

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE FUZZY MANTIK OPERATÖRLERDEN ELDE EDİLEN
FUZZY GEREKTİRMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra KARACAİR

HAZİRAN 2024
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE FUZZY MANTIK OPERATÖRLERDEN ELDE EDİLEN
FUZZY GEREKTİRMELER**

Kübra KARACAİR

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 / 05 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 04 / 06 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL
ORCID :

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi sürecinde yanımda olup, bana hoşgörüyü yardımcı olan, başta bilimsel olmak üzere birçok konuda sonsuz bilgi katan ve yol gösteren çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Funda KARAÇAL'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım. Lisans eğitimimden bu yana yardımlarını eksik etmeyen, desteğini her zaman hissettiğim, kıymetli bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak bu yolda beni en iyi şekilde yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL'a çok teşekkür ederim.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünün tüm saygıdeğer hocalarına lisans ve lisansüstü eğitim hayatımdaki katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak eğitim hayatımda yanımda olan aileme ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana sağladığı maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Kübra KARACAİR

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Sınırlı Kafesler Üzerinde Fuzzy Mantık Operatörlerden Elde Edilen Fuzzy Gerektirmeler” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 04/06/2024.

Kübra KARACAİR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler	2
1.2. Birleştirme Fonksiyonları, Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar.....	4
1.3. Gerektirmeler	6
1.4. Literatürde Mevcut Olan Gerektirme İnşa Yöntemleri.....	10
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	12
2.1. Sınırlı L kafesi Üzerinde Gerektirmeler İçin Bazı Özellikler ve İnşa Yöntemleri ..	12
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	42
4. SONUÇLAR.....	43
5. ÖNERİLER	44
6. KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE FUZZY MANTIK OPERATÖRLERDEN ELDE EDİLEN FUZZY GEREKTİRMELER

Kübra KARACAİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL

2024, 45 Sayfa

Bu tez çalışması, sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler üretmek için yöntemler vermeyi ve bu yöntemlerle inşa edilen gerektirmelerinin özelliklerini incelemeyi hedeflemektedir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, kafes teorisinden ve fuzzy küme teorisinden bilinen bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, sabit bir eleman, t-norm, t-konorm, negasyon, gerektirme gibi mantık operatörler ve gerekli kısıtlamalar kullanılarak sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler inşa etmek için bazı inşa yöntemleri verilmiştir. Bu inşa yöntemlerinin özellikleri ve literatürle ilişkisi incelenmiştir. Elde edilen inşa yöntemleri örneklerle uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gerektirme, t-konorm, negasyon, t-norm

Master Thesis

SUMMARY

**FUZZY IMPLICATIONS GENERATED FROM FUZZY LOGIC OPERATORS ON
BOUNDED LATTICES**

Kübra KARACAİR

Karadeniz Technical University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Graduate Program

Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL

2024, 45 Pages

This thesis intends to give methods for to generate implications on bounded lattices and to examine the properties of the implications constructed with these methods.

In the first chapter of this study, several basic concepts known from lattice theory and fuzzy set theory are offered.

In the second chapter of this study, several construction methods are revealed to build implications on bounded lattices by using a fixed element, logic operators such as t-norm, t-conorm, negation, implication and necessary constraints. The properties of these construction methods and their relationship with the literature were examined. The obtained construction methods were applied with examples.

Key Words: Implication, t-conorm, negation, t-norm

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. L_1 kafesinin yapısı.....	14
Şekil 2. L_2 kafesinin yapısı.....	16
Şekil 3. L_3 kafesinin yapısı	24
Şekil 4. L_4 kafesinin yapısı.....	29
Şekil 5. L_5 kafesinin yapısı.....	34
Şekil 6. L_6 kafesinin yapısı	38



TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. L_1 kafesi üzerinde I gerektirmesi	14
Tablo 2. L_2 kafesi üzerinde I_1 gerektirmesi	17
Tablo 3. L_2 kafesi üzerinde I_2 gerektirmesi	19
Tablo 4. L_2 kafesi üzerinde I_3 gerektirmesi.....	21
Tablo 5. L_3 kafesi üzerinde J_1 gerektirmesi	24
Tablo 6. L_3 kafesi üzerinde J_2 gerektirmesi	25
Tablo 7. L_3 kafesi üzerinde J_3 gerektirmesi	25
Tablo 8. L_3 kafesi üzerinde I_6 gerektirmesi	25
Tablo 9. $[0, k_1]$ altkafesi üzerinde J^{k_1} gerektirmesi	29
Tablo 10. L_4 kafesi üzerinde I_7 gerektirmesi	30
Tablo 11. $[\eta_5, 1]$ altkafesi üzerinde J_{η_5} gerektirmesi.....	34
Tablo 12. L_5 kafesi üzerinde I_8 gerektirmesi	34
Tablo 13. L_6 kafesi üzerinde I gerektirmesi	39
Tablo 14. L_6 kafesi üzerinde I_9 gerektirmesi.....	39
Tablo 15. L_6 kafesi üzerinde $K_{\delta_3, T_\Lambda, S_{V,N}}^{I,I}$ gerektirmesi.....	40

SEMBOLLER DİZİNİ

$\subseteq$	: Kümeler için altküme bağıntısı
$/$	: Kümeler için fark sembolü
$\leq$	: Kısmen sıralama bağıntısı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\bar{S}$	: Küme S 'nin üst sınırı olan elemanların oluşturduğu küme
$\underline{S}$	: Küme S 'nin alt sınırı olan elemanların oluşturduğu küme
$\wedge$	: İnfimum işlemi
$\vee$	: Supremum işlemi
$[0,1]$	: Reel birim aralığı
$[a,b]$	: L kafesinin kapalı aralığı
$\$ \parallel \ddot{u}$	: $\$$ ile $\ddot{u}$ elemanı kıyaslanamaz
$\$ \nparallel \ddot{u}$	: $\$$ ile $\ddot{u}$ elemanı kıyaslanabilir
$\mathcal{T}$	: Sınırlı L kafesi üzerindeki tüm t -normların kümesi
$\mathcal{S}$	: Sınırlı L kafesi üzerindeki tüm t -konormların kümesi
$\mathcal{A}$	: Sınırlı L kafesi üzerindeki tüm birleştirme fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{F}$	: Sınırlı L kafesi üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi
$\mathcal{N}$	: Sınırlı L kafesi üzerindeki tüm negasyonların kümesi
$\mathcal{F}^a$	: Sınırlı L kafesinin $[0, a]$ altkafesi üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi
$\mathcal{N}^a$	: Sınırlı L kafesinin $[0, a]$ altkafesi üzerindeki tüm negasyonların kümesi
$\mathcal{F}_a$	: Sınırlı L kafesinin $[a, 1]$ altkafesi üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi
$\mathcal{N}_a$	: Sınırlı L kafesinin $[a, 1]$ altkafesi üzerindeki tüm negasyonların kümesi

1. GENEL BİLGİLER

Fuzzy gerektirmeler, fuzzy mantıkta büyük bir konsepte sahip ikili işlemlerdir. Fuzzy gerektirmeler, fuzzy kontrol, veri analizi, görüntü işleme, fuzzy altküme ölçüleri vb. birçok alanda kullanılmaktadır (Bustince, Mohedano, Barrenechea, & Pagola, 2020; Dubois, & Prade, 1991; Heijmans, 1995; Liu, 1997). Aslında fuzzy gerektirmeler klasik mantıkta 0 ve 1 değerini alan klasik gerektirmelerin genellemesidir. Literatürde reel birim aralık üzerinde fuzzy gerektirmeler için eşdeğer birçok tanım vardır. En genel anlamda bir fuzzy gerektirme birinci bileşene göre azalan, ikinci bileşene göre artan, $(0,0)$, $(1,1)$ noktasında 1 değerini ve $(1,0)$ noktasında 0 değerini alan $I: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir dönüşümdür.

Fuzzy gerektirmeler inşa etmek için yöntemler sunmak birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Bachynski ve Jayaram $[0,1]$ reel birim aralığı üzerinde fuzzy gerektirmeler inşa etmek için bir t-konorm, bir fuzzy negasyon kullanarak inşa yöntemi sundu ve bu yöntemle elde edilen gerektirmeleri (S, N) -gerektirmeler olarak adlandırdı. Onlar ayrıca, bir t-normdan elde edilen R -gerektirme adını verdikleri inşa yöntemini tanıttı. Neres, Bedregal ve Santiago (2021) çalışmasında $[0,1]$ birim aralığı üzerinde mantık operatörleri kullanarak gerektirme elde etmek için (S, N, T) -gerektirmeler adını verdikleri inşa yöntemini tanıttı ve bu yöntemle elde edilen gerektirmelerin özelliklerini ele aldı. Ayrıca, bu araştırmacılar (2023) de çalışmasında $[0,1]$ reel birim aralığı üzerinde fuzzy gerektirmeleri inşa etmek için birleştirme fonksiyonlarını kullanarak inşa yöntemleri ortaya koymuştur.

Kesicioğlu, Ertuğrul ve Karaçal, (2020) çalışmasında sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeleri tanıttı, gerektirmelerin g-konveks kombinasyonunu ele aldı ve bu yöntemle elde edilen gerektirmelerin özelliklerini inceledi. Karaçal vd. (2021) çalışmasında, t-norm, t-konorm ve gerektirme gibi mantık operatörleri kullanarak gerektirmeler inşa etmek için yöntemler sunmuştur.

Bu çalışmanın amacı sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler inşa etmek için yöntemler vermek ve bu yöntemler kullanılarak elde edilen gerektirmelerin özelliklerini incelemektir.

Bu çalışma iki bölüm olarak tasarlanmıştır. Birinci bölümünde kısmen sıralı küme, kafesler ve bu kavramlara ait temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra sınırlı bir L kafesi üzerinde üçgensel normlar, üçgensel konormlar, birleştirme fonksiyonları, gerektirmeler, negasyonlar tanıtıldı ve bu fonksiyonların temel tanım ve özellikleri sunuldu. Ayrıca

gerektirmeler elde etmek için mevcut olan inşa yöntemleri verildi. Bu çalışmanın ikinci bölümü sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler inşa etmek için planlanmıştır. İlk olarak sınırlı kafesler üzerinde sabit bir eleman yardımıyla gerektirmeler inşa etmek için bir yöntem sunulmuştur. Sonra, gerektirmeler, negasyonlar ve t-konormlar yardımıyla gerektirmeler elde etmek için birçok inşa yöntemi sunuldu. Ayrıca bu çalışmada sınırlı bir kafesinin altkafesleri üzerinde verilen gerektirmeler, negasyonlar ve bazı ek kısıtlamaları kullanarak gerektirmeler inşa etmek için yöntemler verildi. Bu yöntemlerle elde edilen gerektirmelerin özellikleri incelendi. Elde edilen gerektirmelerden bazıları ve belirli mantık operatörler kullanarak reel birim aralıktaki karşılıkları sunuldu.

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

Tanım 1.1. (Birkhoff, 1967) P boş olmayan bir küme olmak üzere $\leq$ bu küme üzerinde bir bağıntı olsun. Keyfi $\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in P$ verilsin. $\leq$ bağıntısı aşağıdaki şartlara sahipse, $\leq$ 'e P üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısı denir.

P1. $\leq$ yansıma özelliğine sahiptir yani, $\eta \leq \eta$.

P2. $\leq$ ters simetri özelliğine sahiptir yani, eğer $\eta_1 \leq \eta_2$ ve $\eta_2 \leq \eta_1$ ise, $\eta_1 = \eta_2$.

P3. $\leq$ geçişme özelliğine sahiptir yani, eğer $\eta_1 \leq \eta_2$ ve $\eta_2 \leq \eta_3$ ise, $\eta_1 \leq \eta_3$.

Tanım 1.1 sağlayan P kümesi kısmen sıralı küme olarak adlandırılır. Ayrıca, bu küme $P = (P, \leq)$ gösterimiyle temsil edilir

Tanım 1.2. (Birkhoff, 1967) $\leq$, P üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısı olarak verilsin. $\tau_1, \tau_2 \in P$ olsun. Eğer $\tau_1 \leq \tau_2$ veya $\tau_2 \leq \tau_1$ sağlanırsa τ_1 ile τ_2 kıyaslanabilir denir. Aksi durumda, τ_1 ile τ_2 kıyaslanamaz denir ve $\tau_1 \parallel \tau_2$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.3. (Birkhoff, 1967) $(P, \leq)$, bir kısmen sıralı küme ve $\mathcal{S} \subseteq P$ verilsin. $\mathcal{S} \in P$ olsun.

