

**SINIR KOŞULLU SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN  
SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI**

**Esra SOYLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2006  
ANKARA**

Esra SOYLU tarafından hazırlanan SINIR KOŞULLU SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL

Üye : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Üye : Doç. Dr. Baki TURAN

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

Tarih : 30 / 05 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esra SOYLU

# **SINIR KOŞULLU SCHRÖNDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU VE ESAS FONKSİYONLARI**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Esra SOYLU**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Mayıs 2006**

## **ÖZET**

Bu tezde  $L_2[0, \infty)$  uzayında Bairamov, Çakar, Çelebi tarafından J. Math. Anal. Appl. (1997)'de yayınlanmış makalede üretilen Schrödinger operatörü gözönüne alınmıştır. Buna ilişkin denklemin belirli sınır koşullarını sağlayan çözümleri incelenmiştir. Operatörün resolventi ve sürekli spektrumu çalışılmıştır. Özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin yapısı incelenip, özdeğer ve spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar irdelenmiştir.

**Bilim Kodu** : 204.1.138  
**Anahtar Kelimeler** : Özdeğer, öz fonksiyon, Wronskian, spektrum, spektral tekillik, resolvent, esas fonksiyon  
**Sayfa Adedi** : 50  
**Tez Yöneticisi** : Yrd. Doç. Dr. Esra KIR

**SPECTRUM AND PRINCIPAL FUNCTIONS OF THE SCHRÖDINGER  
OPERATOR WITH A BOUNDARY CONDITION**

**(M. Sc. Thesis)**

**Esra SOYLU**

**GAZİ UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**May 2006**

**ABSTRACT**

**In this thesis, the Schrödinger operator in  $L_2[0,\infty)$  generated by Bairamov, Çakar, Çelebi in G. Math. Anal. Appl. (1997) is considered. The solutions satisfying certain initial conditions of the equation are investigated. The resolvent and the continuous spectrum of the operator  $L$  are studied. The structure of the eigenvalues and spectral singularities is investigated and the principal functions corresponding of the eigenvalues and spectral singularities are studied.**

**Science Code : 204.1.138**  
**Key Words : Eigenvalue, eigenfunction, Wronskian, spectrum, spectral singularity, resolvent, principal function**  
**Page Number : 50**  
**Adviser : Assist. Prof. Esra KIR**

## **TEŞEKKÜR**

Bu çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Esra KIR'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                     | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET.....                                                                                           | iv    |
| ABSTRACT.....                                                                                       | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                                                                       | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                   | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                                                        | viii  |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                      | 1     |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR.....                                                                             | 3     |
| 2.1. Giriş.....                                                                                     | 3     |
| 2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri .....                                                      | 7     |
| 3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ .....                                        | 14    |
| 3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spekturumu .....                                          | 14    |
| 3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri .....                                      | 21    |
| 4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL<br>TEKİLLİKLERİNE KARŞILIK GELEN ESAS FONKSİYONLAR..... | 35    |
| 4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar.....                             | 35    |
| 4.2. L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşılık Gelen Esas<br>Fonksiyonlar.....                | 43    |
| KAYNAKLAR .....                                                                                     | 49    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                      | 50    |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler       | Açıklama                               |
|----------------|----------------------------------------|
| $\mathbb{C}$   | Kompleks sayılar cümlesi               |
| $H$            | Hilbert uzayı                          |
| $D(A)$         | $A$ operatörünün tanım cümlesi         |
| $R(A)$         | $A$ operatörünün değer cümlesi         |
| $W[y_1, y_2]$  | $y_1$ ve $y_2$ çözümlerinin Wronskianı |
| $o(1)$         | Sonsuz küçük değerler                  |
| $R_\lambda(A)$ | $A$ operatörünün resolventi            |
| $\rho(A)$      | $A$ operatörünün resolvent cümlesi     |
| $\sigma_c(A)$  | $A$ operatörünün sürekli spektrumu     |
| $L^*$          | $L$ operatörünün adjointi              |
| $\sigma_p(A)$  | $A$ operatörünün diskret spektrumu     |
| $\sigma_r(A)$  | $A$ operatörünün kalan spektrumu       |
| $\sigma(A)$    | $A$ operatörünün spektrumu             |

## 1. GİRİŞ

$L_2(\mathbb{R}_+)$  uzayında tanımlı  $\ell(y) = -y'' + V(x)y$ ,  $x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  diferensiyel ifadesi ve  $y(0) = 0$  koşulu yardımıyla üretilen operatör  $L$  ile gösterilsin. Burada  $V$  kompleks değerli fonksiyondur.  $L$  operatörünün spektral analizinin incelenmesine ilk olarak 1960 yılında Naimark tarafından başlanmıştır [1,2]. Naimark, non-selfadjoint  $L$  operatörünün spektrumunun özdeğerler, spektral tekillikler ve sürekli spektrumdan oluştuğunu göstermiştir. Schwartz özdeğer olmayan, sürekli spektrumda yer alan resolventin kutuplarına spektral tekillik adını vermiştir [4]. Ayrıca Schwartz spektral tekilliklerinin spektral açılımda önemli bir rol oynadığını ve

$$\int_0^{\infty} |V(x)| \exp(\epsilon x) dx < \infty, \quad \epsilon > 0$$

şartının sağlanması durumunda özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin sonlu olduğunu göstermiştir. Lyance, spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların özelliklerini incelemiş ve spektral tekilliklerin spektral açılıma etkisini araştırmıştır [5].  $L_2[0, \infty)$  uzayında

$$-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

denklemini ve  $y(0) = 0$  sınır koşulu yardımıyla üretilen operatör  $L(\lambda)$  ile gösterilmiştir. Bairamov, Çakar ve Çelebi 1997 yılındaki çalışmalarında  $L(\lambda)$  operatörünün spektrumunu bulup  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$  ve

$$\sup_{0 \leq x < \infty} \left\{ \exp(\epsilon \sqrt{x}) \left[ |V(x)| + |U'(x)| \right] \right\} < \infty, \quad \epsilon > 0$$

koşulları altında  $L$ 'nin özdeğerinin, spektral tekilliklerinin ve onların katlarının sonlu olduğunu göstermişlerdir. Özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların, sırasıyla  $L_2$  ve  $H_-$  uzaylarına ait olduklarını ispatlamışlardır [1].

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci kısmında ise diferensiyel operatör tanımlanmış ve diferensiyel denklemin çözümleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında operatörün resolventi, parametrelerin değişimi yöntemiyle hesaplanmış, sürekli spektrumu bulunmuştur. Üçüncü bölümün ikinci kısmında  $L$  operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında  $L$  nin özdeğerlerine karşılık gelen esas fonksiyonlar tümevarım yöntemiyle bulunmuştur. İkinci kısımda  $L$ 'nin spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlar bulunmuştur. Özdeğerlere karşılık gelen esas fonksiyonların  $L_2$ , spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların  $H$  uzayına ait olduğu ispatlanmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Giriş

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, Schrödinger diferensiyel denkleminin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri incelenecektir.

#### 2.1. Tanım

$H$  Hilbert uzayında herhangi bir  $D \subset H$  lineer alt uzayı ve  $A: D \subset H \rightarrow H$  dönüşümü verilsin. Eğer her  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  ve her  $x_1, x_2 \in D$  için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_{x_1} + \alpha_2 A_{x_2}$$

eşitliği sağlanıyorsa  $A$  operatörüne lineer operatör,  $D$ 'ye ise  $A$  operatörünün tanım bölgesi denir ve bu küme  $D(A)$  ile gösterilir.

$\mathbb{C}$  kompleks sayılar cümlesi,  $X$  topolojik vektör uzayı,  $L(X)$   $X$ 'de tanımlı lineer operatör uzayı olsun.

#### 2.2. Tanım

$A \in L(X)$  ve  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  için  $(A - \lambda_0 I)x = 0$  denkleminin  $x = 0$  aşıkâr çözümünden başka  $x \neq 0$  çözümü bulunursa,  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  sayısına  $A$  operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir  $x \neq 0$  çözümüne ise  $A$  operatörünün  $\lambda_0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir.

#### 2.3. Tanım

$\overline{D(A)} = H$  olmak üzere  $\forall x, y \in D(A)$  için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği sağlamıyorsa  $A$  operatörüne simetrik operatör denir.  $A$  simetrik operatörü için  $A^* = A$  ise  $A$  operatörüne self adjoint operatör denir. Bu şartı sağlamıyorsa operatöre non-self adjoint operatör adı verilir.

#### 2.4. Tanım

$A \in L(X)$  olmak üzere

$$\rho(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine,  $A$  operatörünün resolvent cümlesi denir.

#### 2.5. Tanım

$A \in L(x)$  olmak üzere

$$\sigma_c(A) := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırsız, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine  $A$  operatörünün sürekli spektrumu denir.

#### 2.6. Tanım

$A \in L(x)$  olmak üzere

$$\sigma_r(A) := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ var, } R_\lambda(A) \text{ sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H\}$$

cümlesine  $A$  operatörünün kalan (rezidü) spektrumu denir.

