 z(x_I,t)}{\partial x \partial t^2} \quad (3.48)$$

Yukarıdaki bağıntı Denklem 3.47'nin içine yazıldığında aşağıdaki ifade oluşur.

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) - \rho I \frac{\partial^3 z(x,t)}{\partial x \partial t^2} \quad (3.49)$$

Timoshenko kiriş teorisinde elastik eğri fonksiyonu, kayma ve eğilme gibi etkilerin beraber incelenmesinden dolayı aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir. Bu bağıntıdaki $z_e(x,t)$ eğilmedeki etkileri, $z_k(x,t)$ ise kaymadaki etkileri inceleyen elastik eğri fonksiyonlarını temsil etmektedir.

$$z(x,t) = z_e(x,t) + z_k(x,t) \quad (3.50)$$

Yukarıdaki denklemler şu şekilde açılabilir;

$$\frac{\partial^2 z_e(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{M(x,t)}{EI} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial z_k(x,t)}{\partial x} = \frac{\tau}{G} = K \frac{V(x,t)}{AG} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{M(x,t)}{EI} + \frac{K}{AG} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (3.53)$$

Denklem 3.53'ün x'e göre iki kere türevi alınırsa aşağıdaki denklem oluşur.

$$EI \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + \frac{KEI}{AG} \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3} \quad (3.54)$$

Denklem 3.46'nın x'e göre iki kere türevi alınırsa aşağıdaki denklem oluşur.

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3} = \rho A \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.55)$$

Denklem 3.49'un x'e göre bir kere türevi alınırsa aşağıdaki denklem oluşur.

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.56)$$

Türevi alınan bu ifadeler Denklem 3.54'te yerine yazılırsa şu denklem oluşur;

$$EI \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} = \rho I \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{KEI\rho}{G} \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.57)$$

Tüm denklem EI ifadesine bölündüğünde aşağıdaki Timoshenko kiriş teorisinin serbest titreşim denklemi oluşmaktadır [10].

$$\frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} - \left[\frac{\rho}{E} + \frac{K\rho}{G} \right] \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.58)$$

Timoshenko kiriş teorisinde çözüm yaparken genelde boyutsuzlaştırma tercih edilir. Boyutsuzlaştırmanın amacı, kirişin uzunluğuna bağlı kalmadan, kiriş üzerindeki herhangi bir uzunlukta veya belirli bir noktada kirişin incelenmesine yardımcı olmaktır. Aynı zamanda yapılan işlemlerin kolaylaşmasını sağlamaktadır. Aşağıda genelde bu teoride kullanılan ve kiriş uzunluğu üzerindeki herhangi bir noktanın kiriş uzunluğuna göre boyutsuzlaştırılmasını sağlayan dönüşüm verilmiştir.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.59)$$

Bu boyutsuzlaştırma denklemini basitçe açıklamak gerekirse, kiriş üzerindeki noktalar 0'dan L'ye değil de 0'dan 1'e gider.

3.3.4 Kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması

Timoshenko kiriş teorisinde, kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması oldukça zordur. Genelde bu denklemi çözmek için Fourier değişkenlere ayırma metodu tercih edilir. Aşağıdaki denklemlerde $y(x,t)$ titreşim genliğini, $\theta(x,t)$ sadece eğilmeye bağlı deformasyon açısını temsil eder.

$$y(x,t) = X(x)T(t) \quad (3.60)$$

$$\theta(x,t) = Y(x)T(t) \quad (3.61)$$

D'Alembert prensibine göre düzgün kesit alanlı Timoshenko kirişi için, bağlantılı diferansiyel denklemler aşağıda verilmiştir. Bu denklemlerde $Q(x,t) = KG\Delta y(x,t)$ kayma kuvvetini, $M(x,t) = EI\partial\theta(x,t)/\partial x$ eğilme momentini ve $q(x,t)$ sisteme etkiyen dış kuvvetleri ifade eder. Bu tezde kiriş üzerinde herhangi bir dış kuvvet olmadığından $q(x,t) = 0$ olur.

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (3.62)$$

$$-\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + Q(x,t) - I\rho \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.63)$$

Bağılantılı diferansiyel denklemler sistemi yapılan basit birkaç dönüşümden sonra şu hali almaktadır [1];

$$X''(x) + aX(x) - Y'(x) = 0 \quad (3.64)$$

$$Y''(x) + bY(x) - cX'(x) = 0 \quad (3.65)$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.66)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki ω titreşim frekansıdır ve a,b,c ifadeleri şunlardır [1];

$$a = \frac{\omega^2 \rho}{KG} \quad (3.67)$$

$$b = \frac{\omega^2 \rho}{E} - c \quad (3.68)$$

$$c = \frac{KGA}{EI} \quad (3.69)$$

İlk iki diferansiyel denklemden $Y(x)$ ifadesi çekildiğinde aşağıdaki denklem oluşur.

$$Y(x) = -\frac{1}{b} \left[X'''(x) + (a+c)X'(x) \right] \quad (3.70)$$

Denklemlerdeki $X(x)$ ifadesi Timoshenko kiriş teorisinde şu şekilde ifade edilebilir;

$$X^{(4)}(x) + dX'' + eX(x) = 0 \quad (3.71)$$

Buradaki d ve e ifadeleri aşağıda verilmiştir [1].

$$d = a + b + c = \frac{\omega^2 \rho \left(1 + \frac{E}{KG}\right)}{E} \quad (3.72)$$

$$e = ab = \frac{\omega^2 \left(\omega^2 \rho^2 \frac{I}{KG} - \rho A\right)}{EI} \quad (3.73)$$

Timoshenko kiriş teoris denklemlerinde serbest titreşim frekansı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\omega = \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}} \quad (3.74)$$

Yukarıda kiriş denklemleri ve boyutsuzlaştırılmaları gösterilmiştir. Aşağıda ise bu diferansiyel denklemlerin nasıl çözüleceği anlatılacaktır. Denklem 3.71'in karakteristik eşitliği aşağıda gösterilmiştir.

$$r^4 + dr^2 + e = 0 \quad (3.75)$$

Yukarıdaki denklemde $r^2 = \tilde{z}$ ifadesini içine yazarsak denklem şu şekilde basitleşir;

$$\tilde{z}^2 + d\tilde{z} + e = 0 \quad (3.76)$$

Bu denklemin kökleri aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{z}_{1,2} = \frac{1}{2}(-d \pm \sqrt{\Delta}) \quad (3.77)$$

$$\Delta = d^2 - 4e = \omega^4 \rho^2 I^2 \left(1 - \frac{E}{KG}\right)^2 + 4EI\omega^2 \rho A \quad (3.78)$$

Bütün ω değerleri için $\Delta > 0$ olduğu kolayca görülmektedir. Bunun yanında bütün ω değerleri için $\tilde{z}_2 < 0$ olur. Diğer kök $\tilde{z}_1$ için pozitif ya da negatif olma durumu aşağıda gösterilmiştir.

$$\tilde{z}_1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{d^2 - 4e} > d \Rightarrow e < 0 \left(\omega^2 < \frac{KGA}{\rho I} \right) \quad (3.79)$$

$$\tilde{z}_1 < 0 \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}} \quad (3.80)$$

Denklem 3.75 için iki olası çözüm vardır. Bunlar aşağıda belirtilmiştir.

- $\omega < \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}}$ için;

Sistemin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$r_1 = \sqrt{\tilde{z}_1} \quad (3.81)$$

$$r_2 = -\sqrt{\tilde{z}_1} \quad (3.82)$$

$$r_3 = i\sqrt{-\tilde{z}_2} \quad (3.83)$$

$$r_4 = -i\sqrt{-\tilde{z}_2} \quad (3.84)$$

Bu kökler bize aşağıdaki gibi bir diferansiyel çözüm şekli verir.

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\tilde{z}_1}x} + C_2 e^{-\sqrt{\tilde{z}_1}x} + C_3 e^{i\sqrt{-\tilde{z}_2}x} + C_4 e^{-i\sqrt{-\tilde{z}_2}x} \quad (3.85)$$

Yukarıdaki Euler denklemini aşağıdaki gibi trigonometrik hale getirebiliriz.

$$X(x) = P_1 \cosh \lambda_1 x + P_2 \sinh \lambda_1 x + P_3 \cosh \lambda_2 x + P_4 \sinh \lambda_2 x \quad (3.86)$$

$$\lambda_1^2 = |\tilde{z}_1| = \frac{-d + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.87)$$

$$\lambda_2^2 = |\tilde{z}_2| = \frac{d + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.88)$$

- $\omega > \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}}$ için;

Bu durumda kökler aşağıdaki gibi olur.

$$r_1 = i\sqrt{-\tilde{z}_1} \quad (3.89)$$

$$r_2 = -i\sqrt{-\tilde{z}_1} \quad (3.90)$$

$$r_3 = i\sqrt{-\tilde{z}_2} \quad (3.91)$$

$$r_4 = -i\sqrt{-\tilde{z}_2} \quad (3.92)$$

Bu kökler bize aşağıdaki gibi bir diferansiyel çözüm şekli verir.

$$X(x) = Q_1 \cos \lambda_1 x + Q_2 \sin \lambda_1 x + Q_3 \cos \lambda_2 x + Q_4 \sin \lambda_2 x \quad (3.93)$$

$$\lambda_1^2 = |\tilde{z}_1| = \frac{d - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.94)$$

$$\lambda_2^2 = |\tilde{z}_2| = \frac{d + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.95)$$

Bu iki durumda da denklemlerde gösterilen P ve Q integrasyon sabitleridir. Bununla beraber bu değerler sistemin sınır ve başlangıç şartlarına göre değişmektedir.

3.3.5 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması

Ankastre bir kiriş için sınır şartları aşağıda verilmiştir [1].

Ankastre uç için ($x = 0$) $\Rightarrow$

$$X(0) = X'''(0) + (a + c)X'(0) = 0 \quad (3.96)$$

Serbest uç için ($x = L$) $\Rightarrow$

$$dX(L) + X'''(L) = X''(L) + aX(L) = 0 \quad (3.97)$$

Timoshenko kiriş teorisinde iki olası çözüm olduğunu ve bunların şartlarını yukarıda belirtmiştik. Aşağıda bu iki olası durum için çözümler verilmiştir.

- $\omega < \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}}$ için;

Aşağıda belirtilen matris A matrisidir bu matrisin C matrisi ile çarpımı sıfıra eşittir.

Denklem 3.98 ve Denklem 3.100'deki matris bilinmeyenleri şunlardır;

$$A_{24} = \lambda_2 \left(-\lambda_2^2 + a + c \right),$$

$$A_{34} = \left(-\lambda_2^2 - d \right) \lambda_2 \cos \lambda_2 L,$$

$$A_{44} = \left(-\lambda_2^2 + a \right) \sin \lambda_1 L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 (\lambda_1^2 + a + c) & 0 & A_{24} \\ (\lambda_1^2 - d) \lambda_1 \sinh \lambda_1 L & (\lambda_1^2 - d) \cosh \lambda_1 L & (\lambda_2^2 + d) \lambda_2 \sin \lambda_2 L & A_{34} \\ (\lambda_1^2 + a) \cosh \lambda_1 L & (\lambda_1^2 + a) \sinh \lambda_1 L & (-\lambda_2^2 + a) \cos \lambda_2 L & A_{44} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$C^T = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4] \quad (3.99)$$

Sistemin doğal frekansı, A matrisinin determinantının sıfıra eşit olduğu durumlarda bulunur. Buradan ω çekilir. Bu tez çalışmasında ω değerlerini hesaplamak için Wolfram Mathematica programı kullanılmıştır.

- $\omega > \sqrt{\frac{KGA}{\rho I}}$ için;

Bu durumda ise A matrisi değişmektedir geri kalan yöntem tamamen aynıdır. Değişen A matrisi ise şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 (-\lambda_1^2 + a + c) & 0 & A_{24} \\ (\lambda_1^2 + d) \lambda_1 \sin \lambda_1 L & (-\lambda_1^2 - d) \cos \lambda_1 L & (\lambda_2^2 + d) \lambda_2 \sin \lambda_2 L & A_{34} \\ (-\lambda_1^2 + a) \cos \lambda_1 L & (-\lambda_1^2 + a) \sin \lambda_1 L & (-\lambda_2^2 + a) \cos \lambda_2 L & A_{44} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$C^T = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4] \quad (3.101)$$

3.3.6 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının bulunması

Euler-Bernoulli kiriş teorisini anlatılırken, sivriltilmiş ankastre kiriş için sadece kiriş parametrelerinden A ve I değerlerinin değiştiği belirtilmişti. Timoshenko kiriş teorisinde de sadece bu iki değer değişmektedir. Bu iki değeri bulmaya yönelik hesaplamalar önceki bölümlerde gösterilmiştir. Yeni bulunan A ve I parametreleri yukarıdaki doğal frekans hesabı bulunan denklemlerde yerine yazıldığında sivriltilmiş ankastre kiriş için ω değerleri bulunabilmektedir. Daha sonrasında $a_n L$ değer tablolarından yararlanılır. Her mod için aranan $c_h - c_b$ değerlerin kareleri bulunur ve tablo üzerinde 0-0 üzerine gelen değerlerin karelerine bölünür. Çıkan değeri bulunan ω değeri ile çarparak sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansı hesaplanır.

3.4 Shear(Kayma) Kiriş Teorisi

Bu kiriş teorisi bu tez çalışmasının kapsamını genişletilmesi ve sonuçlarla karşılaştırma zenginliğinin artırılması amacıyla sonradan eklenmiştir. Shear kiriş teorisinin de diğer kiriş teorileri gibi temeli Euler-Bernoulli kiriş teorisidir. Bu kiriş teorisinde, Euler-Bernoulli kiriş teorisine ek olarak kayma gerilmesinin etkileri de hesaba katılır [2]. Bunun yanında Timoshenko kiriş teorisindeki gibi dönme ataleti etkisi hesaplamalara katılmaz. Bu yüzden Shear kiriş teorisi, Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş teorilerinin ortasında yer alabilir.

3.4.1 Ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının bulunması

Aşağıdaki ifadelerde α ve β yeni değişkenlerdir. Kesit alanındaki eğilme momentinden kaynaklanan dönme açısı α ve kaymadan kaynaklanan çarpılma açısı β ile ifade edilir. Toplam dönme açısı ise yaklaşık olarak çökmenin ilk türevine eşittir [2].

$$\alpha(x,t) + \beta(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (3.102)$$

Sınır şartları aşağıda verilmiştir. Buradaki, $\partial\alpha/\partial x$ momenti ve κ kayma faktörünü temsil eder. Bu faktörün dikdörtgen kesit için hesaplaması Timoshenko kiriş teorisinde gösterilmiştir.

Ankastre uç için ($x = 0$) $\Rightarrow \alpha = V = 0$

Serbest uç için ($x = L$) $\Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \kappa GA \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \right) = 0$

$$\begin{bmatrix} V(x,t) \\ \alpha(x,t) \end{bmatrix} = T(t) \begin{bmatrix} W(x,t) \\ \Psi(x,t) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Yukarıdaki tanımlamalara göre Denklem 3.103 aşağıdaki gibi bağlantılı homojen diferansiyel denklem haline getirilir [2].

$$\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 W(x) = 0 \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \Psi(x) = 0 \quad (3.105)$$

Karakteristik denklemi düzenlediğimizde aşağıdaki hale gelir.

$$r^4 + \frac{\rho \omega^2}{\kappa G} r^2 - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 = 0 \quad (3.106)$$

Buradaki r ifadesini açarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$r_i = \pm \sqrt{-\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G}\right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.107)$$

Yukarıdaki ifadeyi ikiye ayırıp tanımlarsak aşağıdaki eşitlikler oluşur [2].

$$a = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G} + \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G}\right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}}} \quad (3.108)$$

$$b = \sqrt{-\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G} + \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2\kappa G}\right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}}} \quad (3.109)$$

Yukarıdaki $W(x)$ ve $\Psi(x)$ ifadelerinin çözümlerini aşağıdaki gibi belirtebiliriz.

$$W(x) = C_1 \sin \frac{ax}{L} + C_2 \cos \frac{ax}{L} + C_3 \sinh \frac{bx}{L} + C_4 \cosh \frac{bx}{L} \quad (3.110)$$

$$\Psi(x) = D_1 \sin \frac{ax}{L} + D_2 \cos \frac{ax}{L} + D_3 \sinh \frac{bx}{L} + D_4 \cosh \frac{bx}{L} \quad (3.111)$$

Buradaki C ve D ifadeleri sabit katsayılardır. Bu tez çalışmasında kiriş teorilerinin hesaplamalarından daha verimli sonuçlar alınabilmesi için Wolfram Mathematica programı kullanılacaktır. Buraya kadar olan ifadeler bu işlemler için yeterlidir. Fakat çalışmanın yol gösterici olması açısından aşağıdaki denklemler de eklenmiştir. Yukarıdaki a ve b ifadelerinin arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir. Buradaki γ sembolü $\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{\kappa}}$ ifadesine eşittir ve işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla konulmuştur [2].

$$b = a \sqrt{\frac{1}{\gamma^2 \kappa^2 a^2 + 1}} \quad (3.112)$$

Yukarıda belirtilen gerekli sınır şartları uygulandığında aşağıdaki eşitlik oluşur.

$$(b^2 - a^2) ab \sin a \sinh b + (b^4 + a^4) \cos a \cosh b + 2a^2 b^2 = 0 \quad (3.113)$$

Bu denklemi çözdüğümüzde a_i değerlerini ve buna bağlı olarak b_i değerlerini elde ederiz. Ankastre sistemin doğal frekansı ise aşağıdaki formülle ifade edilebilir.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \kappa (a_i^2 - b_i^2)}{2\rho L^2 (1 + \nu)}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.114)$$

3.4.2 Sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansının bulunması

Shear kiriş teorisinde sivriltilmiş ankastre kiriş için doğal frekans hesabı, Timoshenko kiriş teorisindeki yöntemle aynıdır. Yeni bulunan A ve I parametreleri yukarıdaki doğal frekans hesabı bulunan denklemlerde yerine yazıldığında sivriltilmiş ankastre kiriş için ω değerleri bulunabilmektedir. Daha sonrasında ise Euler-Bernoulli için olan $a_n L$ değer tablolarından yararlanılır. Her mod için aranan $c_h - c_b$ değerlerinin karesi bulunur ve tablo üzerinde 0-0 üzerine gelen değerlerin karelerine bölünür. Çıkan değeri bulunan ω değeri ile çarparak sivriltilmiş ankastre kirişin doğal frekansı hesaplanır.

3.5 Kiriş Teorilerinin Genel Karşılaştırılması

Euler-Bernoulli, Timoshenko, Rayleigh ve Kayma(Shear) kiriş teorilerinin en yaygın kullanılan kiriş teorileri oldukları daha önceki bölümlerde belirtilmişti. Tez çalışmasında kullanılan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri için karşılaştırma yapılacak olunursa, her iki teorinin de gerilmelerin hesaplandığı denklemlerden oluştuğu söylenebilir. Bu bilgilerle beraber iki teori arasında oldukça farklılıklar vardır. Basit olarak belirtilmesi gerekirse, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kesme kuvvetinden kaynaklanan kayma gerilmesi ihmal edilir, Timoshenko kiriş teorisinde ise bu gerilme hesaba katılır. Timoshenko kiriş teorisinde kiriş eksenine dik konumda bulunan düzlemsel kesitler deformasyondan sonra düzlemselliğini korumaz, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde ise deformasyondan sonra da dikliğin korunduğu varsayılır. İki teori arasındaki deformasyon karşılaştırması Şekil 3.9'da belirtilmişti. Bu tez çalışmasında kullanılmak üzere ankastre ve sivriltilmiş ankastre kiriş örnekleri düşünülürse, bu kirişlerin serbest ucundan tekil bir yük uygulandığında Euler-Bernoulli kiriş teorisi için sadece bu kuvvetin oluşturduğu eğilme momenti hesaplanır. Timoshenko kiriş teorisinde ise buna ek olarak kirişteki malzemeden kaynaklanan deformasyonlar, eğilmeden kaynaklanan dönme etkisi sebebiyle oluşan eylemsizlik kuvveti ve düşey kuvvetler sebebiyle oluşan kayma gerilmeleri de hesaba katılmaktadır. Timoshenko kiriş teorisi daha kapsamlı ve ihmallerin az olduğu bir kiriş teorisi olduğundan, her zaman bu teoriyle elde edilen hesaplamaların Euler-Bernoulli kiriş teorisi sayesinde elde edilen hesaplamalara göre daha iyi sonuçlar vermesi beklenmektedir. Timoshenko kiriş teorisinin kalın kiriş teorisi olarak da bilindiği daha

önceki bölümlerde belirtilmişti, ince kirişlerde her iki teorinin de verdiği sonuçlarda benzerlik gözlenirken kiriş kalınlaştıkça Timoshenko kiriş teorisinin daha doğru sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Bu karşılaştırma tez çalışmasının sonuç kısmında daha net olarak gösterilecektir. Bu bilgiler ışığında Timoshenko kiriş teorisi için Euler-Bernoulli kiriş teorisinin gelişmiş formu olduğu söylenebilir. Bu iki teori dışında Rayleigh ve Kayma(Shear) kiriş teorilerinin de benzer prensiplere sahip olduğu söylenebilir. Bu iki teori de Euler-Bernoulli kiriş teorisinden kapsamlı olup Timoshenko kiriş teorisinden daha az kapsamlıdır. Kiriş teorisi ne kadar kapsamlı olursa yani ne kadar az ihmal yapılırsa çözümü o kadar zorlaşır. Çizelge 3.10'da bu dört temel teoride hesaba katılan faktörler basit olarak gösterilip karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3.10: Kiriş teorileri karşılaştırması

Kiriş Teorisi	Eğilme Momenti	Yanal Yerdeğiştirme	Kayma Deformasyonu	Dönme Ataleti
E-B	+	+	-	-
R	+	+	-	+
Sh	+	+	+	-
T	+	+	+	+

4. KİRİŞLERDE KULLANILAN ANALİZ YÖNTEMLERİ

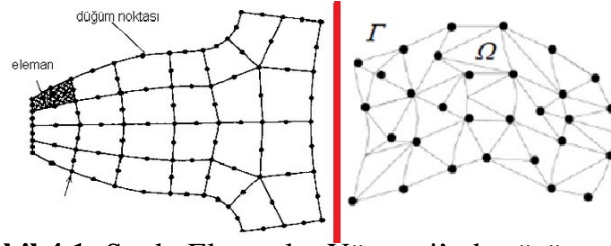
Günümüzde teknolojinin gelişmesi ve kiriş teorilerinin ihtiyaçlara hızlı bir şekilde cevap verememesi analiz yöntemlerinin gelişmesine yol açmıştır. Bu yöntemlerden bazıları olan Sonlu Farklar Yöntemi(Finite Differences Method), Sonlu Elemanlar Yöntemi(Finite Element Method), Sınır Elemanlar Yöntemi(Boundary Element Method) ve Sonlu Hacimler Yöntemi(Finite Volume Method) mühendislikte kullanılan yakın zamandaki en gelişmiş yöntemlerdir. Bu yöntemler arasında Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Sonlu Farklar Yöntemi daha yaygın kullanıma sahiptir. Bu yöntemler genel olarak mühendislik alanında sıvı etkilerine veya termal etkilere maruz kalan geometrik yapıların analizleri, akışkanlar mekaniği analizleri, sürekli ortam mekaniği analizleri ve titreşim analizleri gibi alanlarda uygulanmaktadır. Bu yöntemlerde ortak olan özellik, düğüm sayısı arttıkça analiz sonuçlarının doğruluk hassasiyetinin de artmasıdır. Bunun sebebi sonsuz serbestlik dereceli sistemlerin ayırık sistem mantığıyla çözülmesidir. Düğüm sayısı arttıkça serbestlik derecesi sayısı artar bu da daha doğru sonuçlara ulaşılmasını sağlar. Bu tarz verimli sonuçlara ulaşabilmek için gelişmiş bilgisayar özelliklerine gereksinim duyulmaktadır. Bunun sebebi, düğüm sayısı arttıkça bilgisayarın yaptığı analiz süresinin artmasıdır. Kirişlerde kullanılan analiz yöntemlerinin verdiği başarılı sonuçlar göz önüne alındığında bu yöntemlerin mühendislik dalındaki ilerlemeler açısından önemli bir yere sahip olduğu gözlenmektedir. Bu tez çalışmasında kullanılacak olan yöntem, Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir. Diğer analiz yöntemleri yine aynı öğrencinin lisans tezi olan “Sivriltilmiş Ankastre Kirişler için Euler-Bernoulli ve Timoshenko Çözümlerinin Sıcaklık Altında İncelenmesi ve Titreşim Analizi” çalışmasında basitçe açıklanmış ve örnekler verilmiştir. Bu çalışmada Sonlu Elemanlar Yöntemi detaylı bir şekilde açıklanacaktır.