(i) Tüm $h \in \mathcal{S}$ için, $h \leq \mathcal{S}$ sağlanırsa $\mathcal{S}$ elemanına bu kümenin bir üst sınırı denir. $\mathcal{S}$ kümesinin üst sınırlarının elemanlarının oluşturduğu küme $\bar{\mathcal{S}}$ notasyonu ile temsil edilir. Eğer $\bar{\mathcal{S}}$ kümesi en küçük elemana sahipse, bu eleman $\mathcal{S}$ kümesinin supremumu olarak adlandırılır. $\bigvee \mathcal{S}$ notasyonu ile temsil edilir. Özel olarak $\mathcal{S}$ kümesi $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ olarak iki elemanlı küme alınırsa, bu kümenin supremumu $\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2$ ile gösterilir.

(ii) Tüm $h \in \mathcal{S}$ için $s \leq h$ ise, s elemanına bu kümenin bir alt sınırı denir. $\mathcal{S}$ kümesinin tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme $\underline{\mathcal{S}}$ notasyonu ile temsil edilir. Eğer $\underline{\mathcal{S}}$ kümesi en büyük elemana sahip ise, bu eleman $\mathcal{S}$ kümesinin infumumu olarak adlandırılır. $\wedge \mathcal{S}$ notasyonu ile temsil edilir. Özel olarak $\mathcal{S}$ kümesi $\{s_1, s_2\}$ olarak iki elemanlı küme alınırsa, bu kümenin infumumu $s_1 \wedge s_2$ ile gösterilir.

Tanım 1.4. (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ kısmen sıralı kümesi verilsin.

(i) Eğer L tüm $n_1, n_2 \in L$ için $n_1 \vee n_2$ 'yi içerirse, bu küme $\vee$ (*supremum*)-yarı kafes olarak adlandırılır.

(ii) Eğer L tüm $n_1, n_2 \in L$ için $n_1 \wedge n_2$ 'yi içerirse, bu küme $\wedge$ (*infumum*)-yarı kafes olarak adlandırılır.

(iii) L , hem $\vee$ -yarı kafes hem de $\wedge$ -yarı kafes ise L 'ye kafes denir ve $(L, \leq, \wedge, \vee)$ ile gösterilir.

(iv) $(L, \leq)$ kafes ve $K \subseteq L$ olsun. K 'ya L 'nin alt kafesi denir ancak ve ancak her $n_1, n_2 \in K$ için $n_1 \vee n_2, n_1 \wedge n_2 \in K$ dır.

(v) Eğer L kafesi en büyük ve en küçük elemana sahipse bu kafese sınırlı kafes denir ve sırasıyla bu elemanlar 1 ve 0 ile gösterilir. Sınırlı bir L kafesi $(L, \leq, 0, 1)$ gösterimiyle temsil edilir.

Tanım 1.5. (Birkhoff, 1967) Bir L kafesi cebir olarak $(L, \wedge, \vee)$ şeklinde aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir. Burada $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri $\iota, v, \tau \in L$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

(L1) $\iota \wedge \iota = \iota$ ve $\iota \vee \iota = \iota$ (idempotent).

(L2) $\iota \wedge v = v \wedge \iota$ ve $\iota \vee v = v \vee \iota$ (değişme).

(L3) $(\iota \wedge v) \wedge \tau = \iota \wedge (v \wedge \tau)$ ve $(\iota \vee v) \vee \tau = \iota \vee (v \vee \tau)$ (birleşme).

(L4) $\iota \wedge (\iota \vee v) = \iota$ ve $\iota \vee (\iota \wedge v) = \iota$ (yok etme).

Teorem 1.6. (Birkhoff, 1967) L bir küme, $\wedge$ ve $\vee$ L üzerinde (L1), (L2), (L3) ve (L4) şartlarını sağlayan ikili işlemler olsun. $s_1, s_2 \in L$ olmak üzere,

$$s_1 \leq s_2 \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2 = s_1 \text{ ile tanımlansın}$$

veya

$\leq$ bağıntısı, $\$1 \leq \$2 \Leftrightarrow \$1 \vee \$2 = \$2$ ile tanımlansın.

Bu halde, $\leq$ bir kısmen sıralama bağıntısıdır ve $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir.

Tanım 1.7. (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ kafesi verilsin. $\alpha_1, \alpha_2 \in L$ olsun. $\{\tau \in L \mid \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2\}$ kümesi $[\alpha_1, \alpha_2]$ ile temsil edilir. Ayrıca, $[\alpha_1, \alpha_2]$ kümesine kapalı aralık denir.

Benzer şekilde,

$$(\alpha_1, \alpha_2] = \{\tau \in L \mid \alpha_1 < \tau \leq \alpha_2\}$$

$$[\alpha_1, \alpha_2) = \{\tau \in L \mid \alpha_1 \leq \tau < \alpha_2\}$$

ve

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \{\tau \in L \mid \alpha_1 < \tau < \alpha_2\}.$$

yukarıdaki aralıklar ifade edilir.

1.2. Birleştirme Fonksiyonları, Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar

Tanım 1.8. (Grabisch, M., J. Marichal, R. Mesiar, & E. Pap, 2009) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir $A: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir birleştirme fonksiyonu denir. $\$1, \$2, \$3, \4 L 'nin keyfi elemanları olsun.

A1. A her bir değişkene göre artan fonksiyondur yani, $\$1 \leq \$2, \$3 \leq \4 olduğu zaman $A(\$1, \$3) \leq A(\$2, \$4)$.

A2. $A(0, 0) = 0$.

A3. $A(1, 1) = 1$.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki tüm birleştirme fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$ ile gösterilir.

Tanım 1.9. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000; Karaçal, F., & Dj. Khadjiev 2005) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna üçgenselnorm (kısaca t-norm) denir. $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta$ L 'nin keyfi elemanları olsun.

T1. Bu fonksiyon değişme özelliğini sağlar yani $T(\eta_1, \eta_2) = T(\eta_2, \eta_1)$.

T2. Bu fonksiyon birleşme özelliğini sağlar yani $T(T(\eta_1, \eta_2), \eta_3) = T(\eta_1, T(\eta_2, \eta_3))$.

T3. Bu fonksiyon her bir değişkene göre artan fonksiyondur yani, $\eta_1 \leq \eta_2, \eta_3 \leq \eta_4$ olduğu zaman $T(\eta_1, \eta_3) \leq T(\eta_2, \eta_4)$.

T4. $T(\eta, 1) = \eta$.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki tüm üçgensel normların kümesi $\mathcal{T}$ ile gösterilir.

Uyarı 1.10. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) Tanım 1.9'da değişme özelliği sağladığı için (T3) özelliği t_1, t_2, t L 'nin keyfi elemanları olmak üzere eğer $t_1 \leq t_2$ ise $T(t_1, t) \leq T(t_2, t)$ şartının sağlanması ile çıkarılır.

Tanım 1.11. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000; Karaçal, F., & Dj. Khadjiev, 2005) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Eğer (T1), (T2), (T3) ve (S4) koşulunu sağlıyorsa bir $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna üçgensel konorm (kısaca t-konorm) denir. s , L 'nin keyfi elemanı olsun.

S4. $S(s_1, 0) = s_1$.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki tüm üçgensel konormların kümesi $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Örnek 1.12. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) Sınırlı L kafesi $[0,1]$ birim aralığı olsun. Bu aralık üzerinde bilinen başlıca t-normlar aşağıda listelenmiştir.

$$T_D(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 & , \quad t_2 = 1 \\ t_2 & , \quad t_1 = 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Drastik çarpım t-norm})$$

$$T_P(t_1, t_2) = t_1 t_2 \quad (\text{Çarpım t-norm})$$

$$T_{LK}(t_1, t_2) = \max(t_1 + t_2 - 1, 0) \quad (\text{Lukasiewicz t-norm})$$

$$T_M(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2) \quad (\text{Minimum t-norm})$$

Örnek 1.13. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) Sınırlı L kafesi $[0,1]$ birim aralığı olsun. Bu aralık üzerinde bilinen başlıca t-konormlar aşağıda listelenmiştir.

$$S_D(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 & , \quad s_2 = 0 \\ s_2 & , \quad s_1 = 0 \\ 1 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Drastik toplam t-konorm})$$

$$S_P(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - s_1 s_2 \quad (\text{Toplam t-konorm})$$

$$S_L(s_1, s_2) = \min(s_1 + s_2, 1) \quad (\text{Lukasiewicz t-konorm})$$

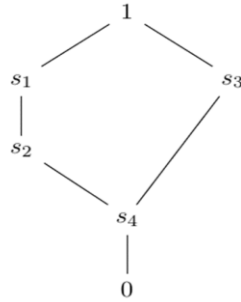
$$S_M(s_1, s_2) = \max(s_1, s_2) \quad (\text{Maksimum t-konorm})$$

Sınırlı bir L kafesi üzerinde $T_{\wedge}(t_1, t_2) = t_1 \wedge t_2$ ile verilen fonksiyon bir t-norm ve $S_{\vee}(s_1, s_2) = s_1 \vee s_2$ ile verilen fonksiyon bir t-konormdur. Ayrıca $T_{\wedge}$ en büyük t-norm ve $S_{\vee}$ en küçük t-konormdur.

Tanım 1.14. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $T \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{S}$ ve $s_1, s_2 \in L$ verilsin. Tüm $\tau \in L$ için $T(\tau, S(s_1, s_2)) = S(T(\tau, s_1), T(\tau, s_2))$ sağlanırsa, T, S üzerine $\{s_1, s_2\}$ -dağılımlıdır denir.

Uyarı 1.15. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ L' 'nin keyfi elemanları verilsin. $T \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{S}$ ve $S(\eta_1, \eta_2) = S(\eta_3, \eta_4)$ olsun. T, S üzerine $\{\eta_1, \eta_2\}$ -dağılımlı olduğu verilsin. Bu taktirde her zaman T, S üzerine $\{\eta_3, \eta_4\}$ -dağılımlı değildir. Bu durum için Örnek 1.16'ya bakılabilir.

Örnek 1.16. $L = \{0, s_1, s_2, s_3, s_4, 1\}$ sınırlı kafesi aşağıdaki şekil ile verilsin. $T = T_{\wedge}$ ve $S = S_{\vee}$ olarak alınsın. Kolaylıkla $T_{\wedge}, S_{\vee}$ üzerine $\{s_1, s_3\}$ -dağılımlı ve $S_{\vee}(s_1, s_3) = S_{\vee}(s_2, s_3)$ olduğu görülür, fakat $T_{\wedge}, S_{\vee}$ üzerine $\{s_2, s_3\}$ -dağılımlı değildir.



1.3. Gerektirmeler

Literatürde ilk olarak bir fuzzy gerektirme reel birim aralık $[0, 1]$ üzerinde tanıtılmıştır. Daha sonra sınırlı kafes üzerinde bir gerektirme aşağıdaki şekilde tanıtıldı.

Tanım 1.17. (Bachynski, & Jayaram, 2008; Kesicioğlu, Ertuğrul, & F. Karaçal, 2020) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir $I: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir gerektirme denir.

II. ι_1, ι_2, ι L 'nin keyfi elemanları verilsin. I birinci bileşene göre azalan fonksiyondur yani $\iota_1 \leq \iota_2$ olduğu zaman $I(\iota_2, \iota) \leq I(\iota_1, \iota)$ dır.

I2. $j_1, j_2, j \in L$ verilsin. I ikinci bileşene göre artan fonksiyondur yani $j_1 \leq j_2$ olduğu zaman $I(j, j_1) \leq I(j, j_2)$ dır.

I3. $I(0,0) = 1$.

I4. $I(1,1) = 1$.

I5. $I(1,0) = 0$.

Tanım 1.17'den doğrudan her $\iota \in L$ için $I(0, \iota) = 1$ (sol sınır koşulu) ve $I(\iota, 1) = 1$ (sağ sınır koşulu) sağlandığı görülür.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi $\mathcal{F}$ ile gösterilir. $t \in L$ olmak üzere $[0, t]$ altkafesi üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi $\mathcal{F}^t$ ve $[t, 1]$ üzerindeki tüm gerektirmelerin kümesi $\mathcal{F}_t$ ile gösterilir.

Uyarı 1.18. Özel olarak Tanım 1.17'de L kafesi $[0,1]$ reel birim aralık alınırsa I 'ya fuzzy gerektirme denir.