#### 2.7. Tanım

$A \in L(x)$  olmak üzere

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine  $A$  operatörünün spektrumu denir.

### 2.1. Teorem (Privalov) [6]

$g$  fonksiyonu açık üst düzlemde analitik,  $E$  cümlesi  $g$  fonksiyonunun reel sıfırlarının cümlesi ve  $\mu$ ,  $E$  cümlesinin reel Lebesgue ölçüsü olsun.

Eğer  $\mu(E) > 0$  ise bu durumda  $g(z) \equiv 0$  olur.

### 2.2. Teorem

$f \in L_2(-\infty, +\infty)$  ise  $N > 0$  için

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{+N} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

olmak üzere  $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\lambda) = g(\lambda)$  olacak şekilde bir  $g \in L_2(0, \infty)$  vardır.

### 2.3. Teorem (Pavlov) [8]

Kabul edelim ki  $g(z)$  fonksiyonu açık kompleks üst düzlemde analitik, tüm basamaktan türevleri sürekli, kapalı üst düzlemde sürekli olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{d^r}{dz^r} g(z) \right| \leq A_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im } z \geq 0, |z| < T$$

ve

$$\left| \int_{-\infty}^T \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty, \quad \left| \int_T^{\infty} \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx \right| < \infty$$

sağlanacak şekilde  $T > 0$  sayısı vardır. Ayrıca  $M$  cümlesi  $g(z)$  fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi ve  $\mu(M_s) = 0$ 'dır.

$h$  keyfi pozitif bir sayı olmak üzere

$$\int_0^h \ln T(s).d\mu(M_s) = -\infty$$

ise bu durumda  $g(z) = 0$ 'dır. Burada

$$T(s) = \inf_r \frac{A_r s^r}{r!}$$

dir ve  $\mu(M_s)$ ,  $M$  cümlesinin  $s$  komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür.

#### 2.4. Teorem (Lebesgue) [4]

$(g_v(x))$  ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve  $\lim_{v \rightarrow \infty} g_v(x) = g(x)$  olsun. Eğer bir  $G \in L_1(-\infty, +\infty)$  mevcut ve  $\forall v$  için  $|g_v(x)| \leq G(x)$  ise

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_R g_v(x) dx = \int_R g(x) dx$$

dir.

Şimdi aşağıdaki sınır değer problemini tanımlayalım.

$$-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \quad (2.1)$$

diferensiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \quad (2.2)$$

sınır koşulunu gözönüne alalım.

Burada  $U$  ve  $V$  fonksiyonları, kompleks değerli fonksiyonlar,  $\lambda$  kompleks parametredir.

Eş.2.1–Eş.2.2 sınır değer problemi yardımıyla

$L_2[0, \infty; \mathbb{C}) := \{f: \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$  uzayında  $L$  operatörü aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$\forall y \in L_2[0, \infty; \mathbb{C})$  diferensiyellenebilen  $y(x, \lambda)$  fonksiyonu için

$\ell(y) := -y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y$  diferensiyel ifadesini göz önüne alalım.

$$D(L) = \left\{ y : y \in L[0, \infty; \mathbb{C}) \begin{array}{l} 1. y' \text{ var ve } \mathbb{R}_+ \text{ nın herbir sonlu alt} \\ \text{aralığında mutlak sürekli} \\ 2. \ell(y) \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}) \\ 3. y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere  $\forall y \in D(L)$  için  $Ly := \ell(y)$  şeklinde tanımlayalım [3].

## 2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri

$$\int_0^{\infty} |U(x)| dx < \infty \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} x[|V(x)| + |U'(x)|] dx < \infty \quad (2.3)$$

şartı altında  $\ell(y) = 0$  denkleminin çözümlerini inceleyelim.  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  fonksiyonlarını aşağıdaki biçimde tanımlayalım [3].

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \int_x^{\infty} U(t) dt \\ \alpha(x) &= \int_x^{\infty} [|V(t)| + |U'(t)|] dt \\ \beta(x) &= \int_0^{\infty} [t|V(t)| + 2|U(t)|] dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Eş.2.3 koşulları varsayıldığında  $\ell(y) = 0$  denklemi

$$f(x, \lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \quad (2.5)$$

$$g(x, \lambda) = e^{-i\omega(x)} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty B(x, t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \quad (2.6)$$

çözümlerine sahiptir [3].

Burada  $A(x, t)$  ve  $B(x, t)$  aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$|A(x, t)|, |B(x, t)| \leq \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{x+t}{2} \right) \exp \{ \beta(x) \} \quad (2.7)$$

$$|A_x(x, t)|, |B_x(x, t)| \leq c. \left[ \alpha^2(x) + \omega \left( \frac{x+t}{2} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$W(x) = \frac{1}{4} [ |V(x)| + |U^2(x)| + |U'(x)| ]$$

$f(x, \lambda)$  çözümü  $\text{Im} \lambda > 0$  düzleminde  $\lambda$  ya göre analitik fonksiyon ve  $g(x, \lambda)$  çözümü  $\text{Im} \lambda < 0$  düzleminde  $\lambda$  ya göre analitik fonksiyondur [3]. Ayrıca Eş.2.1 denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1$$

şartlarını sağlayan  $\varphi$  çözümü vardır.

## 2.5. Teorem [3]

$-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0$ ,  $0 \leq x < \infty$  denkleminin  $f(x, \lambda)$ ,  $g(x, \lambda)$  çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x, \lambda) &= e^{i\lambda x} [1 + o(1)] & , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \\ (b) \quad f_x(x, \lambda) &= e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)] & , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \\ (c) \quad g(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} [1 + o(1)] & , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(d) g_x(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} [-i\lambda + o(1)] \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

*İspat*

(a)  $f(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)]$  ,  $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$  ,  $x \rightarrow \infty$  asimptotik eşitliğinin ispatı ile başlayalım.

(i)  $\text{Im}\lambda = 0$  olsun.  $|e^{i\lambda t}| = 1$  olduğu açıktır.

$$f(x, \lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\Rightarrow f(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = e^{i\omega(x)} + \int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda(t-x)} dt$$

olur.

Eş.2.7 eşitsizliğinin  $0 \leq x < \infty$  için integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |A(x_0, t)| dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha \left( \frac{x_0 + t}{2} \right) e^{\beta(x_0)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{x_0+t}{2}}^\infty [|V(s)| + |U'(s)|] ds \right\} e^{\int_{x_0}^\infty [u|V(u)| + 2|U(u)|] du} dt \\ &\leq c \int_0^\infty \left\{ \int_{t/2}^\infty [|V(s)| + |U'(s)|] ds \right\} dt \\ &= c \int_0^\infty \left[ \int_0^{2s} [|V(s)| + |U'(s)|] dt \right] ds \\ &= 2c \int_0^\infty s [|V(s)| + |U'(s)|] ds \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $A(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$  olur. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\omega(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i \int_x^\infty U(t) dt} = 1$$

olur. Buradan

$$f(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1 + o(1)$$

$$f(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)] \quad , \quad \text{Im} \lambda = 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

(ii)  $\text{Im} \lambda > 0$  olsun. Bu durumda  $e^{i\lambda t}$  fonksiyonu azalandır. Bir önceki ifadeden  $A(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$  idi.

$\int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda(x-t)} dt$  integrali yeteri kadar büyük  $x$  ler için yakınsak integralin kalan terimi olduğundan

$$\Rightarrow f(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1 + o(1)$$

$$f(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)] \quad , \quad \text{Im} \lambda > 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

(b) Şimdi  $f_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} (i\lambda + o(1))$  ,  $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$  ,  $x \rightarrow \infty$  asimptotik eşitliğinin ispatını yapalım.

$$f(x, t) = i\omega(x) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$f_x(x, t) = i\omega'(x) e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + i\lambda e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A_x(x, t) e^{i\lambda t} dt - A(x, x) e^{i\lambda x}$$

$$f_x(x, t) e^{-i\lambda x} = e^{i\omega(x)} \{i\omega'(x) + i\lambda\} + \int_x^\infty A_x(x, t) e^{i\lambda(t-x)} dt - A(x, x)$$

olur.

Eş.2.8 eşitsizliğinin her iki yanının  $0 \leq x < \infty$  için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |A_x(x_0, t)| dt &\leq c \int_0^{\infty} \left[ \alpha^2(x_0) + W\left(\frac{x_0 + t}{2}\right) \right] dt \\
&= c \int_0^{\infty} \alpha^2(x_0) dt + \int_0^{\infty} W\left(\frac{x_0 + t}{2}\right) dt
\end{aligned}$$

Eş.2.3 şartı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |A_x(x, t)| dt &\leq c \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \int_x^{\infty} [|V(s)| + |U'(s)|] ds \right]^2 dt + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \int_0^{\infty} [|V(u)| + |U'(u)|] du + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} [|U(u)|^2] du \right\} \\
&\leq c \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \int_x^{\infty} [|V(s)| + |U'(s)|] ds \right]^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} u [|V(u)| + |U'(u)|] du + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} |U(u)|^2 du \right\} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $A_x(x, \cdot) \in L_1[0, \infty)$  olur.