4.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

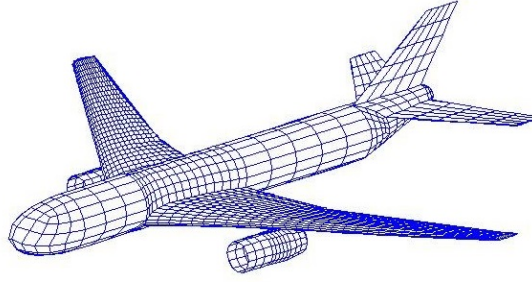
Günümüzde elle çözülmesi zor olan mühendislik ile ilgili problemlerin analiz yapılmasında kullanılan en yaygın yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir. Bu yöntem, karmaşık geometrik yapıları küçük parçalar halinde modelleme fikrine dayanır. Bu yöntem ilk kez 1956 yılında uçak ve uzay endüstrisinde yapısal analiz ile ilgili problemlerin çözülmesi amacı ile ortaya çıkmış ve ilk kez uçak gövdelerinin analizini yapmak için kullanılmıştır [11]. Bu tarihten sonraki 10 sene içerisinde bu yöntemin kullanıldığı alanlar genişlemiş ve bununla beraber mühendislik problemlerin birçoğunda kullanılmaya başlanmıştır. Sonlu Elemanlar Yöntemi içindeki teknikler hızlıca gelişmiş ve bunun sonucunda birçok pratik problemin çözülmesinde kullanılmıştır. Bu problemlere örnek olarak katı mekaniği, sıvı mekaniği, biyomekanik, ısı transferi, akustik ve elektromanyetizma verilebilir. Bu yöntem karmaşık bir sürü sistemde uygulanabilir. Bu sistemlere örnek olarak lineer problemler, nonlineer problemler, düzgün bir geometrik yapıya sahip olmayan sistemler, özdeğer problemleri ve karmaşık sınır koşullarına sahip olan sistemler gösterilebilir. Bizim ilgilendiğimiz alan olan uçak ve uzay mühendisliğinde ise genelde;

- Füzelerin ve roketlerin statik analizlerinde
- Sistemlerin doğal titreşim frekanslarının hesaplanmasında
- Uçak gövdesinin, kanatçıklarının ve kanatlarının statik analizinde
- Geometrik yapıların rastgele yüklere cevabının analizlerinde
- Stabilité analizlerinde
- Sürekli rejim için katılarda ve sıvılarda sıcaklık dağılımı hesaplarında
- Roket çıkışlarında, kanatçıklarında, türbin kanatlarında ve içten yanmalı motorlarında analiz yapılması gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Bu yöntemin temel prensibi sıcaklık, basınç, çökme gibi sürekli büyüklüğün küçük alt çözüm bölgelerinde tanımlanmış sürekli ve kısmi fonksiyonların birleşimi olarak ifade edilmesine dayanmaktadır. Belirttiğimiz alt kümelerde, gerektiğinde daha gerçeğe yakın hesaplamalar da yapılabilir. Bu tez çalışmasında Sonlu Elemanlar Yöntemi ile kirişin doğal frekansı hesaplanacak, formüller verilip anlatılacak ve analiz sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır. Şekil 4.1’de Sonlu Elemanlar Yöntemi’nin çözüm alanı, Şekil 4.2’de ise yolcu uçağı için bilgisayar görüntüsü verilmiştir.



Şekil 4.1: Sonlu Elemanlar Yöntemi’nde çözüm alanı



Şekil 4.2: Yolcu uçağı için bilgisayar görüntüsü

4.1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi’nin kullanıldığı bazı paket programlar

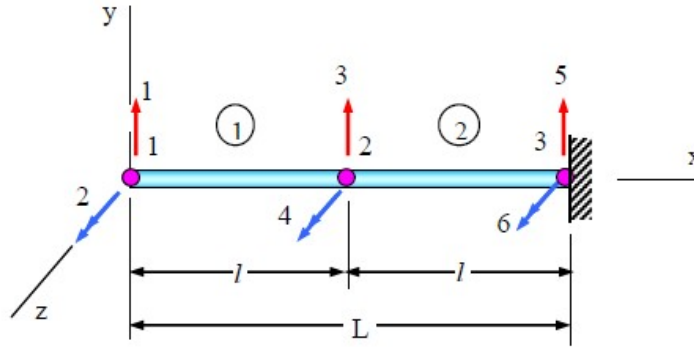
- ABAQUS
- ADINA
- ANSYS
- CFD
- CFX
- CalculiX
- MSC/NASTRAN/PATRAN

- SAP2000

Bu tez çalışmasında MSC/Nastran ve MSC/Patran paket programı kullanılmıştır.

4.2 Kirişin Eğilmeden Kaynaklanan Doğal Frekansının Bulunması

Her ne kadar paket programlar bu işlemleri yapsa da bu programların temelini neye dayandığı bilinmelidir. Bu işlemleri elle yapmak oldukça zordur, bir ankastre kirişi 2 elemana bölüp Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözmek bile oldukça uzun sürmektedir. Bilgisayarlar ise 2000 elemanı saniyeler içinde çözebilmektedir. Aşağıda, Şekil 4.3'teki gibi bir ankastre kirişin 2 elemana bölünüp eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile bulunması anlatılmıştır [12].



Şekil 4.3: Ankastre kirişin iki elemana bölünmesi

Bu eleman düzenlemelerinden sonra, kirişin nodal rijitlik matrisi(nodal stiffness matrix) aşağıda gösterilmiştir.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Buna benzer olarak kirişin nodal kütle matrisi(nodal mass matrix) aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Şekil 4.3'teki ankastre uçta, yani 5 ve 6'da yer değiştirmeler sıfıra eşit olacaktır. Bu sebeple bu matrislerdeki beşinci, altıncı satır ve sütunlar elenebilir. Geriye kalan dörde dörtlük matrisler düzenlenip yerine konulduğunda aşağıdaki matrisler oluşur.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & 6l & -6l \\ 2l^2 & 8l^2 & 6l & 0 \\ 6l & 6l & 12 & -12 \\ -6l & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{AA} & \mathbf{M}_{AB} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4l^2 & -3l^2 & 22l & 13l \\ -3l^2 & 8l^2 & -13l & 0 \\ 22l & -13l & 156 & 54 \\ -13l & 0 & 54 & 312 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Yukarıdaki rijitlik matrisinde K_{AA} alt matrisinin tersi aşağıdaki gibidir.

$$K_{AA}^{-1} = \frac{l}{14EI} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Yukarıdaki Denklem 4.5 ve diğer alt matrisler $[K^*_{BB}] = K_{BB} - K_{BA}K_{AA}^{-1}K_{AB}$ formülünde yerine konulduğunda aşağıdaki indirgenmiş rijitlik matrisi oluşur [12].

$$[K^*_{BB}] = \frac{12EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{18EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Kütle matrisini indirgememiz için $K_{AA}^{-1}K_{AB}$ ifadesini bulup dönüşüm matrisi olan $[T_B]$ elde edilir [12].

$$K_{AA}^{-1}K_{AB} = \frac{3}{7l} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$T_B = \begin{bmatrix} -9/7l & 12/7l \\ -3/7l & -3/7l \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Bu durumda alt matris $[I_B]$ matrisi, $[T_B]$ matrisinin bir kısmıdır, bunun sebebi iki tane öteleme yer değiştirmesinin(1 ve 3) kalmasıdır. Büyük kütle matrisinde bulunan matrisler yerine konulduğunda aşağıdaki matris oluşur. Bu matris indirgenmiş kütle matrisidir [12].

$$[M^*_{BB}] = \frac{\rho Al}{20580} \begin{bmatrix} 5652 & 3615 \\ 3615 & 18336 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Bu problem için genel titreşim denklemi $[K^*_{BB}] \{\bar{Q}\} = \lambda [M^*_{BB}] \{\bar{Q}\}$ olduğundan bulunan ifadeler yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik oluşur [11].

$$\frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} = \lambda \frac{\rho Al}{20580} \begin{bmatrix} 5652 & 3615 \\ 3615 & 18336 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Bu denklemlerde $\bar{\lambda}$ ifadesi ω^2 ifadesini temsil eder. Yukarıdaki denklemi düzenlediğimizde aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar.

$$\bar{\lambda} = \omega^2 \frac{\rho A l^4}{EI} \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} 1.7143 - 0.27464\bar{\lambda} & -4.2857 - 0.17566\bar{\lambda} \\ -4.2857 - 0.17566\bar{\lambda} & 13.714 - 0.89096\bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Bu matrisi çözebilmek için determinantın sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Bu ifadenin gösterimi, karakteristik denklem ve çözümleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\det \begin{bmatrix} 1.7143 - 0.27464\bar{\lambda} & -4.2857 - 0.17566\bar{\lambda} \\ -4.2857 - 0.17566\bar{\lambda} & 13.714 - 0.89096\bar{\lambda} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

$$0.213837\bar{\lambda}^2 - 6.79944\bar{\lambda} + 5.14269 = 0 \quad (4.14)$$

$$\bar{\lambda}_1 = 0.775241 \quad (4.15)$$

$$\bar{\lambda}_2 = 31.0221 \quad (4.16)$$

Son olarak ifadeye $l = L/2$ değişimi uygulanırsa sistemin ilk iki doğal frekansı şu şekilde çıkar;

$$\omega_1 = \frac{3.52191}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.17)$$

$$\omega_2 = \frac{22.279}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.18)$$

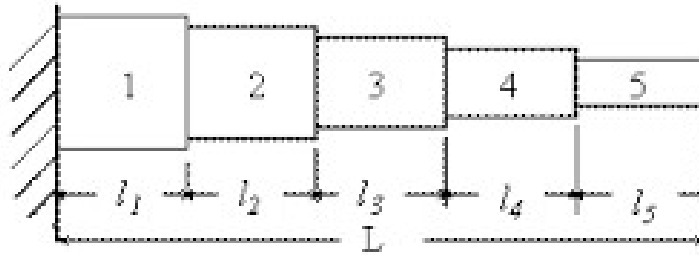
Matris işlemleri oldukça zorlu gözükse de Matlab, Mathematica gibi programlarla çok rahat bir şekilde çözülebilmektedir. Basit olarak iki elemanlı bir ankastre kiriş için eğilmeden kaynaklanan doğal frekans bulunmuştur. Kiriş boyunun çok uzun ve kalınlığının çok az olduğu varsayılırsa kiriş ince kiriştir. Dolayısıyla Euler-Bernoulli kiriş teorisi esas kabul edilebilir. İki elemanlı Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözülen bir ankastre kirişle, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin karşılaştırılma tablosu olan Çizelge 4.1 verilmiştir. Daha önceki konularda belirtildiği gibi eleman sayısı arttıkça Sonlu Elemanlar Yöntemi gerçeğe çok daha yakın sonuçlar verir.

Çizelge 4.1: SEY ile analitik çözüm karşılaştırması

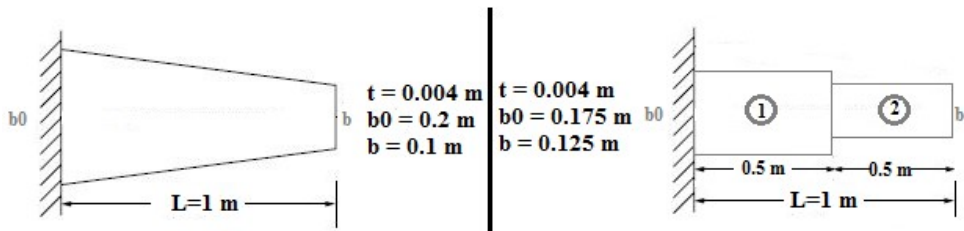
Mod	İki Eleman (SEY)	Euler-Bernoulli
ω_1	$\frac{3.52191}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
ω_2	$\frac{22.279}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\frac{22.0345}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

4.3 Sivriltilmiş Kirişin Eğilmeden Kaynaklanan Doğal Frekansı

Bir önceki bölümde ankastre kirişin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile doğal frekansının hesaplanması gösterilmişti. Sivriltilmiş ankastre için ise bu yöntem daha zordur. Dikdörtgen kesit alanına sahip bir kiriş iki elemana ayırmak için öncelikle ilk genişlik ve son genişliğin ortalaması alınır. Daha sonrasında bu değerle ilk ve son genişliğin ortalamaları alınıp kiriş o şekilde iki elemana ayrılır. Gerek sivriltilmiş kirişin hesaplamaları gerek ise modellenmesinin anlatılması daha zor olduğundan malzeme özellikleri Çizelge 4.2’de verilmiş olan bir kiriş için hesaplamalar yapıp, sonrasında elde edilen değerler yine Euler-Bernoulli kiriş teorisi cinsinden gösterilecektir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’te kirişin şekli, parametreleri ve modellenme mantığı gösterilmiştir [12].



Şekil 4.4: Sivriltilmiş kiriş modelleme mantığı



Şekil 4.5: Kirişin şekli ve modellenmesi

Çizelge 4.2: Modellenen kirişin geometrik ve malzeme özellikleri

Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	200 GPa
Yoğunluk (ρ)	7800 kg/m^3
İlk Genişlik (b_0)	0.175 m
Son Genişlik (b)	0.125 m
Kalınlık (t)	0.004 m
Uzunluk (L)	1 m

Sivriltilmiş ankastre kiriş, sabit uç kısmından itibaren sırasıyla numaralandırılmıştır. İki eleman da aynı uzunluğa ve kalınlığa sahiptir. Bunun yanında genişlik değerleri farklı olduğundan dolayı atalet momentleri ve kesit alanları farklı olacaktır. Aşağıda kirişler için kütle(mass) ve rijitlik(stiffness) matrisleri verilmiştir.

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$M = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Aşağıda her eleman için rijitlik matrislerinin sayısal değerleri verilmiştir. Global K matrisinde sınır şartlarından dolayı 1 ve 2 numaralı satır ve sütunlar işlem kolaylığı açısından silinmiştir.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 17920 & 4480 & -17920 & 4480 \\ 4480 & 1493.33 & -4480 & 746.667 \\ -17920 & -4480 & 17920 & -4480 \\ 4480 & 746.667 & -4480 & 1493.33 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 12800 & 3200 & -12800 & 3200 \\ 3200 & 1067.67 & -3200 & 533.333 \\ -12800 & -3200 & 12800 & -3200 \\ 3200 & 533.333 & -3200 & 1067.67 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 30720 & -1280 & -12800 & 3200 \\ -1280 & 2560 & -3200 & 533.333 \\ -12800 & -3200 & 12800 & -3200 \\ 3200 & 533.333 & -3200 & 1067.67 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Aynı işlemler kütle matrisine uygulandığında aşağıdaki eşitlikler oluşur.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.014 & 0.0715 & 0.351 & -0.04225 \\ 0.0715 & 0.0065 & 0.04225 & -0.004875 \\ 0.351 & 0.04225 & 1.014 & -0.0715 \\ 0.04225 & -0.004875 & -0.0715 & 0.0065 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.7243 & 0.0511 & 0.251 & -0.0302 \\ 0.0511 & 0.004643 & 0.0302 & -0.003482 \\ 0.251 & 0.0302 & 0.7243 & -0.0511 \\ -0.0302 & -0.003482 & -0.0511 & 0.004643 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1.7383 & -0.02043 & 0.251 & -0.0302 \\ 0.02043 & 0.011143 & 0.0302 & -0.003482 \\ 0.251 & 0.0302 & 0.7243 & -0.0511 \\ -0.0302 & -0.003482 & -0.0511 & 0.004643 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Bu işlemlerden sonra hareket denkleminde yola çıkılarak $M^{-1}K$ matrisi hesaplanıp özdeğerleri bulunur. Burada bulunan değerlerin karekökü alındığında sistemin doğal frekansı hesaplanmış olur. Bu işlemler ve sonrasında bulunan sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} 61645.9 & 17474.2 & -68211.8 & 20036.2 \\ 633239 & 482068 & -1.22271 * 10^6 & 332826 \\ 200331 & 49250.7 & -233087 & 79172.2 \\ 3.7685 * 10^6 & 1.13176 * 10^6 & -4.6136 * 10^6 & 1.48049 * 10^6 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\lambda_1 = 569.474 \quad \lambda_2 = 17350.2 \quad (4.28)$$

$$\omega_1 = 23.8636 \quad \omega_2 = 131.72 \quad (4.29)$$

Bulunan sonuçlarda E , I , A ve ρ değerleri yerine konup $L = l/2$ dönüşümü yapılırsa sonuçlar Euler-Bernoulli kiriş teorisi cinsinden elde edilebilir. Çizelge 4.3'te karşılaştırma tablosu verilmiştir.

Çizelge 4.3: Sivriltilmiş kiriş için SEY ile analitik çözüm karşılaştırması

Mod	İki Eleman (SEY)	Euler-Bernoulli($c_b = 0.5$)
ω_1	$\frac{4.081312}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\frac{4.31517}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
ω_2	$\frac{22.5276}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\frac{23.5193}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

4.4 SEY ile Dış Etkiler Altındaki Kirişin Yer Değiştirmelerinin Hesaplanması

Sonlu Elemanlar Yöntemi(SEY) başlı başına bir araştırma konusudur. Bu tez çalışması serbest titreşim frekansının hesaplanması üzerine olduğu için bu konu üzerinde fazla durulmayacaktır. Sıcaklık da bir dış kuvvettir, her kuvvet türü SEY ile farklı şekilde modellenmektedir. Fakat sistemin doğal frekansı bu tür dış kuvvetler ile değişmez. Kuvvetlerin etkilediği frekans, sistemin zorlanmış titreşim frekansıdır. SEY ile yer değiştirme hesaplarının yapılması önceki bölümlerde belirttiğimiz K matrisine ve F ile göstereceğimiz kuvvet matrisine bağlıdır. Bulacağımız yer değiştirmeler ise Q matrisi ile ifade edilmektedir. Bu ilişki aşağıda gösterilmiştir [12].

$$q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\theta_{z1} = \frac{dv_1}{dx} \quad (4.31)$$

$$\theta_{z2} = \frac{dv_2}{dx} \quad (4.32)$$

$$f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ m_{z1} \\ f_{x2} \\ m_{z2} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

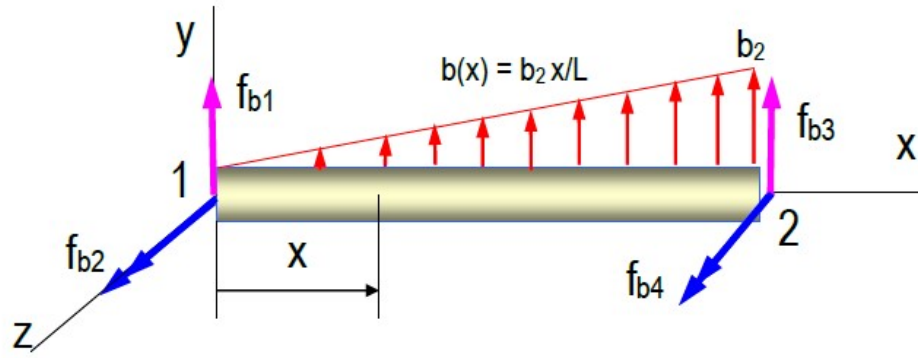
$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 24 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$[K] \{Q\} = [F] \quad (4.35)$$

Aşağıda bazı kuvvet türleri ve bunları SEY modeli için matris yazım şekilleri gösterilmiştir. Sabit bir yayılı yük altında(b_y) kuvvet matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$f_b = \frac{b_y L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

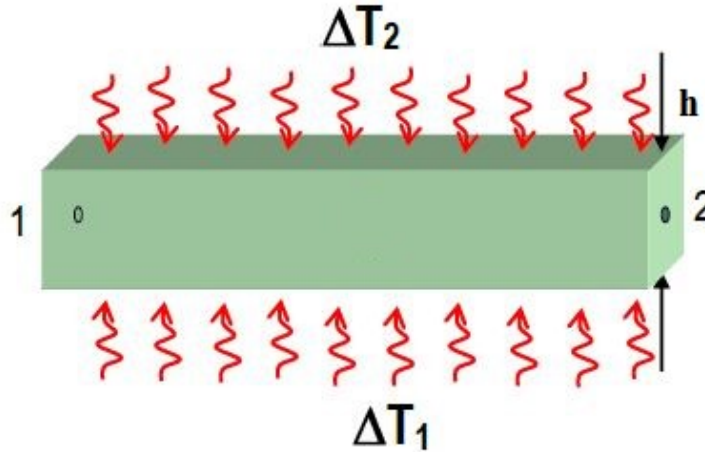
Sıradaki Şekil 4.6'da gösterilen doğrusal bir şekilde artan yayılı yük altında kuvvet matrisi Denklem 4.37'deki gibi yazılır.