Uyarı 1.19. Eğer $t = 0$ alınırsa, $\mathcal{F}^0$ kümesi $\{0\}$ sınırlı kafesi üzerinde sadece $J^0(0,0) = 0$ ile tanımlanan gerektirmeden oluşur. Ayrıca, $t = 1$ alınırsa $\mathcal{F}_1$ kümesi $\{1\}$ sınırlı kafesi üzerinde sadece $J_1(1,1) = 1$ ile tanımlanan gerektirmeden oluşur.

Örnek 1.20. (Bachynski, & Jayaram, 2008) Sınırlı L kafesi $[0,1]$ birim aralığı verilsin. Bu aralık üzerinde bilinen temel fuzzy gerektirmeler aşağıda sıralanmıştır.

$$I_{GD}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 \leq \iota_2 \\ \iota_2 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Gödel gerektirme})$$

$$I_{LK}(\iota_1, \iota_2) = \min(1, 1 - \iota_1 + \iota_2) \quad (\text{Lukasiewicz gerektirme})$$

$$I_{RC}(\iota_1, \iota_2) = 1 - \iota_1 + \iota_1 \iota_2 \quad (\text{Reichenbach gerektirme})$$

$$I_{KD}(\iota_1, \iota_2) = \max(1 - \iota_1, \iota_2) \quad (\text{Kleene-Dienes gerektirme})$$

$$I_{YG}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 = 0 \text{ ve } \iota_2 = 0 \\ \iota_2^{\iota_1} & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Yager gerektirme})$$

$$I_{WB}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 < 1 \\ \iota_2 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Weber gerektirme})$$

$$I_{FD}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 \leq \iota_2 \\ \max(1 - \iota_1, \iota_2) & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Fodor gerektirme})$$

$$I_{GG}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 \leq \iota_2 \\ \frac{\iota_2}{\iota_1} & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Gougen gerektirme})$$

$$I_{RS}(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 \leq \iota_2 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (\text{Rescher gerektirme})$$

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi üzerinde verilen iki gerektirme I_1 ve I_2 için I_1, I_2 'den küçük denir ancak ve ancak her $\iota_1, \iota_2 \in L$ için $I_1(\iota_1, \iota_2) \leq I_2(\iota_1, \iota_2)$ dır.

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. Aşağıdakiler bu kafes üzerinde gerektirmelerdir.

$$I_0(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 = 0 \text{ veya } \iota_2 = 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$I_1(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota_1 < 1 \text{ veya } \iota_2 > 0 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde.} \end{cases}$$

Bir sınırlı kafes üzerinde en küçük gerektirme I_0 dır. Ayrıca en büyük gerektirme I_1 dir.

Tanım 1.21. (Bachynski, & Jayaram, 2008; Kesicioğlu, Ertuğrul, & F. Karaçal, 2020) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafesi verilsin. Eğer $N: L \rightarrow L$ azalan fonksiyonunu $N(0) = 1$ ve $N(1) = 0$ eşitliklerine sahipse bu fonksiyona negasyon denir. Eğer her $\iota \in L$ için $N(N(\iota)) = \iota$ sağlanırsa $N: L \rightarrow L$ negasyonuna güçlü negasyon denir.

$N_C(x) = 1 - x$, reel birim aralık $[0, 1]$ üzerinde temel fuzzy negasyonlardan biridir.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki tüm negasyonların kümesi $\mathcal{N}$ ile gösterilir. $t \in L$ olmak üzere $[0, t]$ altkafesi üzerindeki tüm negasyonların kümesi $\mathcal{N}^t$ ile ve $[t, 1]$ üzerindeki tüm negasyonların kümesi $\mathcal{N}_t$ ile gösterilir.

Uyarı 1.22. Eğer $t = 0$ alınırsa, $\mathcal{N}^0$ kümesi $\{0\}$ sınırlı kafesi üzerinde sadece $N^0(0) = 0$ ile tanımlanan negasyondan oluşur. Ayrıca, $t = 1$ alınırsa $\mathcal{N}_1$ kümesi $\{1\}$ sınırlı kafesi üzerinde sadece $N_1(1) = 1$ ile tanımlanan negasyondan oluşur.

Tanım 1.23. (Bachynski, & Jayaram, 2008) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $N \in \mathcal{N}$, ve $I \in \mathcal{F}$ olsun. $I_N: L^2 \rightarrow L$ aşağıdaki gibi tanımlanan fonksiyona I 'nın N -karşılığı denir.

$$I_N(s, \varsigma) = I(N(s), N(\varsigma))$$

Tanım 1.24. (Bachynski, & Jayaram, 2008) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes ve $N \in \mathcal{N}$ verilsin.

i. Eğer $N(\iota) = 0$ ancak ve ancak $\iota = 1$ ise, N 'e non-vanishing denir.

ii. Eğer $N(\iota) = 1$ ancak ve ancak $\iota = 0$ ise, N 'e non-filling denir.

Tanım 1.25. (Bachynski, & Jayaram, 2008; Kesicioğlu, Ertuğrul, & F. Karaçal, 2020) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $I \in \mathcal{F}$ olsun.

(i) I sol birim özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$ Her $\iota \in L$ için,

$$I(1, \iota) = \iota \quad (\text{NP})$$

(ii) I sol sıra özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow \iota_1, \iota_2 \in L$ için,

$$\iota_1 \leq \iota_2 \text{ ise } I(\iota_1, \iota_2) = 1 \quad (\text{LOP})$$

(iii) I sağ sıra özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow \iota_1, \iota_2 \in L$ için,

$$I(\iota_1, \iota_2) = 1 \text{ ise } \iota_1 \leq \iota_2 \quad (\text{ROP})$$

(iv) I sıra özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow \iota_1, \iota_2 \in L$ için,

$$I(\iota_1, \iota_2) = 1 \text{ ancak ve ancak } \iota_1 \leq \iota_2 \quad (\text{OP})$$

(v) I özdeşlik özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$ Her $\iota \in L$ için,

$$I(\iota, \iota) = 1 \quad (\text{IP})$$

(vi) I değişme özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$ Her $\iota_1, \iota_2, \iota_3 \in L$ için,

$$I(\iota_1, I(\iota_2, \iota_3)) = I(\iota_2, I(\iota_1, \iota_3)) \quad (\text{EP})$$

(vii) I zayıf değişme özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow \iota_1, \iota_2, \iota_3 \in L$ için,

$$\iota_1 \leq I(\iota_2, \iota_3) \text{ ancak ve ancak } \iota_2 \leq I(\iota_1, \iota_3) \quad (\text{WE})$$

Tanım 1.26. (Bachynski, & Jayaram, 2008) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $I \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{N}$ ve $\iota_1, \iota_2 \in L$ olsun.

(i) I, N 'e göre çevirme özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow I(\iota_1, \iota_2) = I(N(\iota_2), N(\iota_1)) \quad (\text{CP-N})$

(ii) I, N 'e göre sol çevirme özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow I(N(\iota_1), \iota_2) = I(N(\iota_2), \iota_1) \quad (\text{LCP-N})$

(iii) I, N 'e göre sağ çevirme özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow I(\iota_1, N(\iota_2)) = I(\iota_2, N(\iota_1)) \quad (\text{RCP-N})$

Tanım 1.27. (Neres, Bedregal, & Santiago 2023) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $I \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{N}$ ve $\iota_1, \iota_2 \in L$ olsun. Eğer I aşağıdaki koşulları sağlarsa I 'ya güçlü sınır koşullarını sağlar denir.

$$(i) \quad I(\iota_1, \iota_2) = 0 \Rightarrow \iota_1 = 1 \text{ ve } \iota_2 = 0 \quad (\text{SBC-a})$$

$$(ii) \quad I(\iota_1, \iota_2) = 1 \Rightarrow \iota_1 = 0 \text{ veya } \iota_2 = 1 \quad (\text{SBC-b})$$

1.4. Literatürde Mevcut Olan Gerektirme İnşa Yöntemleri

Bu bölümde reel birim aralık ve sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeleri inşa etmek için literatürde mevcut olan yöntemler verilmiştir.

Teorem 1.28. (Bachynski, & Jayaram, 2008) $[0, 1]$ reel birim aralığı verilsin. $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir t-konorm ve $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir negasyon olsun. O halde

$$I(k, f) = S(f, N(k))$$

ile tanımlanan $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde bir fuzzy gerektirmedir.

Bu yöntemle elde edilen gerektirmelerin sınıfına (S, N) -gerektirmeler denir.

Teorem 1.29. (Bachynski, & Jayaram, 2008) $[0, 1]$ reel birim aralığı verilsin ve $T, [0, 1]$ üzerinde bir t-norm olsun. O halde

$$I(k, f) = \sup\{t \in [0, 1] \mid T(k, t) \leq f\}$$

ile tanımlanan $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde bir fuzzy gerektirmedir.

Bu teoremle inşa edilen gerektirmeler R -gerektirmeler olarak adlandırılır.

Teorem 1.30. (Kesicioğlu, Ertuğrul, & F. Karaçal, 2020) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $I, J \in \mathcal{F}$, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$, $N \in \mathcal{N}$ ve $a \in L$ olsun. O halde

$$K_{a,T,S,N}^{I,J}(k, f) = S\left(T(a, I(k, f)), T(N(a), J(k, f))\right)$$

ile tanımlanan $K_{a,T,S,N}^{I,J}: L^2 \rightarrow L$ ile tanımlanan fonksiyon L üzerinde bir gerektirmedir ancak ve ancak $S(a, N(a)) = 1$ dir.

$K_{a,T,S,N}^{I,J}$ gerektirmesine I ve J gerektirmelerinin lineer kombinasyonu denir.

Teorem 1.31. (Neres, Bedregal, & Santiago 2021) $[0,1]$ reel birim aralığı verilsin. $T, S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ sırasıyla bir t-norm, t-konorm ve $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir negasyon olsun. O halde

$$I_{S,N,T}(k, f) = S\left(N\left(T(k, N(f))\right), N(k)\right)$$

ile tanımlanan $I_{S,N,T}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde fuzzy gerektirmez.

Bu yöntemle elde edilen gerektirmelere (S, N, T) -gerektirmeler denir.

Teorem 1.32. (Karaçal, Kesicioğlu, & Ertuğrul. 2021) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$, $I, J \in \mathcal{F}$ ve $a \in L$ olsun. O halde

$$TS_a(k, f) = T\left(J(k, f), S(a, I(k, f))\right)$$

ile tanımlanan $TS_a: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmez.

Teorem 1.33. (Karaçal, Kesicioğlu, & Ertuğrul. 2021) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$, $I, J \in \mathcal{F}$ ve $a \in L$ olsun. O halde

$$ST_a(k, f) = S\left(J(k, f), T(a, I(k, f))\right)$$

ile tanımlanan $ST_a: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmez.

Teorem 1.34. (Neres, Bedregal, & Santiago 2023) $[0,1]$ reel birim aralığı verilsin. $I \in \mathcal{F}$, $A, B \in \mathcal{A}$, $B(1,0) = 1$ ve $N \in \mathcal{N}$ olsun. O halde

$$I_N^{A,B}(k, f) = A\left(B(I(k, f), N(k)), B(I(N(f), N(k)), f)\right)$$

ile tanımlanan $I_N^{A,B}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir fuzzy gerektirmez.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde ilk olarak sınırlı bir L kafesi üzerindeki gerektirmelere ait bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra sınırlı bir L kafesi üzerinde gerektirmeler inşa etmek için birçok yöntem sunulmuştur ve bu yöntemlerle elde edilen gerektirmelerin özellikleri incelenmiştir. Son olarak verilen yöntemlerle elde edilen gerektirmeler örneklerle desteklenmiştir ve literatürde mevcut olan gerektirmelerle ilişkisi incelenmiştir.

2.1. Sınırlı L kafesi Üzerinde Gerektirmeler İçin Bazı Özellikler ve İnşa

Yöntemleri

Aşağıdaki iki teoremden sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler yardımıyla tanımlanan supremum yarı kafes olan kümeler verilmiştir. Daha sonraki teoremlerde sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler inşa etmek için yöntemler elde edilmiştir.

Teorem 2.1. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $I \in \mathcal{F}$ olsun. R kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$R = \{h \in L \mid f \in L \text{ olmak üzere } f \parallel h \text{ için } h \parallel I(h, f)\}$$

Eğer I , (NP) özelliğini sağlar ise R bir supremum yarı kafestir.

İspat.

$0 \in R$ olduğundan R kümesi boştan farklıdır. $h, f \in R$ ve $n \parallel h \vee f$ olsun. $h \vee f \parallel I(h \vee f, n)$ olduğu gösterilmelidir.

O halde,

$n \leq h$ veya $n \leq f$ durumları olamaz. Ayrıca $n \geq h$ ve $n \geq f$ durumu da mevcut değildir.