(i)  $\text{Im}\lambda = 0$  olsun. Bu durumda  $|e^{i\lambda x}| = 1$  ve  $A(x, x) = o(1)$  olur.

$$f_x(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = [i\lambda + o(1)] \quad , \quad \text{Im}\lambda = 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

$$f_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)] \quad , \quad \text{Im}\lambda = 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(ii)  $\text{Im}\lambda > 0$  olsun. Bu durumda  $e^{i\lambda x}$  azalandır.  $A(x, x)$  sınırlıdır.

$$f_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)] \quad , \quad \text{Im}\lambda = 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(i) ve (ii) den  $f_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)] \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \quad , \quad x \rightarrow \infty$

bulunur.

Eş.2.10 asimptotik eşitlikleri, Eş.2.9 asimptotik eşitliklerine benzer olarak ispatlanır.

## 2.6. Teorem [3]

Eş.2.1 denkleminin  $f(x,\lambda)$ ,  $g(x,\lambda)$  çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x,\lambda) &= e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \\ (b) \quad g(x,\lambda) &= e^{-i\omega(x)} e^{-i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.11)$$

*İspat*

(a)  $f(x,\lambda) = e^{i\omega(x)} \cdot e^{i\lambda x} + o(1)$  asimptotik eşitliğinin ispatını yapalım.

$f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  ise

$f(x)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

fonksiyonu da  $L_1(-\infty, \infty)$  uzayına aittir.

(i)  $\text{Im}\lambda = 0$  olsun.

$$\tilde{A}(x,t) = \begin{cases} A(x,t) & ; \quad x \leq t < \infty \\ 0 & ; \quad -\infty < t < x \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $f(x,\lambda)$  çözümü

$$f(x,\lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(x,t) e^{i\lambda t} dt$$

olarak yazılır.

$A(x,t) \in L_1[0, \infty)$  olduğundan  $\tilde{A}(x,t) \in L_1[0, \infty)$  olur.

$$f(x,\lambda) = e^{i\lambda x} e^{i\omega(x)} + o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda = 0$$

dir.

(ii)  $\text{Im}\lambda > 0$  olsun. Bu durumda  $e^{i\lambda t}$  fonksiyonu azalandır.  $|A(x,t)| \cdot |e^{i\lambda t}| \leq |A(x,t)|$  ve  $A(x,t) \in L_1[0,\infty)$  şartı sağlandığından

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |A(x,t) e^{i\lambda t}| dt = \int_0^{\infty} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |A(x,t) e^{i\lambda t}| dt$$

$$= o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im}\lambda > 0$$

elde edilir. O halde  $f(x,\lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + o(1)$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im}\lambda > 0$  olur.

(i) ve (ii) den  $f(x,\lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + o(1)$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im}\lambda \geq 0$  elde edilir.

Benzer şekilde  $g(x,\lambda) = e^{-i\omega(x)} e^{-i\lambda x} + o(1)$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im}\lambda \leq 0$  asimptotik eşitliği de gösterilebilir.

## 2.7. Teorem [3]

Eş.2.1 denkleminin  $f(x,\lambda)$  ve  $g(x,\lambda)$  çözümleri için

$$W[f,g] = \lim_{x \rightarrow \infty} W[f,g] = -2i\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

dir.

*İspat*

2.5. Teoremdeki asimptotik eşitlikleri kullanırsak

$$\begin{aligned} W[f(x,\lambda), g(x,\lambda)] &= \begin{vmatrix} f(x,\lambda) & g(x,\lambda) \\ f_x(x,\lambda) & g_x(x,\lambda) \end{vmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x,\lambda)g_x(x,\lambda) - f_x(x,\lambda)g(x,\lambda)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-i\lambda) - (i\lambda) = -2i\lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  için  $f(x,\lambda)$  ve  $g(x,\lambda)$ , Eş.2.1 denkleminin temel çözümler sistemidir.

### 3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ

#### 3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spekturumu

$F(\lambda) := f(0, \lambda)$  ,  $G(\lambda) := g(0, \lambda)$  olmak üzere

$$\rho_1 := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+ , F(\lambda) \neq 0\}$$

$$\rho_2 := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_- , G(\lambda) \neq 0\}$$

ve

$$\rho(L(\lambda)) := \rho_1(\lambda) \cup \rho_2(\lambda)$$

olarak tanımlansın [3].

#### 3.1. Teorem [1]

$\lambda \in \rho(L(\lambda))$  için  $L(\lambda)$  integral operatörünün resolventi

$$R(L(\lambda)) h(t) = \int_0^\infty R(x, t; \lambda) h(t) dt \quad h \in L_2(\mathbb{R}_+)$$

biçimindedir.

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R_1(x, t; \lambda) & , \quad \lambda \in \rho_1(\lambda) \\ R_2(x, t; \lambda) & , \quad \lambda \in \rho_2(\lambda) \end{cases} \quad (3.1)$$

Burada

$$R_1(x, t; \lambda) = \frac{1}{F(\lambda)} \begin{cases} f(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) & , \quad 0 \leq t < x \\ -f(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) & , \quad x \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

$$R_2(x, t; \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \begin{cases} g(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) & , \quad 0 \leq t < x \\ -g(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) & , \quad x \leq t < \infty \end{cases}$$

*İspat*

$\text{Im} \lambda > 0$  için  $F(\lambda) \neq 0$  dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
W[f, \varphi] &= \lim_{x \rightarrow 0} [f(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - f'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda)] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - \lim_{x \rightarrow 0} f'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) \\
&= f(0, \lambda) \varphi'(0, \lambda) - f'(0, \lambda) \varphi(0, \lambda) \\
&= f(0, \lambda).1 - f'(0, \lambda).0 = F(\lambda) \neq 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\text{Im} \lambda > 0$  için  $F(\lambda) \neq 0$  koşulunu sağlayan  $\lambda$  lar için Eş.2.1 denkleminin temel çözümler sistemi  $f(x, \lambda)$  ve  $\varphi(x, \lambda)$  dır.

$$-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = h(x) \tag{3.4}$$

homogen olmayan denklemi gözönüne alalım. Bunun için parametrelerin değişim yöntemini kullanacağız.

$$-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0$$

homogen denkleminin çözümü

$$\tilde{y} = c_1 f(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda) \tag{3.5}$$

biçiminde yazılabilir. Genel denklemin çözümünü ise

$$y = c_1(x) f(x, \lambda) + c_2(x) \varphi(x, \lambda) \tag{3.6}$$

biçiminde arayalım.

Bu durumda

$$y' = c_1'(x) f(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi(x, \lambda) + c_1(x) f'(x, \lambda) + c_2(x) \varphi'(x, \lambda)$$

elde edilir.

Şimdi

$$c_1'(x) f(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi(x, \lambda) = 0 \tag{3.7}$$

olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$$y' = c_1(x) f'(x, \lambda) + c_2(x) \varphi'(x, \lambda)$$

$$y'' = c_1'(x) f'(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi'(x, \lambda) + c_1(x) f''(x, \lambda) + c_2(x) \varphi''(x, \lambda)$$

olur.

$y$  ve  $y''$  Eş.3.4 de yerine yazılırsa

$$c_1(x) f'(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi'(x, \lambda) = -h(x) \quad (3.8)$$

elde edilir. Eş.3.7 ve Eş.3.8 eşitliklerinden aşağıdaki denklem sistemi bulunur.

$$c_1'(x) f(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi(x, \lambda) = 0$$

$$c_1'(x) f'(x, \lambda) + c_2'(x) \varphi'(x, \lambda) = -h(x) \quad (3.9)$$

Eş.3.9 sisteminin çözümünden

$$c_1'(x) = \frac{h(x) \varphi(x, \lambda)}{F(\lambda)} \quad \text{ve} \quad c_2'(x) = \frac{-h(x) f(x, \lambda)}{F(\lambda)}$$

olur. Buradan

$$c_1(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t, \lambda) h(t)}{F(\lambda)} dt + c_1(0) \quad (3.10)$$

$$c_2(x) = -\int_x^\infty \frac{f(t, \lambda) h(t)}{F(\lambda)} dt + c_2(\infty) \quad (3.11)$$

elde edilir.

$y = c_1(x)f(x, \lambda) + c_2(x)\varphi(x, \lambda)$  ile tanımlanan  $y(x, \lambda)$  çözümünün  $L_2[0, \infty)$  da olması için  $c_2(\infty) = 0$  ve sınır koşulunun sağlanması için  $c_1(0) = 0$  olmalıdır.

