

SMARANDACHE EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Huriye ÖZGÜN

(101121103)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

HAZİRAN-2015

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMARANDACHE EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Huriye ÖZGÜN

(101121103)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26/05/2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 11/06/ 2015

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)

HAZİRAN-2015

ÖZET

SMARANDACHE EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümünde Öklid uzayının bazı temel tanımları verildi.

İkinci bölümde; Minkowski uzayının temel tanım ve teoremleri verildi.

Üçüncü bölümünde; 3-boyutlu Öklid uzayında özel smarandache eğrileri incelenmiştir.

Dördüncü bölümünde; Minkowski uzayında smarandache eğrileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Smarandache eğrileri, Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Serret-Frenet üç yüzlüsü , Frenet elemanları

SUMMARY

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF SMARANDACHE CURVES

This study is consisted of four chapters:

In the first chapter, some basic definition and theorems of Euclidean 3-space are given.

In chapter 2, some basic definition and theorems of Minkowski space are given.

In chapter 3, special smarandache curves in the Euclidean 3-space are given.

In chapter 4, smarandache curves in the Minkowski space are researched.

Key Words: Smarandache Curves , Euclidean space , Minkowski space , Serret-Frenet Trihedra , Frenet Apparatus

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ hocama üzerindeki emeklerinden dolayı şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Huriye ÖZGÜN

ELAZIĞ-2015

SEMBOLLER LİSTESİ

E^3	: 3-boyutlu Öklid Uzay
E_1^4	: 4-boyutlu Minkowski uzayı
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi
$T_p(M)$	: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
T	: Tanjant vektör alanı
N	: Normal vektör alanı
B_1	: Birinci binormal vektör alanı
B_2	: İkinci binormal vektör alanı
κ	: Birinci eğrilik
τ	: İkinci eğrilik
σ	: Üçüncü eğrilik

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
TEŞEKKÜR	III
SEMBOLLER LİSTESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
GİRİŞ.....	1
1. BÖLÜM	2
1. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.BÖLÜM.....	9
2. MINKOWSKI UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR.....	9
3.BÖLÜM.....	19
3. ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ	19
4.BÖLÜM.....	31
4. MINKOWSKI UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ	29
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	38

GİRİŞ

E_1^4 , Minkowski uzayında regüler bir eğri, eğer yer vektörü diğer bir eğri üzerindeki Frenet çatısı ile belirlenebiliyorsa bu eğri smarandache eğri olarak adlandırılmıştır [15]. Bu eğri kavramı son zamanlarda, birçok uzayda araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Bu eğriler Frenet denklemlerinin birçok uzayda genişletilmiş hali ile ilgilidir.

Ahmat T. Ali, Öklid uzayındaki özel smarandache eğrileri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu araştırmacı üç boyutlu Öklid uzayında smarandache eğrileri için tanımlamalar ve belli sınıflamalar elde etmiştir [11].

Melih Turgut ve Süha Yılmaz ise E_1^4 , Minkowski uzayında smarandache eğrileri üzerine çalışmışlardır. Bu araştırmacılar E_1^4 , Minkowski uzayında Frenet denklemleri yardımı ile TB_2 smarandache eğrileri için bir tanımlama elde etmiştir [15,18].

Bu çalışmada, E_1^4 , Minkowski uzayında Frenet denklemleri ve bileşenleri yardımı ile differansiyellenebilir bir eğrinin tanjant, normal, birinci binormal, ikinci binormal vektör alanlarının üzerindeki hareketini inceleyip smarandache eğrilerini inceledik. Sonuç olarak TB_2 smarandache eğrilerini araştırdık.

Öklid uzayında Frenet- Serret değişmezleri, denklemleri ve bileşenleri yardımı ile özel smarandache eğrilerini inceleyip, TN, NB, TNB özel smarandache eğrileri için tanımlar verip bu eğrilerin şekillerini sırası ile şekil 3.2 , şekil 3.3, şekil 3.4 deki gibi elde ettik.

Eğrilerin diferensiyel geometrisi geometrinin önemli inceleme alanlarından biridir. Bu alanda Öklid uzayındaki ve düzlemdeki eğriler diferensiyel ve integral hesabın metodları kullanılarak incelenir. Öklid ve Öklidsel olmayan uzaylarda eğriler ve yüzeyler birçok araştırmacıya inceleme konusu olmuştur [8,12,13,14,17].

Bu araştırma da ise Öklid ve Minkowski uzaylarında smarandache eğrileri göz önüne alınarak incelenmiştir.

1. BÖLÜM

1. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1 : Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

$$A_1) P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$A_2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır}$
[6].

Tanım 1.2 : Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece bu afin uzay Öklid uzayı adını alır [6].

$$\textbf{Tanım 1.3 : } d: E^n \times E^n \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [6].

Tanım 1.4 : $d: E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında Öklid metriği denir [6].

Tanım 1.5 : $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü; $\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$ eşitliğinden hesaplanan θ reel sayısıdır [6].

Tanım 1.6 : E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow R$ fonksiyonun

k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir [6].

Tanım 1.7 : M bir topolojik n – manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [6].

Tanım 1.8 : $I \subseteq R$ açık alt cümle olmak üzere diferansiyellenebilir

$$\alpha: I \rightarrow R$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

fonksiyonu verilmiş olsun. (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ e E^n de bir eğri denir [6].

Tanım 1.9 : M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ vektör uzayına M nin P noktasındaki tanjant uzayı denir [6].