Şekil 4.6: Lineer değişen yayılı yük

$$f_b = \frac{b_2 L}{60} \begin{Bmatrix} 9 \\ 2L \\ 21 \\ -3L \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Aşağıda Şekil 4.7'deki gibi bir kiriş düşünülüp, $\Delta T_1 > \Delta T_2$ kabulü yapılmıştır. Formüllerdeki α malzemenin özelliklerine bağlı ısı genleşme katsayısıdır [12].



Şekil 4.7: Sıcaklık etkisi

$$f_t = \frac{\alpha EI}{h}(\Delta T_1 - \Delta T_2) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Kiriş bir boyutlu olarak modellenseydi sıcaklık kuvveti aşağıdaki gibi de ifade edilebilirdi.

$$f_t = EAa\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

5. ÇALIŞMADA KULLANILAN PAKET PROGRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılan paket programlar ve özellikleri verilecektir.

5.1 Wolfram Mathematica

Mathematica programı Wolfram Research firması tarafından geliştirilmiştir. Aynı Matlab gibi simgesel bir matematik yazılımıdır. Matlab ile kıyaslandığında denklem girmesi ve kullanıcı arayüzü oldukça kolaydır. Basit olarak düşünüldüğünde Mathematica, elle yapılması zor ya da imkansız olan sayısal işlemleri yapan bir programdır. Aynı zamanda grafik nesneler ve sembolik hesaplamalar ile de çalışır. Fortran, Pascal, Basic ve C gibi popüler programlama dilleriyle de temelinde benzerlikler gösterir. Mathematica genelde aşağıdaki alanlarda güçlü bir yazılımdır [13].

- Veri analizi
- Olasılık işlemleri
- Fizik
- Biyoloji
- Kimya
- Fonksiyon grafikleri animasyonu
- Görüntü işleme
- Mühendislikteki çeşitli uygulamalar

En önemli özelliklerinden biri ise yüksek boyutlardaki verileri alışılmışın dışında hızlıca çözebilmesidir. Laplace ve Fourier gibi çözülmesi zor serileri kolayca çözebilen hazır araçlara sahiptir. Mühendislere üzerinde çalıştıkları projeleri etkileyici ve düzenli

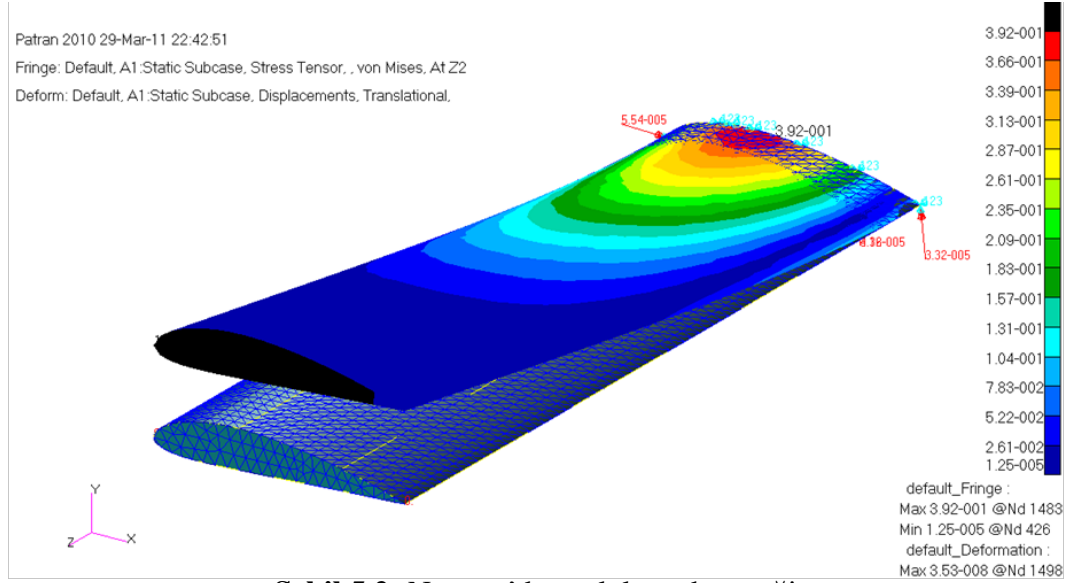
sunma özelliği sunar [13]. Bu tez çalışmasında bütün kiriş teorilerinin analitik hesaplamalarına dair kodlar bu program üzerinden yazılmıştır. Bu tez çalışmasında Wolfram Mathematica 8 sürümü kullanılmıştır. Şekil 5.1’de tez çalışmasında kullanılan kodlardan bir tanesinin ekran görüntüsü gösterilmiştir.

```
X[x_] := E1 * Cosh[λ1 x] + E2 * Sinh[λ1 x] + E3 * Cos[λ2 x] + E4 * Sin[λ2 x];
bcond1 = X[0]
bcond2 = X''[0] + (a + c) X'[0]
bcond3 = d X'[LL] + X'''[LL]
bcond4 = X''[LL] + a X[LL]
E1 + E3
E2 λ13 - E4 λ23 + (a + c) (E2 λ1 + E4 λ2)
-E4 λ23 Cos[λ2] + E2 λ13 Cosh[λ1] + E3 λ23 Sin[λ2] + E1 λ13 Sinh[λ1] + d (E4 λ2 Cos[λ2] + E2 λ1 Cosh[λ1] - E3 λ2 Sin[λ2] + E1 λ1 Sinh[λ1])
-E3 λ23 Cos[λ2] + E1 λ13 Cosh[λ1] - E4 λ23 Sin[λ2] + E2 λ13 Sinh[λ1] + a (E3 Cos[λ2] + E1 Cosh[λ1] + E4 Sin[λ2] + E2 Sinh[λ1])
```

Şekil 5.1: Mathematica ekran görüntüsü

5.2 MSC/Nastran

MSC/Nastran programı MSC Software firması tarafından geliştirilmiştir. Bu paket program Sonlu Elemanlar Yöntemini kullanan bir yazılımdır. Aynı yöntemi kullanan Ansys ve Abaqus gibi programlarla beraber dünyada en yaygın kullanılan programlardan biridir. Nastran paket programı ilk NASA’da geliştirilmeye başlanmıştır. Bunun yanında 40 yılı aşkın bir süredir geliştirilmeye devam edilmektedir. Bu süre içerisinde hemen hemen bütün uçak, uzay ve hava araçları bu program ile analiz edilip tasarlanmıştır. Yakın zamanda, neredeyse bütün büyük uçak firmaları bu yazılımı kullanmaktadır. Bu sayede neredeyse havacılık sektörünün resmi analiz yazılımı olmuştur. Nastran paket programının en önemli özelliklerinden biri çok disiplinli çözüm kabiliyeti ile farklı analizleri tek bir modelde sunabilmesidir. Şekil 5.2’de örnek olarak bir uçak kanadının bu programla yapılan statik analizinin ekran görüntüsü verilmiştir. Bu tez çalışmasında, MSC Nastran 2013.1 Student Edition sürümü kullanılmıştır.



Şekil 5.2: Nastran'da uçak kanadı örneği

5.2.1 Nastran'ın kullanıldığı bazı alanlar

- Aeroelastisite
- Akustik
- Çarpışma ve güvenlik
- Tasarım optimizasyonu
- Yorulma
- Ses ve titreşim
- Rotor dinamiği
- Yapı dinamiği
- Lineer ve Nonlineer analiz
- Montajlı parça analizi
- Sıcaklık analizi
- Plastik deformasyon ve metal şekillendirme

5.2.2 Nastran'ın kullanıldığı bazı sektörler

- Beyaz eşya
- Demiryolu
- Elektronik
- Gemi endüstrisi
- Havacılık ve Uzay
- Kauçuk endüstrisi
- Makine endüstrisi
- Medikal
- Motor sporları
- Nükleer enerji
- Otomotiv endüstrisi
- Savunma endüstrisi

5.3 MSC/Patran

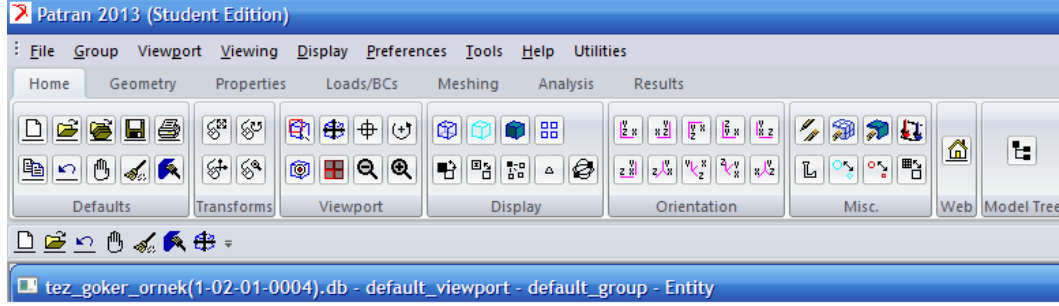
MSC/Patran programı da MSC/Nastran programı gibi MSC Software firması tarafından geliştirilmiştir. Bu paket program Nastran gibi programlar için analiz sonuçlarını almadan önce yapılan hazırlık aşamasında kolaylık sağlamaktadır. Aynı zamanda, bu analiz sonuçları alındıktan sonra yine bu program ile bu sonuçların incelenmesine yarar. Bu tez çalışmasında incelenecek olan ankastre ve sivrtilmiş ankastre kirişler bu program ile tanımlanıp sonrasında Nastran programı yardımıyla analizleri yapılacaktır. Bununla beraber yine Patran programı yardımıyla bu analiz sonuçları incelenecektir. Lisans bitirme tezi olan “Sivrtilmiş Ankastre Kirişler için Euler-Bernoulli ve Timoshenko Çözümlerinin Sıcaklık Altında İncelenmesi ve Titreşim Analizi” çalışmasında Catia çizim programı ve buna bağlı olarak çizimlerin Patran'ın içine atılması açıklanmıştı. Lisans çalışmasında aynı zamanda ankastre

kirişin Patran yardımıyla modellenip analiz edilmesi uzun uzun anlatılmıştı. Bu çalışmada sivriltilmiş ankastre giriş için bu detaylar anlatılacaktır. Lisans çalışmasında hem Nastran'ın hem Patran'ın 2010 sürümü kullanılmıştı. Bu çalışmadaki Nastran sürümü bir önceki konuda belirtilmişti. Patran için ise yine MSC Patran 2013 Student Edition sürümü kullanılacaktır. Yeni sürümlerin tercih edilme sebebi ise görsellik ve arayüzün daha gelişmiş olmasıdır. Bu sayede programların kullanılışın nispeten daha kolay ve daha görsel açıdan zengin olmasıdır. Aşağıda bu programın içinde kullanılacak olan bazı başlıklar kısaca açıklanmıştır.

- **Geometry:** Analizi elde edilmek istenen geometrik yapının modellendiği başlıktır. Bu başlık altında geometrik yapı çizilebileceği gibi bunun yanında Catia gibi çizim programlarından alınan dosyalar da Patran'ın içine atılabilmektedir.(Import)
- **Properties(Isotropic):** Analizi yapılacak malzemenin özelliklerinin atandığı bölümdür. Bu çalışmada kullanılacak olan malzeme izotropiktir. Yani malzemenin bütün özellikleri malzemenin tamamında her yönde aynıdır.
- **Meshing:** Analizi yapılacak geometrik yapının sonlu elemanlara(mesh) bölündüğü başlıktır. Aynı zamanda bu elemanların özelliklerinin belirtildiği kısımdır.
- **Properties(Create):** Geometrik yapının fiziksel parametrelerinin atandığı yerdir. Bu çalışmada, ankastre ve sivriltilmiş ankastre girişin kalınlığının verildiği ve modellendiği yer olacaktır.
- **Loads/BCs:** Yapısal elemanın üzerine etkileyen kuvvet, yayılı yük, basınç ve sıcaklık gibi dış etkenlerin tanımlandığı yerdir. Aynı zamanda geometrik yapının sınır şartları da bu bölüm altında uygulanır.
- **Analysis:** Analiz türünün seçildiği, parametrelerinin girildiği ve tanımlandığı yerdir. Bu işlemlerden sonra Patran, problemin çözülmesi amacıyla modeli Nastran'a gönderir ve analiz ettirir. Daha sonrasında aynı başlık altından Nastran'da yapılan analiz sonuçlarının alındığı yer yine bu başlıktır.
- **Results:** Bu tez çalışması için çözücü program olan Nastran'dan gelen verilerin incelendiği ve görsele işlendiği bölümdür. Bu verileri çeşitli görseller ve

animasyonlarla gösterir. Böylelikle bu sonuçlara göre mühendislik yorumları yapılmasını sağlayan analizin son ve en temel kısmıdır.

Şekil 5.3'te, Patran programının ana menü kısmının arayüzünün gösterildiği ekran görüntüsü yer almaktadır.



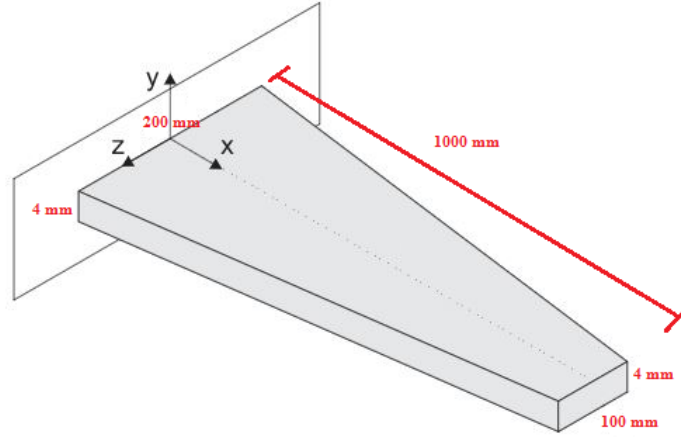
Şekil 5.3: Patran 2013 Student Edition arayüzü

6. ANALİZ

Nastran, Patran paket programlarının genel özelliklerinden ve tezdeki kullanılacak sürümlerinden önceki bölümlerde bahsedilmişti. Bu tez çalışmasının gelecekteki çalışmalar açısından faydalı olması amacıyla bu kısım oldukça detaylı olarak anlatılacaktır. Literatürde sivriltilmiş ankastre kirişler ile ilgili çalışmaların oldukça az olması sebebiyle böyle bir yola başvurulmuştur. Bu bölümde parametrik değerleri Çizelge 6.1'deki gibi olan bir sivriltilmiş ankastre kirişin Patran yardımı ile modellenip Nastran aracılığıyla analizin yapılması gösterilecektir. Bu analizle amaçlanan, bu tarz kirişlerin açısal doğal frekanslarının değerlerinin ve mod şekillerinin nasıl bulunacağı sorusuna cevap vermektir. Aşağıda, Şekil 6.1'deki gibi bir sivriltilmiş kirişin parametrik değerleri verilmiştir. Malzemenin mekanik özellikleri Properties(Isotropic) kısmında verilecektir.

Çizelge 6.1: Sivriltilmiş kirişin parametrik değerleri

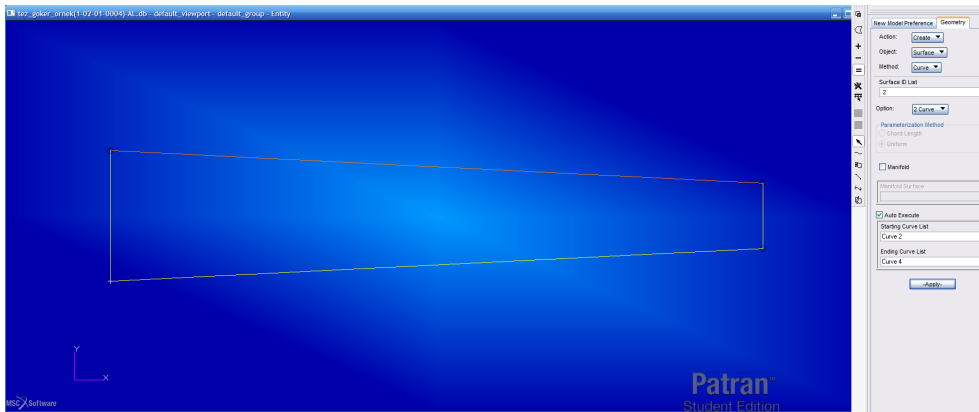
Özellik	Değer
Uzunluk (L)	1000 <i>mm</i>
İlk Genişlik (b_0)	200 <i>mm</i>
Son Genişlik (b)	100 <i>mm</i>
İlk Kalınlık (h_0)	4 <i>mm</i>
Son Kalınlık (h)	4 <i>mm</i>
Genişlik Sivrilik Oranı (c_b)	0.5
Kalınlık Sivrilik Oranı (c_h)	0
Kalınlık-Uzunluk oranları (h/L ve h_0/L)	0.004-0.004



Şekil 6.1: Sivriltilmiş ankastre kiriş modeli

6.1 Geometrik Yapının Oluşturulması

Patran uygulaması açılır ve ardından sırasıyla ‘File-New’ tıklanır. Böylelikle üzerinde çalışılacak Patran database(.db) dosyası oluşur. Ardından ‘Geometry’ sekmesine tıklanır. Düz ankastre kirişi oluşturmak sivriltilmiş ankastre kirişe göre nispeten daha zordur. Bu yüzden sağ taraftan sırasıyla ‘Create-Point-XYZ’ sekmeleri işaretlenir. Özellikleri verilen tipte bir sivriltilmiş ankastre kiriş için köşe noktalarının koordinatları girilip ‘Apply’ seçeneğine tıklanılması gerekmektedir. Bu kiriş için bu noktalar $[0 \ 0 \ 0]$, $[0 \ 200 \ 0]$, $[1000 \ 50 \ 0]$ ve $[1000 \ 150 \ 0]$ olacaktır. Daha sonrasında ‘Create-Curve-Point’ yaparak tanımlanmış olan noktalar fare(mouse) yardımıyla birleştirilir. Son aşamada ise ‘Create-Surface-Curve’ yaparak karşılıklı kenarlar yine fare yardımıyla birleştirilir. Bu işlemler sonucunda kirişin 2 boyutlu yüzey alanı çizilmiş olacaktır. Ekran görüntüsü Şekil 6.2’de verilmiştir.



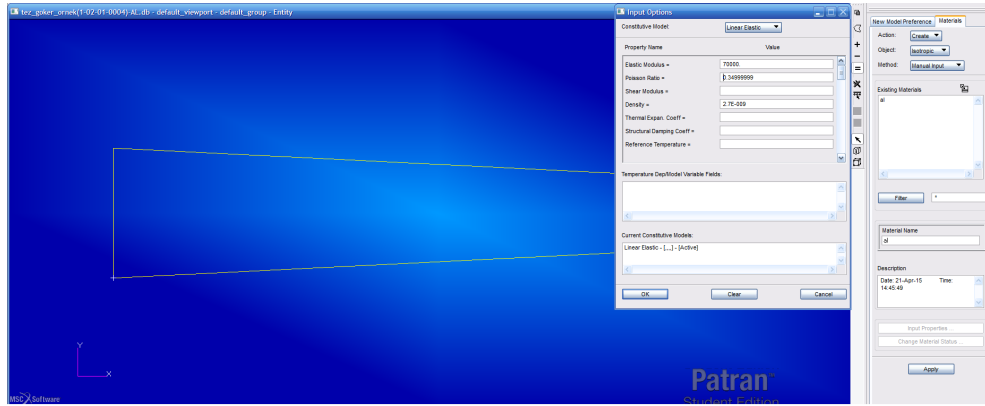
Şekil 6.2: Geometri oluşturulması

6.2 Malzeme Özelliklerinin Atanması

Bu işlemin yapılması için 'Properties' sekmesi tıklanır, ardından sol tarafta bulunan 'Isotropic' sekmesi tıklanır. Sırasıyla 'Create-Isotropic-Manual Input' seçilir. Aşağıda bulunan 'Material Name' kısmına malzemenin adı yazılır. Bu analiz çalışması için kirişin malzemesi alüminyum olacaktır. Alüminyuma ait özellikler aşağıda Çizelge 6.2'de gösterilmiştir. Ardından 'Input Properties' kısmına tıklanır. Sadece elastisite modülü, Poisson oranı ve malzeme yoğunluğunun girilmesi yeterlidir. Kayma modülünü Patran kendi hesaplayabilmektedir. Bu değerleri girerken Patran'ın çalışma biriminin milimetre(mm) olduğu unutulmamalıdır. Ardından 'OK' ve 'Apply' tıklanarak malzeme atanmış olur. Ekran görüntüsü Şekil 6.3'te verilmiştir.

