T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE GEREKTİRMELERDEN ELDE EDİLEN KISMEN SIRALAMA

BERNA KARA

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. MÜCAHİDE NESİBE KESİCİOĞLU
TEZ JÜRİLERİ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT DENİZ
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT ERTUĞRUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2019

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE GEREKTİRMELERDEN ELDE EDİLEN KISMEN SIRALAMA

Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU danışmanlığında, Berna KARA tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/07/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİ.
1923

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda, planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeyle çalışmamı şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yetişmemde emeği geçen RTEÜ Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına ve moral ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım…

Berna KARA

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Sınırlı Kafesler üzerinde Gerektirmelerden Elde Edilen Kısmen Sıralama" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 12/07/2019

Berna KARA

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE GEREKTİRMELERDEN ELDE EDİLEN KISMEN SIRALAMA

Berna KARA

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Bu çalışmada bir sınırlı L kafesi üzerinde I gerektirmesi yardımıyla $\preccurlyeq_I$ ile gösterilen bir bağıntı tanımlanmış ve $\preccurlyeq_I$ nın hangi şartlar altında kısmen sıralama bağıntısı olduğu incelenmiştir. Bir sınırlı L kafesi üzerinde tanımlanan $\preccurlyeq_I$ kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve $\leq$ ile $\preccurlyeq_I$ arasındaki ilişki araştırılmıştır. $(L, \preccurlyeq_I)$ kısmen sıralı kümenin en büyük ve en küçük elemanları incelenmiştir. L bir kafes olsa bile L nin $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre bir kafes olması gerekmediği örneklerle gösterilmiştir. L i $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kafes yapan şart belirlenmiştir. T sol sürekli bir t-norm ve I_T, t-norm T'den elde edilen bir rezidual gerektirme olmak üzere I_T ve T' den elde edilen kısmen sıralama bağıntılarının birbirinden bağımsız olduğu örnek ile açıklanmıştır. L sınırlı kafesi üzerinde tanımlanan $I(x, y) = N(x) \vee y$ gerektirmesinden elde edilen $\preccurlyeq_I$ sıralamasının L deki $\leq$ sıralamaya eşit olduğu ispatlanmıştır.

2019, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: Gerektirme, Sınırlı Kafes, Kısmen Sıralı Küme, Sıralama, Yer Değiştirme Kuralı

ABSTRACT

AN ORDER INDUCED BY İMPLİCATİONS ON BOUNDED LATTİCES

Berna KARA

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

In this study, a relation denoted by $\preccurlyeq_I$ has been introduced by means of an implication I and the conditions making it an order have been investigated. Also, some relationships between the order $\preccurlyeq_I$ and the natural order on L have been studied. The greatest and the least elements of the partially ordered set $(L, \preccurlyeq_I)$ have been discussed. Even if L is a lattice, by some examples, it has been shown that L need not be a lattice with respect to $\preccurlyeq_I$. Some conditions making L being a lattice have been determined. The independece of the orders induced by a continuous t-norm T and its residual implication I_T has been presented by means of some examples. It has been shown that the order induced by the implication $I(x, y) = N(x) \vee y$ defined on a bounded lattice L coincides with the natural order on L.

2019, 61 pages

Keywords: Implication, Bounded Lattice, Partially Ordered Set, Ordering, Law of Importation

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	Küçük Eşittir
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük Eşittir
$\ngeq$	Büyük Eşit Değildir
$\cup$	Birleşim İşlemi
$\cap$	Arakesit İşlemi
$\subseteq$	Alt Küme Bağıntısı
$\emptyset$	Boş Küme
$\bar{X}$	X in Üst Sınırlarının Kümesi
$\underline{X}$	X in Alt Sınırlarının Kümesi
$\wp(X)$	X in Güç Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$[a, b]$	Kapalı Aralık
(a, b)	Açık Aralık
$\vee$	Supremum İşlemi
$\wedge$	İnfimum İşlemi
$x \vee y$	x ve y'nin En Küçük Üst Sınırı
$x \wedge y$	x ve y'nin En Büyük Alt Sınırı
$\forall$	Her
$\exists$	En Az
I_0	En Küçük Fuzzy Gerektirmesi
I_1	En Büyük Fuzzy Gerektirmesi
$\mathcal{F}_I$	Tüm Fuzzy Gerektirmelerinin Kümesi
I_φ	I Fuzzy Gerektirmesinin φ Eşleniği
$C\mathcal{F}_I$	Tüm Sürekli Fuzzy Gerektirmelerinin Kümesi
(NC)	Normallik Şartı

(NP)	Nötrallik
(EP)	Değiştirme Prensibi
(IP)	Birimlilik Şartı
(OP)	Sıralama Şartı
(RB)	Sağ Sınır Şartı
(LB)	Sol Sınır Şartı
T-norm	Üçgensel Norm
T-conorm	Üçgensel Konorm
T_M	Minimum t-norm
T_P	Çarpım t-norm
T_L	Lukasiewicz t-norm
T_D	$[0,1]$ Üzerindeki Drastik Çarpım
$T_\wedge$	Sınırlı Bir Kafes Üzerindeki En Büyük t-norm
S_M	Maksimum t-norm
S_P	İstatistiksel toplam
S_L	Lukasiewicz t-conorm (sınırlı toplam)
S_D	Drastik Toplam
T^{nm}	Nilpotent Minimum t-norm
A.T	Aksi Taktirde

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normlar Karl Menger tarafından 1942' de yapılan "İstatiksel Metrikler" adlı çalışmasıyla tanımlanmıştır. Bu çalışma matematiğin olası metrik uzaylar, bulanık mantık ve uygulamaları, integral teoremleri gibi matematiğin temel alanlarının gelişmesinde rol oynamıştır. Üçgensel normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genişletilmesi için oluşturulmuştur. Berthold Schweizer ve Abe Sklar 1958, 1960, 1961 yıllarındaki çalışmalarında üçgensel normların bugün kullanılan aksiyomlarını vermişlerdir. Bu alanda ilk çalışma 1826 yılında N. H. Abel tarafından yapılmıştır. Daha sonraki çalışmalar 1909 da L. E. J Brouwer, 1930 yılında Cartan, 1949 ve 1961 yıllarında J. Aczel özellikle Janos Aczel'in monografisi üçgensel normların gelişiminde çok önemli bir rol oynamıştır. S. Jenei, B. De Beats, Clifford, Saminger, B Gasse gibi yazarlarda t-normlar ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

1980 li yılların başında t-normlar bulanık küme teorisinde kullanılmaya başlamıştır. 1971 yılında A. Rosenfeld "Fuzzy Groups" adlı çalışmada fuzzy ideal, fuzzy grup tanımlarını vermiştir. 1984 yılında fuzzy normal altgruplar ve fuzzy yan sınıflar tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. R. A. Borzooei ve arkadaşları fuzzy cebirsel sistemlerin kafes yapısını ortaya koymuşlardır. (Borzooei vd., 1924). 1965' de Lütfi Zadeh bulanık kümeleri (Zadeh, 1965) ile verilen çalışma ile tanıtmıştır. Bu çalışmada nesneleri ve süreçlerin sonlu değerli mantıkla açıklanamayacağı fikrindeydi. Lütfi Zadeh 1961' de yayınladığı bir makalesinde olasılık dağılımıyla tanımlanamayan bulanık ya da belirsiz nicelikler için farklı bir matematiğe ihtiyaç olduğu tezini ortaya attı. Çünkü Zadeh doğanın sonlu değerli mantıkla açıklanamayacağını düşünüyordu. Klasik mantık $\{0,1\}$ olarak iki değere sahiptir. Bulanık mantık ise $[0,1]$ aralığında ikiden fazla değere sahiptir. Günümüzde bulanık mantık hızlı tren, sürücüsüz araç, son model makinelerde, yapay zeka ve çeşitli alanlardaki algoritmalarda kullanılmaktadır. K. Atanassov 1986 yılında yayınlanan "Intuitionistic Fuzzy Sets" adlı çalışmasında Fuzzy matematik yapıları üzerine çalışmalar yapmıştır. Üçgensel t-normlar ve t-konormlar yardımıyla t-fuzzy cebirsel yapılar tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bulanık küme teorisi ile sıralama teorisi arasındaki yakın bağlantı sebebiyle bir çok yazar t-normları kısmen sıralı kümeler üzerinde, özellikle sınırlı kafesler üzerinde çalışmıştır.

Ma ve Wu 1991 yılında yayınladığı (Ma ve Wu 1991) “Locigal operators on complete lattices” adlı çalışmasında ilk kez $(L, \leq, 0, 1)$ tam kafes üzerindeki t-normları tanımlayarak, t-normlar ile L üzerindeki gerektirmeler arasındaki bağıntıyı araştırmışlardır. Saminger, Klement ve Mesiar (Klement vd., 2000) ve (Klement vd., 2004)’deki çalışmalarında sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel t-normların en büyük ve en küçük genişlemelerini araştırmışlardır. Wang ve Yu (Wang ve Yu, 2002)’deki çalışmalarında tüm sonsuz ∨-dağılmalı pseudo t-normların kümesi ile L üzerindeki tüm sonsuz ∧- dağılmalı gerektirmeler arasındaki bağıntıyı incelemiş ve Brouwerian L kafesi üzerindeki pseudo t-norm kavramını ele almışlardır.

Karaçal ve Khadjiev 2005 yılında yayınladığı (Karaçal ve Khadjiev, 2005)’deki çalışmalarında tam kafesler üzerindeki t-normların iç direkt çarpım tanımını vermişler ve tam kafesler üzerindeki t-normların iç ve dış direkt çarpımları arasındaki bağıntıyı araştırmışlardır. Bu bağıntıyı kullanarak, Jenei ve De Baets’in (Jenei ve De Baets, 2003)’deki çalışmalarında yer alan açık probleme cevap vermişlerdir. Karaçal (Karaçal, 2006)’daki çalışmasında güçlü negasyonların direkt çarpımları üzerinde çalışmış ve güçlü negasyonların direkt çarpımları olan, çarpım kafesleri üzerindeki güçlü negasyonları, karakterize etmiştir. Ayrıca Karaçal bu çalışmasında çarpım kafesi üzerinde tanımlanan ve t-normların direkt çarpımı olmayan bir t-normu üretmek için bir metot vermiştir. Bu metot böyle t-normların üretilmesinde oldukça kullanışlı olup (Jenei ve Baets, 2003)’de verilen direkt çarpım şeklinde olmayan ve çarpım kafesleri üzerinde tanımlanan t-normları belirlemek için başka yöntemler mevcut mudur?’ açık problemi için bir cevap niteliğindedir.

Karaçal ve Kesicioğlu (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011)’deki çalışmada sınırlı bir L kafesi üzerindeki t-norm yardımıyla

$$x \preccurlyeq_T y \iff \exists\, \ell \in L \text{ öyleki } T(\ell, y) = x$$

şeklinde bir sıralama (t-kısmen sıralama) tanımlamışlardır.

(Kesicioğlu vd., 2015)'deki çalışmada sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan t-normların sınıfının üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntıya göre t-normların denklik sınıfları tartışılmıştır.

Ordering based on uninorms (Ertuğrul vd., 2016) adlı çalışmada uninormlar üzerinde kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve tartışılmıştır. Böyle bir sıralama tanımlanarak t- kısmen sıralama daha geniş bir forma genişletilmiştir. T-norm ve t-konorm tarafından üretilen sıra ile bir uninorm tarafından üretilen sıra arasındaki ilişki detaylı bir şekilde incelenmiştir

(Kesicioğlu vd., 2017). An equivalence relation based on the U-partial order adlı çalışmada uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısı göz önüne alınarak bir denklik bağıntısı tanımlanmıştır ve bu bağıntının bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, uninormlarda elde edilen kısmen sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanmış ve detaylı olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada sınırlı L kafesi üzerinde bazı özel özelliklere sahip olan gerektirmeler yardımıyla bir $\preccurlyeq_I$ ile gösterilen sıralama bağıntısı tanımlanarak bazı özellikleri tartışılmaktadır. Kafes üzerinde elde edilen sıralama ile gerektirmeden elde edilen sıralama arasındaki ilişki belirlenmiştir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1 Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. (Birkhoff, 1967)

P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $(x, x) \in \leq$ (Yansıma)

P2. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, x) \in \leq$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, z) \in \leq$ ise $(x, z) \in \leq$ (Geçişme)

koşulları sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) bağıntısı denir. Eğer $(x, y) \in \leq$ ise bu durum $x \leq y$ şeklinde gösterilir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

$x \leq y$ ise bu durum 'y, x' i içerir' olarak ifade edilir. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y' de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. Ayrıca '$x \leq y$ önermesi yanlış' ise $x \nleq y$ yazılır. $x \nleq y$ ve $y \nleq x$ ise 'x ve y elemanları kıyaslanamaz' denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.

R, X üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun.

$$aSb \leq\Leftrightarrow bRa \text{ bağıntısı tanımlansın.}$$

(X, S) bir sıralı kümedir. Bu bağıntıya R nin tersi denir ve $S = R^{-1}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.

$a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \qquad b = ak$$

bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Tanım 1.2. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa böyle bir elemana P' nin en küçük elemanı denir ve 0 ile gösterilir.

(ii) Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa böyle bir elemana P' nin en büyük elemanı denir ve 1 ile gösterilir.

0 ve 1 elemanları mevcutsa tek oldukları kolaylıkla gösterilebilir. 0 ve 1 elamanları mevcutsa her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan bu elemanlara evrensel sınırlar denir.

Tanım 1.3. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine zincir (tam sıralı küme) denir.