Tanım 1.10 : M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye $\chi : M \xrightarrow{\text{birebir örten}} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ olarak tanımlanan χ fonksiyonuna denir ve M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.11 : $X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall P \in E^n$ için $X_P = (x_1, \dots, x_n)|_P \in T_{E^n}(P)$ dir. $Y = (y_1, \dots, y_n)$ vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir, eğer $y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından, yani $y_i \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ ise bu durumda Y nin X e göre kovaryant türevi $D_X Y = (x_p[y_1], \dots, x_p[y_n])$ şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 1.12 : $T_{E^n}(P)$ nin cebirsel duali $T_{E^n}^*(P)$ ile gösterilir ve E^n in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı adını alır. $T_{E^n}^*(P)$ nin her bir elemanına $P \in E^n$ noktasında kotanjat vektör adı verilir [6].

Tanım 1.13 : $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -lineer fonksiyonların cümlesini $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = \{f | f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \xrightarrow{r\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. Bu cümle $\mathbb{R}$ üzerindeki bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına dual vektör uzaylarının çarpımı denir. $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r . dereceden tensör denir. Eğer $V_1 = V_2 = \dots = V_r = V$ ise $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ uzayına kovaryant tensör uzayı bu uzayın her elemanına da kovaryant tensör denir. $T^r(V$ yada $\otimes^r(V))$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.14 : Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* (V nin dual uzayı) alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde s -lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant tensör uzayı denir. Yani

$$L(V^*, V^*, \dots, V^*; \mathbb{R}) = V \otimes V \otimes \dots \otimes V \otimes \dots \otimes V = \otimes^s V = T_s(V^*)$$

bu uzayın elemanlarına kontravaryant s -tensör denir [6].

Tanım 1.15 : Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı n- boyutlu vektör uzayı V ve V nin dualı V^* olsun.

$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$ vektör uzayına r. dereceden kovaryant ve s. dereceden kontravaryant tensör uzayı denir ve $T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r (V^*) \otimes \otimes^s (V)$ veya T_s^r şeklinde gösterilir [6].

Tanım1.16 : $f \in \otimes^n V^*, g \in \otimes^m V^*$ olmak üzere f ile g nin tensörel çarpımı $f \otimes g, \forall (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ ve $\forall (u_1, \dots, u_m) \in V^m$ için $f \otimes g(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m) = f(v_1, \dots, v_n) g(u_1, \dots, u_m)$ şeklinde tanımlanır [6].

Tanım1.17 :

$$\wedge: T^1(V) \otimes T^1(V) \rightarrow \wedge^2 V^*$$

$$(f, g) \rightarrow f \wedge g = A_2(f \otimes g)$$

şeklinde tanımlı $\wedge$ fonksiyonuna dış çarpım fonksiyonu ve $f \wedge g$ alterne tensörüne de f ve g tensörlerinin dış çarpımı denir [6].

Tanım 1.18 :

$$x = R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \psi(\alpha \times \beta)$$

şeklinde tanımlı x iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de vektörel çarpım denir [6].

Tanım 1.19 : M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere ;

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için;

$$1) D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$2) D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir [6].

Tanım 1.20 : n-boyutlu bir C^∞ manifold M ve M üzerinde bir koneksiyon D olsun.

$$Tor: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow Tor(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı D koneksiyonun torsiyon tensörü denir [6].

Tanım 1.21 : E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin.

E^n de Rieman koneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [6].

Tanım 1.22 : M , $\bar{M}$ nin bir yarı Rieman alt manimoldu olsun. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\bar{M}$ ve M üzerindeki Levi Civita koneksiyonları olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

eşitliğine M nin Gauss denklemi denir [6].

Tanım 1.23 : E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere;

$$K: M \rightarrow R$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonsiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir [7].

Tanım 1.24 : E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H: M \rightarrow R$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{İz} (S(P))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir [7].

Özel olarak $H=0$ için, M yüzeyi minimal yüzey olarak adlandırılır.

Tanım 1.25 : M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve $f: M \rightarrow \bar{M}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin, f_* jakobian matrisi $\forall p \in M$ noktasında reguler ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir immersiyon (=daldırma) denir [6].

Tanım 1.26 : $\forall u, v \in R(U, X)$ parametrizasyonu ile verilen $X: U \subset E^2 \rightarrow E^n$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v), \dots, X_n(u, v))$$

ile belirli olan $\chi(U)$ yüzeyi göz önüne alınsın. Lineer bağımsız $\{x_u, x_v\}$ cümlesi yüzeyin vektör alanlarının bir bazıdır. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

ile belirlidir.

$$I = (d_s)^2 = E d_u^2 + 2F d_u d_v + G d_v^2$$

eşitliğine yüzeyin I . temel formu yada metriği denir [7].

Tanım 1.27 : E^n de M bir $(n - 1)$ altmanifold bir P noktasında M nin tanjant uzayı $T_M(P)$ olduğuna göre M üzerinde Weingarten dönüşümü $S: T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ idi. S ile tanımlanan II . temel form M üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak $\forall X_p, Y_p \in T_M(P)$ için

$$II(X_p, Y_p) = \langle S(X_p, Y_p) \rangle$$

şeklinde tanımlanır [7].

2.BÖLÜM

2. MINKOWSKI UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 : V bir reel vektör uzayı olsun. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u, v, w \in V$ için $\langle, \rangle$ dönüşümüne, aşağıdaki özelliklere sahip ise V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [10].

$$1) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$2) \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle,$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

Tanım 2.2 : $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir bilinear form olsun. Bu bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir [10].