Çizelge 6.2: Alüminyum özellikleri

Özellik	Birimi	Nastran Birimi
Elastisite Modülü (E)	70 GPa	70000 N/mm ²
Poisson Oranı (ν)	0.35	0.35
Yoğunluk (ρ)	2700 kg/m ³	2.7 E-9 Ns ² /mm ⁴



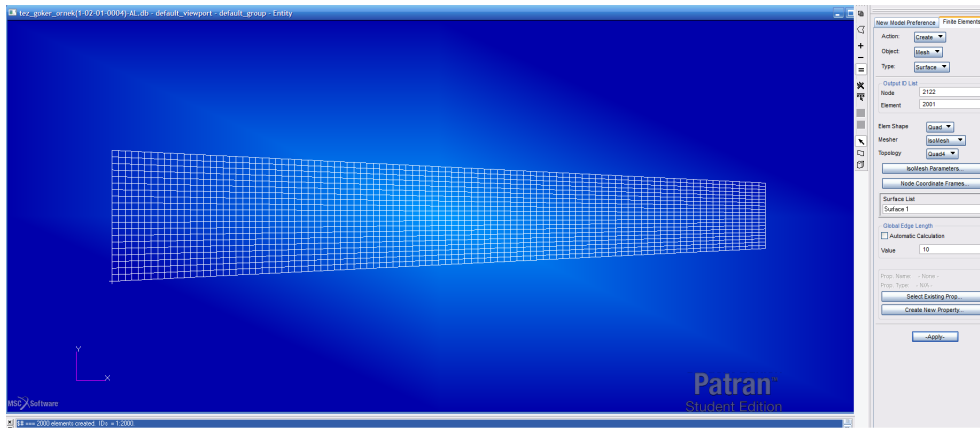
Şekil 6.3: Malzeme atanması

6.3 Sonlu Elemanlar Oluşturulması

Yukarıdan 'Meshing' sekmesine tıklanır. Bu kısım analiz ve çalışma bakımından önemli bir kısımdır. Bunun nedeni mesh olarak adlandırılan ve yapıya atanacak olan eleman ağlarının sıklığının analizin sonucuna etki etmesidir. Bunun sebepleri

Sonlu Elemanlar Yöntemi konusu anlatırken söylenmiştir. Bu işlemlerin yapılabilmesi için sırasıyla 'Create-Mesh-Surface' seçilir. Elemanın yapısı, analizi yapılacak olan modele göre değişmektedir, fakat bu çalışma için 'Quad' olacaktır. Mesh şekli 'IsoMesh' ve tekniği ise 'Quad4' olarak tanımlanacaktır. Sonrasında oluşturulan yüzeye tıklandığında 'Surface List' kısmında 'Surface 1' görülecektir. Hemen altında görünen 'Automatic Calculation' seçeneği tercihe göre değişmektedir. Eleman sıklığını ifade eder. Bu çalışmada bu seçenek kullanılacaktır. Sonrasında 'Apply' yapıldığında geometrik yüzey yapısının sonlu elemanlar modeliyle elemanlara ayrıldığı görülecektir. Bu anlatılan işlemler ve sonucu Şekil 6.4'teki ekran görüntüsünde görülmektedir.

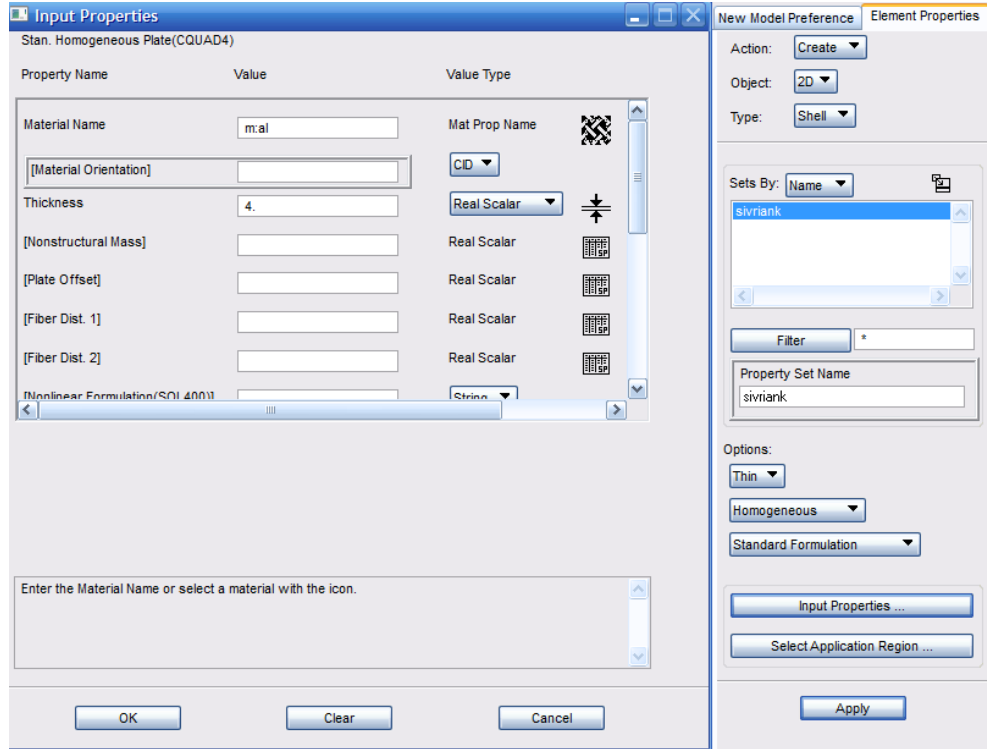
Sonlu elemanlara ayırma(mesh atma) işlemi kompleks yapılar için zor bir işlemdir. Eleman yapısı şekle göre değişmektedir. Fakat ankastre kiriş ve sivriltilmiş ankastre kiriş gibi yapılar için bu işlem daha kolaydır, bunun sebebi yapının yüzeyinin karmaşık bir şekil olmamasıdır. Eleman sıklığını arttırmak analiz sonucunun hassasiyetini artırır. Fakat bu işlemi yapmak analiz süresini uzatır. Bu süre bilgisayarın işlemci özelliklerine göre değişmektedir. Fakat bu tarz kiriş yapılarda analiz süresinin fazla sürmemesi beklenir. Bu işlemler sonucunda 'Automatic Calculation' seçeneği ile 76 eleman ve 101 nokta olduğu görülür. Bu elemanların yetersiz olduğu düşünülüp 'Value' kısmına 10 yazıldığında böylelikle 2000 eleman ve 2122 nokta olduğu görülür.



Şekil 6.4: Sonlu elemanlara ayırma

6.4 Elemana Özellik Atanması

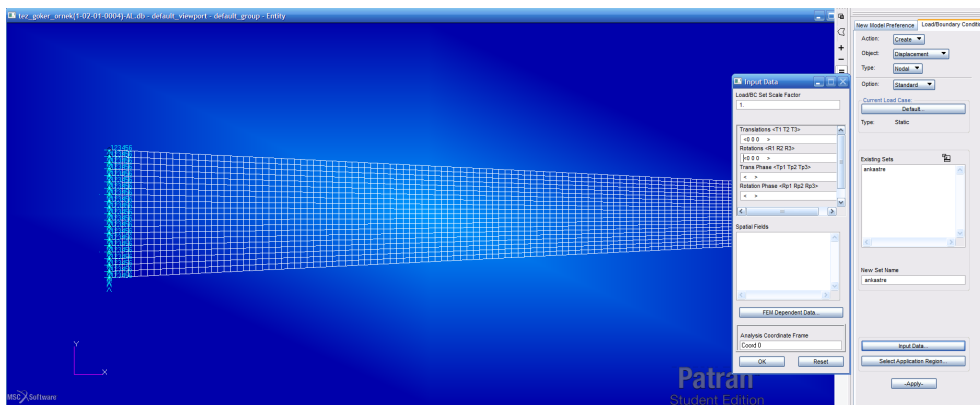
Bu bölümdeki amaç tanımlanan malzemeyi yapısal elemana tanımlamaktır. Yukarıdan ‘Properties’ kısmına girilir. Burada sırasıyla ‘Create-2D-Shell’ seçili olmalıdır. Hemen aşağısındaki ‘Property Set Name’ kısmı adlandırılır. Sonrasında ‘Input Properties’ kısmına tıklanır. Burada ‘Material Name’ kısmında sağa tıklanır ve alüminyum seçilir. Sonrasında ‘Thickness’ yani kalınlık 4 olarak girilir. Kalınlık değişmediği için tapered(sivrilik) formülü tanımlanmasına gerek yoktur. Sonra ‘OK’ sekmesine basılıp çıkılır. Son işlem olarak ‘Select Application Region’ tıklanır ve Surface 1 seçilip eklenir. Son olarak ‘Apply’ yapıldığında elemana özellik atanmış olur. Ekran görüntüsü Şekil 6.5’te verilmiştir.



Şekil 6.5: Elemana özellik atanması

6.5 Sınır Şartlarının Uygulanması

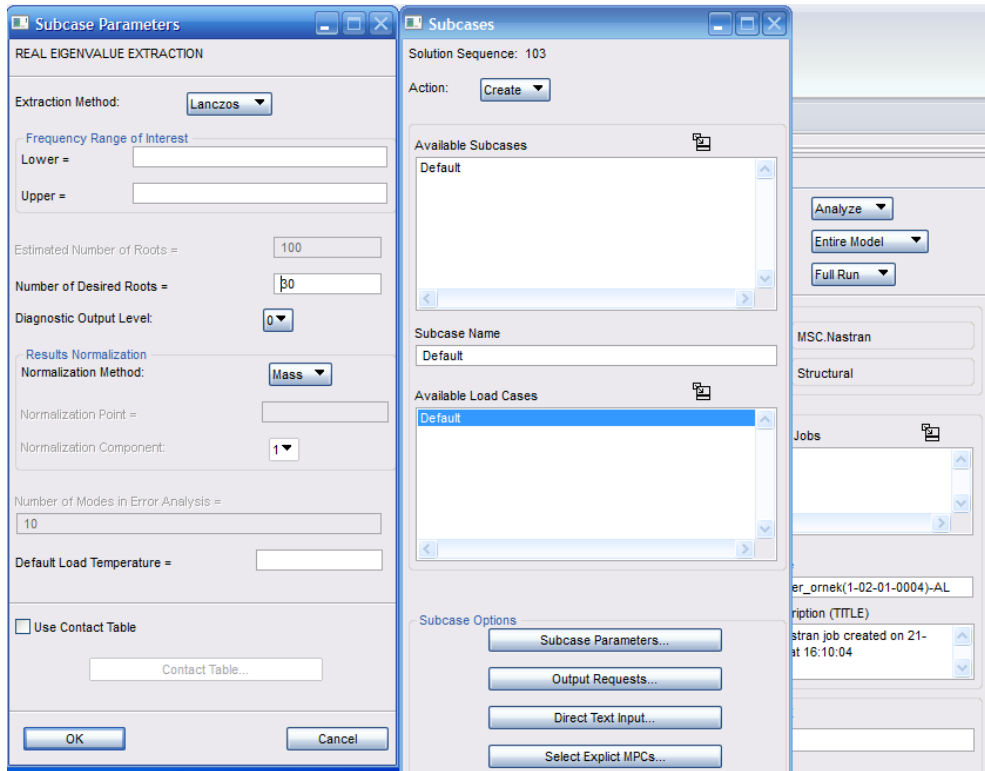
Sivriltilmiş ankastre kirişin sınır şartlarından önceki bölümlerde bahsedilmişti. Basit olarak yine bahsedilmesi gerekirse, ankastre(clamped) kısmında alınan kenarın 3 dönme ve 3 öteleme yani 6 serbestlik derecesi sabitlenmelidir. Aslında bu olay o kenardaki tüm elemanlar için geçerlidir. Yani eleman sayısını 6 ile çarpıldığında çıkan sonuç kadar serbestlik derecesi sabitlenmelidir. Yukarıdan ‘Loads/BCs’ kısmına tıklanır, bu bölüm dış etkilerin ve sınır şartlarının uygulandığı bölümdür. Bu analiz çalışmasında serbest titreşim frekansı arandığı için herhangi bir dış etki olmayacaktır. Sırasıyla ‘Create-Displacement-Nodal’ seçilir ve ‘New Set Name’ kısmına isim verilir. Sonra ‘Input Data’ kısmına tıklanır. Açılan pencerede Şekil 6.6’daki ekran görüntüsünde de görüldüğü gibi öteleme yani ‘Translations’ kısmına ve dönme yani ‘Rotations’ kısmına $\langle 0 \ 0 \ 0 \rangle$ girilir. Bu işlemlerden sonra ‘OK’ basılıp çıkılır ve ‘Select Application Region’ sekmesine tıklanır. Yukarıdaki seçenekte ‘FEM’ yani Finite Element Method seçilir. Bunun yapılma amacı kenar üzerindeki her noktanın aktif olarak seçilebilmesidir. Bu yolla beraber sınır şartları doğru bir şekilde tanımlanabilecektir. Ankastre kenardaki tüm noktaları seçtikten sonra ‘Apply’ yapılır. Eğer işlem doğru uygulanabilmişse ankastre kenardaki tüm elemanlar 6 dereceden sabitlenmiştir ve yanlarında 123456 yazmaktadır.



Şekil 6.6: Sınır şartlarının uygulanması

6.6 Analiz Yapılması

Analizden önceki son aşamadır. Yukarıdan ‘Analysis’ sekmesi tıklanır. Sırasıyla ‘Analyze-Entire Model-Full Run’ seçili olmalıdır. Aşağıdaki kısımda ‘Job Name’ ve ‘Job Description’ Patran tarafından otomatik doldurulur. Analiz türünün belirlenmesi için ‘Solution Type’ sekmesi tıklanır. Bu çalışmada sivriltilmiş ankastre kirişin doğal titreşim frekansı arandığı için açılan pencerede ‘Normal Modes’ sekmesinin tıklanması yeterlidir. Bu analiz türünün Nastran üzerindeki çözüm kodu SOL 103’tür. Eğer titreşim frekanslarının yanında kirişin yer değiştirme, gerilme gibi statik hesaplamaları da istenirse kodu SOL 101 olan ‘Linear Static’ sekmesinin seçilmesi gerekirdi. Şekil 6.7 analiz yaptırma aşamasını göstermektedir.



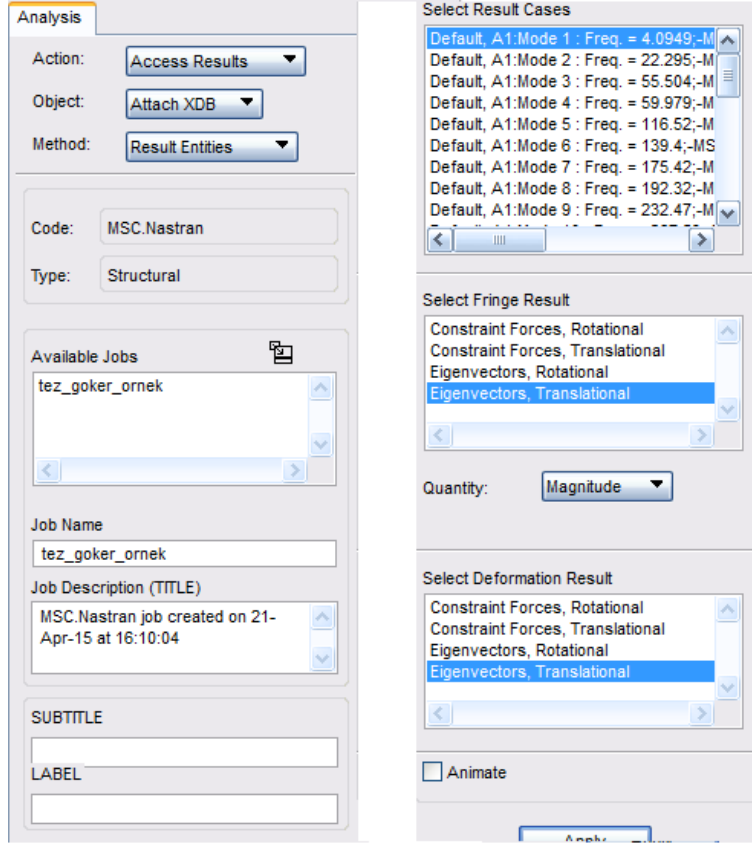
Şekil 6.7: Analiz yaptırma

İstenilen analiz ile ilgili parametrik detaylar istenirse ‘Solution Parameters’ üzerinden düzenlenebilir. Doğal frekans hesabı için Nastran normal olarak 10 tane kök hesaplar, çalışmada bu değer 30 yapıp daha fazla moda ulaşılmaya çalışılır. Bu işlem için sırasıyla ‘Subcase-Subcase Parameters’ girilir ve ‘Number of Desired Roots’ kısmına 30 yazılır. Sonrasında ‘Apply’ yapılır. Devamında yine ‘Apply’ yapılarak analiz

başlatılır. Patran bilgileri Nastran'a gönderir ve maksimum 2 dakika içinde bip sesinden sonra analiz tamamlanır.

6.7 Sonuçların Alınması

Nastran analizi tamamlanmıştır, ama Patran'a çağırılması gerekir. Bulunan sonuçların Patran'da görsel bir şekilde incelenmesi ve sonuçların çağırılması için yine 'Analysis' sekmesi içinden sırasıyla 'Access Results-Attach XDB-Result Entities' seçilmelidir. Sonrasında 'Select Results File' sekmesine tıklanır ve çalışılan dosyanın içinde Nastran'ın oluşturduğu xdb uzantılı veri dosyası seçilir. Ardından 'Apply' yapıldığında sonuçlar Patran'a çağırılmış olur. Yukarıdan 'Results' sekmesine tıklanarak sonuçlara ulaşılabilir(Şekil 6.8).

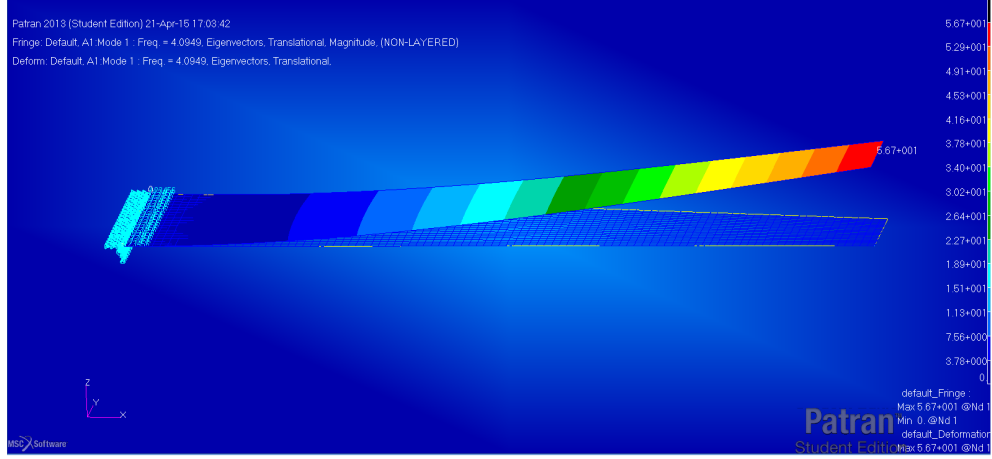


Şekil 6.8: Sonuçların alınması ve incelenmesi

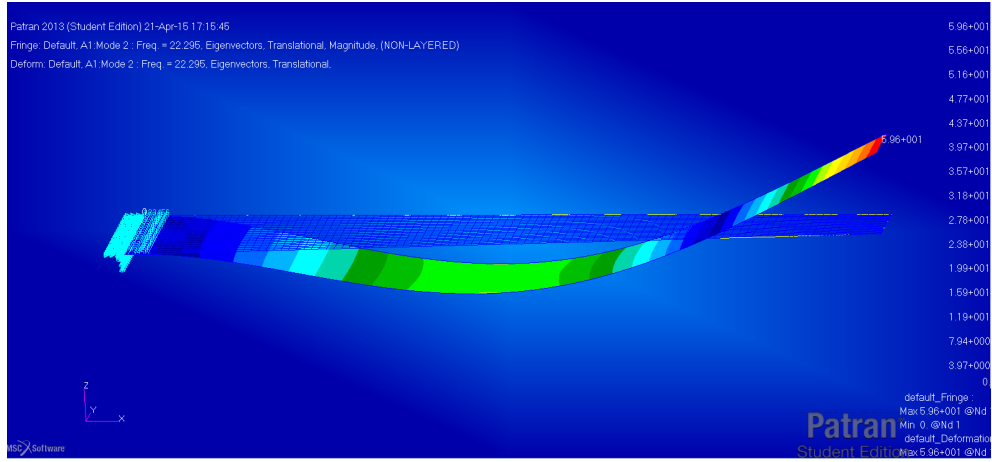
Buradan sonuçlar, animasyon veya sabit bir şekilde gözlemlenebilir. Görmek istenilen doğal frekans modu seçilip ardından alttaki her iki seçenekte de 'Eigenvectors, Translational' seçilir.