O halde

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{F(\lambda)} \int_0^x \varphi(t, \lambda) h(t) dt \\ c_2(x) &= -\frac{1}{F(\lambda)} \int_x^\infty f(t, \lambda) h(t) dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklini alır.

$$y = \int_0^x \frac{\varphi(t, \lambda) f(x, \lambda)}{F(\lambda)} h(t) dt - \int_x^\infty \frac{f(t, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{F(\lambda)} h(t) dt$$

bulunur.

$$R_1(x, t; \lambda) = \frac{1}{F(\lambda)} \begin{cases} \varphi(t, \lambda) f(x, \lambda) & ; \quad 0 \leq t < x \\ -\varphi(x, \lambda) f(t, \lambda) & ; \quad x \leq t < \infty \end{cases}$$

Kabul edilirse

$$y = \int_0^\infty R_1(x, t; \lambda) h(t) dt$$

olur. Diğer yandan  $y = (R_{1\lambda}h)(x)$  olduğundan

$$(R_{1\lambda}h)(x) = \int_0^\infty R_1(x, t; \lambda) h(t) dt$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$R_2(x, t; \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \begin{cases} g(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) & ; \quad 0 \leq t < x \\ -g(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) & ; \quad x \leq t < \infty \end{cases}$$

### 3.2. Teorem [1]

Her bir  $\lambda$  kompleks sayısı için  $\text{Im}\lambda > 0$  düzleminde

$$\|R_{\lambda}^{+}\| \geq \frac{C_{\lambda}^{+}}{|F(\lambda)| \sqrt{|\text{Im}\lambda|}} \quad (3.13)$$

olacak şekilde  $C_{\lambda}^{+}$  sayısı ve  $\text{Im}\lambda < 0$  düzleminde

$$\|R_{\lambda}^{-}\| \geq \frac{C_{\lambda}^{-}}{|G(\lambda)| \sqrt{|\text{Im}\lambda|}} \quad (3.14)$$

olacak şekilde  $C_{\lambda}^{-}$  sayısı vardır.

*İspat*

Eş.3.13 eşitsizliğini ispatlayalım.

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} \overline{\varphi(t, \lambda)} & ; \quad 0 \leq t < a \\ 0 & ; \quad a \leq t < \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\int_0^{\infty} |f_1(\lambda)|^2 dt = \int_0^a |\overline{\varphi(t, \lambda)}|^2 dt < \infty$$

olduğundan  $f_1(t) \in L_2[0, \infty)$  olur.

$$\begin{aligned} (R_{\lambda}^{+} f_1)(t) &= \int_0^{\infty} R_1(x, t; \lambda) f_1(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{f(x, \lambda) \varphi(t, \lambda)}{F(\lambda)} \overline{\varphi(t, \lambda)} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x, \lambda)}{F(\lambda)} \int_0^a |\varphi(t, \lambda)|^2 dt$$

$$(\mathbb{R}_\lambda^+ f_1)(t) = \frac{f(x, \lambda)}{F(\lambda)} \|f_1\|^2$$

$$f(x, \lambda) = e^{i[\omega(x) + \lambda x]} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

asimptotik eşitliğinden

$$|f(x, \lambda)| = e^{-\text{Im} \lambda x} + o(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$|f(x, \lambda)| > \frac{1}{2} e^{-\text{Im} \lambda x}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x, \lambda)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \int_a^\infty e^{-2 \text{Im} \lambda x} dx = -\frac{1}{8 \text{Im} \lambda} e^{-2x \text{Im} \lambda} \Big|_a^\infty \\ &= \frac{1}{8 \text{Im} \lambda} e^{-2a \text{Im} \lambda} \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. O halde Eş.3.15 aşağıdaki eşitlikte gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|\mathbb{R}_\lambda^+ f_1\|^2 &= \int_0^\infty |(\mathbb{R}_\lambda^+ f_1)(t)|^2 dt \\ &\geq \int_0^\infty |f(x, \lambda)|^2 dx \frac{\|f_1\|^2}{|F(\lambda)|^2} \\ &> \frac{1}{8 \text{Im} \lambda} e^{-2a \text{Im} \lambda} \frac{\|f_1\|^2}{|F(\lambda)|^2} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\|R_{\lambda}^{+}\| \geq \frac{C_{\lambda}^{+}}{|F(\lambda)| \sqrt{|\operatorname{Im} \lambda|}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Eş.3.14 de elde edilir.

### 3.3. Teorem [1]

$\lambda$ ,  $L$  operatörünün resolvent cümlesine ait ve  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$  ise  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_{\lambda}\| = \infty$ .

*İspat*

Eş.3.13 ve Eş.3.14 eşitsizlikleri ve  $\operatorname{Im} \lambda_0 = 0$  olduğu gözönüne alınırsa

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_{\lambda}\| = \infty$  elde edilir.

### 3.4. Teorem [1]

$L$  operatörünün sürekli spektrumu reel eksendir. Yani  $\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$  dır.

*İspat*

$\lambda \in (-\infty, \infty)$  için Teorem 3.2'den  $R_{\lambda}(L)$  operatörünün varlığı ve Teorem 3.3'den  $R_{\lambda}(L)$  operatörünün sınırsızlığı ispatlandı. Şimdi  $R_{\lambda}(L)$  nin tanım cümlesinin  $L_2(0, \infty)$  da yoğun olduğunu gösterelim.

$$L_2(0, \infty) = \overline{R_{\lambda}(L - \lambda I)} \oplus N(L^* - \lambda I)$$

eşitliğinde  $N(L - \lambda I)$  cümlesi  $L^* - \lambda I$  operatörünün çekirdeğidir.  $L^*$  ise  $L$  nin adjointidir.

$$L^* = \begin{cases} -y'' + [\overline{V(x)} + 2\lambda \overline{U(x)} - \lambda^2] y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ile gösterilen operatörün pozitif özdeğeri olmadığından  $N(L^* - \lambda I) = \{0\}$  elde edilir.

O halde  $L_2(0, \infty) = \overline{D((L - \lambda I)^{-1})}$  dir.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'den  $\sigma_c(L) = (-\infty, +\infty)$  dur.

### 3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

#### 3.1. Tanım [4]

L operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutupları olup, özdeğerleri olmayan, sürekli spektrumda yer alan noktalara spektral tekillik denir. L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesini  $\sigma_p(L)$  ve  $\sigma_{ss}(L)$  ile gösterelim.

#### 3.5. Teorem [3]

$$(a) \sigma_p(L(\lambda)) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, F(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_-, G(\lambda) = 0\} \quad (3.16)$$

$$(b) \sigma_{ss}(L(\lambda)) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, F(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, G(\lambda) = 0\} \quad (3.17)$$

Burada  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

*İspat*

(a)  $M_1$  ve  $M_2$  ile aşağıdaki cümleleri tanımlayalım.

$$M_1 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, F(\lambda) = 0\}$$

$$M_2 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_-, G(\lambda) = 0\}$$

$$M = M_1 \cup M_2$$

cümlesini gösterelim.

L operatörünün özdeğerlerinin tanımı kullanılırsa

$$M \subset \sigma_p(L(\lambda)) \quad (3.18)$$

olduğu açıktır. Eş.3.16 eşitliğini ispatlamak için  $\sigma_p(L(\lambda)) \subset M$  olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda_0 \in \sigma_p(L(\lambda))$  olduğunu kabul edelim.

(1)  $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$  olsun.  $\lambda_0 \in \sigma_p(L(\lambda))$  olduğundan Eş.2.1 denkleminin  $\lambda = \lambda_0$  için  $y(0) = 0$  koşulunu sağlayan  $y(x, \lambda_0) \in L_2[0, \infty)$  çözümü vardır. Wronskian  $x$ 'ten bağımsız olduğundan

$$W[y(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_0)] = \lim_{x \rightarrow 0} [y(x, \lambda_0)\varphi'(x, \lambda_0) - y'(x, \lambda_0)\varphi(x, \lambda_0)] = 0$$

dır.  $c \neq 0$  sabit olmak üzere  $y(x, \lambda_0) = c.\varphi(x, \lambda_0)$  dır.

$$\begin{aligned} W[f(x, \lambda_0), y(x, \lambda_0)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [f(x, \lambda_0)c.\varphi'(x, \lambda_0) - f'(x, \lambda_0)c.\varphi(x, \lambda_0)] \\ &= c.F(\lambda_0) \end{aligned} \tag{3.19}$$

dır.

$$\begin{aligned} W[f(x, \lambda_0), y(x, \lambda_0)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x, \lambda_0).y'(x, \lambda_0) - f'(x, \lambda_0).y(x, \lambda_0)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

dır.

Eş.3.19 ve Eş.3.20 ifadelerinden,  $c \neq 0$  olduğundan  $F(\lambda_0) = 0$  dır.

(2)  $\lambda_0 \in \mathbb{C}_-$  olsun.  $G(\lambda_0) = 0$  olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(3)  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  olsun. Eş.2.12'den

Eş.2.1 denkleminin keyfi çözümü

$$y(x, \lambda_0) = c_1(x)f(x, \lambda_0) + c_2(x)g(x, \lambda_0)$$

Eş.2.9 ve Eş.2.10 dan

$$y(x, \lambda_0) = c_1 e^{i\lambda_0 x} + c_2 e^{-i\lambda_0 x} + o(1) \quad x \rightarrow \infty$$

$$y(\cdot, \lambda_0) \notin L_2[0, \infty)$$

olur. O halde

$$\sigma_p(L(\lambda)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$$

(1)–(2) ve (3) den

$$\sigma_p(L(\lambda)) \subset M \tag{3.21}$$

dir.