A)

i) Eğer $\forall v \in V \ v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna pozitif definit,

ii) Eğer $\forall v \in V \ v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna negatif definit denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için definit durum adı verilir.

B)

i) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna pozitif semi - definit,

ii) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna negatif semi-definit, denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için indefinit durum adı verilir.

C)

$\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v=0$ ise $\langle, \rangle$ a nondejenere bilinear form denir.

Bu duruma ise bilinear formlar için nondejenere durum denir.

Tanım 2.3 : V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik, bilinear form olsun. $W \subset V$ olmak üzere;

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formun indeksi denir ve bu indeks genellikle V ile gösterilir [10].

Tanım 2.4: M, C^∞ manifold ve

$$\langle, \rangle : X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, nondejenere fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [10].

Tanım 2.5 : M, C^∞ manifold ve $\langle, \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine bir semi-Riemann manifoldu denir [10].

Tanım 2.6 : $(M, \langle, \rangle)$ bir Semi-Riemann manifoldu ve boy $M = n$ olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $V=1$ ise $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine bir Lorentz manifoldu denir [10].

Bundan sonra Lorentz manifoldunu M ile göstereceğiz.

Tanım 2.7 : $\langle, \rangle|_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\forall \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall \vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ için}$$

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle|_L = -x_1 \cdot y_1 + \sum_{i=2}^n x_i \cdot y_i$$

yada

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_L = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \cdot y_i \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \quad \text{ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\langle, \rangle_L$ fonksiyonuna R^n de bir Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpım ile birleşen R^n e de bir vektör uzayı denir. Bu vektör uzayına $n -$ boyutlu standart Lorentz uzayı denir ve L^n ile gösterilir.

R^n üzerinde ki Lorentz iç çarpımının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına karşılık geldiği matris,

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.8 : Bir M Lorentz manifoldu üzerinde bir tanjant vektör v olsun. Eğer;

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v ye space-like (uzay - benzeri) vektör,

$\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye time-like (zaman - benzeri) vektör,

$\langle v, v \rangle = 0$ ise v ye null veya light-like (ışık - benzeri) vektör, denir [8].

Tanım 2.9 : Time-like (zaman-benzeri) ve light-like (ışık-benzeri) vektörlere causal vektörler denir [5].

Tanım 2.10 : M bir Lorentz manifoldu olsun. M manifoldunun bir noktasındaki null vektörlerinin cümlesine; null konisi denir [10].

Tanım 2.11 : Bir L^n , n-boyutlu Lorentz uzayının bütün time-like (zaman-benzeri) vektörlerinin cümlesi ℓ olsun $u \in \ell$ için

$$C(u) = \{v \in \ell \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

olmak üzere $C(u)$ ya u 'yu ihtiva eden L^n nin bir time-konisi (zaman – konisi) denir [10].

Tanım 2.12 : L^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun.

$$\forall \vec{X}, \vec{Y} \in L^n \text{ için } \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir [3].

Sonuç 2.1 : Her ikisi de time-like (zaman-benzeri) olan iki vektör birbirine dik olamaz. Benzer düşünce her ikisi de space-like (uzay-benzeri) olan iki vektör için de geçerlidir [3].

Sonuç 2.2 : $\vec{0}$ vektörü bütün vektörlere diktir [1].

Tanım 2.13 : 4-boyutlu Lorentz uzayına Minkowski uzayı denir [10].

Tanım 2.14 : L^n , n-boyutlu Lorentz uzayında bir vektör, $\vec{w}$ ve $\langle , \rangle$ ise L^n üzerinde bir Lorentz iç çarpımı olsun. $\vec{w}$ nin normu;

$$\|\vec{w}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle|} \text{ şeklinde tanımlanır [4].}$$

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe, $\| \cdot \|_L$ yerine $\| \cdot \|$ ifadesini kullanacağız.

Teorem 2.1 : $\vec{x} \in L^n$ olmak üzere;

i) $\|\vec{x}\| > 0$ dır.

ii) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektörüdür.

iii) $\vec{x}$ bir time-like (zaman-benzeri) vektör olsun. Bu taktirde,

$$\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle \text{ olur.}$$

iv) $\vec{x}$ bir space-like (uzay-benzeri) vektör olsun bu taktirde,

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle \text{ olur [2].}$$

Tanım 2.15 : $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında olmak üzere;

$$\wedge|_L: L^3 \times L^3 \rightarrow L^3$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \vec{X} \wedge \vec{Y}|_L = (-x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

şeklinde tanımlı $\wedge|_L$ operatörüne L^3 de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir. Bunu matris formunda

$$\vec{X} \wedge \vec{Y}|_L = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz [9].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\wedge|_L$ sembolü yerine $\wedge$ sembolünü kullanacağız.

Tanım 2.16 : L^n , n-boyutlu Lorentz uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k -sınıfından (k-yıncı sınıftan) diferensiyellenebilir denir. Özel olarak, f sadece sürekli ise C^0 -sınıfındandır denir. U üzerinde tanımlı C^1 -sınıfından fonksiyona U üzerinde 0-form adı verilir. Ayrıca,

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ -sınıfından}\} \quad \text{ve}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.17 : M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer;

$$\vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \vec{v}_p[f], \forall P \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$1) \vec{v}_p[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{v}_p[f] + \mu \vec{v}_p[g]$$

$$2) \vec{v}_p[f \cdot g] = g(p) \vec{v}_p[f] + f(p) \vec{v}_p[g]$$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu operatöre Lorentz manifoldunun $P \in M$ noktasında bir tanjant vektörü denir [1].