6.8 Elde Edilen Frekans Değerlerinin İncelenmesi

Eğilmeden kaynaklanan açısal doğal frekansın ilk 8 mod şekilleri, değerleri ve serbest uçtaki yer değişimleri alınan sonuçlardan ortaya çıkan ekran görüntülerinde(Şekil 6.9, Şekil 6.10, Şekil 6.11, Şekil 6.12, Şekil 6.13, Şekil 6.14, Şekil 6.15, Şekil 6.16) görülmektedir.

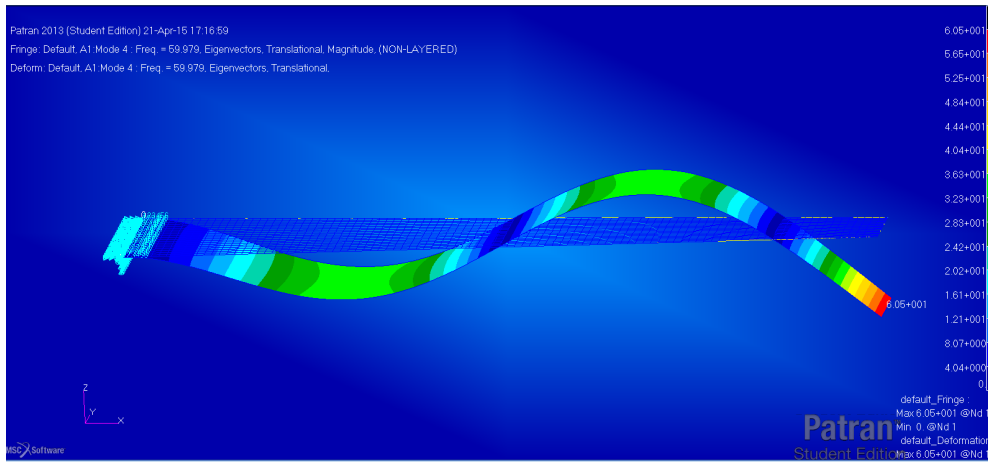


Şekil 6.9: 1.Mod

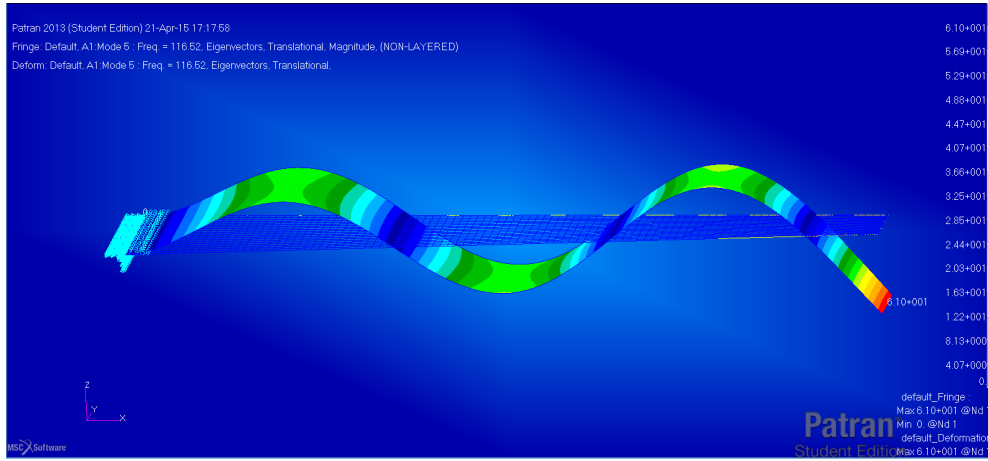


Şekil 6.10: 2.Mod

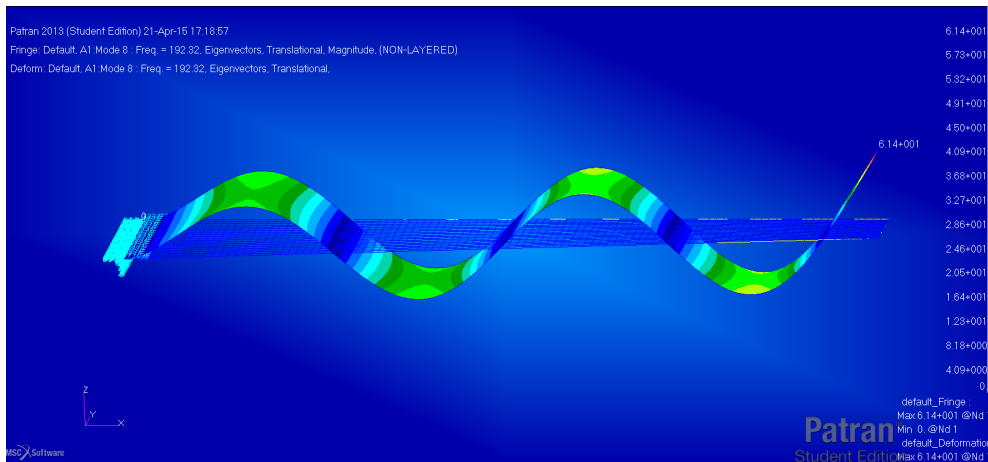
Sol üstte yazan değerler açısal doğal frekansı vermektedir. Serbest ucta titreşim hareketinin sonunda yazan değerler ise milimetre(mm) cinsinden yer değiştirmedir. Görseelliği zenginleştirmek adına animasyonlar yapılabilir ve ekstra başka değerler üzerine eklenebilir. Bu çalışma için bu veriler yeterlidir. Tez çalışmasının sonuçlar kısmında bu tarz analizlerle elde edilen bulgular kiriş teorileri ile detaylı bir şekilde karşılaştırılacaktır.



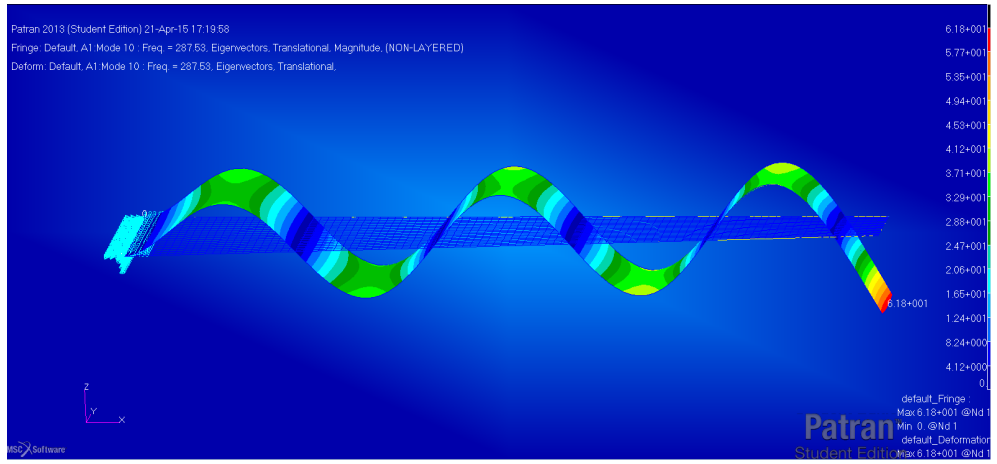
Şekil 6.11: 3.Mod



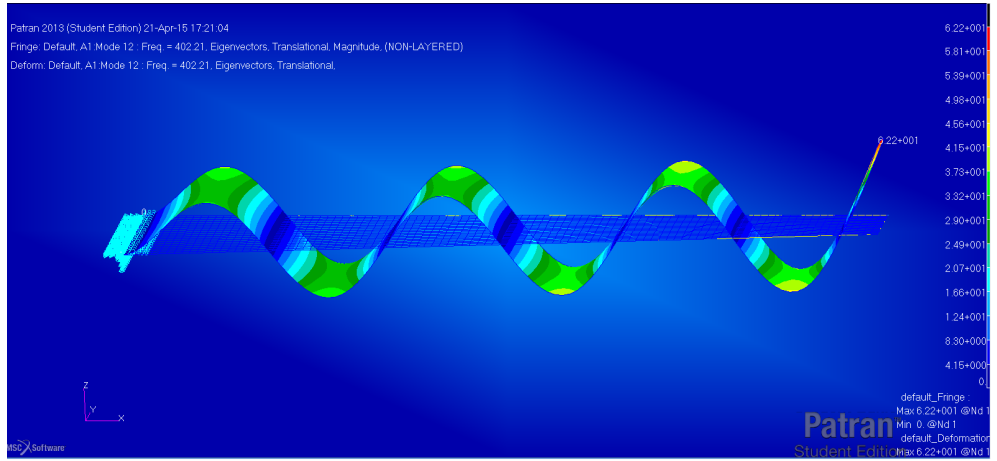
Şekil 6.12: 4.Mod



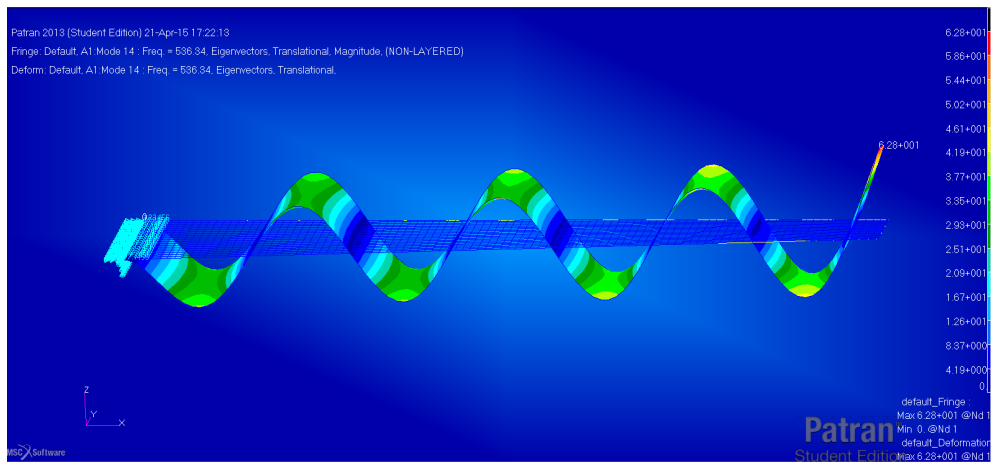
Şekil 6.13: 5.Mod



Şekil 6.14: 6.Mod



Şekil 6.15: 7.Mod



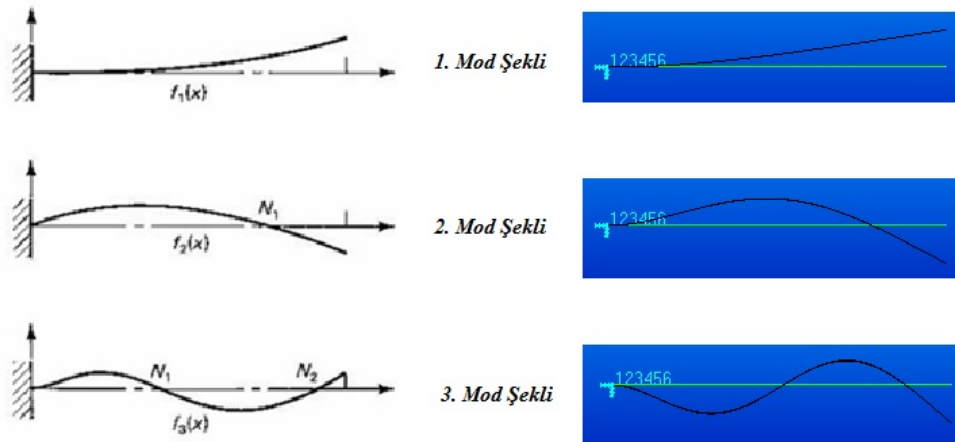
Şekil 6.16: 8.Mod

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölüm çalışmada anlatılan yöntemlerden elde edilen sonuçların literatürle ve çalışmayla karşılaştırılmalarının olduğu bölümdür. Elde edilen karşılaştırmalarda elde edilen grafiklerle ve hata oranlarıyla ilgili yorumlar yapılacaktır. Sonuçlar bölümü mod şekillerinin karşılaştırılması, düz ankastre kiriş ve sivriltilmiş ankastre kiriş olarak üçe ayrılacaktır. Düz ankastre kiriş ve sivriltilmiş ankastre kiriş bölümü ise literatür karşılaştırmaları ve tez çalışması karşılaştırmaları olarak ikiye ayrılacaktır.

7.1 Mod Şekillerinin Karşılaştırılması

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde düz ankastre kirişin eğilmeden kaynaklanan doğal frekansının hesaplanması bölümünde Şekil 3.8’de ilk üç mod şeklinin teorik görüntüsü verilmiştir. MSC/Patran ile analiz yapılması anlatılmıştı ve sivriltilmiş ankastre kiriş için ilk sekiz mod görüntüsü verilmiştir. Yine aynı programda yapılan düz ankastre kiriş analizinde ‘Results’ kısmı içinde kullanılan ‘Mode Shape Generator’ programı yardımıyla mod şekilleri çizdirilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 7.1’de teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Mod şekillerinin neredeyse birbirleri ile aynı olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 7.1: Mod şekillerinin karşılaştırılması

7.2 Düz Ankastre Kiriş İçin Literatür Sonuçlarının Karşılaştırılması

Bundan sonraki bölümlerde yazarken kolaylık olması açısından Euler-Bernoulli kiriş teorisi(EB), Shear kiriş teorisi(Sh) ve Nastran analiz sonuçları(Ns) olarak gösterilecektir. Timoshenko kiriş teorisinin en genel hatlarıyla olan çözümü T1 ve çalışmada anlatılan özel matrislerle çözümü T2 olarak adlandırılacaktır.

7.2.1 Birinci referans çalışma

Bu referans çalışmada Euler-Bernoulli ve Shear(Kayma) kiriş teorileri için genel formüller verilip açısal doğal frekans hesabı gösterilmiştir. Kiriş teorilerinin farklarından basitçe bahsedilmiş ve iki farklı kiriş ve iki farklı uzunluk değerleri için Euler-Bernoulli, Shear ve SEY analizi yapıp sonuçlar karşılaştırılmıştır [2]. Çalışmada kullanılan malzemenin özellikleri Çizelge 7.1’de verilmiştir. Çizelge 7.2’de ise kullanılacak kiriş parametreleri verilmiştir. Bu kirişler için karşılaştırma tabloları(Çizelge 7.3, Çizelge 7.4, Çizelge 7.5, Çizelge 7.6) ve grafikler(Şekil 7.2, Şekil 7.3, Şekil 7.4, Şekil 7.5, Şekil 7.6, Şekil 7.7, Şekil 7.8, Şekil 7.9, Şekil 7.10) verilmiştir.

Çizelge 7.1: Birinci çalışmada kullanılan malzeme

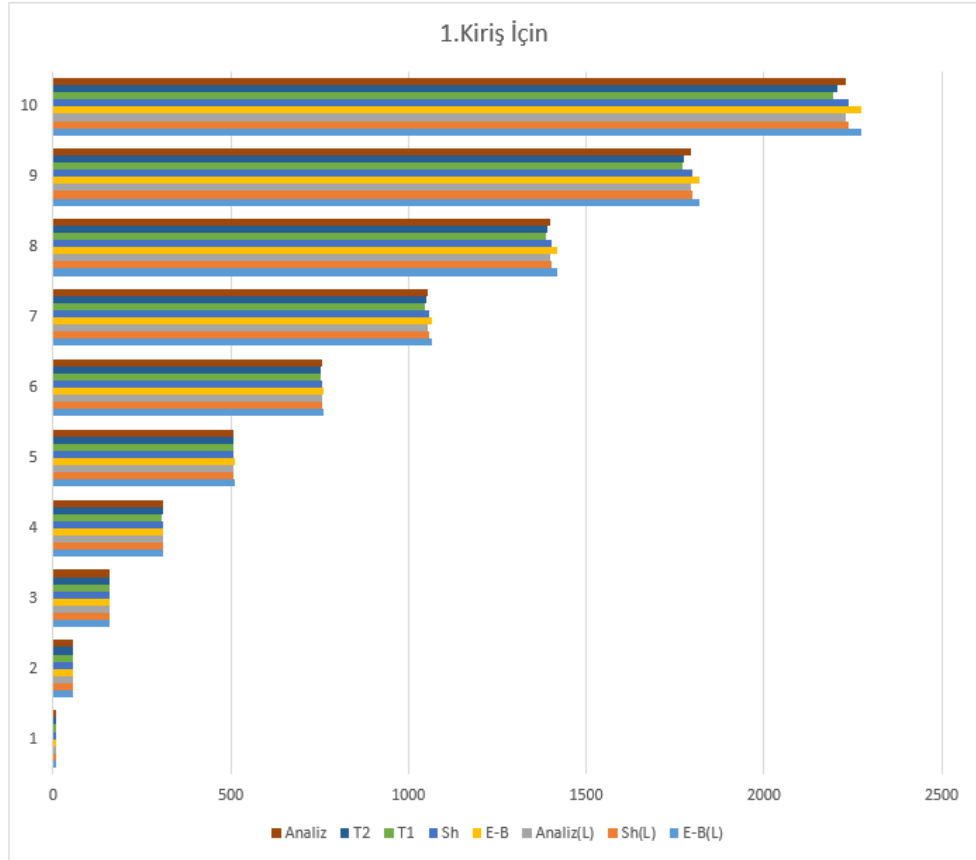
Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	200 GPa
Poisson Oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	7850 kg/m^3

Çizelge 7.2: Kullanılacak kiriş parametreleri

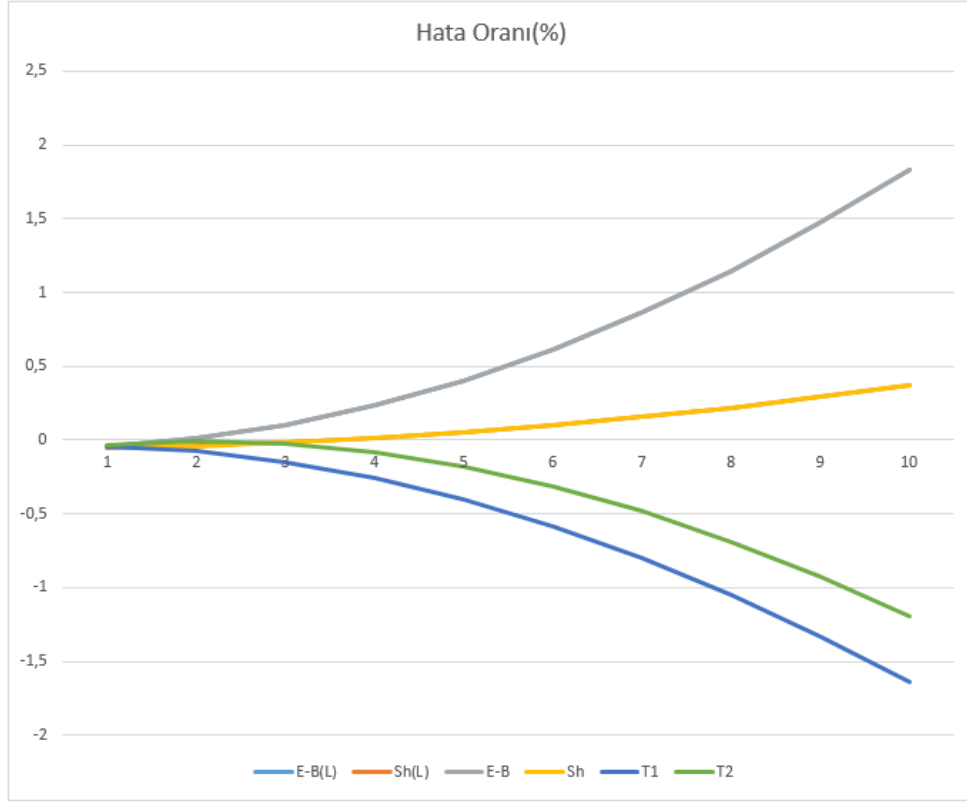
Kiriş No	Kesit Alanı	Uzunluk	h/L
1	11*11 mm^2	1000 mm	0.011
2	11*11 mm^2	2000 mm	0.0055
3	20*20 mm^2	1000 mm	0.02
4	20*20 mm^2	2000 mm	0.01

Çizelge 7.3: Bir numaralı kiriş($h/L=0.011$)

<i>Mod</i>	<i>E-B</i> [2]	<i>Sh</i> [2]	<i>SEY</i> [2]	<i>E-B</i>	<i>Sh</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>Analiz</i>
1	8.9692	8.968545	8.9732	8.969	8.969	8.969	8.97	8.9704
2	56.2089	56.18085	56.2022	56.209	56.18	56.16	56.2	56.185
3	157.3866	157.1993	157.2254	157.387	157.2	156.99	157.19	157.18
4	308.4151	307.7373	307.6937	308.415	307.74	306.9	307.45	307.61
5	509.8321	508.0472	507.7750	509.832	508.05	505.73	506.88	507.66
6	761.6010	757.7169	756.9489	761.601	757.72	752.51	754.6	756.81
7	1063.7236	1056.289	1054.6291	1063.72	1056.3	1046.2	1049.6	1054.5
8	1416.2001	1403.222	1400.1276	1416.2	1403.2	1385.4	1390.5	1400.1
9	1819.0305	1797.895	1792.6637	1819.03	1797.9	1768.8	1776.1	1792.7
10	2272.2144	2239.613	2231.3720	2272.2	2239.6	2194.8	2204.8	2231.7