O halde sadece $n \parallel h$ veya $n \parallel f$ durumları incelenmelidir.

- $n \parallel h$ olsun.

Eğer $h \vee f \geq I(h \vee f, n)$ ise, $h \vee f \geq I(h \vee f, n) \geq I(1, n) = n$ elde edilir. Buradan $h \vee f \geq n$ elde edilir fakat bu $n \parallel h \vee f$ olması ile çelişir. O halde $h \vee f \not\geq I(h \vee f, n)$ dir.

Eğer $h \vee f \leq I(h \vee f, n)$ ise, $h \leq h \vee f \leq I(h \vee f, n) \leq I(h, n)$ elde edilir. Bu $h \in R$ olması ile çelişir.

O halde $h \vee f \not\leq I(h \vee f, n)$ dir.

Böylece $n \parallel h$ ise $h \vee f \parallel I(h \vee f, n)$ elde edilir.

Benzer şekilde $n \parallel f$ ise $h \vee f \parallel I(h \vee f, n)$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $h, f \in R$ ise $h \vee f \in R$ böylece bu küme supremum yarı kafestir.

Uyarı. 2.2. I , (NP) özelliğini sağlasa bile R infimum yarı kafes olmak zorunda değildir.

Örnek 2.11 göz önüne alınırsa $r_1, r_2 \in R$ fakat $r_1 \wedge r_2 \notin R$ dir.

Teorem 2.3. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $I \in \mathcal{F}$ olsun. D kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$D = \{f \in L \mid \text{her } k \in L \text{ için } I(k, f) \geq k\}$$

(i) D bir supremum yarı kafestir.

(ii) Eğer $k^*, f^* \in D$ ise $I(k^*, f^*) \in D$ dir.

İspat.

$1 \in D$ olduğundan D kümesi boştan farklıdır.

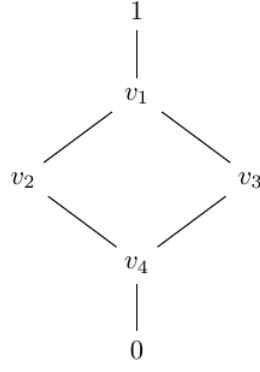
i. $h, p \in D$ ve $k \in L$ olsun. $I(k, h \vee p) \geq I(k, h) \geq k$ dir. Böylece, $I(k, h \vee p) \geq k$ dır. O halde $h \vee p$ 'nin D 'nin elemanı olduğu görülür, yani D supremum yarı kafestir.

ii. $k^*, f^* \in D$ olsun. D kümesi tanımından her $k \in L$ için $k \leq I(k, k^*)$ dır. Ayrıca,

$f^* \in D$ olduğu için, $k^* \leq I(k^*, f^*)$ dır. $k \leq I(k, k^*)$ ve $k^* \leq I(k^*, f^*)$ kullanılarak

$k \leq I(k, I(k^*, f^*))$ elde edilir. Buradan $I(k^*, f^*) \in D$ olduğu görülür.

Örnek 2.4. Şekil 1 ile verilen $(L_1 = \{0, v_1, v_2, v_3, v_4, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. L_1 üzerinde I gerektirmesi Tablo 1 ile verilsin.

Şekil 1. L_1 kafesinin yapısıTablo 1. L_1 kafesi üzerinde I gerektirmesi

I	0	v_1	v_2	v_3	v_4	1
0	1	1	1	1	1	1
v_1	0	1	1	1	v_4	1
v_2	0	1	1	1	v_3	1
v_3	0	1	1	1	v_1	1
v_4	0	1	1	1	v_1	1
1	0	1	1	1	v_4	1

$v_2, v_3 \in D$ fakat $v_2 \wedge v_3 \notin D$ olduğu görülür. Böylece Teorem 2.3'te verilen kümenin infimum yarı kafes olmak zorunda olmadığı görülür.

Teorem 2.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. $I \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer I , (NP)'yi sağlarsa $k, f \in L$ için aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer $k \parallel I(k, f)$ ise $I(f, k) \not\leq I(k, f)$ dir.
- (ii) Eğer $k \parallel I(k, f)$ ve $f \parallel I(f, k)$ ise $I(k, f) \parallel I(f, k)$ dir.

İspat.

i. $k \parallel I(k, f)$ olsun. Varsayalım $I(f, k) \leq I(k, f)$. Böylece, $k = I(1, k) \leq I(f, k) \leq I(k, f)$ elde edilir. Böylece, $k \leq I(k, f)$ dir. O halde kabul yanlış olup $I(f, k) \not\leq I(k, f)$ dir.

ii. (i) ile kolayca elde edilir.

Teorem 2.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $t \in L$ verilsin. Bu taktirde

$$I_1(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad k \leq f \\ 0 & , \quad k > f \\ t & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I_1: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir.

İspat.

I1) Birinci bileşene göre azalanlık: k_1, k_2 L 'nin elemanları ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Tüm $f \in L$ için $I_1(k_2, f) \leq I_1(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k_1 \leq f$ olsun. O halde, $I_1(k_2, f) \leq 1 = I_1(k_1, f)$.
- $k_1 > f$ olsun. Buradan, $I_1(k_2, f) = 0 \leq 0 = I_1(k_1, f)$.
- $k_1 \parallel f$ olsun. Aşağıdaki ifadeler durumlar incelenmelidir:

Durum 1. $k_2 > f$

$$I_1(k_2, f) = 0 \leq t = I_1(k_1, f).$$

Durum 2. $k_2 \parallel f$

$$I_1(k_2, f) = t \leq t = I_1(k_1, f).$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: f_1, f_2 L 'nin elemanları ve $f_1 \leq f_2$. Her $k \in L$ için $I_1(k, f_1) \leq I_1(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k \leq f_2$ olsun. O halde, $I_1(k, f_1) \leq 1 = I_1(k, f_2)$.
- $k > f_2$ olsun. Bu durumda, $I_1(k, f_1) = 0 \leq 0 = I_1(k, f_2)$.
- $k \parallel f_2$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

Durum 1. $k > f_1$

$$I_1(k, f_1) = 0 \leq I_1(k, f_2).$$

Durum 2. $k \parallel f_1$

$$I_1(k, f_1) = t \leq t = I_1(k, f_2).$$

(I3), (I4) ve (I5)'in sağlandığı I_1 'nin tanımından kolaylıkla görülür.

Uyarı 2.7. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $t \in L$ için Teorem 2.6’da elde edilen gerektirme I_1 göz önüne alınsın.

(i) Eğer $|L| > 2$ ise, I_1 (NP) özelliğini sağlamaz.

(ii) I_1 , (LOP) özelliğini sağlar.

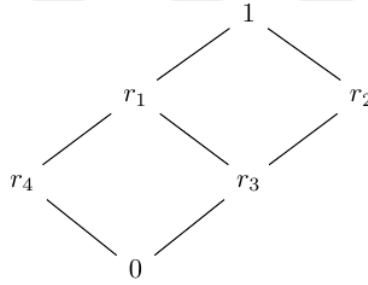
(iii) Eğer $t \neq 1$ ise, I_1 (OP) özelliğini sağlar.

(iv) Eğer $t \neq 1$ ise, I_1 (ROP) özelliğini sağlar.

(v) I_1 , (IP) özelliğini sağlar.

(vi) I_1 , (EP), (R-CP), (WE), (CP), (L-CP), (SBC-a) ve (SBC-b) özelliklerini sağlamak zorunda değildir. Örnek 2.8 ile bu durum gösterilebilir.

Örnek 2.8. $(L_2 = \{0, r_1, r_2, r_3, r_4, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi Şekil 2 ile ve N negasyonu aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2. L_2 kafesinin yapısı

$$N(\iota) = \begin{cases} 0 & , \quad \iota = 1 \\ r_3 & , \quad \iota \in \{r_1, r_2\} \\ r_2 & , \quad \iota = r_3 \\ r_1 & , \quad \iota = r_4 \\ 1 & , \quad \iota = 0 \end{cases}$$

Teorem 2.6’da $t = r_1$ alınarak elde edilen I_1 gerektirmesi Tablo 2’deki gibidir.

Tablo 2. L_2 kafesi üzerinde I_1 gerektirmesi

I_1	0	r_1	r_2	r_3	r_4	1
0	1	1	1	1	1	1
r_1	0	1	r_1	0	0	1
r_2	0	r_1	1	0	r_1	1
r_3	0	1	1	1	r_1	1
r_4	0	1	r_1	r_1	1	1
1	0	0	0	0	0	1

$I_1(r_1, I_1(r_3, r_4)) = I_1(r_1, r_1) = 1 \neq 0 = I_1(r_3, 0) = I_1(r_3, I_1(r_1, r_4))$ eşitsizliğinden I_1 , (EP) özelliğini sağlamaz. Ayrıca $r_1 \leq r_1 = I_1(r_3, r_4)$ fakat $r_3 \not\leq 0 = I_1(r_1, r_4)$ olduğundan, I_1 (WE) özelliğini sağlamaz. $I_1(r_2, r_4) = r_1 \neq 0 = I_1(r_1, r_3) = I_1(N(r_4), N(r_2))$ eşitsizliğinden I_1 , N 'e göre (CP) özelliğini sağlamaz. $I_1(N(r_4), r_3) = I_1(r_1, r_3) = 0 \neq r_1 = I_1(r_2, r_4) = I_1(N(r_3), r_4)$ den I_1 , N 'e göre (L-CP) özelliğini sağlamaz. Benzer şekilde I_1 , N 'e göre (R-CP), (SBC-a) ve (SBC-b) özelliklerini sağlamadığı Tablo 2'den görülür.

Teorem 2.9. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $S \in \mathcal{S}$ ve $N \in \mathcal{N}$ olsun. O halde

$$I_2(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad k \leq f \\ f & , \quad k > f \\ S(N(k), f) & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile $I_2: L^2 \rightarrow L$ tanımlanan fonksiyon L üzerinde bir gerektirmezdir.

İspat.

II) Birinci bileşene göre azalanlık: k_1, k_2 L 'nin elemanları ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Tüm $f \in L$ için $I_2(k_2, f) \leq I_2(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k_1 \leq f$ olsun. O halde, $I_2(k_2, f) \leq 1 = I_2(k_1, f)$.
- $k_1 > f$ olsun. Böylece, $I_2(k_2, f) = f \leq f = I_2(k_1, f)$.
- $k_1 \parallel f$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki durumlar incelenmelidir:

Durum 1. $k_2 > f$

$$I_2(k_2, f) = f \leq S(N(k_1), f) = I_2(k_1, f).$$

Durum 2. $k_2 \parallel f$

$$I_2(k_2, f) = S(N(k_2), f) \leq S(N(k_1), f) = I_2(k_1, f).$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: f_1, f_2 L 'nin elemanları ve $f_1 \leq f_2$. Her $k \in L$ için $I_2(k, f_1) \leq I_2(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k \leq f_2$ olsun. O halde, $I_2(k, f_1) \leq 1 = I_2(k, f_2)$.
- $k > f_2$ olsun. Bu takdirde, $I_2(k, f_1) = f_1 \leq f_2 = I_2(k, f_2)$.
- $k \parallel f_2$ olsun. O halde aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

Durum 1. $k > f_1$

$$I_2(k, f_1) = f_1 \leq f_2 \leq S(N(k), f_2) = I_2(k, f_2).$$

Durum 2. $k \parallel f_1$

$$I_2(k, f_1) = S(N(k), f_1) \leq S(N(k), f_2) = I_2(k, f_2).$$

(I3), (I4) ve (I5)'in sağlandığı I_2 'nın tanımından kolaylıkla görülür.

Uyarı 2.10. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. I_2 , Teorem 2.9'da sunulan gerektirme olsun.

(i) I_2 , (NP) özelliğini sağlar.

(ii) I_2 , (LOP) özelliğini sağlar.

(iii) I_2 , (IP) özelliğini sağlar.

(iv) I_2 , (CP), (L-CP), (ROP), (OP), (EP), (WE), (R-CP), (SBC-a) ve (SBC-b) özelliklerini sağlamak zorunda değildir. Bu durum Örnek 2.11 ile incelenebilir.

Örnek 2.11. $(L_2 = \{0, r_1, r_2, r_3, r_4, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi Şekil 2 ile ve N negasyonu Örnek 2.8'deki gibi verilsin. Teorem 2.9'da $S = S_v$ alınarak elde edilen I_2 gerektirmesi Tablo 3'teki gibidir.