Örnek 1.3.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Teorem 1.1. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ olsun. Bu takdirde, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Tanım 1.4. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur veya izoton dönüşüm denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için

$$x \leq_1 y \text{ ise } \theta(x) \leq_2 \theta(y)\text{' dir.}$$

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir $\Leftrightarrow$ Birebir, örten bir $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümü her $x, y \in P$ için

$$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \Leftrightarrow x \leq_1 y$$

koşulunu sağlayacak şekilde mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

Tanım 1.5. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $x, y \in P$ için,

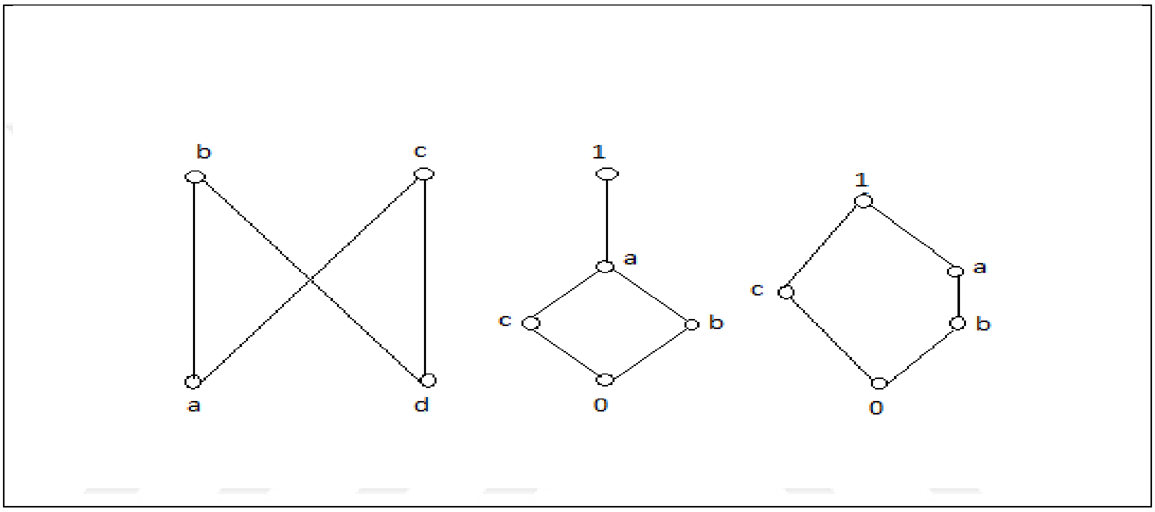
$$x \leq_1 y \text{ ise } \theta(x) \geq_2 \theta(y)$$

koşulunu sağlayan $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne ters sıra korur dönüşüm (antiton) denir. θ dönüşümü (antiton), 1-1 ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

Tanım 1.6.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için 'a örter b' denir $\Leftrightarrow$ $a > b$ olup $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Kısmen sıralı bir P kümesinin $n(P)$ mertebesi ile P' nin elemanlarının (kardinal) sayısı kastedilir. Bu sayı sonlu ise P' ye sonlu kısmen sıralı bir küme denir. Örtme bağıntısı kullanılarak keyfi bir sonlu kısmen sıralı kümenin grafiksel gösterimi şu şekilde elde edilir: P' nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir. $a > b$ olduğunda a, b' den daha yukarı yazılır ve a' dan b' ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle P' nin bir Hasse diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin Hasse diyagram örneklerine yer verilmiştir.



B_1 E_1 M_6

Şekil 1. Hasse diyagram örnekleri

Tanım 1.7.

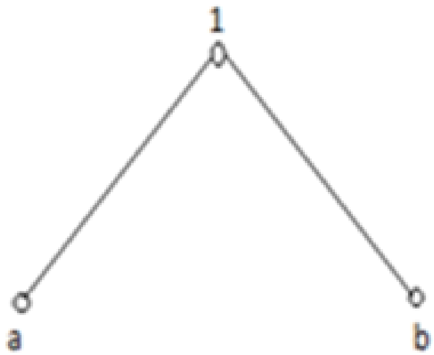
$(X, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Bir a elemanına X' in maksimal elemanı denir. $\Leftrightarrow$ $x \geq a$ olan her $x \in X$ için $x = a$ dır. X kümesinin tüm maksimal elemanlarının kümesi $MakX$ ile gösterilir.

(ii) Bir a elemanına X' in minimal elemanı denir. $\Leftrightarrow$ $x \leq a$ olan her $x \in X$ için $x = a$ dır. X kümesinin tüm minimal elemanlarının kümesi $MinX$ ile gösterilir.

Açıkça en küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin;

$P = \{0, a, b\}$ kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın.



Şekil 2. $(P, \leq)$

Bu sıralamaya göre a elemanı P kümesinin minimal elemanıdır ancak P kümesinin en küçük elemanı değildir.

Tanım 1.8.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ elemanı her $x \in X$ için $x \leq a$ olacak şekilde mevcutsa, bu a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\overline{X} = \{a \in P |\ \forall x \in X \text{ için } x \leq a\}$$

dır.

(ii) $b \in P$ elemanı her $x \in X$ için $b \leq x$ olacak şekilde mevcutsa, bu b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. Bu takdirde

$$\underline{X} = \{b \in P |\ \forall x \in X \text{ için } b \leq x\}$$

dir.

Tanım 1.9.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $\overline{X}$ kümesinin (eğer varsa) en küçük elemanına X kümesinin supremumu denir ve $supX$ ile gösterilir. Dual olarak, $\underline{X}$ kümesinin en büyük elemanı mevcutsa bu elemana X kümesinin infimumu denir ve $infX$ ile gösterilir. Yani

$$supX = Eke\overline{X} \text{ ve } infX = Ebe\underline{X}$$

dir. $supX$ ve $infX$ (eğer mevcut ise) Tanım 1.1, P2 özelliği ile tektir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.10. (Birkhoff, 1967)

Kısmen sıralı $(P, \leq)$ kümesine kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcuttur.

$(P, \leq)$ bir kafes olsun. Her $x, y \in P$ için

$x \vee y = sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = inf\{x, y\}$ ile tanımlanır.

Örnek 1.4.

Şekil 1.' de M_6 ve E_1 ile verilen diaygramlar bir kafestir. B_1 ile verilen diyagram kafes değildir.

Örnek 1.5.

$(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir. Bu kafeste her $A, B \in \wp(X)$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ dir.

Tanım 1.11. (Birkhoff, 1967)

Bir P kafesine sınırlı kafes denir $\Leftrightarrow$ P, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir.

Örnek 1.6.

$(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ kafesi sınırlı bir kafestir. Bu kafeste en büyük eleman $1 = X$ ve en küçük eleman $0 = \emptyset$' dir.

$(\mathbb{N}, \leq)$ zinciri sınırlı olmayan bir kafestir. Bu kafeste infimum ve supremum işlemleri $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$x \vee y = Ebe\{x, y\} \quad \text{ve} \quad x \wedge y = Eke\{x, y\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.12. (Birkhoff, 1967)

Bir L kafesine tam kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$ mevcuttur.

Tanım 1.12 de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Böylece her tam kafes sınırlıdır.

Her sonlu veya sonlu uzunluklu kafes tam kafestir.

Keyfi bir zincir kafestir. Bu kafeste supremum ve infimum işlemlerinin herhangi iki x ve y elemanları için

$$x \wedge y \ = Eke\{x, y\} \text{ ve } x \vee y \ = Ebe\{x, y\}$$

olduğu açıktır.

Her kafesin tam kafes olması gerekmez. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi tam kafes değildir ve $\mathbb{R}$- reel sayılar kümesi $-\infty$ ve $+\infty$ evrensel sınırlar olarak kabul edilmedikçe tam kafes değildir. $([0,1], \leq)$ zinciri bir tam kafes olup $[0,1]$ aralığı literatürde birim aralık olarak adlandırılır.

Tanım 1.13. (Birkhoff, 1967)

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin

$$P \times Q = \{(x, y) | x \in P, y \in Q\}$$

şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2 \; x_1, x_2 \in P,\ y_1, y_2 \in Q$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Lemma 1.1. (Birkhoff, 1967)

P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Değişme)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yok etme)

Üstelik, $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ sağlanır.

Lemma 1.2. (Birkhoff, 1967)

P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.3. (Birkhoff, 1967)

Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani, bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$$y \leq z \text{ ise } x \wedge y \leq x \wedge z \text{ ve } x \vee y \leq x \vee z$$

sağlanır.

Lemma 1.4. (Birkhoff, 1967)

L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ ve } x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.5. (Birkhoff, 1967)

L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$$x \leq z \text{ ise } x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.14. (Birkhoff, 1967)

İdempotent, komütatif ve birleşme özelliklerine sahip ikili işlemli bir sisteme yarı kafes denir.

Sonuç 1.1. (Goguen, 1967)

P kısmen sıralı bir küme ve P' de alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. P, $\wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak, P kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise P, $\vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

Teorem 1.2. (Birkhoff, 1967)

$(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafes ise $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.3. (Birkhoff, 1967)

Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

L5$'$. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad \forall x, y, z \in L.$

L5$''$. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad \forall x, y, z \in L.$

Kolaylık açısından L5$'$ ve L5$''$ eşitliklerini L5 olarak göstereceğiz.

Tanım 1.15. (Birkhoff, 1967)

Bir kafese dağılmalı kafes denir $\Leftrightarrow$ $L5$ özelliği sağlanır.

Lemma 1.6. (Birkhoff, 1967)

L bir zincir ise L dağılmalı bir kafestir.

Uyarı 1.1.

Keyfi dağılmalı kafesin duali de dağılmalı kafestir. Ayrıca herhangi bir dağılmalı kafesin alt kafesi ve dağılmalı kafeslerin direkt çarpımları da dağılmalı kafestir.

Teorem 1.4. (Birkhoff, 1967)

Bir dağılmalı kafeste $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$ dir.

Tanım 1.16. (Birkhoff, 1967)

L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir $\Leftrightarrow$ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafesler denir.

Tanım 1.17. (Birkhoff, 1967)

L sınırlı bir kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir $\Leftrightarrow L$ dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Örnek 1.7.

$(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ kafesi bir Boole kafesidir, burada her $A \subseteq X$ alt kümesi için $A' = X \setminus A$ dır.

Teorem 1.5. (Birkhoff, 1967)

L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.18. (Birkhoff, 1967)

L. bir kafes olsun. L kafesine Boole cebiridir denir $\Leftrightarrow L$ kafesi $\wedge, \vee, '$ işlemleri ile L1-L9 özelliklerini sağlar.

Tanım 1.19. (Birkhoff, 1967)

A bir Boole cebiri olsun. $\emptyset \neq B \subseteq A$ kümesine A Boole cebirinin (Boole) alt cebiridir denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in B$ için $a \wedge b, a \vee b, a' \in B$ dir.

1.3. Fuzzy Gerektirmeleri

1.3.1. Temel Tanım ve Örnekler

Tanım 1.20. (Baczyński ve Jayaram, 2008)
Bir $I : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna fuzzy gerektirmesi denir $\Leftrightarrow$ Her $x, x_1, y, y_1 \in [0,1]$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

I1. $x_1 \leq x_2$ ise $I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$, yani $I(.,y)$ azalandır.

I2. $y_1 \leq y_2$ ise $I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$, yani $I(x,.)$ artandır.

I3. $I(0,0) = 1$.

I4. $I(1,1) = 1$.

I5. $I(1,0) = 0$.

[0,1] üzerindeki tüm fuzzy gerektirmelerinin kümesi $\mathcal{F}_I$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.8. (Baczyński ve Jayaram, 2008)
Tablo 1. de verilen fonksiyon örnekleri için (I1) –(I5) aksiyomlarını sağlayıp (sağlamadıkları) ilgili sütunda √ (x) ile gösterilmiştir.

Tablo 1. Fonksiyon örnekleri için (I1) –(I5) aksiyomları

	(I1)	**(I2)**	**(I3)**	**(I4)**	**(I5)**
$I_{-1}(x,y) = \max(1-x, \min(x,y))$	×	√	√	√	√
$I_{-2}(x,y) = \max(y, \min(1-x, 1-y))$	√	×	√	√	√
$I_{-3}(x,y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1, & y = 1 \end{cases}$	√	√	×	√	√
$I_{-4}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$	√	√	√	×	√
$I_{-5}(x,y) = 1$	√	√	√	√	×

Tanım 1.20. den direkt olarak her bir I fuzzy gerektirmesinin $x = 0$ ve $y = 1$ noktalarında çakışık olduğu açıktır, yani herhangi bir I fuzzy gerektirmesi aşağıda verilen sol ve sağ sınır şartını sağlar:

$I(0, y) = 1,\ y \in\ [0,1]$ (Sol sınır şartı) (LB)

$I(x, 1) = 1,\ x \in\ [0,1]$ (Sağ sınır şartı) (RB)

Şimdi herhangi bir I fuzzy gerektirmesinin sol ve sağ sınır şartlarını sağladığını gösterelim.

Her y $\in [0,1]$ için $0 \leq$ y olup $1 = I(0,0) \leq I(0, y)$ olduğundan $I(0, y) = 1$ dir. Diğer taraftan, her x $\in [0,1]$ için $x \leq 1$ olup $1 = \mathrm{I}(1,1) \leq \mathrm{I}(\mathrm{x}, 1)$ olduğundan $I(x, 1) = 1$'dir.

Uyarı 1.2. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

Herhangi bir I fuzzy gerektirmesi sol sınır şartını sağladığından normallik şartı (NC) olarak adlandırılan $I(0,1) = 1$ eşitliğini sağlar.

Örnek 1.9. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

Tablo 2.' de literatürde sıkça kullanılan 9 temel fuzzy gerektirmesi listelenmiştir.

Tablo 2. Literatürde sıkça kullanılan 9 temel fuzzy gerektirmesi

Lukasiewicz	$I_{LK}(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$
Gödel	$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$
Reichenbach	$I_{RC}(x, y) = 1 - x + xy$
Kleene-Dienes	$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$
Goguen	$I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \dfrac{y}{x}, & x > y \end{cases}$

Tablo 2. (Devam) Temel fuzzy gerektirmeleri

Lukasiewicz	$I_{LK}(x,y) = \min(1, 1 - x + y)$
Rescher	$I_{RS}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$
Yager	$I_{YG}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \text{ ve } y = 0 \\ y^2, & x > 0 \text{ veya } y > 0 \end{cases}$
Weber	$I_{WB}(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ y, & x = 1 \end{cases}$
Fodor	$I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \max(1 - x, y), & x > y \end{cases}$

Şimdi $I_{LK}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 1 - x + y, & x > y \end{cases}$ ile tanımlanan fonksiyonun bir fuzzy gerektirmesi olduğunu gösterelim.

(I1) aksiyomunun sağlandığını gösterelim.

$x_1 \leq x_2,\ y \in [0, 1]$ olsun. Buradan $1 - x_2 + y \leq 1 - x_1 + y$ dir.

- Eğer $y \leq x_1 \leq x_2$ ise bu takdirde
  $$I_{LK}(x_2, y) = 1 - x_2 + y \leq 1 - x_1 + y = I_{LK}(x_1, y)$$
  dir.
- Eğer $x_1 \leq y \leq x_2$ ise, $I_{LK}(x_1, y) = 1$ olduğundan
  $$I_{LK}(x_2, y) \leq 1 = I_{LK}(x_1, y)$$
  elde edilir.
- Eğer $x_1 \leq x_2 \leq y$ ise, $I_{LK}(x_2, y) = 1 = I_{LK}(x_1, y)$ dir.
  Böylece (I1) aksiyomu sağlanır.