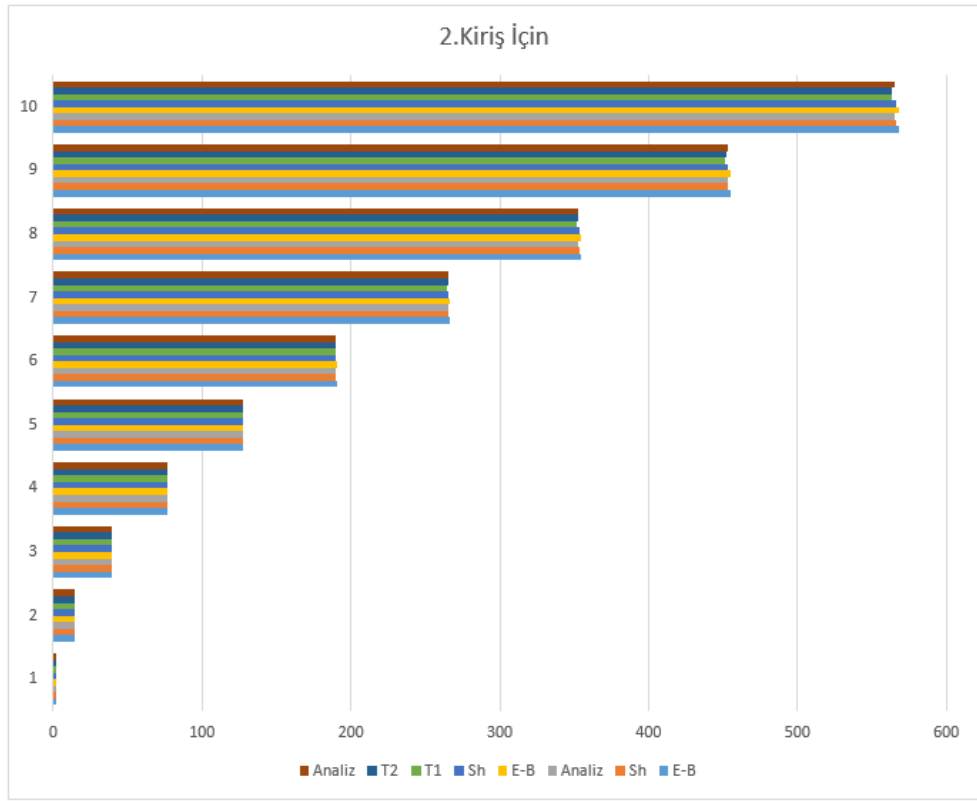
Şekil 7.2: Bir numaralı kiriş($h/L=0.011$)



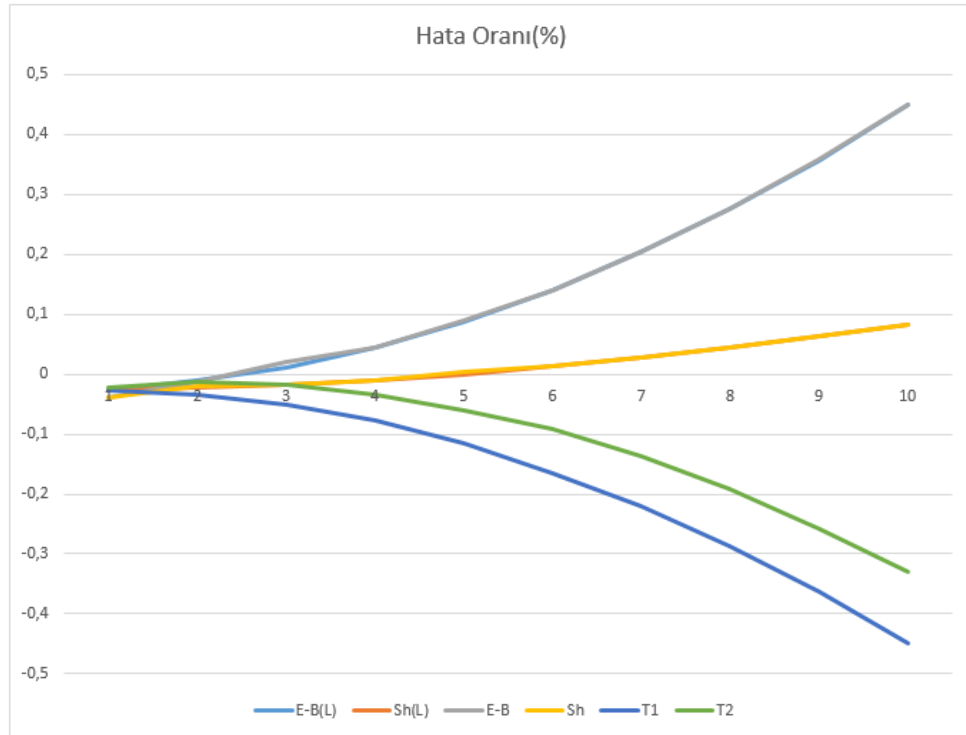
Şekil 7.3: Hata oranı(h/L=0.011)

Çizelge 7.4: İki numaralı giriş(h/L=0.0055)

Mod	E-B [2]	Sh [2]	SEY [2]	E-B	Sh	T1	T2	Analiz
1	2.2423	2.2423	2.2429	2.242	2.242	2.2423	2.2424	2.243
2	14.0522	14.0505	14.0537	14.052	14.051	14.049	14.052	14.05
3	39.3467	39.3349	39.3419	39.35	39.335	39.322	39.335	39.3
4	77.1038	77.0613	77.0689	77.104	77.06	77.01	77.043	77.05
5	127.4580	127.3460	127.3459	127.46	127.35	127.2	127.27	127.33
6	190.4003	190.1561	190.1326	190.4	190.16	189.82	189.96	190.12
7	265.9309	265.4626	265.3913	265.931	265.463	264.81	265.03	265.4
8	354.0500	353.2304	353.0768	354.05	353.23	352.06	352.4	353.07
9	454.7576	453.4192	453.1366	454.76	453.42	451.49	451.97	453.2
10	568.0536	565.9827	565.5116	568.054	565.983	562.97	563.64	565.3



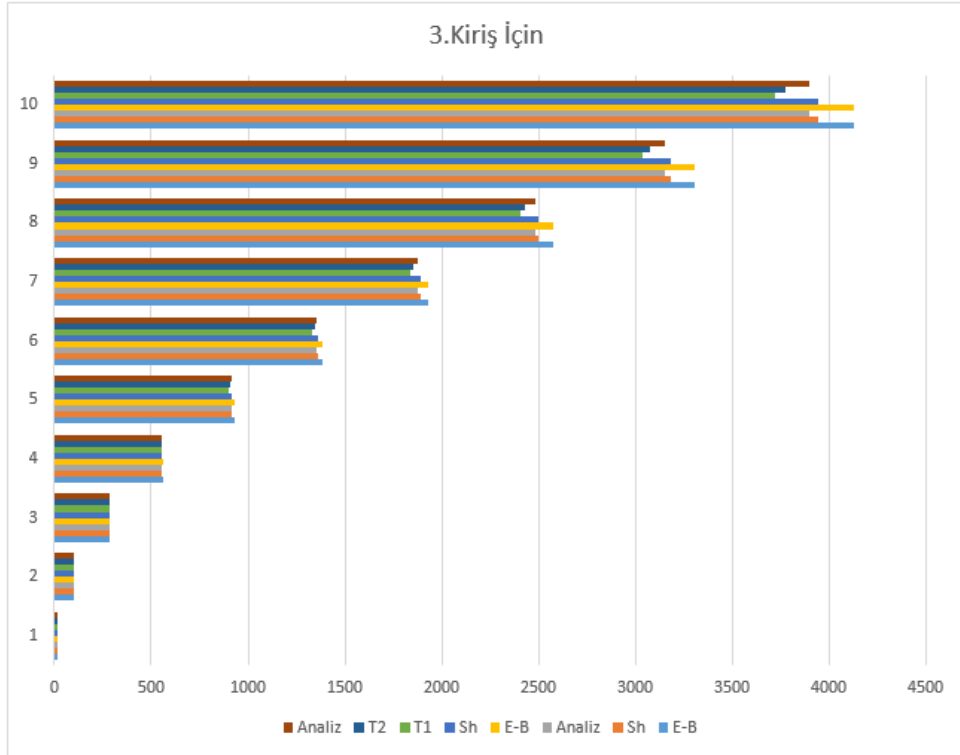
Şekil 7.4: İki numaralı kiriş($h/L=0.0055$)



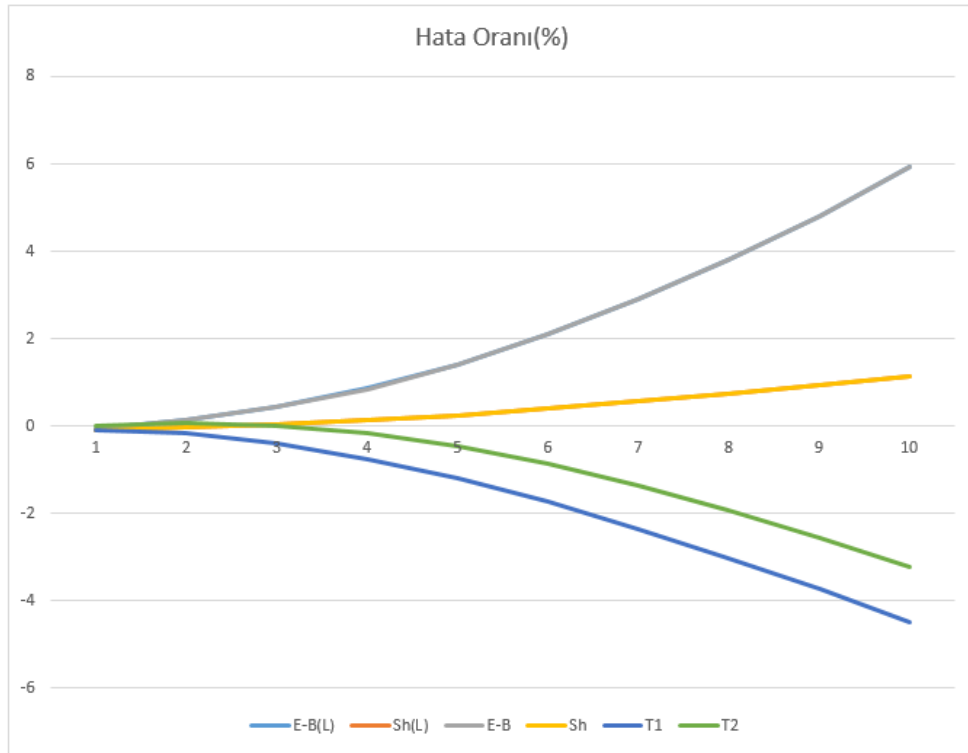
Şekil 7.5: Hata oranı($h/L=0.0055$)

Çizelge 7.5: Üç numaralı kiriş(h/L=0.02)

<i>Mod</i>	<i>E-B</i> [2]	<i>Sh</i> [2]	<i>SEY</i> [2]	<i>E-B</i>	<i>Sh</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>Analiz</i>
1	16.3076	16.3037	16.3177	16.308	16.304	16.303	16.316	16.31
2	102.1980	102.0295	102.0711	102.2	102.03	101.9	102.15	102.1
3	286.1575	285.0361	284.9526	286.16	285.04	283.81	285	285.02
4	560.7546	556.7118	555.9972	560.75	556.71	551.86	555.1	556.2
5	926.9675	916.3669	914.0544	926.97	916.37	903.15	909.8	914.05
6	1384.7290	1361.7871	1356.3613	1384.73	1361.79	1332.8	1344.5	1356.4
7	1934.0429	1890.4078	1879.7603	1934.04	1890.41	1835.6	1854	1879.3
8	2574.9093	2499.2880	2480.7140	2574.91	2499.29	2405.7	2432.6	2480.5
9	3307.3281	3185.1729	3155.4053	3307.33	3185.17	3037.4	3074.4	3155.3
10	4131.2989	3944.5528	3899.8297	4131.3	3944.55	3725	3773.7	3899.9



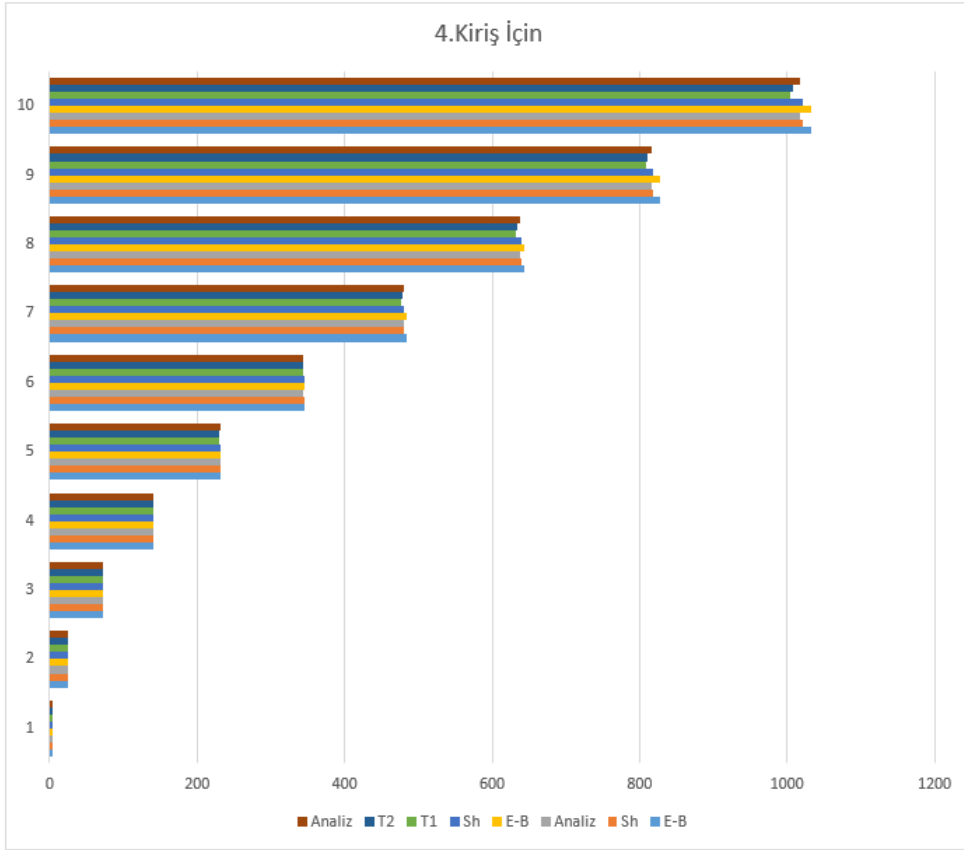
Şekil 7.6: Üç numaralı kiriş(h/L=0.02)



Şekil 7.7: Hata oranı(h/L=0.02)

Çizelge 7.6: Dört numaralı kiriş(h/L=0.01)

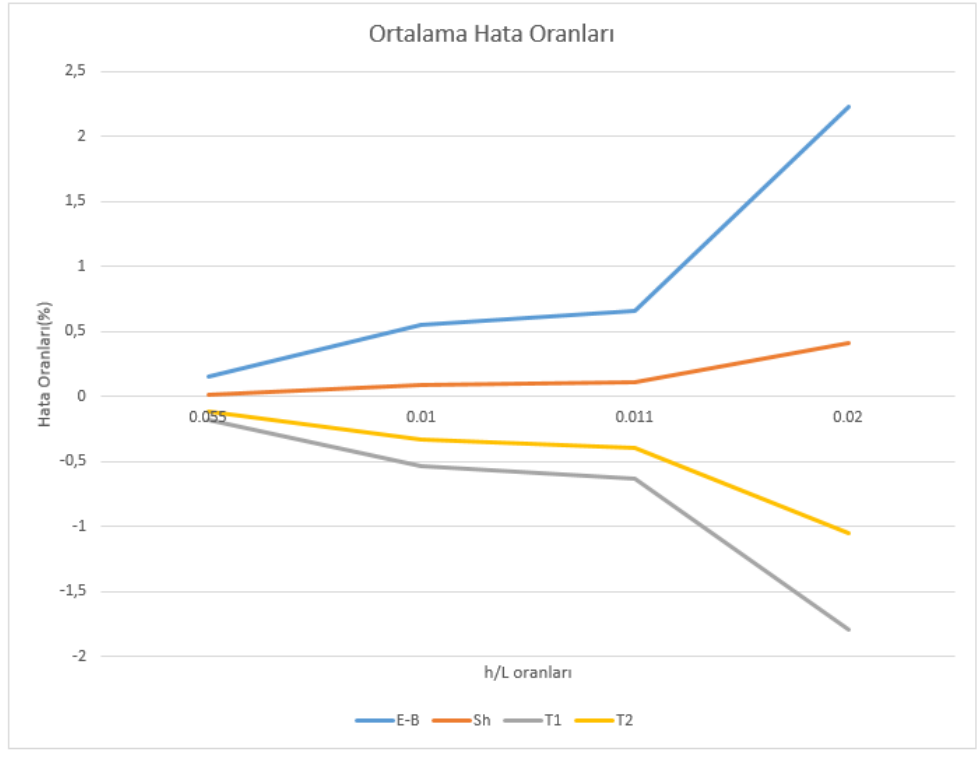
Mod	E-B [2]	Sh [2]	SEY [2]	E-B	Sh	T1	T2	Analiz
1	4.0769	4.0767	4.0785	4.077	4.0767	4.077	4.077	4.078
2	25.5495	25.5390	25.5476	25.55	25.24	25.53	25.55	25.51
3	71.5394	71.4690	71.4804	71.54	71.47	71.39	71.47	71.4
4	140.1887	139.9339	139.9205	140.19	139.934	139.62	139.83	139.7
5	231.7419	231.0707	230.9729	231.74	231.071	230.2	230.63	230.8
6	346.1823	344.7212	344.4382	346.18	344.72	342.75	343.54	344.4
7	483.5107	480.7128	480.0944	483.51	480.71	476.87	478.16	480.1
8	643.7273	638.8402	637.6797	643.73	638.84	632.06	634.01	637.5
9	826.8320	818.8682	816.8962	826.83	818.87	807.78	810.6	816.9
10	1032.824	1020.532	1017.4118	1032.82	1020.53	1003.4	1007.3	1017.6



Şekil 7.8: Dört numaralı kiriş($h/L=0.01$)



Şekil 7.9: Hata oranı($h/L=0.01$)



Şekil 7.10: Hata oranları ortalaması

Literatürde kiriş teorileri adı altında yapılan çalışmalarda genellikle bir ince bir kalın kiriş seçilip karşılaştırma yapılmıştır. Referans çalışmada dört tane ince kiriş seçilmiştir. Referans çalışmadaki [2] Euler-Bernoulli ve Shear kiriş teorilerinin açısal doğal frekans hesabı tez çalışmasındaki yöntemle aynı olduğundan sonuçlar birebir aynı çıkmıştır. Referans çalışmadaki analizle tez çalışmasındaki analiz arasındaki ufak farklar, çözüm ağı(mesh) sıklığıyla alakalıdır. Referans çalışmaya ek olarak iki farklı Timoshenko kiriş teorisi hesabı yapılmıştır. Bu hesaplamaların diğer kiriş teorilerine göre daha iyi sonuç vermesi beklenmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi h/L oranı azaldıkça daha iyi sonuç vermekle beraber kalın kirişlerde kullanılması tavsiye edilmemektedir. Bu tarz ince kirişlerde bütün kiriş teorilerinin yaklaşık olarak doğru cevabı verebildiği gözlenmiştir. Hata oranları ihmal edilebilecek düzeydedir.

7.2.2 İkinci referans çalışma

Bu referans çalışmada Timoshenko kiriş teorisi genel titreşim denklemleri çıkarılıp, boyutsuzlaştırmaları yapıp çözüm şekli anlatılmıştır. Bu çalışmadaki çözüm yöntemi aynı zamanda tez çalışmasında kullanılan T1 ve T2 çözümleriyle aynıdır. Makalede kullanılan kiriş parametreleri ve malzemelerin özellikleri aşağıda belirtilmiştir. S

ile belirtilen kısım Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir. Referans çalışmada dikdörtgen kesitli kiriş için doğal frekans hesabı yapılmıştır [1]. Çalışmada kullanılan malzemenin özellikleri Çizelge 7.7'de verilmiştir. Çizelge 7.8'de ise kullanılacak kiriş parametreleri verilmiştir. Bu kirişler için karşılaştırma tabloları(Çizelge 7.9, Çizelge 7.10) ve grafikler(Şekil 7.11, Şekil 7.12, Şekil 7.13, Şekil 7.14, Şekil 7.15) verilmiştir.