M Lorentz manifoldunun bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi:

$$T_M(p) = \{\vec{v}_p \mid \vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. Bu cümle üzerinde iç ve dış işlem, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanırsa $T_M(P)$ bir reel vektör uzayı olur. $T_M(P)$ vektör uzayına, M Lorentz manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı denir.

İç İşlem :

$$+ : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(\vec{v}_p, \vec{w}_p) \rightarrow \vec{v}_p + \vec{w}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}_p + \vec{w}_p)[f] = \vec{v}_p[f] + \vec{w}_p[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Dış İşlem:

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(\lambda, \vec{v}_p) \rightarrow \lambda \vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda, \vec{v}_p)[f] = \lambda \vec{v}_p[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tanım 2.18: M bir Lorentz manifoldu olsun.

$$X : M \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna, M Lorentz manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir.

M Lorentz manifoldu üzerinde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir reel vektör uzayıdır. $\chi(M)$ vektör uzayına, M Lorentz manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı denir.

Benzer şekilde, L^n , n -boyutlu Lorentz uzayı üzerinde vektör alanları tanımlanabilir. L^n üzerinde tanımlanan vektör alanları cümlesi ise $\chi(L^n)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.19 : $\forall P \in L^n$ için,

$$\partial_1(P) = \frac{\partial}{\partial x_1}(P) = (1, 0, \dots, 0) \Big|_P$$

$$\partial_2(P) = \frac{\partial}{\partial x_2}(P) = (0, 1, \dots, 0) \Big|_P$$

.....

$$\partial_n(P) = \frac{\partial}{\partial x_n}(P) = (0, 0, \dots, 1) \Big|_P$$

olacak biçimde, L^n üzerindeki her bir P noktasında n tane vektör (tanjant vektör) seçelim. Bu vektörlerin L^n deki dağılımı ile n tane vektör alanı elde edilir. Bu şekilde tanımlanan,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

vektör alanı n -lisine, L^n üzerindeki doğal baz vektör alanları sistemi veya kısaca doğal baz alan sistemi denir.

L^n , n -boyutlu Lorentz uzayındaki bu doğal baz alan sistemi için;

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{ve} \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i = 1 \text{ ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olmak}$$

üzere $\epsilon_i \delta_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad 1 \leq i, j \leq n$

eşitlikleri vardır [10].

Tanım 2.20 : Grad: $C^\infty(L^n, R) \rightarrow \chi(L^n)$

$$f \rightarrow \text{Grad}(f)$$

öyle ki, L^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bir koordinat sistemi olmak üzere,

$$\text{Grad}(f) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \text{ ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna, L^n de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinat sistemine göre koordinat fonksiyonu denir ve genellikle $\vec{V} = \text{Grad}$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.21 : L^n , n -boyutlu Lorentz uzayında bir

$$f: L^n \rightarrow R$$

reel değerli fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonunun $P \in L^n$ noktasında ve $\vec{V}$ yönündeki türevi; $\vec{V}_p[f] = \langle \vec{V}f, \vec{V}_p \rangle$ şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.22 : $X \in \chi(L^n)$ ve $f \in C^\infty(L^n, R)$ olsun. $\forall P \in L^n$ için

$$(X(f))(P) = X_p[f]$$

olmak üzere, $X[f] \in C^\infty(L^n, R)$ fonksiyonuna f in X vektör alanı yönündeki türevi denir [10].

Tanım 2.23 : $X, Y \in \chi(L^n)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall P \in L^n$ için $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)_p \in T_{L^n}(P)$ dir. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektör alanı için

$$y_i: L^n \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ -sınıfından iseler, Y vektör alanına C^∞ -sınıfındandır denir.

Bu durumda, Y nin X e göre kovaryant türevi,

$$D_X Y = X[Y_i] = \left\langle \vec{\nabla} y_i, X \right\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial u_k} x_k \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlanır. Burada D ye Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki, Lorentz anlamında kovaryant türevi denir [1].

3.BÖLÜM

3. ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ

3-boyutlu E^3 Öklid uzayını ve bu uzayda $\langle, \rangle$ Öklid metriğini göz önüne alalım.

$\vec{a} \in E^3$ herhangi bir vektör olmak üzere bu vektörün normu $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ şeklinde idi. Bu

α eğrisinin hız vektörünün normu için $\|v\| = 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri denir. $v, w \in E^3$ vektörleri için $\langle v, w \rangle = 0$ ise bu vektörler birbirine diktir.

E^3 Öklid uzayında bir regüler eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun . Eğer bu eğri sabit bir U vektör alanı ile sabit bir açı yapıyorsa helis adını alır.

E^3 Öklid uzayında yarıçapı $r > 0$ olan çemberin denklemi ise

$$S^2 = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in E^3 : \langle p, p \rangle = r^2\}$$

şeklinde verilir.

E^3 Öklid uzayında bir eğri α ve bu eğrinin Frenet üç yüzölçümü $\{T, N, B\}$ olsun .

Burada T, N, B sırasıyla birim teğet, birim normal ve binormal vektör alanlarıdır. Bu eğri için Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Burada κ ve τ sırasıyla α eğrisinin eğrilik ve torsiyonudur [11].