Şimdi (I2) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. $y_1 \leq y_2$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

- Eğer $x \leq y_1 \leq y_2$ ise $I_{LK}(x, y_1) = 1 = I_{LK}(x, y_2)$ dir.
- Eğer $y_1 \leq x \leq y_2$ ise $I_{LK}(x, y_2) = 1$ olduğundan
  $$I_{LK}(x, y_1) = 1 - x + y_1 \leq 1 = I_{LK}(x, y_2)$$

elde edilir.

- Eğer $y_1 \leq y_2 \leq x$ ise $I_{LK}(x, y_1) = 1 - x + y_1 \leq 1 - x + y_2 = I_{LK}(x, y_2)$
  eşitliği sağlanır. Böylece (I2) aksiyomu sağlanır.

$I_{LK}(0,0) = 1 = I_{LK}(1,1)$ ve $I_{LK}(1,0) = 0$ eşitliklerinin sağlandığı açık olduğundan. (I3), (I4), (I5) aksiyomları gerçeklenir. Böylece I_{LK} fonksiyonu bir fuzzy gerektirmesidir.

Tanım 1.21. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

$I_1, I_2 \in \mathcal{F}_I$ olmak üzere, I_1, I_2 den daha zayıftır denir $\Leftrightarrow$ her $(x, y) \in [0,1]^2$ için $I_1(x,y) \leq I_2(x,y)$ dir.

Örnek 1.10.

Tablo 2.' teki fuzzy gerektirmeleri arasında aşağıdaki ilişkiler söz konusudur:

$I_{KD} < I_{RC} < I_{LK} < I_{WB}$.

$I_{RS} < I_{GD} < I_{GG} < I_{LK} < I_{WB}$.

$I_{YG} < I_{RC} < I_{FD} < I_{LK} < I_{WB}$.

$I_{KD} < I_{FD} < I_{LK} < I_{WB}$.

$I_{PS} < I_{GD} < I_{FD} < I_{LK} < I_{WB}$.

Şimdi $I_{KD} < I_{RC}$ olduğunu gösterelim.

$(x, y) \in [0,1]^2$ olsun. Bu takdirde

$$1 - x \leq 1 - x + x.y \tag{1.1}$$

eşitsizliği açıktır.

$1 - x + x.y = x.y + (1 - x).1 \in [y,1]$ olduğundan $1 - x + x.y$, y ve 1'in bir konveks kombinasyonudur.

Böylece,

$$y \leq 1 - x + x.y \tag{1.2}$$

dir. (1.1) ve (1.2) eşitsizlikleri ile

$\max(1 - x, y) \leq 1 - x + x.y$ elde edilir. Böylece $I_{KD}(x,y) \leq I_{RC}(x,y)$ dır.

$x = 0,2$ ve $y = 0,2$ noktaları için $I_{KD}(0,2,\ 0,2) = 0,8 \neq I_{RC}(0,2, 0,2) = 1,84$ olup $I_{KD}(x,y) < I_{RC}(x,y)$ eşitsizliği sağlanır.

Önerme 1.1.

$$I_0(x,y)=\begin{cases}1, & x=0 \text{ veya } y=1\\ 0, & x>0 \text{ ve } y<1\end{cases}$$

$$I_1(x,y)=\begin{cases}0, & x=1 \text{ ve } y=0\\ 1, & x<1 \text{ veya } y>0\end{cases}$$

fonksiyonları sırasıyla [0,1] üzerinde tanımlı en küçük ve en büyük fuzzy gerektirmeleridir.

İspat :

$I_0 : [0,1]^2 \longrightarrow$ [0,1] fonksiyonunun en küçük fuzzy gerektirmesi olduğunu gösterelim.

$I \in \mathcal{F}_I$ keyfi olsun.

- $x=0$ veya $y=1$ ise sol sınır şartı ile $I(0,y)=1=I_0\,(0,y)$ ve sağ sınır şartı ile $I(x,1)=1=I_0\,(x,1)$ dır.
- $x\neq 0$ ve $y\neq 1$ olsun. Bu takdirde $I_0\,(x,y)=0\leq I(x,y)$' dır. Böylece her $(x,y)\in[0,1]^2$ için $I_0\,(x,y)\leq I(x,y)$ olduğundan $I_0\leq I$' dır.

I_1 in en büyük fuzzy gerektirme olduğunu gösterelim. $I\in\mathcal{F}_I$ keyfi olsun.

- $x=1$ ve $y=0$ ise $I(1,0)=0=I_1\,(1,0)$ olduğu açıktır.
- $x<1$ veya $y>0$ olsun. $I(x,y)\leq 1=I_1\,(x,y)$' dir. Böylece $I\leq I_1$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.22. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

I bir fuzzy gerektirmesi ve $\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ dönüşümü $1-1$, örten, artan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$I_\varphi\,(x,y)=\varphi^{-1}\left(\,I\left(\varphi(x),\varphi(y)\right)\right)$$

ile tanımlanan fonksiyona I nın φ eşleniği denir.

Uyarı 1.3.

Φ notasyonu ile $[0,1]$ aralığından $[0,1]$ aralığına tanımlı $1-1$, örten ve artan fonksiyonların ailesi gösterilir.

Teorem 1.6. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

$I\in\mathcal{F}_I$ ise $\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ dönüşümü $1-1$, örten ve artan fonksiyonu için $I_\varphi\in\mathcal{F}_I$ dır.

İspat:

- I_φ fonksiyonunun (I1) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $x_1, x_2, y \in [0,1]$ için $x_1 \leq x_2$ olsun. Bu takdirde $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ dir. $I \in \mathcal{F}_I$ olduğundan

$$I(\varphi(x_2), \varphi(y)) \leq I(\varphi(x_1), \varphi(y))$$

eşitsizliği sağlanır.

φ , $1-1$, örten ve artan olduğundan φ^{-1} de $1-1$, örten ve artandır. Bu durumda

$$\varphi^{-1}(I(\varphi(x_2), \varphi(y))) \leq \varphi^{-1}(I(\varphi(x_1), \varphi(y)))$$

dir. Böylece $I_\varphi(x_2, y) \leq I_\varphi(x_1, y)$ olup (I1) aksiyomu sağlanır.

- Şimdi (I2) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. $y_1, y_2, x \in [0,1]$ için $y_1 \leq y_2$ olsun. Bu takdirde, $\varphi(y_1) \leq \varphi(y_2)$ dir.

I bir fuzzy gerektirmesi olduğundan (I2) aksiyomu sağlanır. Böylece

$$I(\varphi(x), \varphi(y_1)) \leq I(\varphi(x), \varphi(y_2)) \text{ dir.}$$

φ^{-1} artan olduğundan

$$\varphi^{-1}(I(\varphi(x), \varphi(y_1))) \leq \varphi^{-1}(I(\varphi(x), \varphi(y_2)))$$

elde edilir. Böylece $I_\varphi(x, y_1) \leq I_\varphi(x, y_2)$ dir. Böylece (I2) aksiyomu sağlanır.

- (I3) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Bunun için öncelikle $\varphi(0) = 0$

olduğunu gösterelim.

$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dönüşümü $1-1$ ve örten olduğundan her $y \in [0,1]$ için $\exists\, x \in [0, 1]$ öyleki $\varphi(x) = y$ dir. $0 \leq x$ ve φ artan olduğundan $\varphi(0) \leq \varphi(x) = y$, yani $\varphi(0)$ $[0,1]$ in en küçük elemanıdır. Böylece $\varphi(0) = 0$ dır. Benzer şekilde $\varphi(1) = 1$ olduğu da gösterilebilir.

- $I_\varphi(0,0) = \varphi^{-1}\left(I(\varphi(0), \varphi(0))\right)$

$$= \varphi^{-1}(I(0,0)) = \varphi^{-1}(1) = 1$$

olduğundan (I3) aksiyomu sağlanır.

- $I_\varphi(1,1) = \varphi^{-1}(I(\varphi(1), \varphi(1)))$

$$= \varphi^{-1}(I(1,1)) = \varphi^{-1}(1) = 1$$

olduğundan (I4) aksiyomu sağlanır.

- $I_\varphi(1,0) = \varphi^{-1}(I(\varphi(1), \varphi(0)))$

$$= \varphi^{-1}(I(1,0)) = \varphi^{-1}(0) = 0$$

olduğundan (I5) aksiyomu sağlanır.

Böylece, $I_\varphi \in \mathcal{F}_I$ olduğu elde edilir.

1.3.2. Fuzzy Gerektirmelerinin Sürekliliği

$D \subset IR^2$ de tanımlı bir $F(x,y)$ fonksiyonu, $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N} \in D$ dizileri verilsin. Eğer,

$$F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\,,\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_{n,}\,y_n)$$

sağlıyorsa F fonksiyonuna D' de süreklidir denir.

İki değişkenli bir fonksiyon kendisi sürekli olmaksızın her bir bileşene göre sürekli olabilir. Örnek olarak,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0\,, & x=0 \text{ ve } y=0 \end{cases} \qquad x,y \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon (0,0) noktasında sürekli değildir. Fakat bu noktada her bir değişkene göre süreklidir.

Şimdi f fonksiyonunun (0,0) noktasında sürekli olmadığını gösterelim.

$k \neq 0$ $için$ $(k,k) \to (0{,}0)$ iken

$$\lim_{(k,k)\to(0,0)} f(k,k) = \lim_{(k,k)\to(0,0)} \frac{k^2}{k^2+k^2} = \lim_{(k,k)\to(0,0)} \frac{k^2}{2k^2} = \lim_{(k,k)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ve

$$f\left(\lim_{k\to 0} k\ ,\lim_{k\to 0} k\right) = f(0{,}0) = 0$$

olup, f (0,0) da sürekli değildir.

Şimdi bileşenlerine göre sürekli olduğunu gösterelim.

$$\lim_{k\to 0} f(k,y) = \lim_{k\to 0} \frac{k.y}{k^2+y^2} = 0 \text{ ve } f(\lim_{k\to 0} k\,,y) = f(0,y) = 0$$

olduğundan f fonksiyonu birinci bileşenine göre süreklidir.

f fonksiyonunun ikinci bileşene göre sürekli olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 1.7. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

Bir değişkene göre monoton olan bir $f\colon [0,1]^2 \to [0{,}1]$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(i) f süreklidir.

(ii) f her bir bileşene göre süreklidir.

Sonuç 1.2.

I fuzzy gerektirmesi için aşağıdakiler denktir.

(i) I süreklidir.

(ii) I her bir bileşene göre süreklidir:

Örnek 1.11.

I_{GD} , I_{GG} , I_{RS} , I_{YG} , I_{FD} ve I_{WB} sürekli değildir. I_{LK} , I_{RC} ve I_{KD} süreklidir. I_{GD} , I_{GG} , I_{RS} ve I_{FD} ilk değişkene göre sol sürekli ikinci değişkene göre sağ süreklidir. I_{WB}, ikinci değişkene göre sürekli iken I_{YG} (0,0) noktasında sürekli değildir.

Uyarı 1.4.

Tüm sürekli fuzzy gerektirmelerinin kümesi $\mathcal{CF}_I$ ile gösterilir.

I_{GD} nin ilk değişkene göre soldan sürekli olup sağdan sürekli olmadığını, ikinci değişkene göre sağdan sürekli olup soldan sürekli olmadığını gösterelim. Öncelikle

$$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$$

fonksiyonunun soldan sürekli olduğunu gösterelim: $x_0, y \in [0,1]$ için

- $x_0 \leq y$ olsun. Bu takdirde $I_{GD}\left(\lim_{x_n \to x_0^-} x_n \ , y\right) = I_{GD}(x_0, y) = 1$ dir.

Farzedelim ki her n için $x_n \geq y$ olsun. Bu durumda $lim x_n \geq y$ 'dir. $lim x_n = x_0$ olduğundan $x_0 \geq y$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $\exists\, n$ için $x_n \leq y$ dir. Buradan, $\lim_{x_n \to x_0^-} I_{GD}(x_n\, , y)$ =1 olup.

$$\lim_{x_n \to x_0^-} I_{GD}(x_n\, , y) = I_{GD}(\lim_{x_n \to x_0^-} x_n\, , y)$$

eşitliği sağlanır.

- $x_0 > y$ olsun. Bu takdirde , $\lim_{x_n \to x_0^-} I_{GD}(x_n, y) = y$ dir.

Farzedelim ki her n için $x_n \leq y$ olsun. Bu durumda $lim x_n \leq y$ dir. $lim x_n = x_0$ olduğundan $x_0 \leq y$ çelişkisi elde edilir.

Bu takdirde, $\exists\, n$ için $y < x_n$ dir. Böylece,

$$I_{GD}\left(\lim_{x_n \to x_0^-} x_n \ \ , y\right) = I_{GD}(x_0, y) = y$$

dir. Bu ise I_{GD} fonksiyonunun ilk değişkene göre soldan sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi ilk değişkene göre sağdan sürekli olmadığını gösterelim.

$n\epsilon\mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ dizisini alalım. Bu takdirde, $\lim_{n\to\infty} I_{GD}(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ dir. Diğer taraftan,

$I_{GD(}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2})) = I_{GD}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ olup I_{GD} fonksiyonu ilk değişkene göre sağdan sürekli değildir.

Şimdi, I_{GD} fonksiyonunun ikinci değişkene göre sağdan sürekli olduğunu gösterelim.

- $x \leq y_0$ olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{y_n\to y_0^+} I_{GD}(x, y_n) = 1$$

dir. Diğer taraftan $I_{GD}\left(x, \lim_{y_n\to y_0^+} y_n\right) = I_{GD}(x, y_0) = 1$ olup eşitlik sağlanır.

- $x > y_0$ olsun. Bu takdirde,

$\lim_{y_n\to y_0^+} I_{GD}(x, y_n) = \lim_{y_n\to y_0^+} y_n = y_0$'dır. Ayrıca

$$I_{GD}\left(x, \lim_{y_n\to y_0^+} y_n\right) = I_{GD}(x, y_0) = y_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Böylece I_{GD} fonksiyonu ikinci değişkene göre sağdan süreklidir.

Şimdi I_{GD} fonksiyonunun ikinci değişkene göre soldan sürekli olmadığını gösterelim.