Çizelge 7.7: İkinci çalışmada kullanılan malzeme

Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	210 GPa
Poisson Oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	7860 kg/m^3

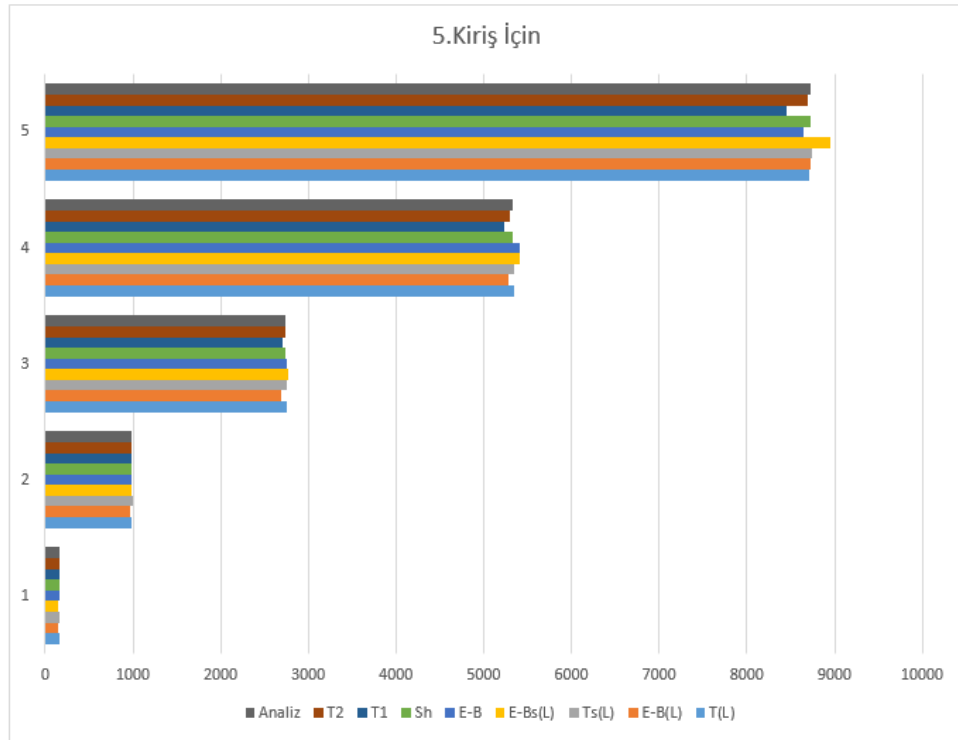
Çizelge 7.8: Kullanılacak kiriş parametreleri

Kiriş No	Kesit Alanı	Uzunluk	h/L
5	20*30 mm^2	1000 mm	0.03
6	20*80 mm^2	1000 mm	0.08

Çizelge 7.9: Beş numaralı kiriş($h/L=0.03$)

Mod	T [1]	$E-B$ [1]	T_s [1]	$E-B_s$ [1]	$E-B$	Sh	$T1$	$T2$	Analiz
1	157.6	153.6	159.2	154.7	157.4	157.3	157.3	157.6	157.4
2	987.7	962.6	993.5	986.5	986.4	982.7	979.6	985.2	983.2
3	2752.5	2695.3	2761.4	2762.8	2761.8	2737.6	2711.8	2737.1	2738.6
4	5344.2	5281.6	5350.0	5416.0	5412.1	5325.4	5226.0	5292.2	5326.3
5	8716.1	8730.9	8741.1	8957.4	8646.5	8721.1	8458.9	8690.8	8720.4

Elde edilen sonuçlar ve buna bağlı çıkarılan grafikler, h/L yani kalınlık oranı arttıkça Euler-Bernoulli kiriş teorisinde hata oranının arttığını göstermektedir. Timoshenko ve Shear kiriş teorileri için %2'ye bile ulaşmayan ortalama hata oranları elde edilmiştir. Bu iki teorenin hem ince hem de kalın kirişler için modellenmesi uygundur. Bunun yanında h/L oranı 0.08 olan düz ankastre kirişler için Euler-Bernoulli %8 gibi yüksek bir hata oranı sergilemiştir. Kalınlık oranı arttıkça bu oranın daha da artması beklenmektedir. Bu literatür karşılaştırmalarından yola çıkılarak bir sonraki bölümde daha kalın bir kiriş için kiriş teorileri ve analiz karşılaştırmaları yapılacaktır.



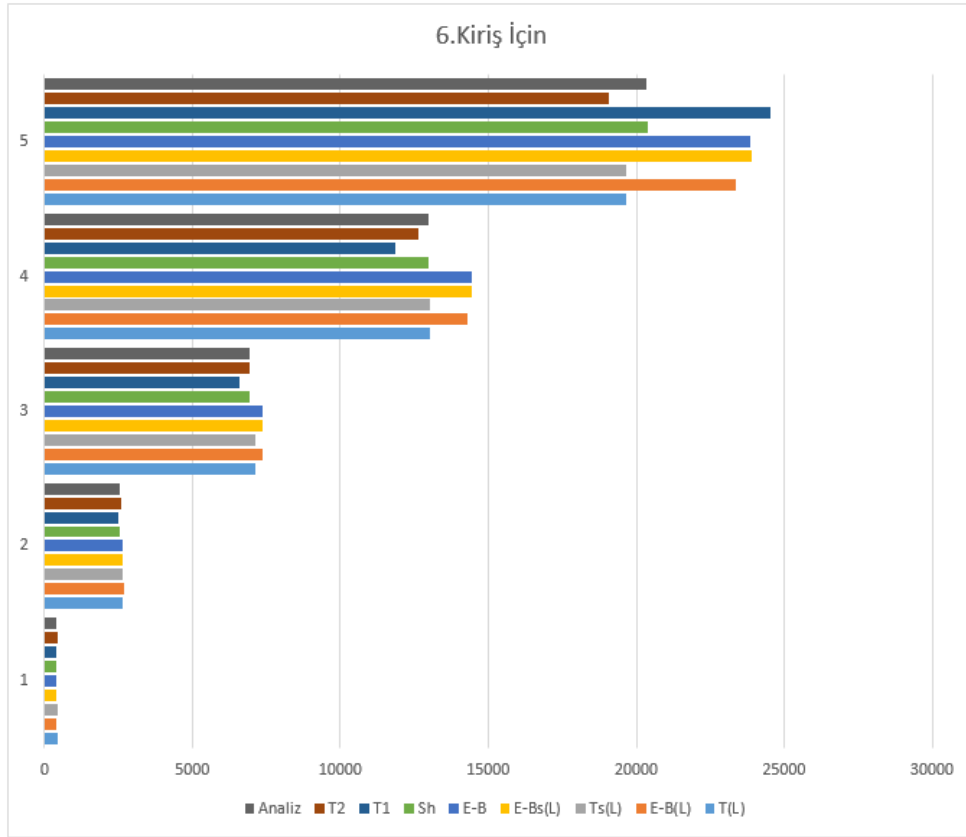
Şekil 7.11: Beş numaralı kiriş($h/L=0.03$)



Şekil 7.12: Hata oranı($h/L=0.03$)

Çizelge 7.10: Altı numaralı kiriş($h/L=0.08$)

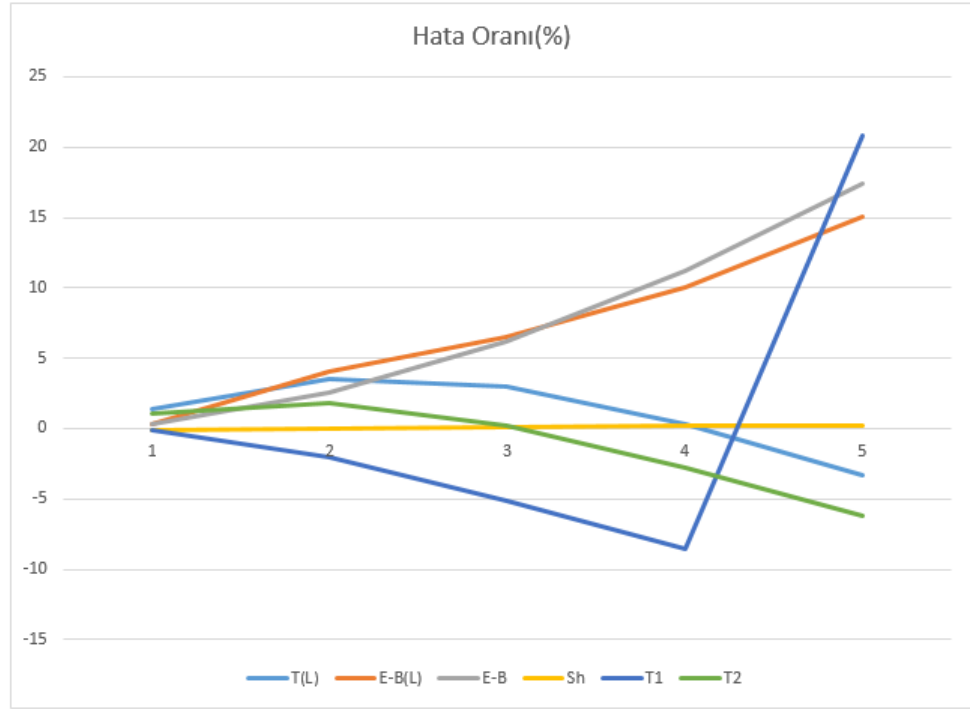
<i>Mod</i>	<i>T</i> [1]	<i>E-B</i> [1]	<i>Ts</i> [1]	<i>E-Bs</i> [1]	<i>E-B</i>	<i>Sh</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>Analiz</i>
1	424.1	419.6	424.1	419.3	419.7	418.1	418	423	418.4
2	2653.7	2666.8	2656.8	2630.6	2630.3	2563.2	2510.9	2610.2	2563.4
3	7145.3	7387.3	7148.1	7367.6	7364.8	6940.3	6578.8	6948.8	6935.4
4	13016	14284	13024	14443	14432.1	12997.8	11861.6	12611.2	12977.3
5	19645	23383	19653	23886	23857.4	20375.1	24549.2	19055.1	20323.6



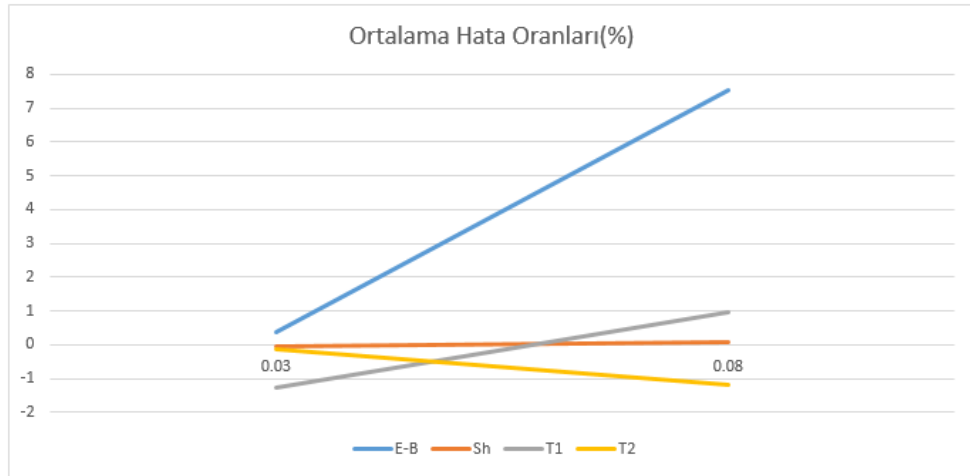
Şekil 7.13: Altı numaralı kiriş($h/L=0.08$)

7.3 Düz Ankastre Kiriş İçin Tez Çalışması Sonuçlarının Karşılaştırılması

Literatür çalışmalarını genişletmek ve daha kalın bir kiriş için sonuçlar elde etme amacıyla bu çalışmalar için ek olarak h/L oranı 0.1 olan dikdörtgen kesitli ankastre kiriş seçilmiştir. Bu kirişin genişliği 20 mm, kalınlığı 100 mm ve uzunluğu 1 m olarak belirlenmiştir. Malzeme özelliği ise bir önceki literatür çalışmasıyla aynı olup özellikleri Çizelge 7.7’de belirtilmiştir. Bu kirişler için karşılaştırma tablosu(Çizelge 7.11) ve grafikler(Şekil 7.16, Şekil 7.17) verilmiştir.



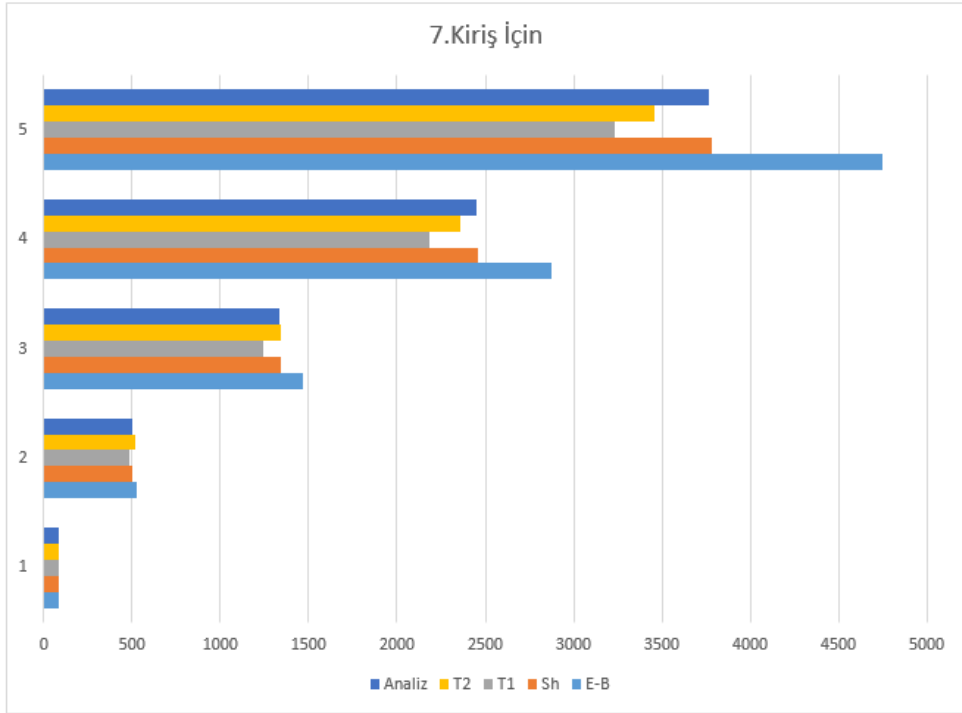
Şekil 7.14: Hata oranı(h/L=0.08)



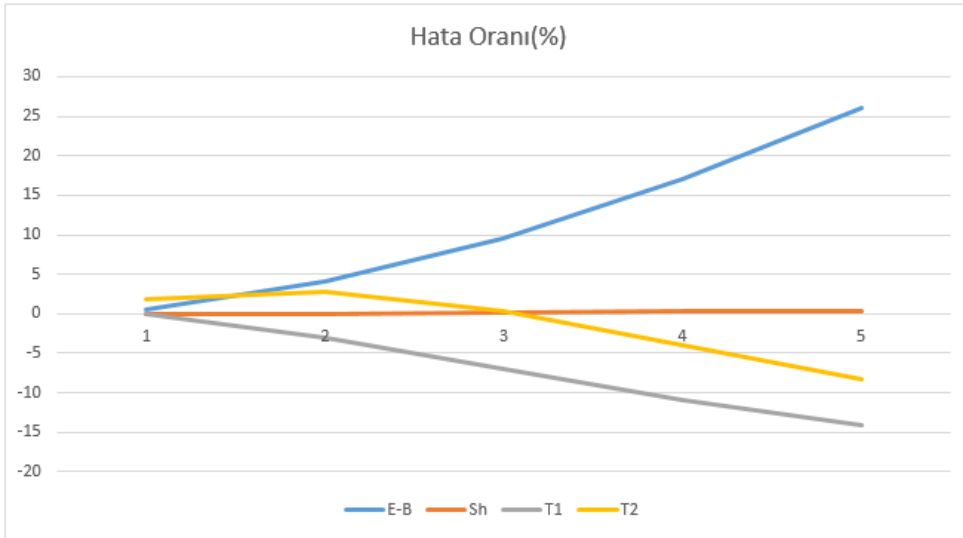
Şekil 7.15: Hata oranları ortalaması 2

Çizelge 7.11: Yedi numaralı kiriş(h/L=0.1)

Mod	E-B	Sh	T1	T2	Analiz
1	83.495	83.0076	82.9755	84.5318	83.05
2	523.276	502.859	487.748	517.07	502.74
3	1465.19	1339.28	1244.16	1341.62	1337.6
4	2871.18	2459.21	2184.27	2355.61	2453.3
5	4746.27	3778.97	3234.13	3453.99	3765.6



Şekil 7.16: Yedi numaralı kiriş(h/L=0.1)



Şekil 7.17: Hata oranı(h/L=0.1)

Kalınlık oranı(h/L) 0.1 olan kiriş için hata oranları yukarıda verilmiştir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi(E-B) 5.modta %25'in üstünde hata oranı vermektedir. Bunun yanında Timoshenko kiriş teorisi genel çözümü(T1) de 5.modta yaklaşık %15 hata oranı vermektedir. Bu iki teorinin de kalın kirişler için uygulanması doğru değildir. Bunun yanında Shear kiriş teorisi(Sh) ve Timoshenko kiriş teorisi genel matris çözümü(T2) gerçeğe çok yakın cevaplar vermektedir. Bu iki teorinin de bu tarz

kirişler için uygulanması mantıklıdır. Düz ankastre girişler için yaptığımız literatür ve tez çalışması karşılaştırılmaları teori ile beklediğimiz sonuçlar vermektedir.

7.4 Sivriltilmiş Ankastre Giriş İçin Literatür Sonuçlarının Karşılaştırılması

7.4.1 Üçüncü referans çalışma

Bu referans çalışmada sivriltilmiş ankastre girişin sonlu eleman olarak modellenmesinden bahsedilmiş ve bu girişin Lagrange çarpanları formülleri yardımıyla açılal doğal frekansı hesaplanmıştır. Sonrasında bir deney düzeneği kurulmuş ve bu düzenek yardımıyla sistemin doğal titreşim frekansları bulunmuştur. Sonrasında deney düzeneği gerçek değer olarak alınmış ve hata oranları buna göre düzenlenmiştir [3]. Kullanılan girişin malzeme özellikleri, giriş parametreleri, buna bağlı olarak kullanılacak olan katsayılar hesaplanıp Çizelge 7.12 ve Çizelge 7.13'te verilmiştir. Lagrange çarpanları formülleri LÇF, deney sonuçları ise D ile gösterilmiştir. Şekil 7.18 ve Şekil 7.19'da karşılaştırma grafikleri gösterilmiştir. Çizelge 7.14'te karşılaştırma tablosu verilmiştir.

Çizelge 7.12: Üçüncü çalışmada kullanılan giriş parametreleri

Özellik	Değer
Uzunluk (L)	500 mm
İlk Genişlik (b_0)	75 mm
Son Genişlik (b)	20 mm
İlk Kalınlık (h_0)	5 mm
Son Kalınlık (h)	5 mm
Genişlik Sivrilik Oranı (c_b)	0.73333
Kalınlık Sivrilik Oranı (c_h)	0
Kalınlık-Uzunluk oranları (h/L ve h_0/L)	0.01-0.01
Yaklaşık E-B katsayısı(1.mod)	2.2964
Yaklaşık E-B katsayısı(2.mod)	5.0396
Yaklaşık E-B katsayısı(3.mod)	8.0884
Yaklaşık E-B katsayısı(4.mod)	11.1755
Yaklaşık E-B katsayısı(5.mod)	14.283

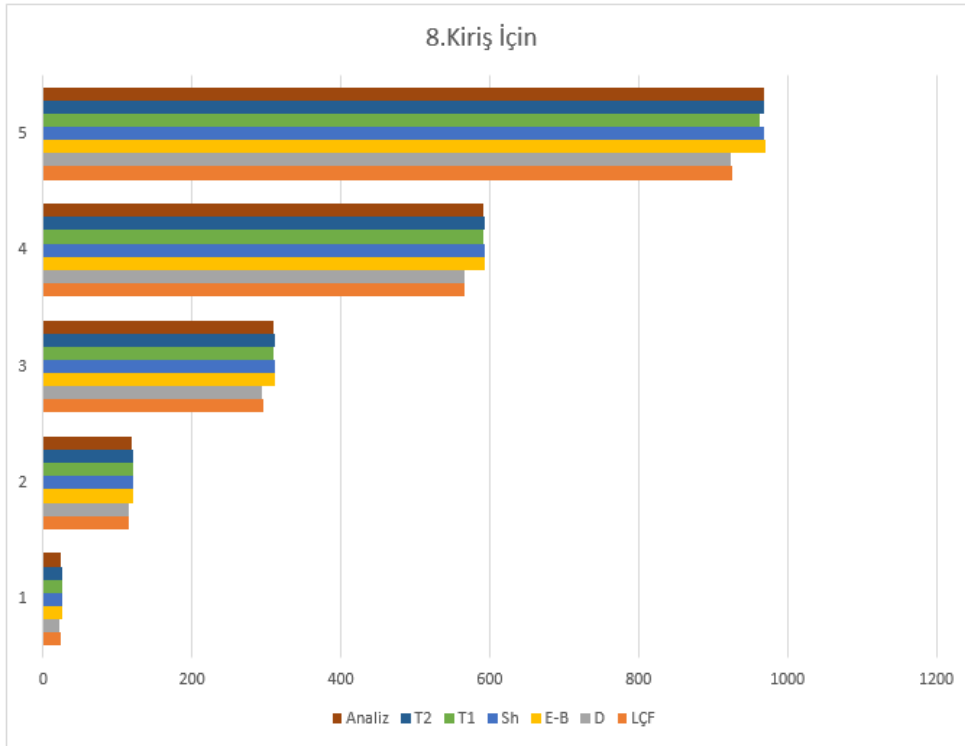
Kiriş teorileri anlatırken bu teorilerin sabit kesit alana sahip girişler için olduğu belirtilmişti. Bu tez çalışmasında genişlik ve kalınlık fonksiyonlarının integrali alınıp giriş boyuna bölündüğünde sabit bir kesit alanı elde edilip sivriltilmiş ankastre

Çizelge 7.13: Üçüncü çalışmada kullanılan malzeme

Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	200 GPa
Poisson Oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	7850 kg/m^3

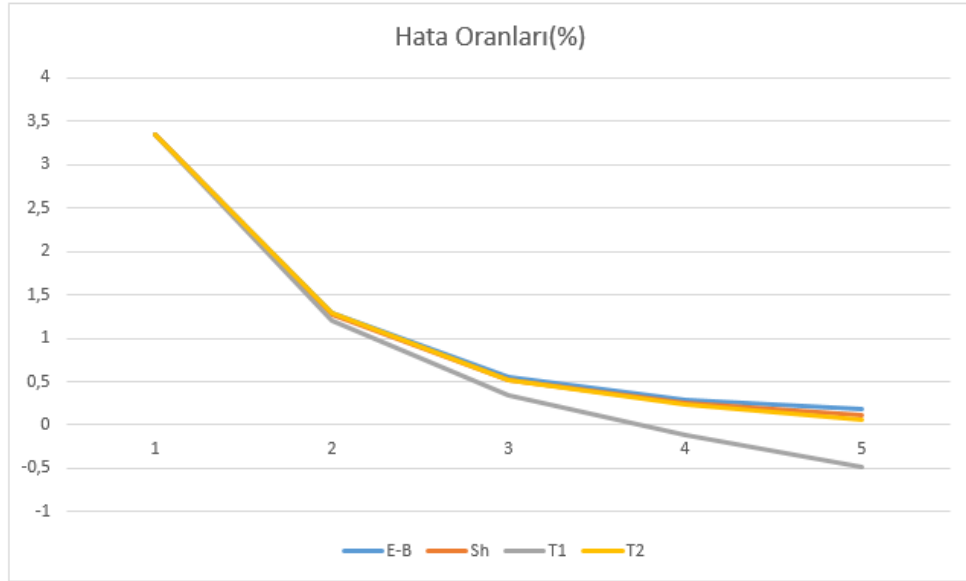
Çizelge 7.14: Sekiz numaralı kiriş($h/L=0.01$)

<i>Mod</i>	<i>LÇF</i> [3]	<i>D</i> [3]	<i>E-B</i>	<i>Sh</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>Analiz</i>
1	23.405	21	25.062	25.0618	25.0606	25.063	24.25
2	114.415	114	120.71	120.693	120.612	120.701	119.17
3	296.36	294	310.925	310.848	310.279	310.845	309.23
4	566.706	565	593.571	593.3	591.162	593.185	591.82
5	925.972	923	969.649	968.943	963.176	968.475	967.9



Şekil 7.18: Sekiz numaralı kiriş($h/L=0.01$)

kirişlerde sonuca ulaşılabilceği varsayılmıştı. Grafikten de görüldüğü gibi bu varsayım uygulanabilir. Çalışmanın genişletilebilmesi için farklı parametrelere ve malzeme özelliklerine sahip kirişler kullanılmalıdır.