Tablo 3. L_2 kafesi üzerinde I_2 gerektirmesi

I_2	0	r_1	r_2	r_3	r_4	1
0	1	1	1	1	1	1
r_1	0	1	r_2	r_3	r_4	1
r_2	0	r_1	1	r_3	r_1	1
r_3	0	1	1	1	1	1
r_4	0	1	1	r_1	1	1
1	0	r_1	r_2	r_3	r_4	1

$I_2(r_1, r_2) = r_2 \neq 1 = I_2(r_3, r_3) = I_2(N(r_2), N(r_1))$ dır. Böylece I_2 , N 'e göre (CP) özelliğini sağlamaz. Benzer şekilde Tablo 3 ile N 'e göre (L-CP), (R-CP) özelliklerini sağlamadığı görülür. $I_2(r_3, r_4) = 1$ fakat $r_3 \not\leq r_4$ olduğundan, I_2 (ROP) özelliğini sağlamaz. Ayrıca I_2 , (ROP)'yi sağlamadığından (OP) özelliğini de sağlamaz. $I_2(r_4, I_2(r_1, r_3)) = I_2(r_4, r_3) = r_1 \neq 1 = I_2(r_1, r_1) = I_2(r_1, I_2(r_4, r_3))$ olduğundan, I_2 (EP) özelliğini sağlamaz. $r_1 \leq r_1 = I_2(r_2, r_4)$ fakat $r_2 \not\leq r_4 = I_2(r_1, r_4)$ dolayısıyla I_2 , (WP) özelliğini sağlamaz. Ayrıca Tablo 3'ten (SBC-a), (SBC-b)'yi sağlamadığı da görülür.

Teorem 2.12. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $S \in \mathcal{S}$ ve $N \in \mathcal{N}$ olsun. O halde

$$I_3(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad k \leq f \\ N(k) & , \quad k > f \\ S(N(k), f) & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile $I_3: L^2 \rightarrow L$ tanımlanan fonksiyon L üzerinde bir gerektirmezdir.

İspat.

II) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Her $f \in L$ için $I_3(k_2, f) \leq I_3(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k_1 \leq f$ olsun. O halde, $I_3(k_2, f) \leq 1 = I_3(k_1, f)$.
- $k_1 > f$ olsun. Böylece, $I_3(k_2, f) = N(k_2) \leq N(k_1) = I_3(k_1, f)$.
- $k_1 \parallel f$ olsun. O halde aşağıdaki durumlar incelenmelidir:

Durum 1. $k_2 > f$

$$I_3(k_2, f) = N(k_2) \leq N(k_1) \leq S(N(k_1), f) = I_3(k_1, f).$$

Durum 2. $k_2 \parallel f$

$$I_3(k_2, f) = S(N(k_2), f) \leq S(N(k_1), f) = I_3(k_1, f).$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: f_1, f_2 L 'nin elemanları ve $f_1 \leq f_2$ olsun. Her $k \in L$ için $I_3(k, f_1) \leq I_3(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

- $k \leq f_2$ olsun. Bu taktirde, $I_3(k, f_1) \leq 1 = I_3(k, f_2)$.
- $k > f_2$ olsun. O halde, $I_3(k, f_1) = N(k) \leq N(k) = I_3(k, f_2)$.
- $k \parallel f_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

Durum 1. $k > f_1$

$$I_3(k, f_1) = N(k) \leq S(N(k), f_2) = I_3(k, f_2).$$

Durum 2. $k \parallel f_1$

$$I_3(k, f_1) = S(N(k), f_1) \leq S(N(k), f_2) = I_3(k, f_2).$$

(I3), (I4) ve (I5)'in sağlandığı I_3 'nın tanımından kolaylıkla görülür.

Uyarı 2.13. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_3 , Teorem 2.12'de elde edilen gerektirme olsun.

(i) I_3 , (IP) özelliğini sağlar.

(ii) I_3 , (LOP) özelliğini sağlar.

(iii) Eğer $|L| > 2$ ise, I_3 (NP) özelliğini sağlamaz.

(iv) I_3 , (ROP), (OP), (EP), (WE), (CP), (L-CP), (R-CP), (SBC-a) ve (SBC-b) özelliklerini sağlamak zorunda değildir. Bunu görmek için Örnek 2.14 göz önüne alınabilir.

Örnek 2.14. $(L_2 = \{0, r_1, r_2, r_3, r_4, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi Şekil 2 ve N negasyonu Örnek 2.8'deki gibi verilsin. Teorem 2.12'de $S = S_v$ alınarak elde edilen I_3 gerektirmesi Tablo 4'teki gibidir.

Tablo 4. L_2 kafesi üzerinde I_3 gerektirmesi

I_3	0	r_1	r_2	r_3	r_4	1
0	1	1	1	1	1	1
r_1	r_3	1	r_2	r_3	r_3	1
r_2	r_3	r_1	1	r_3	r_1	1
r_3	r_2	1	1	1	1	1
r_4	r_1	1	1	r_1	1	1
1	0	0	0	0	0	1

$I_3(r_3, r_4) = 1$ fakat $r_3 \not\leq r_4$ eşitsizliğinden I_3 , (ROP) özelliğini sağlamaz. Ayrıca I_3 , (ROP)'yi sağlamadığından (OP) özelliğini de sağlamaz. $I_3(r_1, I_3(r_2, r_4)) = I_3(r_1, r_1) = 1 \neq r_3 = I_3(r_2, r_3) = I_3(r_2, I_3(r_1, r_4))$ olduğundan I_3 , (EP) özelliğini sağlamaz. $r_1 \leq r_1 = I_3(r_2, r_4)$ fakat $r_2 \not\leq r_3 = I_3(r_1, r_4)$ dir. Böylece I_3 , (WP) özelliğini sağlamaz. $I_3(r_1, r_2) = r_2 \neq 1 = I_3(r_3, r_3) = I_3(N(r_2), N(r_1))$ olduğundan I_3 , N 'e göre (CP) özelliğini sağlamaz. Benzer şekilde Tablo 4'ten N 'e göre (L-CP), (R-CP)'yi, (SBC-a) ve (SBC-b) özelliklerini sağlamadığı görülür.

Önerme 2.15. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. J, L üzerinde bir gerektirme olsun. Bu taktide

$$I_{J,4}(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad k < f \\ J(k, f) & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I_{J,4}: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir.

İspat. Açıktır.

Önerme 2.16. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. J, L üzerinde bir gerektirme olsun. Bu taktide

$$I_{J,5}(k, f) = \begin{cases} J(k, f) & , \quad k \leq f \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I_{J,5}: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.17. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $J_1, J_2, J_3 \in \mathcal{F}$ ve $N \in \mathcal{N}$ olsun. Bu taktirde

$$I_6(k, f) = J_3 \left(N(J_1(k, f)), J_2(k, f) \right)$$

ile tanımlanan $I_6: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmezdir.

İspat.

I1) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Her $f \in L$ için $I_6(k_2, f) \leq I_6(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

$N \in \mathcal{N}$ ve $J_1, J_3 \in \mathcal{F}$ olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} k_1 \leq k_2 &\Rightarrow J_1(k_2, f) \leq J_1(k_1, f) \\ &\Rightarrow N(J_1(k_1, f)) \leq N(J_1(k_2, f)) \\ &\Rightarrow J_3 \left(N(J_1(k_2, f)), J_2(k_2, f) \right) \leq J_3 \left(N(J_1(k_1, f)), J_2(k_2, f) \right). \end{aligned}$$

Son olarak $J_2, J_3 \in \mathcal{F}$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$I_6(k_2, f) = J_3 \left(N(J_1(k_2, f)), J_2(k_2, f) \right) \leq J_3 \left(N(J_1(k_1, f)), J_2(k_1, f) \right) = I_6(k_1, f).$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: f_1, f_2 L 'nin elemanları ve $f_1 \leq f_2$ olsun. Her $k \in L$ için $I_6(k, f_1) \leq I_6(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

$N \in \mathcal{N}$ ve $J_1, J_3 \in \mathcal{F}$ olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} f_1 \leq f_2 &\Rightarrow J_1(k, f_1) \leq J_1(k, f_2) \\ &\Rightarrow N(J_1(k, f_2)) \leq N(J_1(k, f_1)) \\ &\Rightarrow J_3 \left(N(J_1(k, f_1)), J_2(k, f_1) \right) \leq J_3 \left(N(J_1(k, f_2)), J_2(k, f_1) \right). \end{aligned}$$

Son olarak $J_3 \in \mathcal{F}$ ve $J_2(k, f_1) \leq J_2(k, f_2)$ kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$I_6(k, f_1) = J_3 \left(N(J_1(k, f_1)), J_2(k, f_1) \right) \leq J_3 \left(N(J_1(k, f_2)), J_2(k, f_2) \right) = I_6(k, f_2).$$

I3)

$$\begin{aligned} I_6(0, 0) &= J_3 \left(N(J_1(0, 0)), J_2(0, 0) \right) \\ &= J_3(N(1), 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_3(0,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

I4)

$$\begin{aligned}
I_6(1,1) &= J_3\left(N(J_1(1,1)), J_2(1,1)\right) \\
&= J_3(N(1), 1) \\
&= J_3(0,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

I5)

$$\begin{aligned}
I_6(1,0) &= J_3\left(N(J_1(1,0)), J_2(1,0)\right) \\
&= J_3(N(0), 0) \\
&= J_3(1,0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Önerme 2.18. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_6 Teorem 2.17’de ortaya koyulan gerektirme olsun. O halde,

(i) Eğer J_1 , (LOP) özelliğini sağlar ise, I_6 da (LOP) özelliğini sağlar.

(ii) Eğer J_2 , (LOP) özelliğini sağlar ise, I_6 da (LOP) özelliğini sağlar.

İspat. $\iota_1, \iota_2 \in L$ olmak üzere $\iota_1 \leq \iota_2$ verilsin.

i. J_1 , (LOP) özelliğini sağlasın.

$$\begin{aligned}
I_6(\iota_1, \iota_2) &= J_3\left(N(J_1(\iota_1, \iota_2)), J_2(\iota_1, \iota_2)\right) \\
&= J_3(N(1), J_2(\iota_1, \iota_2)) \\
&= J_3(0, J_2(\iota_1, \iota_2)) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak I_6 , (LOP) özelliğini sağlar.

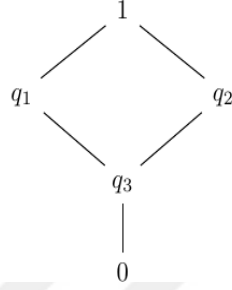
ii. J_2 , (LOP) özelliğini sağlasın.

$$\begin{aligned}
I_6(\iota_1, \iota_2) &= J_3 \left(N(J_1(\iota_1, \iota_2)), J_2(\iota_1, \iota_2) \right) \\
&= J_3 \left(N(J_1(\iota_1, \iota_2)), 1 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Böylece I_6 , (LOP) özelliğini sağlar.

Önerme 2.18’de verilen (i), (ii) maddelerinin tersi doğru olmak zorunda değildir. Yani I_6 (LOP)’yi sağlamasına rağmen, J_1 ve J_2 sağlamayabilir. Bunu görmek için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 2.19. $(L_3 = \{0, q_1, q_2, q_3, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi Şekil 3 ile, N negasyonu ve J_1, J_2, J_3 gerektirmeleri aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 3. L_3 kafesinin yapısı

$$N(\iota) = \begin{cases} 0 & , \quad \iota = 1 \\ q_2 & , \quad \iota = q_1 \\ q_1 & , \quad \iota = q_2 \\ 1 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Tablo 5. L_3 kafesi üzerinde J_1 gerektirmesi

J_1	0	q_1	q_2	q_3	1
0	1	1	1	1	1
q_1	q_3	q_1	q_2	q_3	1
q_2	q_2	1	q_2	q_2	1
q_3	q_2	1	q_2	q_2	1
1	0	q_1	q_2	q_3	1

Tablo 6. L_3 kafesi üzerinde J_2 gerektirmesi

J_2	0	q_1	q_2	q_3	1
0	1	1	1	1	1
q_1	q_3	q_1	q_2	q_3	1
q_2	q_1	q_1	1	q_1	1
q_3	q_1	q_1	1	q_1	1
1	0	q_1	q_2	q_3	1

Tablo 7. L_3 kafesi üzerinde J_3 gerektirmesi

J_3	0	q_1	q_2	q_3	1
0	1	1	1	1	1
q_1	q_2	1	q_2	q_2	1
q_2	q_2	1	q_2	q_2	1
q_3	1	1	1	1	1
1	0	q_1	q_2	q_3	1

Teorem 2.17 kullanılarak elde edilen I_6 gerektirmesi Tablo 8 ile aşağıda verilmiştir.