$n\epsilon\mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ dizisini alalım. Bu takdirde,

$\lim_{n\to\infty} I_{GD}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ve $I_{GD}(\frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 1$

olduğundan I_{GD} ikinci bileşene göre soldan sürekli değildir.

Önerme 1.2. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

I sürekli bir fuzzy gerektirmesi ve $\varphi \in \Phi$ olsun. Bu takdirde $I_\varphi \in C\mathcal{F}_I$ dır.

İspat:

$I \in \mathcal{F}_I$ ise $I_\varphi \in \mathcal{F}_I$ olduğu Teorem 1.6. ile açıktır.

I sürekli bir fuzzy gerektirmesi olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi^{-1}(I(\varphi((x_n), \varphi(y_n)) = \varphi^{-1}(\mathrm{I}(\varphi(\lim x_n), \varphi(lim y_n)))$$

$$= I_{\varphi}(lim x_n, lim y_n)$$

olduğundan I_{φ} süreklidir.

Tanım 1.23. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

F: $[0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu Lipschitz özelliğini sağlar denir.

$\Leftrightarrow$ $c \in (0,\infty)$ sabit elemanı mevcuttur öyle ki her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için

$$\left|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)\right| \leq c(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bir reel F fonksiyonu Lipschitz özelliğini sağlıyor ise düzgün süreklidir. Böylece aşağıdaki bağıntıları sağlar. Yani

Lipschitz $\Longrightarrow$ düzgün sürekli $\Rightarrow$ süreklidir.

Böylece (1.3)' de verilen eşitsizliği sağlayan bir I fuzzy gerektirmesi süreklidir.

1.3.3. Fuzzy Gerektirmelerinin Temel Özellikleri

Tanım 1.24. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

Bir I fuzzy gerektirmesine

(i) sol nötrallik özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$ her $y \in [0,1]$ için

$$I(1, y) = y \tag{NP}$$

dir. (NP) özelliği klasik mantıkta $(1 \to p) \equiv p$ prensibinin bir genellemesidir.

(ii) değiştirme prensibini sağlar denir $\Leftrightarrow$ $x, y, z \in [0,1]$ için

$$I\big(x, I(y,z)\big) = I\big(y, I(x,z)\big) \tag{EP}$$

dir. (EP) özelliği klasik totoloji olarak bilinen $p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r)$ prensibinin bir genellemesidir.

(iii) birimlilik (identity) özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$ her $x \in [0,1]$ için

$$I(x, x) = 1, \qquad x \in [0,1] \tag{IP}$$

dır. (IP) özelliği klasik mantıkta $p \to p$ prensibinin bir genellemesidir.

(iv) sıralama özelliğini sağlar denir $\Leftrightarrow$

$$x \leq y \Leftrightarrow I(x, y) = 1 \qquad x, y \in [0,1] \tag{OP}$$

dır.

Örnek 1.12.

$I_{LK}(x,y) = \min(1, 1 - x + y)$ fonksiyonu (NP), (IP), (EP), (OP) özelliklerini sağlar. Gerçekten,

- $I_{LK}(1,y) = \min(1, 1 - 1 + y) = \min(1,\ y) = y$ olduğundan (NP) özelliği sağlanır.
- $I_{LK}(x,x) = \min(1, 1 - x + x) = \min(1,1) = 1$ olduğundan (IP) özelliği sağlanır.
- $x \leq y$ olsun. Buradan, $1 + \mathrm{y} - \mathrm{x} \geq 1$ olduğu açıktır. Böylece,

$I_{LK}(x,y) = \min(1, 1 - x + y)$ =1 dir. Diğer taraftan $I_{LK}(x,y) = 1$ kabul edelim. $I_{LK}(x,y) = \min(1, 1 - x + y)$=1 olup $1 + \mathrm{y} - \mathrm{x} \geq 1$ dir. $\mathrm{y} - \mathrm{x} \geq 0$ dır. Buradan $x \leq y$ olup (OP) özelliği sağlanır.

- Şimdi (EP) özelliğinin sağlandığını gösterelim. $x, y \in [0,1]$ için $x \leq z$ olsun.

Bu takdirde, $x \leq 1 + z - y$ dir. Böylece, $x \leq \min(1, 1 + z - y)$ olup $\min(1, 1 + z - y) - x \geq 0$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(x, I(y,z)\big) &= I_{LK}(x, \min(1, 1 - y + z)) \\ &= \min(1, 1 - x + \min(1, 1 - y + z)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dır. $x + y \leq z + y \leq 1 + z$ olduğundan $y \leq 1 + z - x$ dir. Böylece, $y \leq \min(1, 1 + z - x)$

$$\min(1, 1 + z - x) - y \geq 0$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(y, I_{LK}(x,z)\big) &= I_{LK}(y, \min(1, 1 - x + z)) \\ &= \min(1, 1 - y + \min(1, 1 - x + z)) \\ &= 1 = I_{LK}\big(x, I(y,z)\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

$x > z$ olsun. Eğer $y \leq z$ ise

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(x, I(y,z)\big) &= I_{LK}(x, \min(1, 1 - y + z)) \\ &= \min(1, 1 - x + \min(1, 1 - y + z)) \\ &= \min(1, 1 - x + 1) = \min(1, 2 - x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(y, I(x,z)\big) &= I_{LK}(y, \min(1, 1-x+z)) \\ &= I_{LK}(y, 1-x+z) \\ &= \min(1, 1-y+1-x+z) \\ &= \min(1, 2-y-x+z) \end{aligned}$$

Burada $x \leq 1$ ve $y \leq z$ eşitsizliklerinden $x + y < 1 + z$ elde edilir. Yani, $1 < 2 - x - y + z$ dir. $I_{LK}\big(y, I(x,z)\big) = \min(1, 2-y-x+z) = 1$ olup $I_{LK}\big(x, I_{LK}(y,z)\big) = I_{LK}\big(y, I_{LK}(x,z)\big)$ dir.

Eğer $y > z$ ise

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(x, I_{LK}(y,z)\big) &= \min(1, 1-x+\min(1,1-y+z)) \\ &= \min(1, 1-x+1-y+z) \\ &= \min(1, 2-x-y+z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_{LK}\big(y, I_{LK}(x,z)\big) &= I_{LK}(y, \min(1, 1-x+z) \\ &= I_{LK}(y, 1-x+z) \\ &= \min(1, 1-y+1-x+z) \\ &= \min(1, 2-x-y+z) \end{aligned}$$

olup $I_{LK}\big(x, I_{LK}(y,z)\big) = I_{LK}\big(y, I_{LK}(x,z)\big)$ dir.

Lemma 1.7. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

I: $[0,1]^2 \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun.

(i) I (LB)' i sağlıyorsa (I3) ve (NC) i sağlar.

(ii) I (RB)' i sağlıyorsa (I4) ve (NC) i sağlar.

(iii) I (NP)' i sağlıyorsa (I4) ve (I5) i sağlar.

(iv) I (IP)' i sağlıyorsa (I3) ve (I4) ü sağlar.

(v) I (OP)'i sağlıyorsa (I3), (I4), (NC), (LB), (RB) ve (IP) özelliklerini de sağlar.

İspat:

(i) I (LB) özelliğini sağlasın. Bu durumda $I(0,x) = I(0,0) = I(0,1) = 1$ olup (I3) ve (NC) nin sağlandığı açıktır.

(ii) I (RB) özelliğini sağlasın. Buradan $I(x,1) = I(1,1) = I(0,1) = 1$ olduğundan (I4) ve (NC) özellikleri de sağlanır.

(iii) I (NP) özelliğini sağlasın. Buradan, $I(1,y) = y$ dir. Böylece $I(1,1) = 1$ ve $I(1,0) = 0$ olup (I4) ve (I5) özellikleri sağlanır.

(iv) I (IP)' i sağlasın $I(x,x) = 1$ dir. $I(0,0) = I(1,1) = 1$ eşitliği ile (I3) ve (I4) özelliklerinin sağladığı açıktır.

(v) I (OP)' i sağlasın. Bu takdirde $x \le y \iff I(x,y) = 1$ dir. Buradan, $I(0,0) = I(1,1) = I(0,1) = I(0,x) = 1$ ve $I(x,x) = I(x,1) = 1$ olduğu açıktır.

Örnek 1.13.

Tablo 3. de 9 temel fuzzy gerektirmeleri için (NP), (EP), (IP), (OP) ve süreklilik özelliklerini sağlayıp (sağlamadıkları) ilgili sütunda √ (x) ile gösterilmiştir.

Tablo 3. Fuzzy gerektirmeleri için (NP), (EP), (IP), (OP) ve süreklilik

Fuzzy implication	(NP)	(EP)	(IP)	(OP)	Süreklilik
I_{LK}	√	√	√	√	√
I_{GD}	√	√	√	√	×
I_{RC}	√	√	×	×	√
I_{KD}	√	√	×	×	√
I_{GG}	√	√	√	√	×
I_{RS}	×	×	√	√	×
I_{YG}	√	√	×	×	×
I_{WB}	√	√	√	×	×
I_{FD}	√	√	√	√	×

Önerme 1.3. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

$I: [0,1]^2 \to [0,1]$ (NP), (IP), (EP), (OP) özelliklerini sağlayan bir fonksiyon ve $\varphi \in \Phi$ olsun. Bu taktirde, I_φ de sırasıyla (NP), (IP), (EP) ve (OP) özelliklerini sağlar.

İspat:

$\varphi \in \Phi$ olsun.

- I (NP)'i sağlasın. Buradan, her $x \in [0,1]$ için $I(1,x) = x$ dir. Böylece,

$$I_\varphi(1,x) = \varphi^{-1}\left(I\big(\varphi(1),\varphi(x)\big)\right) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = 1$$

olduğundan I_φ (NP) özelliğini sağlar.

- I (EP)'i sağlasın. I_φ'nin (EP)'i sağladığını gösterelim: Her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$I_\varphi\big(x, I_\varphi(y,z)\big) = I_\varphi(x, \varphi^{-1}(I\big(\varphi(y),\varphi(z)\big)))$$

$$= \varphi^{-1}(I\left(\varphi(x), I\big(\varphi(y),\varphi(z)\big)\right))$$

$$= \varphi^{-1}(I\left(\varphi(y), I(\varphi(x), \varphi(z))\right)$$
$$= I_\varphi(y, \varphi^{-1}\left(I(\varphi(x), \varphi(z))\right))$$
$$= I_\varphi(y, \left(I_\varphi(x, z)\right)$$

olduğundan I_φ (EP) özelliğini sağlar.

- I (IP) i sağlasın. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için $I(x, x) = 1$ dir.

Böylece,

$$I_\varphi(x, x) = \varphi^{-1}(I(\varphi(x), \varphi(x)) = 1$$

olup I_φ (IP) özelliğini sağlar.

- I (OP) i sağlasın. I_φ nin (OP) özelliğini sağladığını gösterelim. $x, y \in [0,1]$ için $x \leq y$ olsun. $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ olup (OP) ile $I_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}\left(I(\varphi(x), \varphi(y))\right) = 1$ dir. Tersine, $I_\varphi(x, y) = 1$ olsun. Bu durumda $\varphi^{-1}\left(I(\varphi(x), \varphi(y))\right) = 1$ olup $I(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(1) = 1$ dir. Bu durumda, I, (OP) özelliğini sağladığından $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ dir. φ nin monotonluğu ile $x \leq y$ olduğu elde edilir. Böylece, I_φ (OP) özelliğini sağlar.

1.4.$[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.4.1. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe, $[0,1]$ üzerindeki doğal sıralamayı $\leq$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.25. (Klement vd., 2000; De Baets vd., 1999; Wang ve Yu, 2002) Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir; yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Komütatiflik)

T2. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x, y) \leq T(x, z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.14.

Temel olarak kabul edilen dört t-norm T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

$T_M(x,y) = min(x,y)$ (Minimum)

$T_P(x,y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde.} \end{cases}$ (Drastik çarpım)

Uyarı 1.5. (Klement vd., 2000)

T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

(i) Tanım 1.25 ile her T t-normu her $x \in [0,1]$ için

$$T(0,x) = T(x,0) = 0 \tag{1.4}$$

$$T(1,x) = x \tag{1.5}$$

eşitliklerini sağlar. (1.4) ve (1.5)' de verilen eşitliklere ilave sınır şartı denir. Böylece her t-norm $[0,1]^2$ birim kare üzerinde çakışıktır.

(ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2) \tag{1.6}$$

sağlanır.

Tanım 1.26. (Klement vd., 2000)

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Eğer her $x,y \in [0,1]$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2 T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$ için $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.6. (Klement vd., 2000)

(i) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun. (1.6)' ün bir sonucu olarak her

$x, y \in [0,1]$ için $T(x,y) \leq T(x,1) = x$ ve $T(x,y) \leq T(1,y) = y$ olup $T(x,y) \leq min(x,y) = T_M(x,y)$' dir. Böylece, T_M minimum t-normu en güçlü t-normdur. $[0,1]^2$ nin sınırları üzerinde her t-norm çakışık ve her $x, y \in (0,1)$ için $T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$ olduğundan T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Bu durumda keyfi T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M \tag{1.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Açıkça $T_L < T_P$ olduğundan dört temel t-norm arasında

$$T_D < T_L < T_P < T_M \tag{1.8}$$

ilişkisi mevcuttur.

Önerme 1.4. (Klement vd., 2000)

$(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ bir küme ve $*: A^2 \longrightarrow A$, A üzerinde bir ikili işlem ve her $x, y, z \in A$ için (T1)-(T3) özellikleri ile birlikte

$$x * y \leq min(x,y) \tag{1.9}$$

özelliği sağlansın. O halde

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y, & (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases} \tag{1.10}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü bir t-normdur. Üstelik, T, $(A \setminus \{1\})^2$ e kısıtlanışı, $*$ işleminin $(A \setminus \{1\})^2$ ne kısıtlanışı ile aynı olan tek t-normdur.

Tanım 1.27. (Klement vd., 2000)

Her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) ve (1.9) özelliklerini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir t-altnorm denir.

Açık olarak her t-norm bir t-altnormdur, fakat tersinin doğru olması gerekmez: örneğin, sıfır fonksiyonu, yani $F(x,y) = 0$ ile verilen $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnormdur fakat bir t-norm değildir.

Sonuç 1.3. (Klement vd., 2000)

F bir t-altnorm ise

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y), & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.5. (Klement vd., 2000)

(i) Her $x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

(ii) Her $x \in [0,1)$ için $T(x,x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımıdır.