Şekil 7.19: Sivriltilmiş kiriş hata oranı(h/L=0.01)

7.5 Sivriltilmiş Ankastre Kiriş İçin Çalışma Sonuçlarının Karşılaştırılması

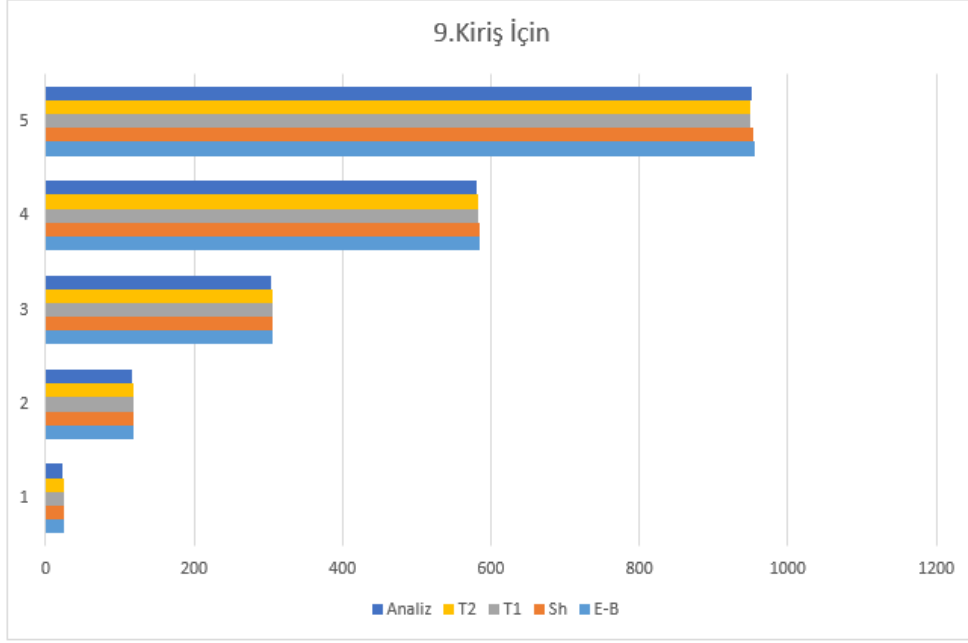
Literatür çalışmalarını genişletmek amacıyla yapılacak çalışmalar bu bölümde paylaşılacaktır. İlk kirişin parametreleri literatür çalışmasında olduğu gibi olacaktır. Bu kirişin malzeme özellikleri(Çizelge 7.15) ve karşılaştırma tablosu(Çizelge 7.16) aşağıda verilmiştir.

Çizelge 7.15: Dokuzuncu kirişte kullanılan malzeme

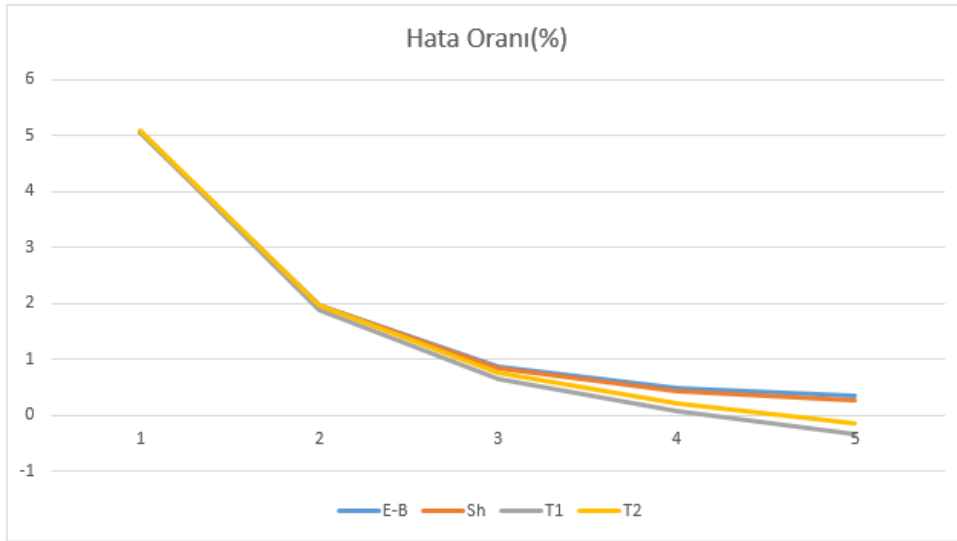
Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	70 GPa
Poisson Oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	2700 kg/m ³

Çizelge 7.16: Dokuz numaralı kiriş(h/L=0.01)

Mod	E-B	Sh	T1	T2	Analiz
1	24.6724	24.672	24.6708	24.6754	23.481
2	118.828	118.816	118.736	118.813	116.53
3	306.089	306.014	305.454	305.777	303.45
4	584.339	584.073	581.967	582.828	581.5
5	954.568	953.873	948.196	949.99	951.3



Şekil 7.20: Dokuz numaralı kiriş(h/L=0.01)



Şekil 7.21: Sivriltilmiş kiriş hata oranı 2 (h/L=0.01)

Referans çalışmaya ek olarak farklı malzeme özelliğine sahip sivriltilmiş ankastre kirişte de hata oranının değişmediği görülmektedir. Hata oranları, kirişin parametrelerine bağlı olduğundan malzeme özellikleriyle değişmez. Çizelge 7.17 ve Çizelge 7.18’de onuncu kiriş için özellikler verilmiştir. Çizelge 7.19’da karşılaştırma tablosu, Şekil 7.22 ve Şekil 7.23’te karşılaştırma grafikleri verilmiştir. Bu kirişin seçilme amacı, daha ince bir sivriltilmiş ankastre kiriş için değerlerin analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmasıdır.

Çizelge 7.17: Onuncu kirişte kullanılan malzeme

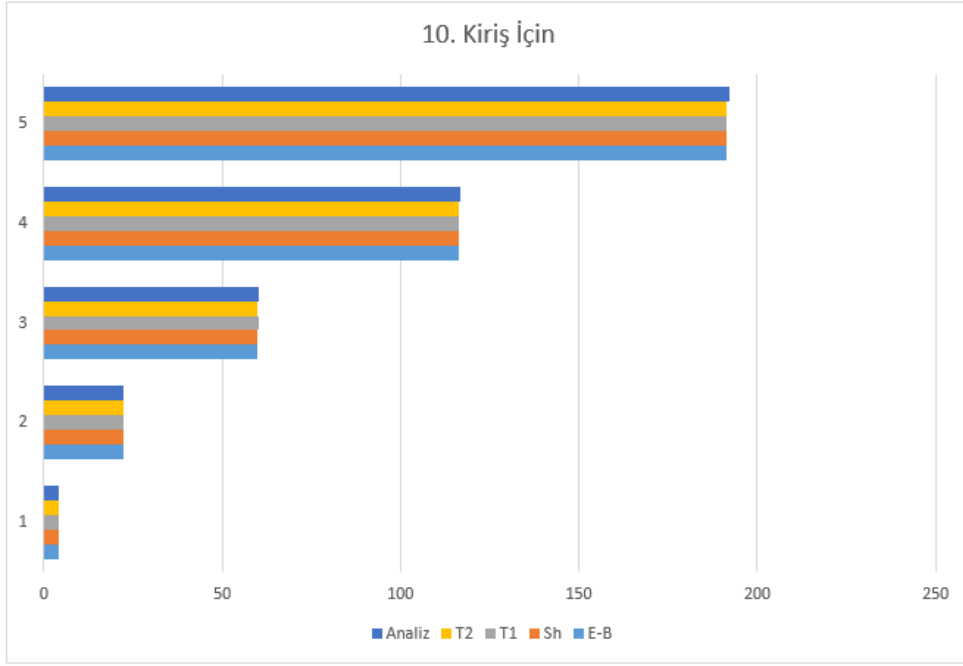
Özellik	Değer
Elastisite Modülü (E)	210 GPa
Poisson Oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	7860 kg/m^3

Çizelge 7.18: Onuncu kirişte kullanılan kiriş parametreleri

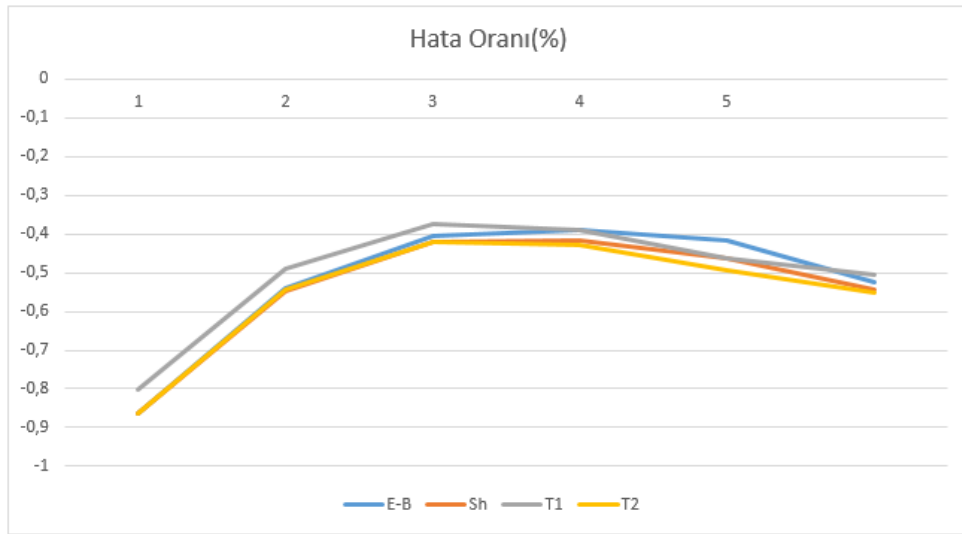
Özellik	Değer
Uzunluk (L)	1000 mm
İlk Genişlik (b_0)	200 mm
Son Genişlik (b)	100 mm
İlk Kalınlık (h_0)	4 mm
Son Kalınlık (h)	4 mm
Genişlik Sivrilik Oranı (c_b)	0.5
Kalınlık Sivrilik Oranı (c_h)	0
Kalınlık-Uzunluk oranları (h/L ve h_0/L)	0.004-0.004
Yaklaşık E-B katsayısı(1.mod)	2.077
Yaklaşık E-B katsayısı(2.mod)	4.85
Yaklaşık E-B katsayısı(3.mod)	7.95
Yaklaşık E-B katsayısı(4.mod)	11.065
Yaklaşık E-B katsayısı(5.mod)	14.192

Çizelge 7.19: On numaralı kiriş($h/L=0.004$)

Mod	E-B	Sh	T1	T2	Analiz
1	4.09907	4.09903	4.10163	4.09914	4.1348
2	22.3415	22.3401	22.353	22.341	22.463
3	60.0343	60.0249	60.0525	60.0246	60.278
4	116.307	116.273	116.304	116.258	116.76
5	191.328	191.238	191.243	191.179	192.13



Şekil 7.22: On numaralı kiriş (h/L=0.004)



Şekil 7.23: Sivriltilmiş kiriş hata oranı 3 (h/L=0.004)

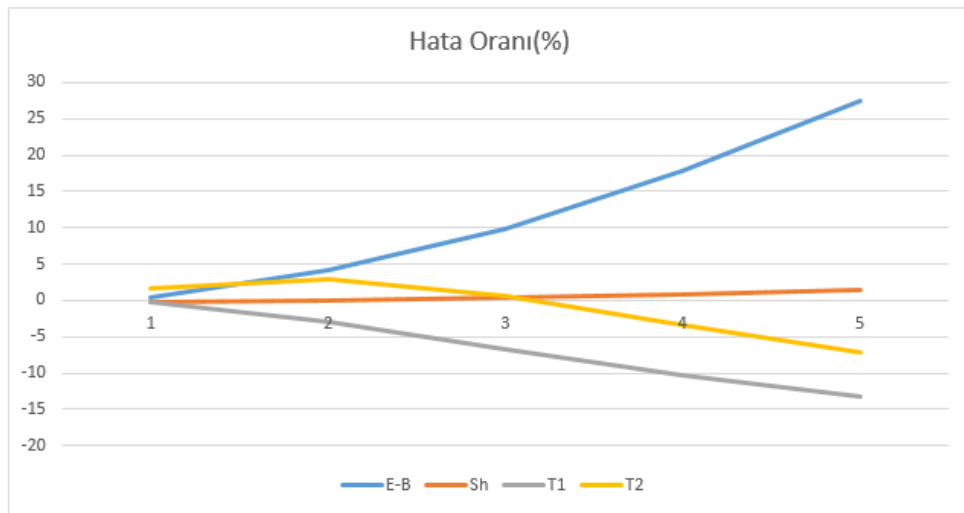
Grafiklerden de görüldüğü üzere sivriltilmiş ince kirişlerde bütün kiriş teorilerinin gerçeğe yakın sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Aşağıda son olarak h/L oranı 0.1 olan sivriltilmiş ankastre kiriş örneği verilmiştir. On birinci kirişin malzeme özellikleri onuncu kiriş ile aynıdır. Sadece kalınlığı 4 mm yerine 100 mm alınmıştır. Çizelge 7.20’de karşılaştırma tablosu, Şekil 7.24, Şekil 7.25 ve Şekil 7.26’da karşılaştırma grafikleri verilmiştir.

Çizelge 7.20: On bir numaralı kiriş($h/L=0.1$)

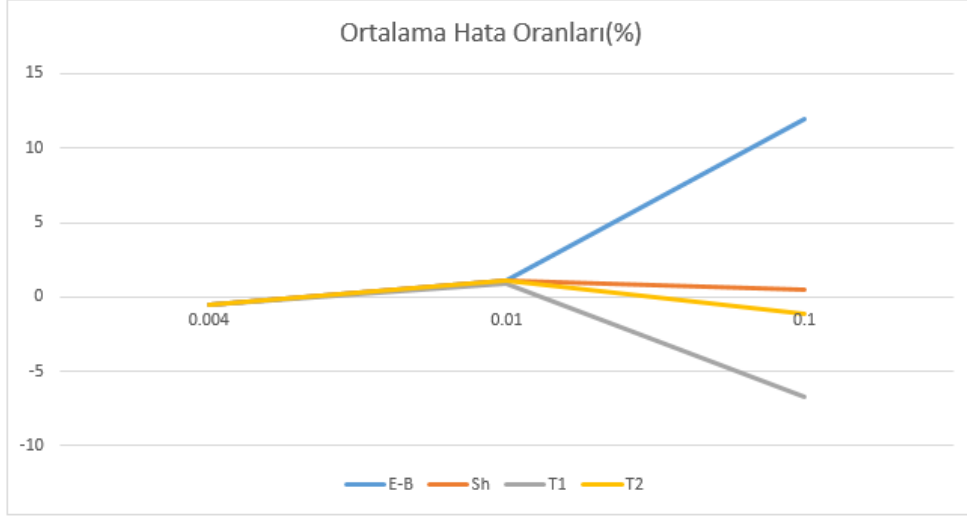
<i>Mod</i>	<i>E-B</i>	<i>Sh</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>Analiz</i>
1	102.477	101.874	101.835	103.745	102.12
2	558.537	536.744	520.615	551.913	536.51
3	1500.86	1371.88	1274.45	1374.28	1365.9
4	2907.66	2490.45	2212.02	2385.54	2468.3
5	4783.19	3808.36	3259.28	3480.85	3751.3



Şekil 7.24: On bir numaralı kiriş($h/L=0.1$)



Şekil 7.25: Sivriltilmiş kiriş hata oranı 4 ($h/L=0.1$)



Şekil 7.26: Hata oranları ortalaması 3

Sivriltilmiş ankastre kiriş için sonuçlar, düz ankastre kiriş için olanlarla benzer çıkmıştır. Kiriş kalınlığı arttıkça Euler-Bernoulli(E-B) ve Timoshenko genel çözümü(T1) için hata oranı artar. Teorilerde belirttiğimiz üzere Shear(Sh) ve Timoshenko matris çözümü(T2) kalınlık artsa bile gerçeğe yakın cevaplar vermektedir. İnce kirişlerde ise bütün teoriler gerçeğe yakın sonuçlar vermektedir. Bulunan hata oranlarına etkiyen faktörler arasında alınan sabitler ve diferansiyel denklemlerin çözüm tekniği de vardır. Genel olarak bakıldığında sonuçlar tam da beklenildiği gibidir. Kirişin kalınlaştıkça doğal frekansının teorideki gibi arttığı da gözlenmiştir.

7.6 Gelecek Çalışmalar

Bu çalışmada düz ve sivriltilmiş ankastre kirişlerde Euler-Bernoulli kiriş teorisi, Shear(kayma) kiriş teorisi, Timoshenko kiriş teorisi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımı ile eğilmeden kaynaklanan doğal frekans hesapları anlatıldı. Gelecekteki çalışmalarda bu teoriler ve yöntemler başka sınır şartlı kiriş yapılarında uygulanabilir. Bu çalışmalara ek olarak Rayleigh kiriş teorisi de eklenebilir. Günümüzde, Sonlu Elemanlar Yöntemi'ni kullanan analiz programlarıyla oldukça başarılı sonuçlar elde edilmektedir. Bu yöntem için farklı şekilde ve sayıda eleman ağı(mesh) atılabilir, bu sonuçlar karşılaştırılabilir. Ayrıca eğilmeden kaynaklanan doğal frekansın hesaplanmasında kullanılabilen yöntemler arasında Diferansiyel Dönüşüm

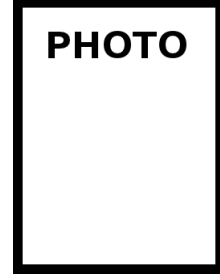
Yöntemi(DTM) gibi başarılı yöntemler de bulunmaktadır. Bu yöntemler de bu tarz çalışmalara eklenebilir ve literatür sonuçlarıyla karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Majkut, L.** (2009). Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1), 193-210.
- [2] **Protocsil, C., Minda, P.F., Gillich, G.R., Minda, A.A. ve Vasile, O.** (2012), Beam Model Validation Based on Finite Element Analysis , *WSEAS, Advances in Remote Sensing, Finite Difference and Information Security*, Prague, Czech Republic, September 24-26.
- [3] **Cekus, D.** (2012). Free Vibration of a Cantilever Tapered Timoshenko Beam, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 4(11), 11-17.
- [4] **Ozdemir, O. ve Kaya, M.O.** (2005). Flapwise Bending Vibration of a Rotating Tapered Cantilever Bernoulli-Euler Beam by Differential Transform Method, *Journal of Sound and Vibration*, 286(2006), 413-420.
- [5] **Rao, S.S.** (2007). *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [6] **Sunguroğlu, N.G.** (2014). Investigation of Euler-Bernoulli and Timoshenko Solutions of a Tapered Beam Under Thermal Loads and Free Vibration Analysis, *Graduation Project*, İTÜ, İstanbul, Türkiye.
- [7] **Billah, K.Y. ve Scanlan, R.H.** (1990). Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Undergraduate Physics Textbooks, *American Journal of Physics*, 59(2), 118-124.
- [8] **Timoshenko, S.** (1953). *History Strength of Materials*, McGraw Hill, New York.
- [9] **Ozdemir, O.O. ve Kaya, M.O.** (2006). Flapwise Bending Vibration Analysis of Double Tapered Rotating Euler-Bernoulli Beam by Using Differential Transform Method, *Meccanica*, 41, 661-670.
- [10] **Wu, J. ve Lin, T.L.** (1990). Free Vibration Analysis of a Uniform Cantilever Beam with Point Mass by an Analytical and Numerical Combined Method, *Journal of Sound and Vibration*, 136(2), 201-213.
- [11] **Babuska, I. ve Strouboulis, T.** (2001). *The Finite Element and Its Reliability*, Oxford University Press, New York.
- [12] **Mecitoglu, Z.** (2013). *Lecture on Finite Element Analysis in Structures Personal Collection of Z. Mecitoglu*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

- [13] **Gulcu, A.** (2005). *Mathematica 5*, Asil Yayın Dağıtım, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Nejat Göker Sunguroğlu

Doğum Yeri ve Tarihi: Üsküdar, 22/05/1991

Adres: Sırmaperde Sokak Özyurt Sitesi C/19 Altunizade/İSTANBUL

E-Posta: sunguroglu@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi, Uzay Mühendisliği, Şubat 2014