Eş.3.18 ve Eş.3.21 ifadelerinden

$$\sigma_p(L(\lambda)) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, F(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_-, G(\lambda) = 0\}$$

elde edilir.

(b) Eş.3.1–Eş.3.2 ve (a) dan  $L(\lambda)$  operatörünün spektral tekilliklerinin reel ekseninde  $F$  ve  $G$  nin sıfırları olduğunu elde ederiz.

$$W[f(x, \lambda), g(x, \lambda)] = F(\lambda)g_x(0, \lambda) - G(\lambda)f_x(0, \lambda) = -2i\lambda, \quad x \in \mathbb{R}$$

ifadesinden

$$\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, F(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, G(\lambda) = 0\} = \emptyset$$

Şimdi  $L$  operatörün özdeğerlerini ve spektral tekilliklerinin yapısını incelemek için sırasıyla  $\overline{\mathbb{C}_+}$  ve  $\overline{\mathbb{C}_-}$  de  $F$  ve  $G$  fonksiyonlarının üst ve alt düzlemdeki sıfırlarının yapısını incelememiz gerekiyor. Basitlik için  $\overline{\mathbb{C}_+}$  'da  $F$  fonksiyonunun sıfırlarının yapısını inceleyelim. Benzer olarak,  $\overline{\mathbb{C}_-}$  de  $G$  fonksiyonunun sıfırlarının yapısı incelenebilir. Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$Q_1 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}_+, F(\lambda) = 0\}, Q_2 = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda) = 0\}$$

### 3.6. Teorem [3]

(i)  $Q_1$  kümesi sınırlıdır ve en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir ve limit noktaları sadece reel ekseninde bulunabilir.

(ii)  $Q_2$  kümesi kompaktır ve lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

*İspat*

(i)

$$F(\lambda) = e^{i\omega(0)} + o(1) \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

bağıntısından

$$F(\lambda) \neq 0$$

olduğundan  $F(\lambda)$  fonksiyonu  $\text{Im} \lambda \geq 0$  yarı düzleminde analitiktir.

Özdeş olarak sıfırdan farklı analitik fonksiyonunun sıfırları sınırlı bir bölgededir. O halde  $Q_1$  cümlesi sınırlıdır.

$F(\lambda)$  fonksiyonu  $\text{Im} \lambda \geq 0$  yarı düzleminde analitik olduğundan onun analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (yani  $Q_1$  cümlesi) en çok sayılabilir sayıdadır.

Analitik fonksiyonun analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitiklik bölgesinin sınırında olduğundan  $Q_1$  cümlesinin limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığında yer alır.

(ii)  $Q_2$  kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

Bunun için  $Q_2$  den alınan dizinin limit noktasının  $Q_2$  ye ait olduğunu göstermeliyiz.

$(\lambda_n) \in Q_2, F(\lambda_n) = 0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$  herhangi bir dizi olsun.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F(\lambda_n) &= F(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) \\ &= F(\lambda_0) = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan  $\lambda_0 \in Q_2$  elde edilir

Şimdi  $\mu(Q_2) = 0$  olduğunu göstermek için Privalov teoremini kullanalım.  $Q_2$  cümlesinin lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdan büyük olsaydı  $F(\lambda) = 0$  olması gerekirdi. Fakat  $F(\lambda) \neq 0$  olduğundan  $\mu(Q_2) = 0$  olur.

Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'dan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

### 3.1. Sonuç [3]

$L(\lambda)$  nın özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin kümeleri sınırlıdır en fazla sayılabilir sayıdadır. Eğer Eş.2.3 koşulu sağlanırsa limit noktaları sadece reel eksenin sınırlı alt aralığında bulunabilir.

Şimdiye kadar Eş.2.3 koşulunu gözönünde bulundurduk. Bundan sonra aşağıdaki koşulları kullanacağız.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \quad , \quad \sup_{0 \leq x < \infty} \left\{ \exp(\epsilon \sqrt{x}) \left[ |V(x)| + |U'(x)| \right] \right\} < \infty \quad (3.22)$$

Eş.2.3 ve Eş.2.22'den

$$\alpha(x) \leq c_0 \exp\left(-\frac{\epsilon}{2} \sqrt{x}\right) \quad , \quad \beta(x) \leq c_0 \exp\left(-\frac{\epsilon}{2} \sqrt{x}\right) \quad (3.23)$$

Eş.2.6 ve Eş.3.23'den

$$|A(x,t)| \quad , \quad |B(x,t)| \leq c_0 \exp\left\{-\frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{x+t}{2}}\right\} \quad (3.24)$$

dır.

### 3.7. Teorem [3]

$$|F^{(r)}(\lambda)| \leq M_r \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$M_0 = \exp \left\{ - \int_0^\infty \operatorname{Im} U(t) \, dt \right\} + \int_0^\infty |A(0, t)| \, dt \quad (3.26)$$

ve

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c. \int_0^\infty t^r \cdot \exp \left( - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t} \right) dt \quad , \quad r = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlıdır.

*İspat*

$r = 0$  için

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty A(0, t) e^{i\lambda t} \, dt \\ |F(\lambda)| &= \left| e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty A(0, t) e^{i\lambda t} \, dt \right| \\ &\leq \left| e^{i\omega(0)} \right| + \int_0^\infty |A(0, t)| \cdot \left| e^{i\lambda t} \right| \, dt \\ &= \left| e^{i \left\{ \int_0^\infty [\operatorname{Re} U(t) + i \operatorname{Im} U(t)] dt \right\}} \right| + \int_0^\infty |A(0, t)| \cdot \left| e^{-\operatorname{Im}(t)} \right| \, dt \\ &\leq \left| \exp \left\{ - \int_0^\infty \operatorname{Im} U(t) \, dt \right\} \right| + \int_0^\infty |A(0, t)| \, dt \end{aligned}$$

dir.

$r > 0$  için ispatı yapalım.

$$f(x, \lambda) = e^{i\omega(x)} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$F(\lambda) = f(0, \lambda) = e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty A(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = \int_0^\infty (it) \cdot A(0, t) \cdot e^{i\lambda t} dt$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} F(\lambda) = \int_0^\infty (it)^2 \cdot A(0, t) \cdot e^{i\lambda t} dt$$

$\vdots$

$$\frac{d^r}{d\lambda^r} F(\lambda) = \int_0^\infty (it)^r \cdot A(0, t) \cdot e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} F(\lambda) \right| = \left| \int_0^\infty (it)^r \cdot A(0, t) \cdot e^{i\lambda t} dt \right|$$

$$\leq \int_0^\infty |A(0, t)| t^r dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha \left( \frac{t}{2} \right) e^{\beta(0)} t^r dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{t}{2}}} e^{\beta(0)} t^r dt$$

$$= c \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{t}{2}}} t^r dt$$

$$= c \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{k}} 2^r \cdot k^r \cdot 2 dk$$

$$= 2^{r+1} \cdot c \int_0^\infty t^r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}\right) dt \quad r = 1, 2, \dots$$

O halde

$$|F^{(r)}(\lambda)| \leq M_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

$Q_1$  ve  $Q_2$  nin limit noktalarının kümesini sırası ile  $Q_3$  ve  $Q_4$  ile ve  $F$  nin  $\overline{\mathbb{C}_+}$  daki sonsuz katlı sıfırlarının kümesini  $Q_5$  ile gösterelim.

### 3.8. Teorem [3]

$$Q_3 \subset Q_2, Q_4 \subset Q_2, Q_5 \subset Q_2$$

*İspat*

$Q_3 \subset Q_2$  olduğunu gösterelim.

$\lambda \in Q_3$  olsun.  $\text{Im}\lambda > 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ,  $F(\lambda_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\lambda_n) = 0 \Rightarrow F(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) = 0$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \in Q_2$$

$Q_4 \subset Q_2$  olduğunu gösterelim.

$\lambda \in Q_4$  olsun.  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im}\lambda = 0$ ,  $F(\lambda_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\lambda_n) = 0 \Rightarrow F(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) = 0$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \in Q_2$$

$Q_5 \subset Q_2$  olduğunu gösterelim.

$\lambda \in Q_5$  olsun.

$$Q_5 = \{\lambda \mid \text{Im}\lambda \geq 0, F(\lambda_0) = 0, \lambda \text{ sonsuz katlı sıfır}\}$$

$\lambda_0 \in Q_5$  ise  $\text{Im}\lambda \geq 0$ ,  $F(\lambda_0) = 0$ ,  $\lambda_0$  sonsuz katlı sıfır

$$\Rightarrow F^k(\lambda_0) = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bir fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer alıyorsa o fonksiyon o bölgede özdeş olarak sıfırdır.

3.1. Lemma [3]

$$Q_3 \subset Q_5, \quad Q_4 \subset Q_5$$

*İspat*

$Q_3 \subset Q_5$  olduğunu gösterelim.