Uyarı 1.7. (Klement vd., 2000)

(i) Her t-norm T (T2) birleşme kuralı ve indüksiyon ile aşağıdaki n-li işleme genişletilebilir. Yani, her $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralısı için

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n)$$

dir. Eğer özel olarak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ise kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \ldots, x)$$

yazılır. Bu durumda $x_T^{(0)} = 1$ ve $x_T^{(1)} = x$ olarak tanımlanır.

(ii) $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi yani $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i \tag{1.11}$$

ile tanımlanır.

(iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ için, yani $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve (1.11) un bir genellemesidir:

$$T_{i\in I} x_i = inf \left\{ T_{j=1}^{k} x_{i_j} \middle| \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right), (x_i)_{i\in I} \text{nın sonlu alt ailesidir} \right\}.$$

Örnek 1.15.

T_M minumum ve T_p çarpım t- normlarının n-li genişlemelerinin

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = min(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımının n-li genişlemeleri

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0),$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & x_j = 1, \forall j \neq i \text{ ise}, \\ 0, & \text{Aksi halde}, \end{cases}$$

şeklindedir.

1.4.2. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.28. (Baczyński ve Jayaram, 2008; Klement vd., 2000; Wang ve Yu, 2002) Bir üçgensel konorm (veya kısaca t-konorm) S, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için

(S4) $\qquad S(x, 0) = x \qquad$ (Sınır şartı)

şartını sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Aksiyomatik olarak t-normlar ve t-konormlar sadece sınır şartlarında farklılık gösterirler. Aslında, t-norm ve t-konorm kavramları bazı anlamlarda dualdirler.

Örnek 1.16.

S_M, S_p, S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$$S_M(x, y) = max(x, y), \qquad \text{(Maksimum)}$$

$$S_P(x, y) = x + y - xy, \qquad \text{(İstatistiksel toplam)}$$

$$S_L(x, y) = min(x + y, 1), \qquad \text{(Lukasiewicz t-konorm, sınırlı toplam)}$$

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in (0,1)^2, \\ max(x, y), & \text{Aksi halde}, \end{cases} \qquad \text{(Drastik toplam)}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.6. (Klement vd., 2000)

$S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. S bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Bir T t-normu her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \tag{1.12}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Uyarı 1.8.

(i) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm ise

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \tag{1.13}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. (1.12) ile verilen t-konorma, t-norm T' nin dual t-konormu denir. Benzer şekilde, (1.13) ile verilen t-norma S t-konormunun dual t-normu denir.

(ii) (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(iii) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$S(1,x) = S(x,1) = 1,$$
$$S(0,x) = x,$$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar $[0,1]^2$ nin sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

T-normlarda olduğu gibi bir S t-konormu elde etmek için gerek ve yeter koşul Önerme 1.4. ün duali ile, (S1)-(S3) şartlarının ve her (x,y) için $S(x,y) \geq max(x,y)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(iv) Duallik sıralamayı değiştirir; yani T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ve S_1, T_1 t-normuna ve S_2, T_2 t-normuna karşılık gelen dual t-konormlar ise $S_1 \geq S_2$' dir.

Her S t-konormu için

$$S_M \leq S \leq S_D$$

dir. Yani S_M maksimum t-konormu en zayıf, S_D drastik toplam en güçlü t-konormdur. Temel dört t-konorm için aşağıdaki ilişki mevcuttur:

$$S_M < S_P < S_L < S_D$$

(v) Verilen bir t-konorm S için Uyarı 1.7 e benzer şekilde $(x_1, x_2, \dots x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralılarına, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere $(x_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \dots x_n),$

$S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n} x_i,$

$S_{i\in I} x_i = sup\left\{S_{j=1}^{k} x_{i_j} \middle| (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), (x_i)_{i\in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir}\right\}.$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ olduğunda $S(x, x, \cdots, x)$ yerine kısaca $x_S^{(n)}$ yazılır ve her $x \in [0,1]$ için $x_S^{(0)} = 0$ ve $x_S^{(1)} = x$ olarak gösterilir.

1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar, Negasyonlar ve Gerektirmeler

1.5.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.29. (De Baets vd., 1999; Klement vd., 2000; Wang ve Yu, 2002)
$(L, \leq, 0,1)$bir sınırlı kafes olsun. L üzerinde T ikili işlemi t-norm olarak adlandırılır $\Leftrightarrow$ her $a, b, c \in L$ için

(1) $T(T(a,b),c) = T(a,(b,c))$ (Birleşme)

(2) $T(a,b) = T(b,a)$ (Değişme)

(3) $b \leq c$ ise $T(a,b) \leq T(a,c)$ (Monotonluk)

(4) $T(a,1) = a$ (Sınır koşulu)

Uyarı 1.9. (Wang ve Yu, 2003)

(i) T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $x_0, y_0 \in L$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x, & y = 1, \\ y, & x = 1, \\ 0, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

olsun. O halde T_W , L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ ile verilir ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_\wedge = T_M$' dir.

Tanım 1.30.

T bir t-norm olsun.

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanına T'nin bir idempotent elemanıdır denir $\Leftrightarrow T(a, a) = a$' dır. 0 ve 1 her t-norm için idempotent elemanlar olup bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. $(0,1)$ ' deki idempotent elemanlar ise trivialden farklı idempotent elemanlar olarak adlandırılır.

(ii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına t-norm T'nin nilpotent elemanı denir $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $a_T^{(n)} = 0$' dır.

(iii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına T'nin sıfır böleni denir $\Leftrightarrow$ $\exists b \in (0,1)$ öyleki $T(a, b) = 0$' dır.

Tanım 1.31. (De Baets vd., 1999)

T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T nin bir sıfır böleni denir $\Leftrightarrow x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcuttur. T' nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilecektir.

Eğer $Z(T) = \emptyset$ ise T' ye sıfır bölensiz denir.

$L = [0,1]$ olarak alınırsa Tanım 1.30 ve Tanım 1.31 (iii) deki sıfır bölen tanımlarının denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 1.32. (Casasnovas ve Mayor, 2008)

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T e bölünebilirdir denir $\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki T_W t-normu bölünebilir olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, $T_\wedge$ t-normu bölünebilir bir t-normdur: $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ olmasına denktir.

Tanım 1.33. (De Baets vd., 1999)

Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm T alalım. Bir $x \in L$ elemanına T nin idempotent elemanıdır denir $\Leftrightarrow$ $T(x,x) = x$ eşitliği sağlanır.

Açık olarak, 0 ve 1 elemanları herhangi bir t-normun idempotent elemanlarıdır. Bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. Bunlardan farklı idempotent elemanlara da trivial olmayan idempotent elemanlar denir.

Önerme 1.7. (De Baets, 1995)

T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T bölünebilirdir $\Leftrightarrow$ T süreklidir.

1.5.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Negasyonlar ve Üçgensel sıralamalar

Tanım 1.34. (Karaçal, 2006)

$(L \leq 0{,}1)$ üzerinde sınırlı kafes olsun. $N: L \to L$ azalan fonksiyonuna negasyon denir $\Leftrightarrow$ $N(0) = 1$ ve $N(1) = 0$ dır.

N negasyonuna güçlüdür denir $\Leftrightarrow$ Her $x \in L$ için $N(N(x)) = x$ dir.

Aşağıdaki gibi verilen N^- ve N^+ dönüşümleri herhangi bir L kafesi üzerinde negasyonlar olup herhangi bir N negasyonu için $N^- \leq N \leq N^+$ olduğu açıktır.

$$N^-(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & AT \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad N^+ = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & A.T \end{cases}$$

Tanım 1.35. (Karaçal, 2006; Baczyński ve Jayaram, 2008)

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $I: L^2 \to L$ fonksiyonuna (S, N) -gerektirmesi denir $\Leftrightarrow$ Bir t-konorm S ve bir negasyon $N \longrightarrow L \longrightarrow L$

$$I(x,y) = S(N(x), y), \qquad x, y \in L$$

olacak şekilde mevcuttur. N güçlü negasyon ise I gerektirmesine S gerektirme denir.

Tanım 1.36. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

$I \in \mathcal{F}_I$ ve N bir negasyon olsun. Her $x, y, z \in L$ için,

(i) I fuzzy gerektirmesi “N negasyonuna göre zıt simetri özelliğini ” CP(N) sağlar. denir. $\Leftrightarrow$ $I(x,y) = I(N(y), N(x))$ dir.

(ii) I fuzzy gerektirmesi “N negasyonuna göre sol zıt simetri özelliğini ” $L-$CP(N) sağlar denir. $\Leftrightarrow$ $I(N(x), y) = I(N(y), x)$ dir.

(iii) I fuzzy gerektirmesi "N negasyonuna göre sağ zıt simetri özelliğini " $R-$ CP(N) sağlar denir. $\Leftrightarrow$ $I(x, N(y)) = I(y, N(x))$ dir.

Teorem 1.8. (Baczyński ve Jayaram, 2008)

$I_{S,N}$ bir (S, N)- gerektirmesi ise

(i) $I_{S,N} \in \mathcal{F}_I$ ve (NP) ve (EP) i sağlar.

(ii) $N_{I_{S,N}} = N$ dir.

(iii) N güçlü negasyon ise $I_{S,N}$ gerektirmesi L- CP(N^{-1}) i sağlar.

(iv) N güçlü negasyon ise $I_{S,N}$ gerektirmesi CP(N) i sağlar.

İspat:

$I_{S,N}$ nin monotonluğu S nin ve N nin monotonluğu ile elde edilir.

(i) Ayrıca,

$$I_{S,N}(0,0) = S(N(0), 0) = S(1,0) = 1$$

$$I_{S,N}(1,1) = S(N(1), 1) = S(0,1) = 1$$

$$I_{S,N}(1,0) = S(N(1), 0) = S(0,0) = 0$$

dır. Bu durumda $I_{S,N} \in \mathcal{F}_I$ elde edilir.

$$I_{S,N}(1, y) = S(N(1), y) = S(0, y) = y, \qquad y \in [0,1].$$

dır. Böylece, $I_{S,N}$ (NP) özelliğini sağlar.

$$I_{S,N}\left(x, I_{S,N}(y,z)\right) = S\big(N(x), S(N(y), z)\big) = S\big(N(y), S(N(x), z)\big)$$
$$= I_{S,N}\left(y, I_{S,N}(x,z)\right)$$

Böylece (EP) özelliği sağlanır.

(ii) Her $x \in [0,1]$ için,

$$N_{I_{S,N}}(x) = I_{S,N}(x, 0) = S(N(x), 0) = N(x).$$

(iii) N güçlü negasyon olmak üzere ve (Baczyński ve Jayaram, 2008) Uyarı 1.5.19 *(i)* den $I_{S,N}$ gerektirmesi L- CP(N^{-1}) i sağlar sonucu elde edilir.

(iv) N güçlü negasyon olmak üzere ve (Baczyński ve Jayaram, 2008) Uyarı 1.5.6 *(ii)* den $I_{S,N}$ gerektirmesi CP(N) i sağlar.

Tanım 1.37. (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011)

L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\preccurlyeq_T$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı olup bu sıralama bağıntısına T-sıralama denir. Her $x, y \in L$ için

$$x \preccurlyeq_T y \Leftrightarrow \exists\, \ell \in L \text{ öyleki } T(\ell, y) = x.$$

Şimdi $\preccurlyeq_T$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim.

- Her $x \in L$ için $T(1,x) = x$ olup $x \preccurlyeq_T x$ dır. Böylece, $\preccurlyeq_T$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.
- $x, y \in L$ için $x \preccurlyeq_T y$ ve $y \preccurlyeq_T x$ olsun. Bu taktirde $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$T(\ell_1, y) = x \text{ ve } T(\ell_2, x) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. Böylece

$x = T(\ell_1, y) \leq T(1, y) = y$ ve $y = T(\ell_2, x) \leq T(1, x) = x$ olup $x = y$ dir. Yani, $\preccurlyeq_T$ bağıntısı ters simetriktir.

- $x, y, z \in L$ için $x \preccurlyeq_T y$ ve $y \preccurlyeq_T z$ olsun. Bu taktirde, $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$T(\ell_1, y) = x \text{ ve } T(\ell_2, z) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. $x = T(\ell_1, y) = T\big(\ell_1, T(\ell_2, z)\big) = T\big((\ell_1, \ell_2), z\big)$ olduğundan $x \preccurlyeq_T z$ sağlanır. Böylece, $\preccurlyeq_T$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlar.

Tanım 1.38. (Klement vd., 2000)

$T: [0,1]^2 \to [0,1]$ sol sürekli bir t-norm olsun. Bu taktirde

$$I_T(x, y) = sup\{z \in [0,1] \mid T \ (x, z) \leq y\}$$

olarak tanımlanan $I_T: [0,1]^2 \to [0,1]$ dönüşümü bir gerektirme olup bu gerektirmeye T t-normunun rezidual gerektirmesi denir. T sol sürekli olduğunda supremum maksimum olarak düşünülebilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar "Kesicioğlu ve Mesiar, ordering based on implications" isimli çalışmadan alınmıştır. (Kesicioğlu ve Mesiar, 2014).

Tanım 2.1. (Karaçal, 2006; Karaçal, 2004; Karaçal ve Sağiroğlu, 2009; Wang ve Yu, 2002)

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes olsun. Bir $I: L^2 \to L$ fonksiyonuna gerektirme denir $\Leftrightarrow$ Her $x, x_1, y, y_1 \in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

I1. $x_1 \leq x_2$ ise $I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$, yani $I(., y)$ azalandır.

I2. $y_1 \leq y_2$ ise $I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$, yani $I(x, .)$ artandır.

I3. $I(0,0) = 1$.

I4. $I(1,1) = 1$.

I5. $I(1,0) = 0$.

Tanımdan her $x \in L$ için $I(0, x) = 1$ ve $I(x, 1) = 1$ olduğu görülür.

Tanım 2.2. (Karaçal, 2006)

$I: L^2 \to L$ gerektirme olsun. Her x, y, z ∈L için,

(iv) I gerektirmesi "N negasyonuna göre zıt simetri özelliğini " ($\mathrm{CP} - \mathrm{N_I}$) sağlar denir. $\Leftrightarrow$ $I(x, y) = I(N(y), N(x))$ dir.

(v) I gerektirmesi sol nötrallik özelliğini (NP) sağlar denir. $\Leftrightarrow$ Her $y \in L$ için $I(1, y) = y$ eşitliği sağlanır.

(vi) I gerektirmesi yer değiştirme özelliğine (EP) sahiptir denir. $\Leftrightarrow$ $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.3.