3- boyutlu E^3 Öklid uzayında $\{T, N, B\}$ Frenet üç yüzölçümü için

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$$

eşitlikleri yazılabilir.

Ayrıca Frenet üç yüzölçümünün üzerinde tanımlı olduğu α eğrisinin eğrilik ve torsiyonu , sırasıyla

$$\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

ve

$$\tau(s) = -\langle N, B' \rangle$$

şeklinde verilir.

Tanım 3.1 : E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. γ nın yer vektörü E^3 deki bir başka regüler eğrinin Frenet vektörleri cinsinden yazılabiliyorsa γ ya smarandache eğri adı verilir [11].

Tanım 3.2 : E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzölçümü $\{T, N, B\}$ olsun. TN smarandache eğrileri

$$\varsigma = \varsigma(s_\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Burada $\gamma = \gamma(s)$ eğrisine ait TN smarandache eğrilerinin değişmezlerini aşağıdaki şekilde verebiliriz . (3. 2) denkleminde s' ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \varsigma' &= \frac{d\varsigma}{ds_\varsigma} \cdot \frac{ds_\varsigma}{ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B) \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.

Böylece (3.3) den

$$T_{\varsigma} = \frac{\varsigma'}{\|\varsigma'\|}$$

$$= \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \quad (3.4)$$

yazılabilir.

Buradan

$$\varsigma' = T_{\varsigma} \cdot \frac{ds_{\varsigma}}{ds}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (-\kappa T + \kappa N + \tau B)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \cdot \frac{ds_{\varsigma}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad (3.5)$$

$$\frac{ds_{\varsigma}}{ds} = \frac{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

eşitlikleri elde edilir.

ς eğrisinin asli normal vektör alanını ve birinci eğriliğini belirlemek için

$$T'_{\varsigma} = \dot{T} \cdot \frac{ds_{\varsigma}}{ds}$$

$$= \frac{\delta T + \mu N + \eta B}{(2\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

eşitliği kullanılabilir.

Ayrıca δ, μ, η

$$\delta = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')]$$

$$\mu = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')] \quad (3.7)$$

$$\eta = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')]$$

olur.

Dolayısıyla

$$\dot{T}_\varsigma = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (\delta T + \mu N + \eta B) \quad (3.8)$$

elde edilir.

Böylece verilen eğrinin birinci eğriliği ve asli normal vektör alanı,

$$\kappa = \left\| \dot{T}_\varsigma \right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} \quad (3.9)$$

ve

$$N_\varsigma = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (\delta T + \mu N + \eta B) \cdot \frac{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}}$$

şeklinde olduğundan

$$N_\varsigma = \frac{\delta T + \mu N + \eta B}{\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}} \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan $T_{\varsigma} \times N_{\varsigma}$,

$$T_{\varsigma} \times N_{\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}} \cdot \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta & \mu & \eta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{vl} \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta & \mu & \eta \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. Burada $v = \sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}$ ve $l = \sqrt{\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}$ dir.

Böylece ς eğrisinin binormal vektör alanı

$$B_{\varsigma} = \frac{[\kappa\eta - \tau\mu]T + [\kappa\eta + \delta\tau]N - \kappa[\mu + \delta]B}{vl} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de ς eğrisinin torsiyonunu hesaplayacak olursak

$$\varsigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B)$$

olduğundan, bu son denklemden tekrar türev alınırsa

$$\varsigma'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B) \right)'$$

elde edilir.

Burada Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\zeta'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa'T - \kappa^2 T + \kappa'N + \kappa(-\kappa T + \tau B) + \tau'B + \tau(-\tau N))$$

$$\zeta'' = \frac{1}{\sqrt{2}}-(\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B$$

bulunur. Bu denklem ise

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -(\kappa^2 + \kappa')T + \\ (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N \\ +(\kappa\tau + \tau')B \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

formunda yazılabilir. Tekrar (3.13) denkleminde uygun türev alınırsa

$$\begin{aligned} \zeta''' &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \omega T + \phi N + \sigma B \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir.

Burada ω , ϕ , σ değerleri

$$\begin{aligned} \omega &= \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'', \\ \phi &= -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'', \\ \sigma &= -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau''. \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

O halde ς eğrisinin ikinci eğriliği yani torsiyonunu

$$\tau_{\varsigma} = \|N' + \kappa T\|$$

olduğundan

$$= \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\sigma + \tau\omega) + \kappa'(\kappa\tau + \tau')(\phi - \omega) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\sigma - \tau\phi)]}{[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2} \quad (3.16)$$

olarak bulunur.

Tanım 3.3 : E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzölçümü $\{T, N, B\}$ olsun. NB smarandache eğrileri

$$\xi = \xi(s_{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B) \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Not 3.1 : NB smarandache eğrilerinin Serret-Frenet değişmezleri $\gamma = \gamma(s)$ regüler eğrisinin Frenet elemanları ile kolayca elde edebilir [11].

Tanım 3.4 : E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzölçümü $\{T, N, B\}$ olsun. TNB smarandache eğrileri

$$\psi = \psi(s_{\psi}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B) \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Not 3.2 : TNB smarandache eğrilerinin Serret-Frenet değişmezleri $\gamma = \gamma(s)$ regüler eğrisinin Frenet elemanları ile kolayca elde edebilir [11].

Örnek 3.1.