$Q_3 \not\subset Q_5$  olsun. Yani

$$\exists (\lambda_n) \in Q_3 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0 \in Q_3 \text{ var } \ni \lambda_0 \notin Q_5$$

$F(\lambda)$  reel eksene kadar sürekli olduğundan  $\lambda_0 \in Q_1$  olur ve öyle  $n_0$  sonlu pozitif tamsayısı vardır ki

$$F(\lambda) = (\lambda_n - \lambda_0)^n a(\lambda_n) \quad a(\lambda_0) \neq 0$$

$F(\lambda) = 0$  ve  $\lambda_n \neq \lambda_0$  olduğundan

$$0 = \frac{F(\lambda)}{(\lambda_n - \lambda_0)^n} = a(\lambda_n)$$

$a(\lambda)$  sürekli fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda_n) = a\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\right) = a(\lambda_0) = 0$$

Dolayısıyla  $\lambda_0$ ,  $F(\lambda)$  nın sonlu katlı sıfırı olamaz. Sonsuz katlı sıfırıdır.

$Q_4 \subset Q_5$  benzer olarak gösterilir.

### 3.9. Teorem [3]

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c \cdot \int_0^{\infty} t^r \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2}\sqrt{t}} dt, \quad r = 1, 2, \dots (c > 0)$$

ile tanımlanan  $M_r$  sabitleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$M_r \leq B \cdot b^r \cdot r! \quad (3.27)$$

Burada  $B$  ve  $b$  sabitleri  $c$ 'ye ve  $\epsilon$ 'a bağlı pozitif sabitlerdir.

*İspat*

$\frac{\epsilon}{2} \sqrt{t} = u$  dönüşümünü yapalım.

$$\frac{\epsilon^2}{4} t = u^2 \Rightarrow dt = \frac{8u}{\epsilon^2} du$$

olur.

$$M_r = 2^{r+1} \cdot c \cdot \int_0^{\infty} \left( \frac{2u}{\epsilon} \right)^{2r} \cdot e^{-u} \frac{8u}{\epsilon^2} du$$

$$= 2^{r+1} \cdot c \cdot \frac{2^{2r} \cdot 8}{\epsilon^{2+2r}} \int_0^{\infty} u^{2r+1} \cdot e^{-u} du$$

$$= 2^{r+1} \cdot c \cdot \frac{2^{2r} \cdot 8}{\epsilon^{2+2r}} \int_0^{\infty} t^{2r+1} e^{-t} dt$$

elde edilir. Sonuncu integrale  $2r$  kez kısmi integrasyon uygularsak

$$M_r = \frac{16c \cdot 8^r}{\epsilon^{2r+2}} (2r+1) (2r) (2r-1) \dots 3.2.1. \int_0^{\infty} t e^{-t} dt$$

$$\leq \frac{16c \cdot 8^r}{\epsilon^{2r+2}} \underbrace{(2r+1) (2r+1) \dots (2r+1)}_{2r-\text{tan e}} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt$$

$$M_r \leq \frac{16c \cdot 8^r}{\varepsilon^{2r+2}} (2r+1)^{2r} \cdot B$$

$$M_r \leq 8^r \cdot B \cdot (2r+1)^{2r}$$

$$= 8^r \cdot B \cdot \left( 2r \left( 1 + \frac{1}{2r} \right) \right)^{2r}$$

$$= 8^r \cdot B (2r)^{2r} \left( 1 + \frac{1}{2r} \right)^{2r}$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2r} \right)^{2r} < e \text{ ve } r^r < e^r \cdot r! \text{ eşitsizlikleri kullanılırsa}$$

$$M_r \leq 32^r \cdot e^r \cdot r! \cdot r^r \cdot B$$

$$= B \cdot b^r \cdot r^r \cdot r! \quad (3.28)$$

### 3.10. Teorem [3]

$F(\lambda)$  fonksiyonunun  $\text{Im} \lambda \geq 0$  yarı düzlemindeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi boştur. Yani  $Q_5 = \emptyset$  dur.

*İspat*

Teoremi analitik fonksiyonların birebirlik teoremi olan Pavlov Teoremi'ni kullanarak ispatlayacağız.  $Q_5$  kümesi sınırlıdır ve  $Q_5 \subset (-\infty, \infty)$ 'dur. Dolayısıyla  $\exists N > 0$  sabiti var.

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} F(\lambda) \right| \leq M_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im} \lambda \geq 0, \quad |\lambda| < 2N$$

olur. Ayrıca

$$\left| \int_{-\infty}^N \frac{\ln |F(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty \quad \left| \int_N^{\infty} \frac{\ln |F(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty$$

sağlanır.

$E(s) = \inf_r \frac{M_r s^r}{r!}$  ve  $\mu(Q_5, s)$  ,  $Q_5$  cümlesinin  $s$  komşuluğunu lineer Lebesgue ölçüsüdür.

Eğer  $\int_0^h \ln E(s) d\mu(Q_5, s) = -\infty$  olsaydı Pavlov teoremine göre  $F(\lambda) = 0$  olmalıydı.

Fakat bilindiği gibi  $F(\lambda) \neq 0$  dır. Bu nedenle

$$\int_0^h \ln E(s) d\mu(Q_5, s) > -\infty$$

olur.  $E(s)$  aşağıdaki gibi değerlendirilebilir. Eş.3.28'e göre

$$\begin{aligned} E(s) &= \inf_r \frac{M_r s^r}{r!} \leq B \inf_r \left\{ \frac{b^r \cdot r^r \cdot f! \cdot s^r}{f!} \right\} \\ &= B \inf_r \{b^r \cdot r^r \cdot s^r\} \\ &\leq \min_{x \in [0, \infty)} \{b^x \cdot x^x \cdot s^x\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur.

$$f(x) = b^x \cdot s^x \cdot x^x = (bsx)^x$$

olmak üzere  $E(s)$  ile ilgili bir değerlendirme elde etmek için  $f(x)$  fonksiyonunun minimumu bulunmalıdır.

$$f(x) = (bsx)^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln (bsx)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(bsx) + 1 \text{ ise}$$

$$f'(x) = (bsx)^x [\ln(bsx) + 1] \quad (3.30)$$

Şimdi ekstremum noktalarını inceleyelim.

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = (bsx)^x [\ln(bsx) + 1] = 0$$

ise  $\ln(bsx) = -1$  ve  $\ln e^{-1} = -1$  olduğundan

$$\ln(bsx) = \ln(e^{-1}) \Rightarrow bsx = e^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{bse}$$

bulunur.

Şimdi  $x = b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot e^{-1}$  noktasında yerel minumum olduğunu gösterelim. Eş.3.30'dan

$$\ln f'(x) = \ln(bsx)^x + \ln[\ln(bsx) + 1]$$

ve türev alınırsa

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln(bsx) + x \frac{bs}{bsx} + \frac{\frac{bs}{bsx}}{\ln(bsx) + 1}$$

$$f''(x) = f'(x) \left[ \frac{(\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x}}{\ln(bsx) + 1} \right]$$

$$f''(x) = (bsx)^x \left[ (\ln(bsx) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

elde edilir.

$$f''(b^{-1}s^{-1}e^{-1}) = (e^{-1})^{b^{-1}s^{-1}e^{-1}} [bse] > 0$$

olduğundan  $x = \frac{1}{bse}$  noktasında yerel minimuma sahiptir.

$$f(b^{-1}s^{-1}e^{-1}) = e^{-b^{-1}s^{-1}e^{-1}}$$

sonucu elde edilir. O halde

$$E(s) \leq B \inf_r \{b^r s^r r^r\} \leq B \exp\{-b^{-1}s^{-1}e^{-1}\}$$

olur.

$$\ln E(s) \leq -\frac{1}{bse} < \frac{1}{s}$$

olduğundan Pavlov teoremine göre

$$\int_0^h \frac{1}{s} d\mu(Q_5, s) < \infty$$

bulunur.

Bu integralin yakınsak olması için  $Q_5$  cümlesinin lineer komşuluğunun boş olması gerekir. Bu ise  $Q_5$  in boş olması demektir. Yani  $Q_5 = \emptyset$  dur.

$Q_3 \subset Q_5$  ve  $Q_4 \subset Q_5$  olduğundan  $Q_3 = \emptyset$  ve  $Q_4 = \emptyset$  elde edilir.

Bilindiği gibi  $Q_3$  cümlesi  $Q_1$  cümlesinin limit noktalarıdır. Ayrıca  $Q_1$  cümlesi 3.6. Teoreme göre sınırlı olduğundan  $Q_1$  cümlesi sonlu sayıda elemana sahiptir. Buradan  $Q_2$  cümlesinin sonlu sayıda elemana sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla  $F(\lambda)$  fonksiyonunun  $\text{Im} \lambda \geq 0$  yarı düzlemindeki tüm sıfırları sonlu sayıdadır.

Teorem 3.5'den aşağıdaki sonuç sağlanır.

### 3.2. Sonuç [3]

$L(\lambda)$  operatörü sonlu sayıda özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir. Her biri eğer Eş.3.22 koşulunu sağlarsa, onların katıda sonludur.