Tablo 8. L_3 kafesi üzerinde I_6 gerektirmesi

I_6	0	q_1	q_2	q_3	1
0	1	1	1	1	1
q_1	q_3	1	q_2	q_3	1
q_2	1	1	1	1	1
q_3	1	1	1	1	1
1	0	1	q_2	q_3	1

Önerme 2.20. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_6 , Teorem 2.17’de elde edilen gerektirme olsun. O halde,

(i) Eğer J_2 ve J_3 (SBC-a) özelliğini sağlar ise, I_6 da (SBC-a) özelliğini sağlar.

(ii) Eğer J_1, J_3 (SBC-a) özelliğini sağlar ve N non-filling özelliğine sahip ise, I_6 (SBC-a) özelliğini sağlar.

(iii) Eğer J_1, J_2, J_3 (SBC-b) özelliğini sağlar ve N non-vanishing özelliğine sahip ise, I_6 (SBC-b) özelliğini sağlar.

İspat.

i. J_2 ve J_3 (SBC-a)'yı sağlasın. $k, f \in L$ ve $I_6(k, f) = 0$ olsun.

$J_3(N(J_1(k, f)), J_2(k, f)) = 0$ ise, J_3 (SBC-a)'yı sağladığından $N(J_1(k, f)) = 1$ ve $J_2(k, f) = 0$ elde edilir. Son olarak J_2 'nin (SBC-a)'yı sağladığı kullanılırsa $k = 1$ ve $f = 0$ elde edilir.

ii. J_1, J_3 (SBC-a)'yı sağlasın ve N non-filling olsun. $k, f \in L$ ve $I_6(k, f) = 0$ alınsın.

$J_3(N(J_1(k, f)), J_2(k, f)) = 0$ ise, J_3 (SBC-a)'yı sağladığından $N(J_1(k, f)) = 1$ ve $J_2(k, f) = 0$ elde edilir. $N(J_1(k, f)) = 1$ ve N non-filling olduğundan $J_1(k, f) = 0$ dır. J_1 'in (SBC-a)'yı sağladığı kullanılarak $k = 1$ ve $f = 0$ elde edilir.

iii. Eğer J_1, J_2, J_3 (SBC-b)'yi sağlasın ve N non-vanishing olsun. $k, f \in L$ ve $I_6(k, f) = 1$ alınsın.

$J_3(N(J_1(k, f)), J_2(k, f)) = 1$ ise, J_3 (SBC-b)'yi sağladığından $N(J_1(k, f)) = 0$ veya $J_2(k, f) = 1$ dir.

Eğer $J_2(k, f) = 1$ ise, J_2 (SBC-b)'yi sağladığından $k = 0$ veya $f = 1$ dir. Böylece I_6 , (SBC-b)'yi sağlar.

Eğer $N(J_1(k, f)) = 0$ ise, N non-vanishing olduğundan $J_1(k, f) = 1$ dir. Son olarak J_1 , (SBC-b)'yi sağladığından $k = 0$ veya $f = 1$ dir.

Teorem 2.21. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $s, t \in L, T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}, N \in \mathcal{N}$ ve $J^t \in \mathcal{F}^t$ olsun. O halde

$$I_7(k, f) = S\left(S(T(N(k), s), T(f, s)), J^t(T(k, t), T(f, t))\right)$$

ile tanımlanan $I_7: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir ancak ve ancak $S(s, t) = 1$ dir.

İspat.

$S(s, t) = 1$ olsun.

I1) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Tüm $f \in L$ için $I_7(k_2, f) \leq I_7(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} k_1 \leq k_2 &\Rightarrow N(k_2) \leq N(k_1) \\ &\Rightarrow T(N(k_2), s) \leq T(N(k_1), s) \\ &\Rightarrow S(T(N(k_2), s), T(f, s)) \leq S(T(N(k_1), s), T(f, s)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$T(k_1, t) \leq T(k_2, t)$ ve $J^t \in \mathcal{F}^t$ olduğu kullanarak,

$$J^t(T(k_2, t), T(f, t)) \leq J^t(T(k_1, t), T(f, t)) \text{ elde edilir.}$$

Son olarak S 'nin monotonluğu ile,

$$\begin{aligned} I_7(k_2, f) &= S\left(S(T(N(k_2), s), T(f, s)), J^t(T(k_2, t), T(f, t))\right) \\ &\leq S\left(S(T(N(k_1), s), T(f, s)), J^t(T(k_1, t), T(f, t))\right) = I_7(k_1, f) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: $f_1, f_2 \in L$ 'nin elemanları olmak üzere ve $f_1 \leq f_2$ olsun. Tüm $k \in L$ için $I_7(k, f_1) \leq I_7(k, f_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow T(f_1, s) \leq T(f_2, s) \Rightarrow S(T(N(k), s), T(f_1, s)) \leq S(T(N(k), s), T(f_2, s)) \text{ dir.}$$

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow T(f_1, t) \leq T(f_2, t) \Rightarrow J^t(T(k, t), T(f_1, t)) \leq J^t(T(k, t), T(f_2, t)) \text{ dir.}$$

Son olarak S 'nin monotonluğu kullanarak istenilen eşitsizlik elde edilir.

I3)

$$\begin{aligned} I_7(0,0) &= S\left(S(T(N(0), s), T(0, s)), J^t(T(0, t), T(0, t))\right) \\ &= S(S(T(1, s), 0), J^t(0,0)) \\ &= S(S(s, 0), J^t(0,0)) \\ &= S(t, s) \\ &= 1. \end{aligned}$$

I4)

$$I_7(1,1) = S\left(S(T(N(1), s), T(1, s)), J^t(T(1, t), T(1, t))\right)$$

$$\begin{aligned}
&= S(S(T(0, s), s), J^t(t, t)) \\
&= S(S(0, s), J^t(t, t)) \\
&= S(t, s) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

I5)

$$\begin{aligned}
I_7(1, 0) &= S(S(T(N(1), s), T(0, s)), J^t(T(1, t), T(0, t))) \\
&= S(S(T(0, s), 0), J^t(t, 0)) \\
&= S(0, 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tersi açıktır.

Sonuç 2.22. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_7 , Teorem 2.21 de verilen gerektirme olsun.

(i) Eğer $t = s = 1$ alınırsa, $I_7(k, f) = S(S(N(k), f), J^1(k, f))$ elde edilir.

(ii) Eğer $s = 0$ alınırsa, $I_7(k, f) = J^1(k, f)$ elde edilir.

(iii) Eğer $t = 0$ alınırsa, $I_7(k, f) = S(N(k), f)$ elde edilir.

Önerme 2.23. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, I_7 , Teorem 2.21’de verilen gerektirme ve T, S üzerine $\{s, t\}$ dağılımlı olsun. Eğer J^t , (NP) özelliğini sağlar ise, I_7 de (NP) özelliğini sağlar.

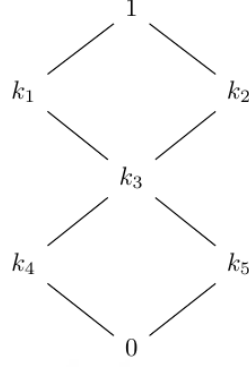
İspat. J^t , (NP) özelliğini sağlasın ve $f \in L$ olsun.

$$\begin{aligned}
I_7(1, f) &= S(S(T(N(1), s), T(f, s)), J^t(T(1, t), T(f, t))) \\
&= S(S(T(0, s), T(f, s)), J^t(T(1, t), T(f, t))) \\
&= S(S(0, T(f, s)), J^t(t, T(f, t))) \\
&= S(T(f, s), T(f, t)) \\
&= T(f, S(t, s)) \\
&= T(f, 1) \\
&= f.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, I_7 (NP) özelliğini sağlar.

Örnek 2.24’te I_7 gerektirmesinin (NP)’yi sağladığı halde J^t ’nin (NP)’yi sağlamadığı görülür.

Örnek 2.24. Şekil 4 ile verilen $(L_4 = \{0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi ve $T = T_\wedge, S = S_\vee$ göz önüne alınsın. N, L_4 üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın. $J^{k_1}, [0, k_1]$ üzerinde Tablo 9 ile verilen gerektirme olsun.



Şekil 4. L_4 kafesinin yapısı

$$N(v) = \begin{cases} 0 & , \quad v = 1 \\ k_1 & , \quad v = k_5 \\ k_3 & , \quad v = k_3 \\ k_5 & , \quad v = k_2 \\ k_4 & , \quad v = k_1 \\ k_2 & , \quad v = k_4 \\ 1 & , \quad v = 0 \end{cases}$$

Tablo 9. $[0, k_1]$ altkafesi üzerinde J^{k_1} gerektirmesi

J^{k_1}	0	k_4	k_5	k_3	k_1
0	k_1	k_1	k_1	k_1	k_1
k_4	k_4	k_1	k_3	k_1	k_1
k_5	k_5	k_3	k_1	k_1	k_1
k_3	0	0	0	k_1	k_1
k_1	0	0	0	0	k_1

Teorem 2.21 $t = k_1, s = k_2$ alınarak elde edilen I_7 gerektirmesi Tablo 10 ile verilir.

Tablo 10. L_4 kafesi üzerinde I_7 gerektirmesi

I_7	0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	1
0	1	1	1	1	1	1	1
k_1	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	1
k_2	k_5	k_1	1	k_1	k_3	k_5	1
k_3	k_3	k_1	1	k_1	k_3	k_3	1
k_4	k_2	1	1	1	1	k_2	1
k_5	k_3	k_1	1	k_1	k_3	k_1	1
1	0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	1

Aşağıdaki örnek ile Teorem 2.21 kullanılarak elde edilen gerektirme ve Teorem 1.31 ile verilen gerektirmenin aynı olmadığı görülür.

Örnek 2.25. ($L = [0,1], \leq, 0,1$) sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $T = T_M$, $S = S_M$, $J^1 = I_{RC}$, $N^1 = N_C$ ve $t = s = 1$ olsun.

Teorem 2.21 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_7\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) &= S_M\left(S_M\left(T_M\left(N_C\left(\frac{2}{3}\right), 1\right), T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right), I_{RC}\left(T_M\left(\frac{2}{3}, 1\right), T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)\right) \\
&= S_M\left(S_M\left(T_M\left(\frac{1}{3}, 1\right), T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right), I_{RC}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= S_M\left(S_M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \frac{2}{3}\right) \\
&= S_M\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Teorem 1.31 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_{S_M, N_C, T_M}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) &= S_M\left(N_C\left(T_M\left(\frac{2}{3}, N_C\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right), N_C\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= S_M\left(N_C\left(T_M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\right), \frac{1}{3}\right) \\
&= S_M\left(N_C\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Böylece $I_7 \neq I_{S_M, N_C, T_M}$ olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte Teorem 2.21’de elde edilen I_7 gerektirmesinin reel birim aralık $[0,1]$ üzerinde bir uygulaması aşağıdaki örnekteki gibi verilebilir.

Örnek 2.26. $(L = [0,1], \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $t = s = \frac{1}{2}$, $T = T_M$, $S =$

$$S_{LK}, N = N_C \text{ ve } J^{\frac{1}{2}}(k, f) = (I_{WB})^{\frac{1}{2}}(k, f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k < \frac{1}{2} \\ f & , \quad k = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ olsun. Teorem 2.21 uygulanarak}$$

I_7 fuzzy gerektirmesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_7(k, f) = \begin{cases} \min(\frac{1}{2} + 2f, 1) & , \quad k = \frac{1}{2} \text{ ve } f \leq \frac{1}{2} \\ \min(1 + 2f - k, 1) & , \quad k > \frac{1}{2} \text{ ve } f \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \quad \text{aksi taktirde.} \end{cases}$$

Teorem 2.27. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $t, s \in L, T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}, N \in \mathcal{N}$ ve $J_t \in \mathcal{F}_t$ verilsin. O halde

$$I_8(k, f) = T\left(S(N(k), S(f, s)), J_t(S(k, t), S(f, t))\right)$$

ile tanımlanan $I_8: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir ancak ve ancak $T(t, s) = 0$ dır.

İspat.

$T(t, s) = 0$ olsun.

II) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Bu durumda tüm $f \in L$ için $I_8(k_2, f) \leq I_8(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
k_1 \leq k_2 &\Rightarrow N(k_2) \leq N(k_1) \\
&\Rightarrow S(N(k_2), S(f, s)) \leq S(N(k_1), S(f, s)) \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 \leq k_2 &\Rightarrow S(k_1, t) \leq S(k_2, t) \\
&\Rightarrow J_t(S(k_2, t), S(f, t)) \leq J_t(S(k_1, t), S(f, t)) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

T' nin monotonluğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_8(k_2, f) &= T\left(S(N(k_2), S(f, s)), J_t(S(k_2, t), S(f, t))\right) \\
&\leq T\left(S(N(k_1), S(f, s)), J_t(S(k_1, t), S(f, t))\right) = I_8(k_1, f).
\end{aligned}$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: $f_1, f_2 \in L$ ve $f_1 \leq f_2$ olmak üzere tüm $k \in L$ için $I_8(k, f_1) \leq I_8(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
f_1 \leq f_2 &\Rightarrow S(f_1, s) \leq S(f_2, s) \\
&\Rightarrow S(N(k), S(f_1, s)) \leq S(N(k), S(f_2, s)) \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$J_t \in \mathcal{F}_t$ ve $S(f_1, t) \leq S(f_2, t)$ kullanılarak $J_t(S(k, t), S(f_1, t)) \leq J_t(S(k, t), S(f_2, t))$ elde edilir.

Böylece,

$$\begin{aligned}
I_8(k, f_1) &= T\left(S(N(k), S(f_1, s)), J_t(S(k, t), S(f_1, t))\right) \\
&\leq T\left(S(N(k), S(f_2, s)), J_t(S(k, t), S(f_2, t))\right) = I_8(k, f_2) \text{ dır.}
\end{aligned}$$

I3) $I_8(0,0) = 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
I_8(0,0) &= T\left(S(N(0), S(0, s)), J_t(S(0, t), S(0, t))\right) \\
&= T\left(S(1, S(0, s)), J_t(t, S(0, t))\right) \\
&= T(S(1, s), J_t(t, t)) \\
&= T(1,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

I4) $I_8(1,1) = 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
I_8(1,1) &= T\left(S(N(1), S(1, s)), J_t(S(1, t), S(1, t))\right) \\
&= T(S(0,1), J_t(1,1)) \\
&= T(1,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

I5) $I_8(1,0) = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
I_8(1,0) &= T\left(S(N(1), S(0, s)), J_t(S(1, t), S(0, t))\right) \\
&= T(S(0, s), J_t(1, t)) \\
&= T(s, t)
\end{aligned}$$

$$= 0.$$

Tersi, I_8 'nın (I5) özelliğini sağlamasından açıktır.

Sonuç 2.28. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_8 , Teorem 2.27 ile verilen gerektirme olsun.

(i) Eğer $t = s = 0$ alınırsa, $I_8(k, f) = T(S(N(k), f), J_0(k, f))$ elde edilir.

(ii) Eğer $s = 1$ alınırsa $I_8(k, f) = J_0(k, f)$ elde edilir.

(iii) Eğer $t = 1$ alınırsa $I_8(k, f) = S(N(k), f)$ elde edilir.

Önerme 2.29. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi verilsin. I_8 Teorem 2.27'de verilen gerektirme ve S, T üzerine $\{t, s\}$ dağılımlı olsun. Eğer J_t (NP) özelliğini sağlar ise, I_8 de (NP) özelliğini sağlar.

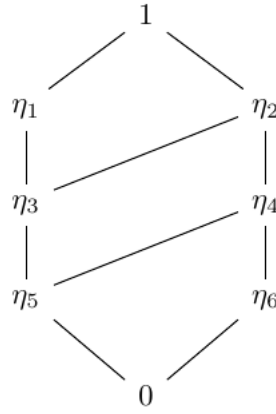
İspat. J_t , (NP) özelliğini ve $f \in L$ olsun.

$$\begin{aligned} I_8(1, f) &= T(S(N(1), S(f, s)), J_t(S(1, t), S(f, t))) \\ &= T(S(0, S(f, s)), J_t(1, S(f, t))) \\ &= T(S(f, s), S(f, t)) \\ &= S(f, T(t, s)) \\ &= S(f, 0) \\ &= f. \end{aligned}$$

Aşağıdaki örnekle Önerme 2.29'un tersinin doğru olmadığı gözlemlenir.

Örnek 2.30. Şekil 5 ile verilen $(L_5 = \{0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi ve $T = T_\wedge, S = S_\vee$ göz önüne alınsın. N, L üzerinde, $J_{\eta_5}, [\eta_5, 1]$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan negasyonlar olsun.

$$N(\iota) = \begin{cases} 0 & , & \iota = 1 \\ \eta_2 & , & \iota = \eta_5 \\ \eta_1 & , & \iota = \eta_6 \\ \eta_5 & , & \iota \in \{\eta_4, \eta_2\} \\ \eta_4 & , & \iota \in \{\eta_3, \eta_1\} \\ 1 & , & \iota = 0 \end{cases}$$

Şekil 5. L_5 kafesinin yapısıTablo 11. $[\eta_5, 1]$ altkafesi üzerinde J_{η_5} gerektirmesi

J_{η_5}	η_5	η_3	η_4	η_2	η_1	1
η_5	1	1	1	1	1	1
η_3	η_5	η_3	1	1	η_1	1
η_4	η_5	η_3	1	1	η_1	1
η_2	η_5	η_3	1	1	η_1	1
η_1	η_5	η_3	1	1	η_1	1
1	η_5	η_3	1	1	η_1	1

$t = \eta_5, s = \eta_6$ alınarak Teorem 2.27 uygulanırsa elde edilen gerektirme Tablo 12 ile verilir

Tablo 12. L_5 kafesi üzerinde I_8 gerektirmesi

I_8	0	η_5	η_6	η_3	η_4	η_2	η_1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
η_5	η_2	η_2	η_2	η_2	η_2	η_2	1	1
η_6	η_5	η_5	1	η_3	1	1	η_1	1
η_3	η_5	η_5	η_4	η_3	η_4	η_2	η_1	1
η_4	η_5	η_5	η_4	η_3	η_4	η_2	η_1	1
η_2	η_5	η_5	η_4	η_3	η_4	η_2	η_1	1
η_1	η_5	η_5	η_4	η_3	η_4	η_2	η_1	1
1	0	η_5	η_6	η_3	η_4	η_2	η_1	1

Örnek 2.31 ile Teorem 2.27 de ortaya koyulan I_8 gerektirmesinin reel birim aralık $[0,1]$ üzerindeki bir karşılığı elde edilmiştir.

Örnek 2.31. $(L = [0,1], \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $t = s = \frac{1}{2}$, $T = T_{LK}$, $S = S_M$, $N = N_C$ ve $J_{\frac{1}{2}} = (I_{RS})_{\frac{1}{2}}(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad k \leq f \\ \frac{1}{2} & , \quad k > f \end{cases}$ verilsin. O halde Teorem 2.27 kullanılarak elde edilen fuzzy gerektirme aşağıdaki gibidir.

$$I_8(k, f) = \begin{cases} 1 - k & , \quad k \leq \frac{1}{2} \text{ ve } f \leq \frac{1}{2} \\ \max(1 - k, f) & , \quad k \leq \frac{1}{2} \text{ ve } f > \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad k > \frac{1}{2} \text{ ve } f \leq \frac{1}{2} \\ f & , \quad k > \frac{1}{2}, f > \frac{1}{2} \text{ ve } k \leq f \\ f - \frac{1}{2} & , \quad k > \frac{1}{2}, f > \frac{1}{2} \text{ ve } k > f. \end{cases}$$

Teorem 2.32. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $t, s \in L$, $T \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{S}$, $N^t \in \mathcal{N}^t$ ve $J^s \in \mathcal{F}^s$ verilsin. O halde

$$I_9(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad f = 1 \\ S(N^t(T(k, t)), J^s(T(k, s), T(f, s))) & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I_9: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir ancak ve ancak $S(t, s) = 1$ dir.

İspat.

$S(t, s) = 1$ olsun.

II) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ olmak üzere $k_1 \leq k_2$ verilsin. Bu durumda tüm $f \in L$ için $I_9(k_2, f) \leq I_9(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

Eğer $f = 1$ ise ispat açıktır. O halde $f \neq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} k_1 \leq k_2 &\Rightarrow T(k_1, t) \leq T(k_2, t) \\ &\Rightarrow N^t(T(k_2, t)) \leq N^t(T(k_1, t)) \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$k_1 \leq k_2 \Rightarrow T(k_1, s) \leq T(k_2, s) \\ \Rightarrow J^s(T(k_2, s), T(f, s)) \leq J^s(T(k_1, s), T(f, s)) \text{ dır.}$$

Bu eşitsizlikler kullanılarak:

$$I_9(k_2, f) = S\left(N^t(T(k_2, t)), J^s(T(k_2, s), T(f, s))\right) \\ \leq S\left(N^t(T(k_1, t)), J^s(T(k_1, s), T(f, s))\right) = I_9(k_1, f) \text{ bulunur.}$$

I2) İkinci bileşene göre artanlık: $f_1, f_2 \in L$ olmak üzere $f_1 \leq f_2$ verilsin. Bu taktirde tüm $k \in L$ için $I_9(k, f_1) \leq I_9(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

Eğer $f_2 = 1$ ise ispat açıktır. Ayrıca $f_1 = 1$ ise $f_2 = 1$ olacağından ispat açıktır. O halde $f_1, f_2 \notin \{1\}$ olsun.

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow T(f_1, s) \leq T(f_2, s) \\ \Rightarrow J^s(T(k, s), T(f_1, s)) \leq J^s(T(k, s), T(f_2, s)) \text{ dir.}$$

$S \in \mathcal{S}$ olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$I_9(k, f_1) = S\left(N^t(T(k, t)), J^s(T(k, s), T(f_1, s))\right) \\ \leq S\left(N^t(T(k, t)), J^s(T(k, s), T(f_2, s))\right) = I_9(k, f_2).$$

I3) $I_9(0,0) = 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$I_9(0,0) = S\left(N^t(T(0, t)), J^s(T(0, s), T(0, s))\right) \\ = S(N^t(0), J^s(0,0)) \\ = S(t, s) \\ = 1$$

I4) I_9 'nin tanımından açıktır.

I5) $I_9(1,0) = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$I_9(1,0) = S\left(N^t(T(1, t)), J^s(T(1, s), T(0, s))\right) \\ = S(N^t(t), J^s(s, 0)) \\ = S(0,0) \\ = 0.$$

Tersi, (I3) özelliği ile açıktır.

Sonuç 2.33. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I_9 , Teorem 2.32’ de verilen gerektirme olsun.

(i) Eğer $t = s = 1$ alınır ise, $I_9(k, f) = S(N^1(k), J^1(k, f))$ elde edilir.

(ii) Eğer $s = 0$ alınırsa,

$$I_9(k, f) = \begin{cases} 1 & , f = 1 \\ N^1(k) & , \text{ aksi taktirde} \end{cases}$$

elde edilir.

(iii) Eğer $t = 0$ alınır ise, $I_9(k, f) = J^1(k, f)$ elde edilir.

Aşağıdaki örneklerle Teorem 2.32 kullanılarak elde edilen gerektirme ile Teorem 1.34’te verilen gerektirmenin farklı olduğu görülür.

Örnek 2.34. $(L = [0, 1], \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $t = s = 1$, $T = T_M$, $S = S_M$, $J^1 = I_{RS}$ ve $N^1 = N_C$ olsun.

Teorem 2.32 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_9\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) &= S_M\left(N_C\left(T_M\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right), I_{RS}\left(T_M\left(\frac{2}{3}, 1\right), T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)\right) \\ &= S_M\left(N_C\left(\frac{2}{3}\right), I_{RS}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= S_M\left(\frac{1}{3}, 0\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan $A = B = S_M$, $N = N_C$ ve $I = I_{RS}$ alınsın.

Teorem 1.34 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_{N_C}^{S_M, S_M}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) &= S_M\left(S_M\left(I_{RS}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right), N_C\left(\frac{2}{3}\right)\right), S_M\left(I_{RS}\left(N_C\left(\frac{1}{2}\right), N_C\left(\frac{2}{3}\right)\right), \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= S_M\left(S_M\left(0, \frac{1}{3}\right), S_M\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= S_M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Böylece $I_9 \neq I_N^{S_M, S_M}$ olduğu görülür.

Örnek 2.35. $(L = [0, 1], \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $t = s = 1$, $T = T_M$, $S = S_M$, $J^1 = I_{RS}$ ve $N^1 = N_C$ olsun.

Teorem 2.32 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_9\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) &= S_M\left(N_C\left(T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right), I_{RS}\left(T_M\left(\frac{1}{2}, 1\right), T_M\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right)\right) \\
&= S_M\left(N_C\left(\frac{1}{2}\right), I_{RS}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right) \\
&= S_M\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Diğer taraftan $A = T_M$, $B = S_M$, $I = I_{RS}$ ve $N = N_C$ alınsın.