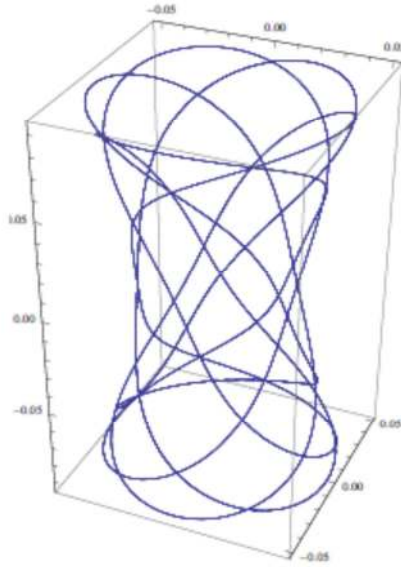
E^3 de bir $\gamma = \gamma(s)$ eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin bileşenleri sırası ile aşağıdaki şekilde olsun.

$$\gamma_1 = \frac{9}{208} \sin 16s - \frac{1}{117} \sin 36s$$

$$\gamma_2 = -\frac{9}{208} \cos 16s + \frac{1}{117} \cos 36s$$

$$\gamma_3 = \frac{6}{65} \sin 10s$$

Verilen $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin grafiği şekil 3.1 deki gibi olur.

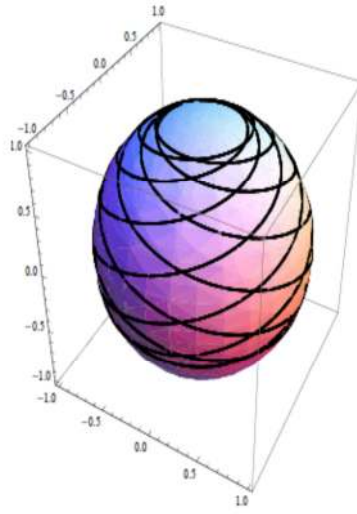


Şekil 3.1.

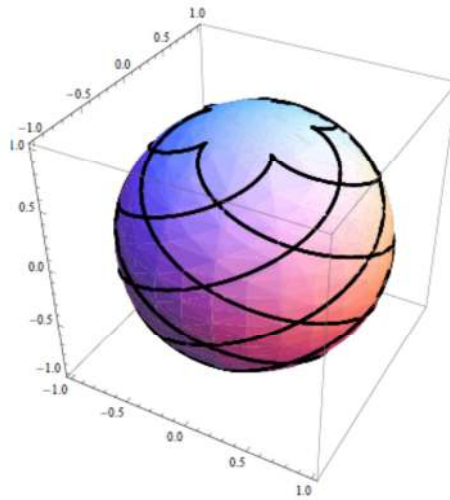
$\gamma = \gamma(s)$ eğrisi için eğrilik ve torsiyon

$$\begin{cases} \kappa(s) = -24 \sin 10s \\ \tau(s) = 24 \cos 10s \end{cases}$$

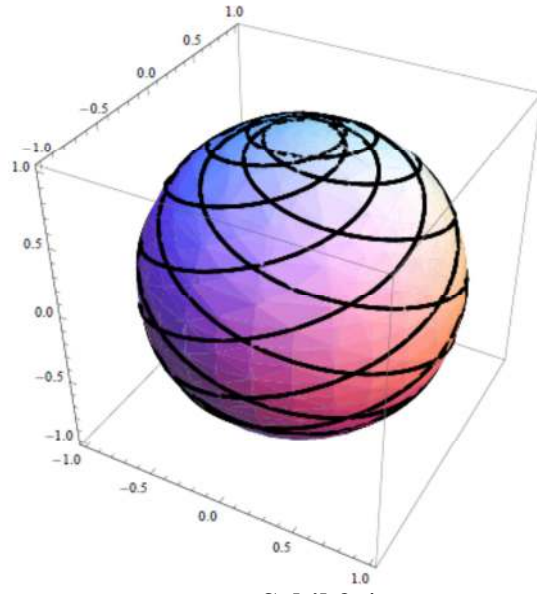
şeklinde hesaplanır. $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin sırasıyla TN smarandache, NB smarandache ve TNB smarandache eğrileride de Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 deki gibi olur.



Şekil 3.2



Şekil 3.3



Şekil 3.4

4. BÖLÜM

4. MINKOWSKI UZAYINDA SMARANDACHE EĞRİLERİ

E_1^4 Minkowski uzayı, (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinat elemanları olmak üzere $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, metriği ile belirli olsun.

Burada verilen g metriği indefinit metrik ise, $v \in E_1^4$ olmak üzere;

space-like vektör ise $g(v, v) > 0$ ya da $v = 0$

time-like vektör ise $g(v, v) < 0$

null(light-like) vektör ise $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$

şeklinde üç durum vardır.

E_1^4 uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi space-like, time-like ya da null eğri olabilir. Burada bir v vektörünün normu $\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden v birim vektör ise $g(v, v) = \pm 1$ olur. E_1^4 uzayında v ve w vektörleri birbirlerine dik vektörler ise $g(v, w) = 0$ olur. Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisinin hız vektörünün normu $\|\alpha'(s)\|$ şeklindedir.

E_1^4 uzayında $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ şeklinde olsun. Burada T, N, B_1, B_2 , sırasıyla, α eğrisinin tanjant, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarıdır.

Space-like ya da time-like $\alpha(s)$ vektörünün s ile parametrelendirilmiş yay uzunluğu fonksiyonu $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ şeklindedir.

E_1^4 uzayında $\alpha(s)$ eğrisi, s yay uzunluğu fonksiyonu ile parametrelendirilirse ,
 $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi birim hızlı ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde olur.