#### 4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞILIK GELEN ESAS FONKSİYONLAR

Bu bölümde L operatörünün özdeğerlerine ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonları incelenecektir. Daha sonra L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlarının sırasıyla  $L_2$  ve  $H_-$  uzaylarına ait olduğu ispat edilecektir.

##### 4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ,  $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}\lambda > 0\}$  ,  $\mathbb{C}_- = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}\lambda < 0\}$  olmak üzere  $\mathbb{C}_+$  da F nin sıfırlarını  $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_j^+$   $\mathbb{C}_-$  de G nin sıfırlarını  $\mu_1^-, \mu_2^-, \dots, \mu_k^-$  ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla  $m_1^+, m_2^+, \dots, m_j^+$  ve  $m_1^-, m_2^-, \dots, m_k^-$  olsun. Benzer şekilde  $\mathbb{R}^*$  da F nin sıfırlarının  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ve G nin sıfırlarını  $\mu_1, \dots, \mu_q$  ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla  $m_1, \dots, m_p$  ve  $n_1, \dots, n_q$  olsun.

$n = 0, 1, \dots, m_i^+ - 1$  ,  $i = 1, 2, \dots, j$  için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} W[f(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] \right\}_{\lambda = \lambda_i^+} = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} F(\lambda) \right\}_{\lambda = \lambda_i^+} = 0 \quad (4.1)$$

ve

$v = 0, 1, \dots, m_l^- - 1$  ,  $l = 1, 2, \dots, k$  için

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} W[g(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] \right\}_{\lambda = \mu_l^-} = \left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} G(\lambda) \right\}_{\lambda = \mu_l^-} = 0 \quad (4.2)$$

dir.  $n = v = 0$  için

$$\varphi(x, \lambda_i^+) = a_0(\lambda_i^+) f(x, \lambda_i^+) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (4.3)$$

$$\varphi(x, \mu_l^-) = b_0(\mu_l^-) f(x, \mu_l^-) \quad , \quad l = 1, 2, \dots, k \quad (4.4)$$

dir. Burada  $a_0(\lambda_i^+) \neq 0$  ve  $b_0(\mu_i^-) \neq 0$  dir.

#### 4.1. Teorem [3]

$n = 0, 1, \dots, m_i^+ - 1$  ,  $i = 1, 2, \dots, j$  için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \quad (4.5)$$

ve

$v = 0, 1, \dots, m_i^- - 1$  ,  $l = 1, 2, \dots, k$  için

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-} = \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} b_{v-j} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} g(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-} \quad (4.6)$$

dır. Burada  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ve  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sabitleri sırası ile  $\lambda_i^+$  ve  $\mu_i^-$  ye bağlıdır.

*İspat*

Eş.4.5'in ispatı ile başlayalım.

$n = 0$  için

$$\{W[f(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \{F(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_i^+} = 0$$

olduğundan

$$\{W[f(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)]\}_{\lambda=\lambda_i^+} = 0 \quad (4.7)$$

olur. Eş.4.5 elde edilir.

$n = 1$  için ispatlayalım.

$u(x, \lambda)$ ,  $-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0$  denkleminin bir çözümü olsun.  $\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda)$  da denklemin bir çözümüdür.

$$\left[ -\frac{d}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right] \frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda) = u(x, \lambda)$$

dır.  $f$  ve  $\varphi$ ,  $-y'' + [V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2]y = 0$  denkleminin çözümleri olduklarından

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = f(x, \lambda_i^+) \quad (4.8)$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \varphi(x, \lambda_i^+) \quad (4.9)$$

elde edilir.

$\varphi(x, \lambda_i^+) = a_0(\lambda_i^+) f(x, \lambda_i^+)$  ,  $a_0(\lambda_i^+) \neq 0$  olduğundan ve Eş.4.8 ve Eş.4.9'dan

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = a_0(\lambda_i^+) \cdot \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} - a_0(\lambda_i^+) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right\} = 0$$

$$f_1(x, \lambda_i^+) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} - a_0(\lambda_i^+) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \text{ olmak üzere}$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} f(x, \lambda_i^+) = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. O halde öyle  $a_1(\lambda_i^+)$  sabiti vardır ki

$$W[f_1(x, \lambda), \varphi f(x, \lambda)] = 0$$

olduğundan

$$f_1(x, \lambda_i^+) = a_1(\lambda_i^+) f(x, \lambda_i^+)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = a_1(\lambda_i^+) f(x, \lambda_i^+) + a_0(\lambda_i^+) \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

olur. O halde  $n = 1$  için eşitlik sağlanır.

$$2 \leq n_0 \leq m_i^+ - 2 \text{ için}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a_{n_0-k}(\lambda_i^+) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

var olsun.

$n_0+1$  için var olduğunu gösterelim.

$$u(x, \lambda) \quad , \quad \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} y = 0 \quad \text{denkleminin bir çözümü olsun.}$$

$\frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} u(x, \lambda)$  ifadesi de denklemin bir çözümüdür.

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} u(x, \lambda) = n_0 \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0}} u(x, \lambda) \quad (4.11)$$

dir.  $f$  ve  $\varphi$ , denklemin çözümü olduğundan ve Eş.4.11'den

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0}} f(x, \lambda_i^+)$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0}} \varphi(x, \lambda_i^+)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a_{n_0-k}(\lambda_i^+) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right] \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \varphi(x, \lambda) \right\} \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a_{n_0-k}(\lambda_i^+) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a_{n_0-k}(\lambda_i^+) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right] \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} f(x, \lambda) \right\} \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a_{n_0-k}(\lambda_i^+) \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& = \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& = \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) + 2\lambda u(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \frac{n_0}{n_0} \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) + 2\lambda u(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\
& \Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} - \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \\
& \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^{-2} \right\} \left\{ \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} - \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right\} = 0$$

$$f_{n_0+1}(x, \lambda_i^+) = \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} - \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} a_{n_0-k+1}(\lambda_i^+) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

olsun.

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [W[f(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)]]_{\lambda=\lambda_i^+} = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} F(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = 0$$

ifadesinden yararlanırsak

bir  $a_{n_0+1}(\lambda_i^+)$  sabiti vardır ki öyle ki

$$f_{n_0+1}(x, \lambda_i^+) = a_{n_0+1}(\lambda_i^+) f(x, \lambda_i^+)$$

dır.

İspat tamamlanmış olur.

#### 4.2. Teorem [3]

$n = 0, 1, \dots, m_i^+ - 1$  ,  $i = 1, 2, \dots, j$  için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \in L_2(\mathbb{R}_+) \quad (4.12)$$

ve

$v = 0, 1, \dots, m_l^- - 1$  ,  $l = 1, 2, \dots, k$  için

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_1^-} \in L_2(\mathbb{R}_+) \quad (4.13)$$

*Ispat*

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A(x, t).e^{i\lambda t} dt \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) &= ix e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A(x, t).e^{i\lambda t} .it dt \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f(x, \lambda) &= (ix)^2 e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty (it)^2 .A(x, t).e^{i\lambda t} dt \\ &\vdots \\ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) &= (ix)^n .e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty (it)^n .A(x, t).e^{i\lambda t} dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. Eş.4.14'den

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} = \left\{ (ix)^n .e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty (it)^n .A(x, t).e^{i\lambda t} dt \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

$n = 0, 1, \dots, m_i^+ - 1$  ,  $i = 1, 2, \dots, j$  için elde edilir.

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right| &= \left| \left\{ (ix)^n .e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty (it)^n .A(x, t).e^{i\lambda t} dt \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right| \\ &\leq \left| (ix)^n .e^{i[\omega(x)+\lambda_i^+ x]} \right| + \left| \int_x^\infty A(x, t).e^{i\lambda_i^+ t} .(it)^n dt \right| \\ &\leq x^n e^{\int_0^\infty \text{Im } U(t) dt} e^{-x \text{Im } \lambda_i^+} + \int_x^\infty |A(x, t)| t^n e^{-t \text{Im } \lambda_i^+} dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

$A(x, t) \in L_1[0, \infty)$  olduğundan

$$\left| \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right| \leq x^n e^{\int_0^\infty \text{Im } U(t) dt} e^{-x \text{Im } \lambda_i^+} + c \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{x} \right\} \int_x^\infty t^n e^{-t \text{Im } \lambda_i^+} dt$$

$\text{Im } \lambda_i^+ > 0$  olduğundan

$$\int_x^\infty t^n e^{-t \text{Im } \lambda_i^+} dt < \infty$$

olur. Buradan

$$\left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right\|^2 = \int_0^\infty \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \right|^2 dx < \infty$$

elde edilir. O halde  $n = 0, 1, \dots, m_i^+ - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$  için

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \in L_2[0, \infty)$$

olur. Yukarıdaki ifadeden ve Teorem 4.1'den

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \in L_2[0, \infty)$$

elde edilir.