L bir kafes ve I, L üzerinde tanımlı bir gerektirme olsun.

$N_I: L \to L$ fonksiyonuna doğal negasyon denir $\Leftrightarrow$ her $x \in L$ için $N_I = I(x, 0)$ dır.

Tanım 2.4.

$I: L^2 \to L$ sınırlı bir L kafesi üzerinde gerektirme olsun. L üzerinde $\preccurlyeq_I$ bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım: Her $x, y \in L$ için

$$y \preccurlyeq_I x \iff \exists \ell \in L \text{ öyleki } I(\ell, x) = y$$

Önerme 2.1.

$I: L^2 \to L$ sınırlı bir L kafesi üzerinde gerektirme olsun. Eğer I gerektirmesi N_I güçlü doğal negasyonuna göre zıtlık kuralını $(\mathrm{CP} - \mathrm{N_I})$ ve yer değiştirme prensibi (EP)'i sağlıyorsa Tanım 2.4. de verilen $\preccurlyeq_I$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

İspat:

(i) (Baczyński ve Jayaram, 2008) Sonuç 1.5.7 ile I nın (NP)' yi sağladığı açıktır. Böylece $I(1, x) = x$ olup $x \preccurlyeq_I x$ dir. Yani, $\preccurlyeq_I$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.

(ii) $x, y \in L$ için $x \preccurlyeq_I y$ ve $y \preccurlyeq_I x$ olsun. Buradan $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$I(\ell_1, y) = x \text{ ve } I(\ell_2, x) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. I , (NP) özelliğini sağladığından

$$x = I\,(\ell_1, y) \geq I(1, y) = y \text{ ve } y = I(\ell_2, x) \geq I(1, x) = x$$

ile $x = y$ olduğu elde edilir. Böylece, $\preccurlyeq_I$ bağıntısı ters simetriktir.

(iii) $x, y, z \in L$ için $x \preccurlyeq_I y$ ve $y \preccurlyeq_I z$ olsun. Bu taktirde, $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$I(\ell_1, y) = x \text{ ve } I(\ell_2, z) = y$$

olacak şekilde mevcuttur.

$$\begin{aligned} x = I(\ell_1, y) &= I(\ell_1, I(\ell_2, z)) \\ &= I(\ell_1, I(N_I(z), N_I(\ell_2))) && (\mathrm{CP} - \mathrm{N_I} \text{ ile}) \\ &= I(N_I(z), I(\ell_1, N_I(\ell_2)))) && (\text{EP ile}) \\ &= I(N_I(I(\ell_1, N_I(\ell_2))), N_I(N_I(z)) && (\mathrm{CP} - \mathrm{N_I} \text{ ile}) \\ &= I(N_I(I(\ell_1, N_I(\ell_2)), z) && (\mathrm{N_I} \text{ güçlü olduğundan}) \end{aligned}$$

olup $k = N_I(I(\ell_1, N_I(\ell_2)))$ ile gösterelim. Bu taktirde, $x = I(k, z)$ olduğundan $x \preccurlyeq_I z$ elde edilir. Böylece, $\preccurlyeq_I$ geçişme özelliğini sağlar.

Lemma 2.1.

L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde her T t-normu ve her $x \in L$ için $0 \preccurlyeq_T x$, $x \preccurlyeq_T x$ ve $x \preccurlyeq_T 1$ dir.

Uyarı 2.1.

Önerme 2.1. in tersi her zaman sağlanmayabilir. Örneğin

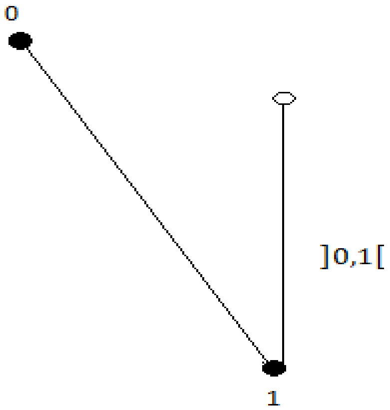
$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \dfrac{x}{y}, & A.T \end{cases}$$

olarak tanımlanan Goguen gerektirmesini alalım. Açıkça doğal negasyonu

$$N^{-}(x) = \begin{cases} 1\ , & x = 0 \\ 0\ , & A.T \end{cases}$$

involutif olmayan negasyondur. Böylece $I,\ N_I = N^{-}$ e negasyonuna göre zıtlık kuralını sağlamaz.

Diğer taraftan, $\preccurlyeq_I = \ \{(x, y) \mid \ x \preccurlyeq_I y \Longrightarrow x \geq y\} \cup \{(0,0),\ (1,0)\}$' nın $[0,1]$ üzerindeki Hasse diyagramı aşağıda şekil 3. de gösterilmiştir.



Şekil 3. $\preccurlyeq_I$'nın hasse diagramı

Önerme 2.2.

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes ve $I: L^2 \rightarrow L$ gerektirmesi yer değiştirme prensibi (EP)'i N_I doğal negasyonuna göre zıtlık prensibi (CP-N_I)'ı sağlayan bir gerektirme olsun. Bu taktirde $x, y \in L$ için

$$x \preccurlyeq_I y \text{ ise } y \leq x$$

dir.

İspat:

$x, y \in L$ için x $\preccurlyeq_I y$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in L$ elemanı

$$I(\ell, y) = x$$

olacak şekilde mevcuttur. $\ell \leq 1$ ve I bir gerektirme olduğundan

$$\text{x} = I(\ell, y) \geq I(1, y) = y$$

dir.

Uyarı 2.2.

(i) 0 ve 1 elemanları $(L, \preccurlyeq_I)$ kısmen sıralı kümesinin sırasıyla en büyük ve en küçük elemanlarıdır. Gerçekten her $x \in L$ için $I(0, x) = 1$ olduğundan $1 \preccurlyeq_I x$ olup, 1, $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre en küçük elemandır.

(ii)

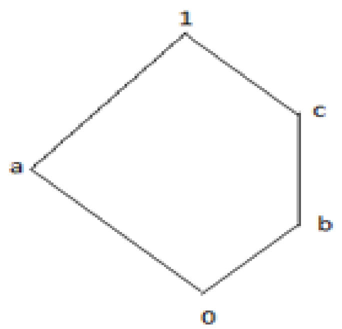
Diğer taraftan, (NP) ve (CP-N_I) ile

$$x = I(1, x) = I\big(N_I(x), N_I(1)\big) = I(N_I\ (x), 0)$$

olup $x \preccurlyeq_I 0$ olduğu elde edilir. Bu ise 0'ın $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre en büyük eleman olduğunu gösterir.

(iii) Önerme 2.2 nin tersinin sağlanması gerekmez. Örnek olarak,

$L = (\{0, a, b, c, 1\}, \ \leq 0, 1)$ kafes diagramı şekil 4. gibi verilsin.



Şekil 4. $(L = \{0, a, b, c, 1\}, \ \leq 0, 1)$.

$I: L^2 \to L$ gerektirmesi Tablo 4 deki gibi tanımlansın:

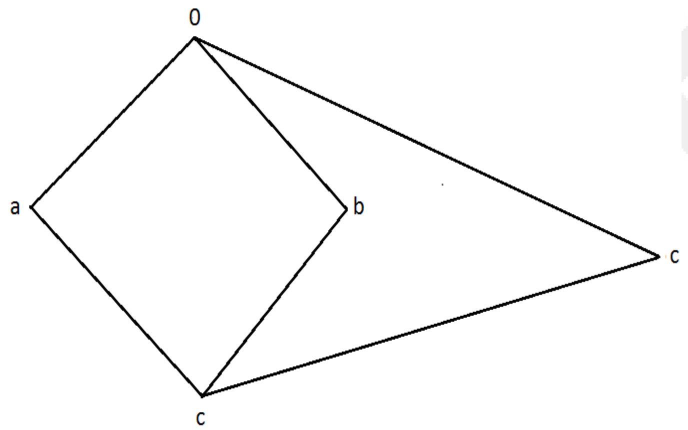
Tablo 4. $I: L^2 \to L$ gerektirmesi

I	0	a	b	c
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	c	1	1	1
c	b	1	1	1
1	0	a	b	c

Açıkça, I gerektirmesinin N_I güçlü negasyonu

$$N_I(x) = \begin{cases} a\,, & x = a \\ c\,, & x = b \\ b\,, & x = c \\ 1\,, & x = 0 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

olup, I, N_I negasyonuna göre (CP-$\mathrm{N_I}$) yı ve (EP) yer değiştirme prensibini sağlar. Dikkat edilirse, b≤c olmasına rağmen $I(k,b) = c$ olacak şekilde $k \in L$ elemanı mevcut değildir. Yani $c \not\preccurlyeq_I b$ olur. Bu ise Önerme 2.2 nin tersinin sağlanması gerekmediğini gösterir. $(L, \preccurlyeq_I)$ sıralı kümesinin Hasse diyagramı aşağıdaki Şekil 5. de gösterilmiştir.



Şekil 5. $(L = \{0, a, b, c, 1\},\ \preccurlyeq_I, 0, 1)$.

(iv) $(L, \leq, 0,1)$ zincir olsa bile $(L, \preccurlyeq_I)$ sıralı kümesinin zincir olması gerekmez. Örneğin,

$$I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \max(1-x, y)\,, & x > y \end{cases} \qquad (2.1)$$

olarak tanımlanan Fodor gerektirmesini alalım.

Eğer $1/2 \preccurlyeq_{I_{FD}} 3/4$ olsa, Önerme 2.2 ile $3/4 \leq 1/2$ elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. Şimdi farzedelim ki $3/4 \preccurlyeq_{I_{FD}} 1/2$ olsun. Buradan $k \in L$ elemanı mevcuttur öyleki $I_{FD}(k, 1/2) = 3/4$ dir. I_{FD} nin tanımı ile $\max(1-k, 1/2) = 3/4$ dir. $\max(1 -$

$k, 1/2) = 3/4 \;\; k = 1/4$ eşitliğini sağlayan k elemanının $k = 1/4$ gerektiği açık olup bu ise $k > 1/2$ olmasıyla çelişir. Böylece, $1/2 \not\preccurlyeq_{I_{FD}} 3/4$ ve $3/4 \not\preccurlyeq_{I_{FD}} 1/2$ olup $(L, \preccurlyeq_I)$ bir zincir değildir.

Uyarı 2.3.

$T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sol sürekli bir t-norm ve I_T, t-norm T den elde edilen rezidüal gerektirme olsun. I_T ve T den elde edilen kısmen sıralama bağıntıları birbirinden bağımsızdır. Şimdi bu iddiayı aşağıdaki örnek ile açıklayalım. Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$T^{nm}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ \min(x,y), & A.T \end{cases}$$

nilpotent minimum t-normunu ve rezidual gerektirmesi olan I_{FD} Fodor gerektirmesini alalım. $I_{FD}(1/2\,,1\,/\,8) = 1\,/\,2$ olduğundan $1\,/\,2 \preccurlyeq_{I_{FD}} 1\,/\,8$ olduğu açıktır. $1/8 \preccurlyeq_{T^{nm}} 1\,/\,2$ olsa Önerme 2.2. ile $1/2 \leq 1/8$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Farzedelim ki $1/8 \preccurlyeq_{T^{nm}} 1\,/\,2$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nm}(\ell, 1/2) = 1/8$$

olacak şekilde mevcuttur. T^{nm} nin tanımı ile $\ell + 1/2 > 1$ ve $\min(\ell, 1/2) = 1/8$ dir. Buradan, $\ell = 1/8$ ve $\ell + 1/2 > 1$ olup bu ise bir çelişkidir. Böylece $1/8 \not\preccurlyeq_{T^{nm}} 1\,/\,2$ dir. Diğer taraftan, $T^{nm}(1/2\,, 3/4) = \min(1/2\,, 3/4) = 1/2$ olduğundan $1/2 \preccurlyeq_{T^{nm}} 3/4$ dir. Fakat $1/2$ ve $3/4$, I_{FD} sıralamasına göre kıyaslanamaz. Gerçekten, $1\,/\,2 \preccurlyeq_{I_{FD}} 3\,/\,4$ olsa Önerme 2.2. ile $3/4 \leq 1/2$ olup çelişki elde edilir. Farzedelim ki, $3/4 \preccurlyeq_{I_{FD}} 1/2$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$I_{FD}(\ell, 1/2) = 3/4$$

olacak şekilde mevcuttur. I_{FD} nin tanımı ile $\ell > 1/2$ ve $\max(1 - \ell, 1/2) = 3/4$ olup buradan $\ell = 1/4$ olduğu elde edilir. Bu ise $\ell > 1/2$ olmasıyla çelişir.

Böylece, $3/4 \not\preccurlyeq_{I_{FD}} 1\,/\,2$ dir.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $I: L^2 \longrightarrow L$ gerektirmesi N_I güçlü negasyonuna göre (CP-N_I) ve (EP) özelliklerini sağlayan gerektirme olsun $(L, \preccurlyeq_I)$ sıralı kümesinin bir kafes olması gerekmez . Aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 2.1.

$([0,1], \preccurlyeq_{I_{FD}})$ bir kafes değildir. $1/2$ ve $3/4$ ün $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre üst sınırlarının en küçüğünün olmadığını gösterelim. Uyarı 2.3 ile $1/2$ ve $3/4$ $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan elemanlar olduğu bilinmektedir. Şimdi

$k \in \overline{\{1/2\,,3\,/\,4\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}}$ keyfi olsun. Buradan, $1\,/\,2 \preccurlyeq_{I_{FD}} k$ ve $3\,/\,4 \preccurlyeq_{I_{FD}} k$ dır.

Buradan, $\ell_1\,, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$I_{FD}(\ell_1, k) = 1\,/\,2 \quad \text{ve} \quad I_{FD}(\ell_2, k) = 3\,/\,4$$

olacak şekilde mevcuttur. I_{FD} nın tanımı ile

$$\ell_1\,, \ell_2 > k \;\;,\;\; max(1-\ell_1, k) = 1\,/\,2 \;\; \text{ve} \;\; max(1-\ell_2, k) = 3\,/\,4$$

dir.