Burada κ, τ ve σ , sırasıyla, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.

α eğrisinin T, N, B_1, B_2 vektör alanları için

$$g(T, T) = g(N, N) = g(B_1, B_1) = 1, g(B_2, B_2) = -1$$

eşitlikleri yazılabilir.

Tanım 4.1 : $a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ve $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, E_1^4 uzayında vektörler olmak üzere ; E_1^4 Minkowski uzayında bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$a \wedge b \wedge c = - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

determinantı ile ifade edilebilir.

Burada e_1, e_2, e_3 ve e_4 vektörleri ortogonal vektörler olup ;

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_4 ,$$

$$e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = e_1 ,$$

$$e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 = e_2 ,$$

$$e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 = -e_3$$

eşitlikleri yazılabilir [15].

Teorem 4.1 : $\alpha = \alpha(t)$, E_1^4 Minkowski uzayında keyfi bir space-like eğri olsun. E_1^4 Minkowski uzayında bu eğrinin Frenet elemanları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \quad (4.3)$$

$$N = \frac{\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|} \quad (4.4)$$

$$B_1 = \mu N \wedge T \wedge B_2 \quad (4.5)$$

$$B_2 = \mu \frac{T \wedge N \wedge \alpha'''}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\|} \quad (4.6)$$

$$\kappa = \frac{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|}{\|\alpha'\|^4} \quad (4.7)$$

$$\tau = \frac{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|} \quad (4.8)$$

ve

$$\sigma = \frac{g(\alpha^{(IV)}, B_2)}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|} \quad (4.9)$$

dir.

Burada $\mu = \mp 1$ olup, $[T, N, B_1, B_2]$ matrisinin determinanı $+1$ dir [15].

Tanım 4.2 : E_1^4 Minkowski uzayında regüler bir eğri verilsin. Eğer bu eğrinin yer vektörü diğer bir regüler eğri üzerindeki Frenet çatısı ile ifade edilebilirse bu eğri bir smarandache eğri olarak adlandırılır [15].

Tanım 4.3 : $\xi = \xi(s)$, sabit ve sıfırdan farklı κ, τ, σ eğriliklerine sahip birim space-like bir eğri ve T, N, B_1, B_2 bu eğri üzerinde tanjant, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları olsun.

$\xi = \xi(s)$ eğrisinin TB_2 smarandache eğrisi

$$X = X(s_X) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \sigma^2(s)}}(T(s) + B_2(s)) \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Teorem 4.1 : $\xi = \xi(s)$, sabit ve sıfırdan farklı κ, τ, σ eğriliklerine sahip birim hızlı space-like bir eğri ve $X = X(s_X)$, $\xi = \xi(s)$ in Frenet vektörleri ile tanımlanan bir TB_2 smarandache eğri olsun. O zaman

- (i) $X = X(s_X)$ eğrisi bir space-like eğridir.
- (ii) $X = X(s_X)$ için TB_2 smarandache eğrisinin Frenet bileşenleri $\{T_X, N_X, B_{1X}, B_{2X}, \kappa_X, \tau_X, \sigma_X\}$, $\xi = \xi(s)$ eğrisinin $\{T, N, B_1, B_2, \kappa, \tau, \sigma\}$ Frenet bileşenleri cinsinden yazılabilir [15].

İspat : $X = X(s_X)$, TB_2 smarandache eğrisi yukarıdaki ifadeleri sağlayacak şekilde verilsin. (4.10) ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{dX}{ds_X} \frac{ds_X}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \sigma^2(s)}}(\kappa N + \sigma B_1) \quad (4.11)$$

yazılabilir.

X' vektörü göz önüne alındığında

$$g(X', X') = 1 \quad (4.12)$$

yazılabilir, burada $'$ ile s ye göre türev gösterilmektedir. (4.12) eşitliği $X = X(s_X)$

eğrisinin space-like olduğunu verir. Bu nedenle bu eğrinin tanjant vektörü

$$T_X = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \sigma^2(s)}} (\kappa N + \sigma B_1) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1 göz önüne alınırsa s ye göre türevler alınarak aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz:

$$X'' = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \sigma^2}} (-\kappa^2 T - \tau \sigma N + \kappa \tau B_1 + \sigma^2 B_2) \quad (4.14)$$

$$X''' = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \sigma^2}} [\kappa \tau \sigma T + (-\kappa^3 - \kappa \tau^2) N + (\sigma^3 - \tau^2 \sigma) B_1 + \kappa \tau \sigma B_2] \quad (4.15)$$

$$X^{(IV)} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \sigma^2}} [(\dots) T + (\dots) N + (\dots) B_1 + (\sigma^4 - \tau^2 \sigma^2) B_2] \quad (4.16)$$

Dolayısıyla

$$\|X''\|^2 \cdot X' - g(X', X'') \cdot X' = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \sigma^2}} [-\kappa^2 T - \tau \sigma N + \kappa \tau B_1 + \sigma B_2] \quad (4.17)$$

elde edilir.

(4.17) denkleminin X eğrisinin asli normali

$$N_X = \frac{-\kappa^2 T - \tau \sigma N + \kappa \tau B_1 + \sigma B_2}{\sqrt{-\kappa^4 + \tau^2 \sigma^2 + \kappa^2 \tau^2 + \sigma^2}} \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir.

(4.17) eşitliğinden ve bu eşitlikten norm alınarak,

$$\kappa_X = \sqrt{\frac{-\kappa^4 + \tau^2 \sigma^2 + \kappa^2 \tau^2 + \sigma^2}{\kappa^2 + \sigma^2}} \quad (4.19)$$

olarak bulunur.