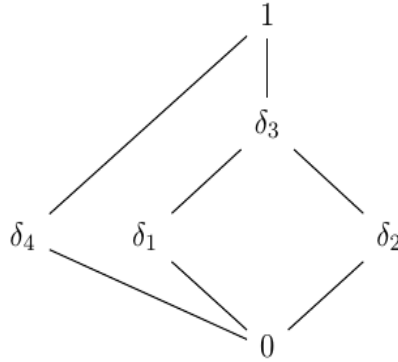
Teorem 1.34 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_{N_C}^{T_M, S_M}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) &= T_M\left(S_M\left(I_{RS}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), N_C\left(\frac{1}{2}\right)\right), S_M\left(I_{RS}\left(N_C\left(\frac{1}{3}\right), N_C\left(\frac{1}{2}\right)\right), \frac{1}{3}\right)\right) \\
&= T_M\left(S_M\left(0, \frac{1}{2}\right), S_M\left(0, \frac{1}{3}\right)\right) \\
&= T_M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $I_9 \neq I_{N_C}^{T_M, S_M}$.

Aşağıdaki örnek ile Teorem 2.32 ile elde edilen gerektirmeyle Teorem 1.30 ile sunulan gerektirmenin aynı olmadığı görülür.

Örnek 2.36. Şekil 6 ile verilen $(L_6 = \{0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, 1\}, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. $T = T_\wedge$ ve $S = S_\vee$ olsun. L üzerindeki I gerektirmesi Tablo 13 ile verilsin.



Şekil 6. L_6 kafesinin yapısı

$[0, \delta_3]$ altkafesi üzerinde N^{δ_3} negasyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$N^{\delta_3}(\iota) = \begin{cases} 0 & , \quad \iota = \delta_3 \\ \delta_2 & , \quad \iota = \delta_1 \\ \delta_1 & , \quad \iota = \delta_2 \\ \delta_3 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Tablo 13. L_6 kafesi üzerinde I gerektirmesi

I	0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	1
0	1	1	1	1	1	1
δ_1	0	1	δ_4	1	δ_4	1
δ_2	0	δ_4	1	1	δ_4	1
δ_3	0	0	0	1	δ_4	1
δ_4	0	δ_4	δ_4	δ_4	1	1
1	0	0	0	0	0	1

$t = \delta_3, s = 1, J^1 = I$ alınarak Teorem 2.32 uygulanırsa I_9 gerektirmesi Tablo 14 ile verilir.

Tablo 14. L_6 kafesi üzerinde I_9 gerektirmesi

I_9	0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	1
0	1	1	1	1	1	1
δ_1	δ_2	1	1	1	1	1
δ_2	δ_1	1	1	1	1	1
δ_3	0	0	0	1	δ_4	1
δ_4	δ_3	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1

Ayrıca $a = \delta_3, J = I$ alınsın ve N negasyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$N(\iota) = \begin{cases} 1 & , \quad \iota \in \{0, \delta_1, \delta_2\} \\ \delta_4 & , \quad \iota = \delta_3 \\ \delta_2 & , \quad \iota = \delta_4 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Teorem 1.30 kullanılarak, $K_{\delta_3, T_\wedge, S_\vee, N}^{I, I}$ gerektirmesi Tablo 15 ile verilir.

Tablo 15. L_6 kafesi üzerinde $K_{\delta_3, T_\wedge, S_\vee, N}^{I, I}$ gerektirmesi

$K_{\delta_3, T_\wedge, S_\vee, N}^{I, I}$	0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	1
0	1	1	1	1	1	1
δ_1	0	1	δ_4	1	δ_4	1
δ_2	0	δ_4	1	1	δ_4	1
δ_3	0	0	0	1	δ_4	1
δ_4	0	δ_4	δ_4	δ_4	1	1
1	0	0	0	0	0	1

Tablo 14 ve Tablo 15 ile $I_9 \neq K_{\delta_3, T_\wedge, S_\vee, N}^{I, I}$ olduğu görülür.

Teorem 2.37. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $t, s \in L, T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}, N_t \in \mathcal{N}$ ve $J_s \in \mathcal{F}_s$ verilsin. O halde

$$I_{10}(k, f) = \begin{cases} 1 & , \quad f = 1 \\ T(N_t(S(k, t)), J_s(S(k, s), S(f, s))) & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I_{10}: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir gerektirmedir ancak ve ancak $T(t, s) = 0$ dır.

İspat.

$T(t, s) = 0$ olsun.

II) Birinci bileşene göre azalanlık: $k_1, k_2 \in L$ ve $k_1 \leq k_2$ verilsin. Her $f \in L$ için $I_{10}(k_2, f) \leq I_{10}(k_1, f)$ sağlandığı gösterilmelidir.

Eğer $f = 1$ ise ispat açıktır. O halde $f \neq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} k_1 \leq k_2 &\Rightarrow S(k_1, t) \leq S(k_2, t) \\ &\Rightarrow N_t(S(k_2, t)) \leq N_t(S(k_1, t)) \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 \leq k_2 &\Rightarrow S(k_1, s) \leq S(k_2, s) \\ &\Rightarrow J_s(S(k_2, s), S(f, s)) \leq J_s(S(k_1, s), S(f, s)) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Son olarak T 'nin monotonluğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$T\left(N_t(S(k_2, t)), J_s(S(k_2, s), S(f, s))\right) \leq T\left(N_t(S(k_1, t)), J_s(S(k_1, s), S(f, s))\right).$$

Böylece, $I_{10}(k_2, f) \leq I_{10}(k_1, f)$ sağlanır.

I2) İkinci bileşene göre artanlık: $f_1, f_2 \in L$ ve $f_1 \leq f_2$ olsun. Tüm $k \in L$ için $I_{10}(k, f_1) \leq I_{10}(k, f_2)$ sağlandığı gösterilmelidir.

Eğer $f_2 = 1$ ise ispat açıktır. Ayrıca $f_1 = 1$ ise $f_2 = 1$ olacağından ispat açıktır. O halde $f_1, f_2 \notin \{1\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f_1 \leq f_2 &\Rightarrow S(f_1, s) \leq S(f_2, s) \\ &\Rightarrow J_s(S(k, s), S(f_1, s)) \leq J_s(S(k, s), S(f_2, s)) \text{ dır.} \end{aligned}$$

T 'nin monotonluğu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$T\left(N_t(S(k, t)), J_s(S(k, s), S(f_1, s))\right) \leq T\left(N_t(S(k, t)), J_s(S(k, s), S(f_2, s))\right).$$

Dolayısıyla, $I_{10}(k, f_1) \leq I_{10}(k, f_2)$ sağlanır.

I3) $I_{10}(0,0) = 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} I_{10}(0,0) &= T\left(N_t(S(0, t)), J_s(S(0, s), S(0, s))\right) \\ &= T\left(N_t(t), J_s(s, s)\right) \\ &= T(1,1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

I4) I_{10}' 'nin tanımından açıktır.

I5) $I_{10}(1,0) = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} I_{10}(1,0) &= T\left(N_t(S(1, t)), J_s(S(1, s), S(0, s))\right) \\ &= T\left(N_t(1), J_s(1, s)\right) \\ &= T(t, s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tersi açıktır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ilk olarak kısmen sıralı kümeler, kafesler ve gerektirmelere ait temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Literatürde $[0,1]$ reel birim aralığı üzerinde fuzzy gerektirmeleri inşa etmek için birçok inşa yöntemi mevcuttur. Ayrıca, son zamanlarda literatüre sınırlı kafesler üzerinde gerektirmeler inşa etmek içinde bazı inşa yöntemleri sunulmuştur. Bu çalışmanın esas amacı da sınırlı bir L kafesi üzerinde gerektirmeler inşa etmek için çeşitli inşa yöntemleri sunmaktır. Bu çalışmayla birlikte herhangi bir şart olmaksızın sınırlı bir L kafesi üzerinde gerektirmeler inşa etmek bir dizi inşa yöntemi verilmiştir. Bu inşa yöntemlerinin bazılarında L 'nin keyfi sabit elemanları, bazı mantık operatörler kullanılmıştır. Ayrıca sınırlı bir L kafesinin altkafesleri üzerinde tanımlı mantık operatörler ve gerekli durumlarda bazı ek kısıtlamalar kullanılarak inşa yöntemleri sunulmuştur. Tüm bunların neticesinde bu yöntemlerle elde edilen gerektirmelerin özellikleri incelenmiştir. Elde edilen gerektirmeler için önemli sonuçlar verilmiştir. Bu inşa yöntemlerinin $[0,1]$ reel birim aralığı üzerinde bazı uygulamaları verilmiştir. Verilen inşa yöntemleri için örnekler verilmiş ve literatürdeki inşa yöntemleriyle ilişkisi incelenmiştir.

4. SONUÇLAR

1. Sınırlı bir kafes üzerinde gerektirmeler kullanılarak supremum yarı kafesler bulunmuştur.
2. Sınırlı bir kafes üzerinde gerektirmelerin bazı elemanlarının özel durumları incelenmiştir.
3. Sınırlı bir L kafesi üzerinde sabit bir eleman yardımıyla gerektirme inşa etmek için yöntem sunulmuştur.
4. Sınırlı bir L kafesi üzerinde t -norm, t -konorm, negasyon, gerektirme gibi mantık operatörler kullanılarak gerektirmeler inşa etmek için yöntemler sunulmuştur.
5. Sınırlı bir L kafesinin altkafesi üzerinde tanımlı mantık operatörler ve bazı ek kısıtlamalar kullanılarak gerektirmeleri inşa etmek için yöntemler sunulmuştur.
6. Verilen yöntemlerle elde edilen gerektirmelerin özellikleri incelenmiştir.
7. Verilen inşa yöntemleriyle elde edilen bazı gerektirmeler reel $[0,1]$ aralığı üzerinde uygulanmıştır.
8. Verilen inşa yöntemlerinden özel durumlarda elde edilen gerektirmeler verilmiştir.
9. Verilen inşa yöntemlerinin literatürle ilişkisi incelenmiştir.
10. Teorem ve önermelerin bazı örneklerle uygulaması verilmiştir.

5. ÖNERİLER

Sınırlı kafesler üzerinde kıyaslanabilir elemanlar kullanılarak gerektirmeler inşa etmek için yöntemler bulunabilir. Sınırlı kafesler üzerinde birleştirme fonksiyonları, sıra koruyan fonksiyonlar veya sırayı ters çeviren fonksiyonlardan elde edilebilecek gerektirme inşa yöntemleri araştırılabilir.



6. KAYNAKLAR

- Bachynski, M., & B. Jayaram. (2008). Fuzzy implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. 3rd Edition, Providence, Rhode Island.
- Bustince, H., V. Mohedano, E. Barrenechea, & M. Pagola, (2020). Definition and construction of fuzzy DI-subsethood measures. Information Science, 176: 3190–3231.
- Dubois, D., & H. Prade, (1991). Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions. Fuzzy Sets and Systems, 40: 143–202.
- Grabisch, M., J. Marichal, R. Mesiar, & E. Pap. (2009). Aggregation Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University: Press.
- Heijmans, H. (1995). Mathematical morphology: a modern approach in image processing based on algebra and geometry. SIAM Rev. 37: 1-36.
- Karaçal, F., & Dj. Khadjiev. (2005). $\vee$ -distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattices. Fuzzy Sets and Systems, 151: 341–352.
- Karaçal, F., M.N. Kesicioğlu F., & Ü. Ertuğrul. (2021). The implications obtained by two given implications on bounded lattices. International Journal of General Systems 50:3, 281-299.
- Kesicioğlu, M. N., Ü. Ertuğrul, & F. Karaçal. (2020). Generalized Convex Combination of Implications on Bounded Lattices. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6: 75–91.
- Klement, E., P., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). Triangular norms Trends in logic. Studia Logica Library, vol. 8, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Liu. W.Y. (1997). Fuzzy data dependencies and implication of fuzzy data dependencies. Fuzzy Sets and Systems, 92: 341-348.
- Neres, F., B. Bedregal, & Santiago, R. (2021). (S,N,T)-implications. arXiv 2106.15746.
- Neres, F., B. Bedregal, & Santiago, R. (2023). Bi-aggregated contrapositivation: A new contrapositivation technique for fuzzy implications. Fuzzy Sets and Systems 466: 108427.

ÖZGEÇMİŞ

Kübra KARACAİR, İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitime başladı. 2021 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2021 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitime başladı. 2023 yılından itibaren Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.