Farzedelim ki $k > 1 - \ell_1$ olsun. Bu taktirde, $k = max(1-\ell_1, k) = 1\,/\,2$ dir. $3/4 = max(1-\ell_2, k) = max(1-\ell_2, 1/2)$ ile $1-\ell_2 = 3/4$ olduğu açıktır. Buradan, $\ell_2 = 1/4$ olduğu elde edilir. $\ell_2 = 1/4$ ve $k = 1/2$ olduğundan bu $\ell_2 > k$ olmasıyla çelişir. Böylece $k > 1-\ell_1$ durumu sağlanmaz. Benzer şekilde, $k > 1-\ell_2$ olamayacağı da gösterilebilir. Buradan, $k \leq 1-\ell_1$ ve $k \leq 1-\ell_2$ olup $max(1-\ell_1, k) = 1\,/\,2$ ve $max(1-\ell_2, k) = 3\,/\,4$ eşitlikleri ile

$$1-\ell_1 = 1\,/\,2 \;\; \text{ve} \;\; 1-\ell_2 = 3\,/\,4$$

olduğu yani $\ell_1 = 1\,/\,2$ ve $\ell_2 = 1\,/\,4$ olduğu elde edilir. $k < \ell_1$ ve $k < \ell_2$ olduğundan $k \in [0, 1/4)$ olduğu elde edilir.

Böylece, $\overline{\{1/2\,,3\,/\,4\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}} \subseteq [0, 1/4)$ dir.

Şimdi, $t \in [0, 1/4)$ keyfi olsun. Bu taktirde, $t < 1/4$ olup

$$I_{FD}(1/2\,, t) = \max(1/2\,, t) = 1\,/\,2\,,$$

yani $1\,/\,2 \preccurlyeq_{I_{FD}} t$ olduğu elde edilir.

Benzer şekilde, $I_{FD}(1/4\,, t) = \max(3/4\,, t) = 3\,/\,4$ olduğundan $3\,/\,4 \preccurlyeq_{I_{FD}} t$ dir.

Buradan, $t \in \overline{\{1/2\,,3\,/\,4\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}}$, yani $[0, 1/4) \subseteq \overline{\{1/2\,,3\,/\,4\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}}$ dir. Böylece,

$$\overline{\{1/2\,,3\,/\,4\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}} = [0, 1/4)$$

olduğu elde edilir. Şimdi $[0, 1/4)$ aralığının $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre en küçük elemanının mevcut olmadığını gösterelim. Farzedelim ki, bir $x \in [0, 1/4)$ elemanı

$\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre en küçük eleman olsun. Buradan, her $y \in [0, 1/4)$ için $x \preccurlyeq_{I_{FD}} y$ dir. Yani $y \leq x$ dir. Bu ise x'in $[0, 1/4)$ aralığının en büyük elemanı olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Böylece, $1/2$ ve $3/4$ elemanlarının $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre supremumu mevcut değildir. Yani, $([0,1], \preccurlyeq_{I_{FD}})$ bir kafes değildir.

Ancak, $([0,1], \preccurlyeq_{I_{FD}})$ bir infimum yarı kafesdir. Gerçekten, herhangi iki $x, y \in [0,1]$ için eğer x ve y $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre kıyaslanabilir ise infimumları x ve y nin $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre küçüğüne eşittir.

Şimdi, x ve y elemanları $x < y$ olan fakat $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre kıyaslanmayan yani $x \not\preccurlyeq_{I_{FD}} y$ ve $y \not\preccurlyeq_{I_{FD}} x$ olan iki eleman olsun. $1 \in \underline{\{x, y\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}}$ olduğu açıktır. Şimdi farzedelim ki bir $k \in \underline{\{x, y\}}_{\preccurlyeq_{I_{FD}}}$, $k \neq 1$ elemanı mevcut olsun. Bu taktirde,

$$k \preccurlyeq_{I_{FD}} x \qquad \text{ve} \qquad k \preccurlyeq_{I_{FD}} y$$

dir. Buradan, $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$I_{FD}(\ell_1, x) = k \neq 1 \quad \text{ve} \quad I_{FD}(\ell_2, y) = k \neq 1$$

olacak şekilde mevcuttur. I_{FD} nin tanımı ile

$$\max(1 - \ell_1, x) = k \quad \text{ve} \quad \max(1 - \ell_2, y) = k$$

olup buradan $\ell_1 > x$ ve $\ell_2 > y$ dir. x ve y $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamısa göre kıyaslanamaz olduğundan $k \neq x$ ve $k \neq y$ olduğu açıktır. Eğer $k = x$ olsa, $I_{FD}(\ell_2, y) = x$ ile $x \preccurlyeq_{I_{FD}} y$ olduğu elde edilir ki bu ise bir çelişkidir.

Eğer $k = y$ olsa, benzer bir çelişkinin elde edilebileceği kolaylıkla gösterilebilir.

Buradan, $k = 1 - \ell_1$ ve $k = 1 - \ell_2$ olup $\ell_1 = \ell_2$ elde edilir. $\ell := \ell_1 = \ell_2$ olarak alalım.

$x < y < l = 1 - k$ ve $x < y < k$ olduğundan $x < y < 1/2$ olduğu elde edilir.

Böylece, $x < y < 1/2 < 1 - y$ ile

$$I_{FD}(1 - y, x) = \max(1 - (1 - y), x) = \max(y, x) = y$$

olduğu elde edilir. $I_{FD}(1 - y, x) = y$ olduğundan $y \preccurlyeq_{I_{FD}} x$ olur ki bu ise x ve y elemanlarının $\preccurlyeq_{I_{FD}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olmasıyla çelişir.

Böylece $x \wedge_{I_{FD}} y = 1$ olup $([0,1], \preccurlyeq_{I_{FD}})$ bir infimum yarı kafestir.

Önerme 2.3.

$I: L^2 \to L$ (EP) özelliğini ve N_I güçlü doğal negasyonuna göre (CP-$\mathrm{N_I}$)' ı sağlayan bir gerektirme olsun. Bu taktirde,

$$I(x, y) = S(N_I(x), y)$$

olacak şekilde S t-konormu mevcuttur, yani I bir S gerektirmedir.

İspat:

$S: L^2 \to L$ fonksiyonu $S(x, y) = I(N_I(x), y)$ olarak tanımlayalım. S fonksiyonunun bir t-konorm olduğunu gösterelim. N_I güçlü ve I, $(\mathrm{CP} - \mathrm{N_I})$ özelliğini sağladığından **(**Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 1.5.23 ile N_I a göre sol zıtlık kuralını sağlar. Böylece, (Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 2.4.6. (iii) ile S değişmeli bir fonksiyondur. Ayrıca **(**Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 2.4.6. (ii) S fonksiyonunun her iki bileşenine göre artan olduğu da açıktır. I , (NP) özelliğini sağladığından (Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 2.4.6. (iv) ile $x \in L$ için $S(x, 0) = x$ olduğu elde edilir. Ayrıca, I (EP) yer değiştirme prensibini sağladığından (Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 2.4.6. ile S birleşmeli bir fonksiyondur. Böylece, S bir t-konormdur. N_I güçlü olduğundan $I(x, y) = \mathrm{S}(N_I(x), y)$ olup I bir S-gerektirmedir.

Sonuç 2.1.

$I: L^2 \longrightarrow L$ dönüşümü (EP) ve N_I güçlü doğal negasyonuna göre (CP-$\mathrm{N_I}$) özelliklerini sağlayan bir gerektirme olsun. Bu taktirde, her $a, b \in L$ için

$$a \preccurlyeq_I b \Leftrightarrow N_I(a) \preccurlyeq_T N_I(b)$$

sağlanır, burada $T: L^2 \longrightarrow L$ dönüşümü $T(x, y) = N_I\left(I\left(x, N_I(y)\right)\right)$ olarak tanımlanan bir t-normdur.

İspat :

$I: L^2 \longrightarrow L$ gerektirmesi (EP) ve (CP- $\mathrm{N_I}$) özelliğini sağlayan bir gerektirme olduğundan Önerme 2.3. ile bir t-konorm S, her $x, y \in L$ için

$$I(x, y) = S(N_I(x), y)$$

olacak şekilde mevcuttur. Bu taktirde,

$$T(x, y) = N_I(S(N_I(x), N_I(y)))$$

ile tanımlanan $T: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonu S t-konormunun $N_I$dual t-konormudur.

$S(N_I(x), N_I(y)) = I(x, N_I(y))$ olduğundan, $T(x, y) = N_I(I(x, N_I(y)))$ nin bir t-norm olduğunu elde ederiz.

Şimdi, $a, b \in L$ için $a \preccurlyeq_I b$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in L$

$$I(\ell, b) = a$$

olacak şekilde mevcuttur. $T(\ell, N_I(b)) = N_I(I(\ell, N_I(N_I(b)))) = N_I(I(\ell, b) = N_I(a)$ olduğundan, $N_I(a) \preccurlyeq_T N_I(b)$ dir.

Tersine olarak, $N_I(a) \preccurlyeq_T N_I(b)$ olsun. Bu taktirde, $k \in L$ elemanı

$$T(k, N_I(b)) = N_I(a)$$

olacak şekilde mevcuttur. T t-normun tanımı ile $N_I(I(k, b)) = N_I(a)$ olduğu elde edilir. N_I güçlü olduğundan birebirdir. Böylece, $I(k, b) = a$ olup $a \preccurlyeq_I b$ olduğu elde edilir.

Teorem 2.1.

$I: [0,1]^2 \to [0,1]$ dönüşümü (EP) ve güçlü doğal negasyon N_I a göre (CP- $\mathrm{N_I}$) özelliklerini sağlayan bir fuzzy gerektirmesi ve $\preccurlyeq_I$, I ile elde edilen sıralama olsun. Bu taktirde, I nın sürekli olması için gerek ve yeter şart $\preccurlyeq_I = \geq$ olmasıdır.

İspat :

Önerme 2.3. ile $I(x, y) = S(N_I(x), y)$ olacak şekilde bir S t-konorm mevcuttur. Şimdi aşağıdaki gibi $\preccurlyeq_S$ bağıntısını tanımlayalım:

$$y \preccurlyeq_S z \Leftrightarrow \exists\, \ell \in [0,1] \text{ öyle ki } S(\ell, z) = y.$$

Bu bağıntı $[0,1]$ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Gerçekten,

- S t-konormu sınır şartını sağladığından her $x \in [0,1]$ için $S(0, x) = x$ 'dir. Böylece, $\mathrm{x} \preccurlyeq_{\mathrm{S}} \mathrm{x}$ olup yansıma özelliği sağlanır.
- $x, y \in [0,1]$ için $x \preccurlyeq_S y$ ve $y \preccurlyeq_S x$ olsun. Bu taktirde $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$S(\ell_1, x) = y \text{ ve } S(\ell_2, y) = x$$

dir. $x = S(0, x) \leq S(\ell_1, x) = y$ ve $y = S(0, y) \leq S(\ell_2, y) = x$ ile $x = y$ olduğu elde edilir. Böylece $\preccurlyeq_S$ bağıntısı ters simetriktir.

- $x, y, z \in [0,1]$ için $x \preccurlyeq_S y$ ve $y \preccurlyeq_S z$ olsun. Bu taktirde, $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$S(\ell_1, y) = x \text{ ve } S(\ell_2, z) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. S t-konormunun birleşme özelliği ile

$$\begin{aligned} x = S(\ell_1, y) &= S(\ell_1, S(\ell_2, z)) \\ &= S(S(\ell_1, \ell_2), z) \end{aligned}$$

$x \preccurlyeq_S$ z olduğu elde edilir. $\preccurlyeq_S$ geçişme özelliğini sağlar. Böylece, $\preccurlyeq_S$ bir sıralama bağıntısıdır.

Öncelikle, $\preccurlyeq_I$ sıralamasının $\preccurlyeq_S$ sıralamasına eşit olduğunu gösterelim. $x, y \in [0,1]$ için $x \preccurlyeq_I$ y olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$I(\ell, y) = x$$

olacak şekilde mevcuttur. $x = I(\ell, y) = S(N(\ell), y)$ olduğundan $x \preccurlyeq_S$ y'dir.

Tersine, $x, y \epsilon [0,1]$ için $x \preccurlyeq_S$ y olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$S(\ell, y) = x$$

olacak şekilde mevcuttur. N_I güçlü bir negasyon olduğundan süreklidir. Böylece bir $u \in [0,1]$ elemanı $N_I(u) = \ell$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan,

$$x = S(\ell, y) = S(N_I(u), y) = I(u, y)$$

olup $x \preccurlyeq_I$ y dir. Böylece, $\preccurlyeq_I = \preccurlyeq_S$ olduğu elde edilir.

S nin sürekli olması için gerek ve yeter şart $\preccurlyeq_S = \geq$ olmasıdır. Böylece,

$$I \text{ süreklidir} \Leftrightarrow S \text{ süreklidir} \Leftrightarrow \preccurlyeq_I = \preccurlyeq_S = \geq$$

denklikleri ile I nın sürekli olması için gerek ve yeter şart $\preccurlyeq_I = \geq$ olduğu elde edilir.

Aşağıda verilen Önerme 2.4. (Baczyński, 2010)'da verilen çalışmada elde edilmiş olup konu bütünlüğünün bozulmaması için ispatına yer vereceğiz.

Önerme 2.4. $(L, \leq, 0, 1)$ sıralı bir kafes ve $I: L^2 \longrightarrow L$ aşağıdaki gibi tanımlansın: $N: L^2 \longrightarrow L$ güçlü negasyon olmak üzere

$$I(x, y) = N(x) \vee y \quad x, y \in L \tag{2.2}$$

olsun. Buradan, I değişme prensibi (EP) ve doğal negasyonu $N: L \longrightarrow L$ güçlü negasyon olan bir gerektirmedir. Üstelik, I gerektirmesi N doğal negasyonuna göre zıtlık kuralı (CP) yi sağlar.

İspat:

(i) $x_1, x_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ olsun. N bir negasyon olduğundan

$$N(x_2) \leq N(x_1)$$

olduğu açıktır. Supremum işlemi monoton olduğundan her $y \in L$ için

$$I(x_2, y) = N(x_2) \vee y \leq N(x_1) \vee y = I(x_1, y),$$

yani I nın birinci değişkene göre azalan olduğu elde edilir.

(ii) $y_1, y_2 \in L$ için $y_1 \leq y_2$ olsun. Açıkça,

$$I(x,y_1) = N(x) \vee y_1 \leq N(x) \vee y_2 = I(x,y_2)$$

olup I ikinci değişkene göre artandır.