Ayrıca burada $T_X \wedge N_X \wedge X'''$ vektör çarpımı

$$T_X \wedge N_X \wedge X''' = \frac{1}{A} \left\{ \begin{aligned} & [\kappa\sigma(\kappa^2 + \tau^2)(\tau^2 - \sigma)T + \kappa\tau\sigma^2(\kappa^2 + \sigma)N \\ & - \kappa^2\tau\sigma(\kappa^2 + \sigma)B_1 + \kappa\tau(\kappa^2 + \sigma^2)(\kappa^2 + \tau^2)B_2] \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

şeklinde hesaplanır, burada

$$A = \frac{1}{\sqrt{(-\kappa^4 + \tau^2\sigma^2 + \kappa^2\tau^2 + \sigma^2)(\kappa^2 + \sigma^2)}}$$

dir.

Yukarıdaki eşitlikte $T_X \wedge N_X \wedge X'''$ ifadesi kısaca $l_1T + l_2N + l_3B_1 + l_4B_2$ şeklinde yazılabilir.

Böylece $X = X(s_X)$ eğrisinin ikinci binormal vektörü

$$B_{2X} = \mu \frac{l_1T + l_2N + l_3B_1 + l_4B_2}{\sqrt{-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}} \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla burada ikinci ve üçüncü eğrilikleri kolayca

$$\tau_X = \sqrt{\frac{(-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(\kappa^2 + \sigma^2)}{-\kappa^4 + \tau^2\sigma^2 + \kappa^2\tau^2 + \sigma^2}} \quad (4.22)$$

ve

$$\sigma_X = \frac{\sigma^2(\sigma^2 - \tau^2)}{(\kappa^2 + \sigma^2)\sqrt{-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}} \quad (4.23)$$

şeklinde elde ederiz.

Sonuç olarak; $N_X \wedge T_X \wedge B_{2X}$ vektör çarpımından, birinci binormal vektörü de

$$B_{1X} = \mu \frac{1}{L} \left\{ \begin{aligned} & [(\kappa \sigma l_3 - \sigma^2 l_2 - \tau(\kappa^2 + \sigma^2) l_4) T - \sigma(\kappa^2 l_4 + \sigma l_1) N \\ & + \kappa(\kappa^2 l^4 + \sigma l_1) B_1 + [\kappa^2(\sigma l_2 - \kappa l_3) + \tau l_1(\kappa^2 + \sigma^2)] B_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

olarak elde ederiz.

Burada

$$L = \frac{1}{\sqrt{(-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(\kappa^2 + \sigma^2)(-\kappa + \tau^2 \sigma^2 + \kappa^2 \tau^2 + \sigma^2)}}$$

dir.

Böylece TB_2 smarandache eğrilerinin Frenet elemanları yukarıdaki şekilde elde edilmiş olur.

Sonuç 4.1 : Teorem 4.1. de verilen $\{T_X, N_X, B_{1X}, B_{2X}\}$ elemanları, E_1^4 Minkowski uzayının bir ortonormal çatısını oluşturur [15].

KAYNAKLAR

- [1] Bektaş, M., n-boyutlu Lorentz Uzayı L^n de Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğrilikler, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 1995
- [2] Ekmekçi, N., Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1991
- [3] Ergin, A.A., Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Doktora Tezi, , Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1989
- [4] Ergüt, M. , Aydın, A.P. , Bildik, N. The Geometry of The Canonical Relative System and One-Parameter Motions In 2-Dimensional Lorentzian Space The Journal of Fırat Univ. ,3(1), pp 113-122.
- [5] Graves, L.K., Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces, Transactions of The Ame. Math. Soc. , (1979) V. 252
- [6] Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, A. Ü. Fen Fakültesi.1993
- [7] Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. 1994
- [8] Kamışima, Y., Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature Admitting Killing Vector Fields. J. Differential Geometry, 37 (1993) pp 569-601
- [9] Magid, M.A., Timelike Surfaces In Lorentz 3-Space With Prescribed Mean Curvature and Gauss Map ,Hokkaido Mathematical Journal V.19 (1991) pp 447-464
- [10] O'neil , B. (1983), Semi Riemann Geometri , Academic Press Newyork
- [11] Ahmad T. Ali, Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, Int. J. Math. Combin. Vol.2 (2010), 30-36.
- [12] Boyer, C.B., A History of Mathematics,, John Wiley and Sons Inc., New York,1968.
- [13] Do Carmo, M.P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

- [14] Scofield, P.D., Curves of Constant Precession, Amer. Math. Montly,,102(1995) 531-537.
- [15] Turgut, M., Yilmaz, S., Smarandache Curves Minkowski Space-time, Int. J. Math. Comb., 3(2008) 51-55.
- [16] J. Walrave, Curves and surfaces in Minkowski space. Dissertation, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.
- [17] S. Yilmaz and M. Turgut, On the Differential Geometry of the curves in Minkowski space-time I, Int. J. Contemp. Math. Sci. 3(27), (2008) 1343-1349.

ÖZGEÇMİŞ

1987 Malatya doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya da tamamladım. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2012 yılında lise matematik öğretmeni olarak Van' a atandım. 2013 yılında özür grubu atamaları ile Elazığ Kovancılar Çok Programlı Anadolu Lisesine atandım, hala aynı yerde görevimi sürdürmekteyim.

Huriye Özgün