#### 4.1. Tanım [3]

$$\varphi(x, \lambda_i^+), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_i^+-1}}{\partial \lambda^{m_i^+-1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

ve

$$\varphi(x, \mu_l^-), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l^-}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_l^- - 1}}{\partial \lambda^{m_l^- - 1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l^-}$$

fonksiyonlarına  $L$  operatörünün  $\lambda = \lambda_i^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$  ve  $\lambda = \mu_l^-$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$  özdeğerlerine bağlı esas fonksiyonları denir.  $\varphi(x, \lambda_i^+)$ ,  $\varphi(x, \mu_l^-)$  baş fonksiyonlardır.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_i^+ - 1}}{\partial \lambda^{m_i^+ - 1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i^+}$$

fonksiyonları  $\varphi(x, \lambda_i^+)$  nin eş fonksiyonları

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l^-}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_l^- - 1}}{\partial \lambda^{m_l^- - 1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l^-}$$

fonksiyonları ise  $\varphi(x, \mu_l^-)$  nin eş fonksiyonları olarak adlandırılır.

## 4.2. $L$ Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşılık Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  da  $F$  nin sıfırlarını  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ve  $G$  nin sıfırlarını  $\mu_1, \dots, \mu_q$  ile göstermiştik.

### 4.1. Sonuç [3]

$n = 0, 1, \dots, m_i - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}(\lambda_i) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \quad (4.16)$$

ve

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l} = \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} h_{v-j}(\mu_l) \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} g(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l} \quad (4.17)$$

dir.

*İspat*

Teorem 4.1'e benzer olarak ispatı yapılır.

4.1. Lemma [3]

Spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar  $L_2[0,\infty)$ 'un elemanı değildir.

Yani

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \notin L_2[0,\infty) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, m_i-1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.18)$$

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l} \notin L_2[0,\infty) \quad , \quad v = 0, 1, \dots, n_l-1 \quad , \quad l = 1, 2, \dots, q \quad (4.19)$$

dir.

*İspat*

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} &= \left\{ (ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A(x, t) (it)^n e^{i\lambda t} dt \right\}_{\lambda=\lambda_i^+} \\ \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \right| &= \left| \left\{ (ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A(x, t) (it)^n e^{i\lambda t} dt \right\}_{\lambda=\lambda_i} \right| \\ &= \left| (ix)^2 e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A(x, t) (it)^n e^{i\lambda t} dt \right| \\ &\leq x^n \exp \left\{ - \int_x^\infty \text{Im} u(t) dt \right\} + \int_x^\infty |t|^n |A(x, t)| dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

Son eşitsizlikten

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, t) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \notin L_2[0, \infty) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, m_i - 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

olduğu açıktır.

Buradan ve Eş.4.20'den Eş.4.18 elde edilir.

Eş.4.19 da benzer şekilde gösterilir.

Şimdi aşağıdaki Hilbert uzaylarını tanımlayalım [7].

$$H_n := H(\mathbb{R}_+, C, n) := \left\{ f : \int_0^\infty (1+x)^{2n} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

kümesi ve üzerindeki norm

$$\|f\|_n^2 = \int_0^\infty (1+x)^{2n} |f(x)|^2 dx$$

ve

$$H_{-n} := H(\mathbb{R}_+, C, -n) := \left\{ g : \int_0^\infty (1+x)^{-2n} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

kümesi üzerindeki norm

$$\|g\|_{-n}^2 = \int_0^\infty (1+x)^{-2n} |g_1(x)|^2 dx$$

biçimdedir. Bu tanımların sonucunda  $n = 1, 2, \dots$  için

$$H_n \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+) \subsetneq H_{-n}$$

bağıntısı vardır.

Gerçekten

(i)  $H_n \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+)$  ,  $n = 1, 2, \dots$  ifadesini göstermek için  $\forall f \in H_n$  için  $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$  olduğunu gösterelim.

$$f \in H_n \text{ olduğundan } \int_0^{\infty} (1+x)^{2n} |f(x)|^2 dx < \infty \text{ dur.}$$

$$1 \leq 1+x \Rightarrow 1 \leq (1+x)^{2n} , \quad n = 1, 2, \dots , \quad x \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot 1 \cdot dx \leq \int_0^{\infty} (1+x)^{2n} |f(x)|^2 dx < \infty \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \Rightarrow f \in L_2(\mathbb{R}_+) \text{ bulunur.}$$

(ii)  $L_2(\mathbb{R}_+) \subsetneq H_n$  ,  $n = 1, 2, \dots$  ifadesini göstermek için  $\forall f \in L_2(\mathbb{R}_+)$  için  $f \in H_n$  olduğunu gösterelim.

$x \in [0, \infty)$  olduğundan  $0 \leq x < 1$  ve  $x > 1$  durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

(a)  $0 \leq x < 1$  ise  $0 < (1+x)^{-2n} < 1$  olur.

Buradan

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 (1+x)^{-2n} dx \leq \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

yazılır.

$f \in L_2[0, \infty; \mathbb{C})$  olduğu için

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 (1+x)^{-2n} dx \leq \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\Rightarrow f \in H_n$$

(a)  $x \geq 1$  ise  $(1+x)^{-2n} \leq 1$  olduğundan (a) ya benzer şekilde elde edilir.

(i) ve (ii) den

$$H_n \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+) \subsetneq H_{-n} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

dir.

#### 4.3. Teorem [3]

Spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar Hilbert uzayındandır. Yani

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \in H_{-(n+1)} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, m_i-1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.21)$$

ve

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l} \in H_{-(v+1)} \quad , \quad v = 0, 1, \dots, n_l-1 \quad , \quad l = 1, 2, \dots, q \quad (4.22)$$

*İspat*

$n = 0, 1, \dots, m_i-1$  ,  $i = 1, 2, \dots, p$  için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \leq x^n \exp \left\{ - \int_0^\infty \operatorname{Im} u(t) \right\} + \int_x^\infty |t|^n A(x, t) dt \quad (4.23)$$

eşitsizliğinden ve  $H_{-(n+1)}$  uzayının tanımından (4.21) elde edilir. Benzer şekilde (4.22) ispatlanır.

#### 4.2. Tanım [3]

$$\varphi(x, \lambda), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_i-1}}{\partial \lambda^{m_i-1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i}$$

ve

$$\varphi(x, \mu_1^-), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_1}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{n_1-1}}{\partial \lambda^{n_1-1}} \varphi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_1}$$

fonksiyonlarına sırasıyla  $L$  operatörünün  $\lambda = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  ve  $\lambda = \mu_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, q$  spektral tekilliklerine bağlı esas fonksiyonları denir.

$n_0 = \max\{m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q\}$  için

$$H_{n_0+1} \subsetneq L_2(\mathbb{R}_+) \subsetneq H_{-(n_0+1)}$$

#### 4.2. Sonuç [3]

Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar  $H_{-(n_0+1)}$  uzayına aittir.

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_i} \in H_{-(n_0+1)}, \quad n = 0, 1, \dots, m_i-1, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

ve

$$\left\{ \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \varphi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_l} \in H_{-(n_0+1)}, \quad v = 0, 1, \dots, n_l-1, \quad l = 1, 2, \dots, q$$

dır.

## KAYNAKLAR

1. Naimark, M.A., "Linear Differential Operators II", *Ungar*, New York, 300-305 (1968).
2. Naimark, M.A., "Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non-selfadjoint Operator of Second Order on a Semi-axis", *Amer. Math Soc. Trans.*, 2(16): 103-193 (1960).
3. Bairamov, E., Çakar, Ö., Çelebi, A.O., "Quadratic Pencil of Schrödinger Operator with Spectral Singularities: Discrete Spectrum and Principal Functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 2(216): 303-320 (1997).
4. Schwartz, J.T., "Some Non-selfadjoint Operators", *Comm. Pure and Appl. Math.*, 13: 609-639 (1960).
5. Lyance, V.E., "A Differential Operator with Spectral Singularities I", *Amer. Math. Trans.*, 2(60): 185-225 (1967).
6. Privalov, I.I., "The Boundary Properties of Analytic Functions" in "Hochschulbücher für Math.", *VEB Deutscher Verlag*, Berlin, 25: 53-57 (1970).
7. Berezanski, Yu, M., "Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators", *Amer. Math. Soc.*, New York, Providence, 1-365 (1968).
8. Pavlov, B.S., "The Non-selfadjoint Schrödinger Operator", *Topics in Math. Phys.*, 1: 87-110 (1967).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SOYLU, Esra  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 01.08.1980 Kırıkkale  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : 0 (312) 362 32 66  
Faks : —  
e-mail : esrasoylu001@mynet.com

### Eğitim

| Derece        | Eğitim Birimi                           | Mezuniyet tarihi |
|---------------|-----------------------------------------|------------------|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi<br>Matematik Bölümü   | 2001             |
| Lisans        | Ankara Üniversitesi<br>Matematik Bölümü | 2001             |
| Lise          | Kırıkkale Lisesi                        | 1997             |

### İş Deneyimi

| Yıl   | Yer                  | Görev    |
|-------|----------------------|----------|
| 2001- | Nahit Menteşe Lisesi | Öğretmen |

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

—

### Hobiler

Bilgisayar, kitap okuma, tenis