(iii) $I(0,0) = N(0) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1.$

(iv) $I(1,1) = N(1) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1.$

(v) $I(1,0) = N(1) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0.$

Böylece, I L kafesi üzerinde bir gerektirmedir. $I(x,0) = N(x) \vee 0 = N(x)$ olduğundan N güçlü negasyonu I gerektirmesinin doğal negasyonudur. Her $x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned} I\big(x, I(y,z)\big) &= N(x) \vee I(y,z) = N(x) \vee (N(y) \vee z) \\ &= N(y) \vee (N(x) \vee z) = I\big(y, I(x,z)\big) \end{aligned}$$

olduğundan I gerektirmesi (EP) yer değiştirme prensibini sağlar. Her $x,y, \in L$ için

$$I(x,y) = N(x) \vee y = N\left(N(y)\right) \vee N(x) = I\big(N(y), N(x)\big)$$

eşitliği sağladığında (CP-N) sağlanır.

Önerme 2.5.

$(L, \leq 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. I (2.2) ile tanımlanan bir gerektirme olsun. Bu taktirde, $\preccurlyeq_I = \geq$ dir.

İspat:

$a,b \in L$ için $a \preccurlyeq_I b$ olsun. Önerme 2.2. ile $a \geq b$ dir. Tersine olarak, $a \geq b$ $a,b \in L$ olsun. $I(N(a),b) = N\big(N(a)\big) \vee b = a \vee b = a$ olduğundan $a \preccurlyeq_I b$ olduğu elde edilir. Böylece, $\preccurlyeq_I = \geq$ dir.

Uyarı 2.4.

Genel olarak sınırlı bir kafeste güçlü negasyon mevcut olması gerekmez (bakınız örnek 2.2.). Eğer $(L, \leq, 0, 1)$ Boole cebiri ise L üzerinde her $x \in L$ için $N(x) = x'$ olarak tanımlanan güçlü negasyon mevcuttur. Böylece, Önerme 2.5. Boole cebirleri için her zaman doğrudur.

Gerektirmelerden elde edilen $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre L'nin hangi şartlar altında bir kafes olacağı merak edilebilir. Sonraki önermede bu soruya cevap olabilecek yeter şartlar verilecektir.

Önerme 2.6.

$(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $I: L^2 \to L$ fonksiyonu $x \neq 1$ ve $y \neq 0$ için $I(x,y) = 1$ olarak tanımlanan, değiştirme prensibi (EP) ve güçlü doğal negasyon N_I a göre zıt simetrikliği sağlayan bir gerektirme olsun. Yani, $I: L^2 \to L$ gerektirmesi

$$I(x,y) = \begin{cases} y, & x = 1 \\ N_I(x), & y = 0 \\ 1, & A.T \end{cases} \tag{2.3}$$

olsun. Bu taktirde, $(L, \preccurlyeq_I)$ bir kafestir.

İspat:

Öncelikle (2.3) ile tanımlanan $I: L^2 \to L$ gerektirmesinin N_I güçlü doğal negasyona göre (CP) yi sağladığını görelim.

- $x = 1$ için $N_I(1) = 0$ olup
  $$I(1,y) = y = N_I(N_I(y)) = I(N_I(y), 0) = I(N(y), N(1)).$$
- $y = 0$ için $N_I(0) = 1$ olup
  $$I(x,0) = N_I(x) = I(1, N_I(x)) = I(N_I(0), N_I(x)).$$
- $x \neq 1$ ve $y \neq 0$ için $N_I(\mathrm{x}) \neq 0$ ve $N_I(\mathrm{y}) \neq 1$ olup
  $$I(x,y) = 1 = I(N_I(\mathrm{y}), N_I(\mathrm{x}))$$

dir. Böylece, (CP) özelliği sağlanır.

Şimdi (EP) yer değiştirme prensibinin sağladığını gösterelim.

- $x = 1$ olsun.
  $$I(x, I(y,z)) = I(y,z)$$
  $$= I(y, I(x,z)).$$
- $y = 1$ olsun.
  $$I(x, I(y,z)) = I(x,z)$$
  $$= I(y, I(x,z)).$$
- $x \neq 1$ ve $y \neq 1$ olsun. Buradan $N_I(y) \neq 0$ ve $N_I(x) \neq 0$ olduğu açıktır.
  - $z = 0$ olsun.
    $$I(x, I(y,z)) = I(x, N_I(y))$$
    $$= 1$$
    $$I(y, I(x,z)) = I(y, N_I(x))$$

$$= 1$$

olup $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ dir.

- $z \neq 0$ olsun. Bu taktirde

$$I(x, I(y,z)) = I(x,1) = 1$$
$$= I(y,1) = I(y, I(x,z)).$$

Böylece, I (EP) yer değiştirme prensibini sağlar.

Şimdi, $(L, \preccurlyeq_I)$ nın kafes olduğunu gösterelim. $a, b \in L$ için $a = b$ veya $a \in \{0,1\}$ veya $b \in \{0,1\}$ durumlarında, a ve b elemanlarının supremum ve infimumunun mevcut olduğu açıktır.

$a, b \in L \setminus \{0,1\}$ ve $a \neq b$ olsun. a ve b elemanlarının $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamayacağını gösterelim. Farzedelim ki, $a \preccurlyeq_I b$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in L$ elemanı

$$I(\ell, b) = a \neq 1$$

olacak şekilde mevcuttur. $b \neq 0$ ve $a \neq 1$ olduğundan I gerektirmesinin tanımı ile $\ell = 1$ olmalıdır. Bu durumda, $a = I(\ell, b) = b$ olur ki bu ise $a \neq b$ olmasıyla çelişir. Böylece, $a \not\preccurlyeq_I b$ dir. Benzer şekilde, $b \not\preccurlyeq_I a$ olduğu da gösterilebilir. Şimdi, her $a, b \in L \setminus \{0,1\}$, $a \neq b$ için $a \vee_I b = 0$ ve $a \wedge_I b = 1$ olduğunu gösterelim. Uyarı 2.2. ile $0 \in \overline{\{a,b\}}_{\preccurlyeq_I}$ olduğu açıktır. $k = a \vee_I b$ ve $k \neq 0$ olsun. Buradan,

$$a \preccurlyeq_I k \text{ ve } b \preccurlyeq_I k$$

dır. Bu taktirde, $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$I(\ell_1, k) = a \neq 1 \text{ ve } I(\ell_2, k) = b \neq 1$$

olacak şekilde mevcuttur. $\ell_1 \neq 1$ olsa $k \neq 0$ olduğundan $I(\ell_1, k) = 1 = a$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Böylece, $\ell_1 = 1$ olmalıdır. Böylece, nötrallik özelliği (NP) ile

$$a = I(\ell_1, k) = I(1, k) = k$$

dır. $b = I(\ell_2, k) = I(\ell_2, a)$ olduğundan

$$b \preccurlyeq_I a$$

olduğu elde edilir ki, bu ise a ve b nin $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamaz kabulü ile çelişir. Böylece,

$$a \vee_I b = 0$$

dır.

Şimdi, $a \wedge_I b = 1$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki, $a \wedge_I b = t$ ve $t \neq 1$ olsun. Bu taktirde,

$$t \preccurlyeq_I a \text{ ve } t \preccurlyeq_I b$$

dir. Buradan, $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$I(\ell_1, a) = t \neq 1 \text{ ve } I(\ell_2, b) = t \neq 1$$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $\ell_1 \neq 1$ olsa $a \neq 0$ olduğundan

$$t = I(\ell_1, a) = 1$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. Böylece, $\ell_1 = 1$ olmalıdır. Benzer şekilde, $\ell_2 = 1$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Nötrallik özelliği (NP) ile

$$t = I(\ell_1, a) = I(1, a) = a$$

dır. $a = t = I(\ell_2, b) = I(1, b) = b$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Böylece, her $a, b \in L \setminus \{0,1\}$, $a \neq b$ için

$$a \wedge_I b = 1$$

olup $(L, \preccurlyeq_I)$ bir kafestir.

Şimdi önerme 2.6 da verilenden farklı aşağıdaki $(L, \preccurlyeq_I)$ kafes örneğini inceleyelim.

Örnek 2.2.

[0,1] birim aralığı üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)^2 \\ \min(x,y), & A.T \end{cases}$$

ile tanımlanan T:$[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ t-normunu alalım. S, t-norm T nin dual t-konormu ve $N(x) = N_C(x) = 1 - x$ olsun. Bu taktirde, (Baczyński ve Jayaram, 2008) Önerme 2.4.3 ile $I(x,y) = S(N(x), y)$ yer değiştirme prensibi (EP) ve güçlü doğal negasyonuna göre $N_I = N$'e göre zıtlık kuralı (CP) i sağlayan bir gerektirmedir. Bu taktirde, I gerektirmesi,

$$\begin{aligned} I(x,y) &= S(N(x), y) = S(1-x, y) \\ &= 1 - T(1-(1-x), 1-y) \\ &= 1 - T(x, 1-y) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1\,, & x < 1/2 \text{ ve } y > 1/2 \\ 1 - min(x, 1-y), & A.T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x < 1/2 \text{ ve y} > 1/2 \\ \max(1 - x, y), & A.T \end{cases}$$

şeklindedir.

Şimdi, $([0,1], \preccurlyeq_I)$ nın bir kafes olduğunu gösterelim. Herhangi iki $x, y \in [0,1]$ elemanları $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanabilir ise x ve y nin supremum ve infimumunun mevcut olduğu açıktır. Farzedelim ki, $x, y \neq 0,1$ ve $x \neq y$ olsun. Öncelikle, birbiriyle $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanları belirleyelim. $x \leq 1/2$ olsun. Eğer $x < y$ ise $I(1 - y, x) = \max(y, x) = y$ olduğundan $y \preccurlyeq_I x$ olduğu elde edilir. Eğer $y < x$ ise $I(1 - x, y) = \max(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}$ olduğundan $x \preccurlyeq_I y$ elde edilir. Böylece, $x \leq 1/2$ olan her eleman $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre $[0,1]$ deki herhangi bir elemanla kıyaslanabilir. Farzedelim ki, $x > 1/2$ olsun. Her $y < 1/2$ için $I(1 - x, y) = \max(x, y) = x$ olduğundan $x \preccurlyeq_I y$ dir. $y > 1/2$ olsun. Bu taktirde, $x < y$ veya $x > y$ dir. x ve y elemanları $1/2 < x < y$ olan birbiriyle $\preccurlyeq_I$ sıralamısa göre kıyaslanabilir elemanlar olsun. Eğer $x \preccurlyeq_I y$ olsa $y \leq x$ olur ki bu ise $x < y$ olmasıyla çelişir. Bu durumda, $y \preccurlyeq_I x$ olmalıdır. Bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$I(\ell, x) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $\ell < 1/2$ olsa $y = 1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Buradan $\ell \geq 1/2$ olmalıdır. $y = I(\ell, x) = \max(1 - \ell, x)$ ve $x \neq y$ olduğundan

$$y = 1 - \ell$$

olduğu elde edilir. $y > 1/2$ kabulü ile $\ell < 1/2$ olmalıdır ki bu ise $\ell \geq 1/2$ olmasıyla çelişir. Böylece, $1/2 < x < y$ olan her $x, y \in [0,1]$ elemanı birbiriyle $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamaz. Böylece, x ve y $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanlar ise

$$x, y > 1/2 \quad , \quad x, y \neq 0 \ \text{ ve } \ x \neq y$$

olmalıdır. $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanlar Şekil 6.. de gösterilmiştir.

Şimdi x ve y elemanları $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamıyorsa

$$x \vee_I y = 1/2$$

olduğunu gösterelim. $x, y > 1/2$ olduğundan

$$I(1 - x, 1/2) = \max(x, 1\ /\ 2) = x \ \text{ ve } \ I(1 - y, 1/2) = \max(y, 1\ /\ 2) = y$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, $x \preccurlyeq_I 1/2$ ve $y \preccurlyeq_I 1/2$'dir. Yani

$$1/2 \in \overline{\{x, y\}}_{\preccurlyeq_I}$$

dır. $k \in \overline{\{x, y\}}_{\preccurlyeq_I}$ keyfi olsun. Bu taktirde,

$$x \preccurlyeq_I k \text{ ve } y \preccurlyeq_I k$$

dır. Buradan, $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları mevcuttur öyleki

$$I(\ell_1, k) = x \neq 1 \quad \text{ve} \quad I(\ell_2, k) = y \neq 1$$

dir. $\ell_1 < 1/2$ ve $k > 1/2$ olsa $x = 1$ çelişkisi elde edilir. Böylece,

$$\ell_1 \geq 1/2 \quad \text{veya} \quad k \leq 1/2$$

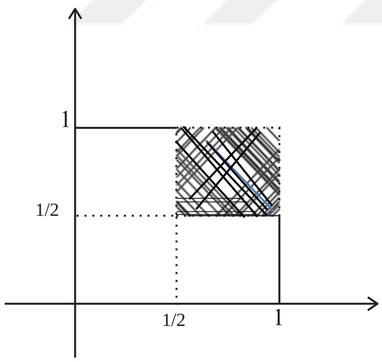
dir. $\ell_1 \geq 1/2$ olsun. $I(\ell_1, k) = \max(1 - \ell_1, k) = x$ olduğundan

$$x = k \quad \text{veya} \quad 1 - \ell_1 = x$$

dir. Eğer $x = k$ olsa $I(\ell_2, x) = I(\ell_2, k) = y$ olduğundan $y \preccurlyeq_I x$ çelişkisi elde edilir. Buradan, $1 - \ell_1 = x$ olmalıdır. $x > 1/2$ olduğundan, $\ell_1 < 1/2$ elde edilir ki bu ise bir çelişkidir. Böylece, $k \leq 1/2$ olmak zorundadır. $I(1/2, k) = \max(1/2, k) = 1/2$ olduğundan, $1/2 \preccurlyeq_I$ k olduğu yani $1/2$ nin $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre x ve y elemanlarının üst sınırlarının en küçüğü olduğu elde edilir. Böylece

$$x \vee_I y = 1/2$$

dir.



Şekil 6. $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre sıralanamayan elemanlar

Şimdi $x \wedge_I y = 1$ olduğunu ispatlayalım. Farzedelim ki, $x \wedge_I y = k$ ve $k \neq 1$ olsun. Buradan

$$k \preccurlyeq_I x \text{ ve } k \preccurlyeq_I y$$

dir. $\preccurlyeq_I$ sıralamasının tanımı ile, $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$I(\ell_1, x) = k \qquad \text{ve} \qquad I(\ell_2, y) = k$$

olacak şekilde mevcuttur. Önerme 2.2. ile $k \preccurlyeq_I x$ ve $x > \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{1}{2} < x \leq k$$

dır. Eğer $\ell_1 < \frac{1}{2}$ olsa $k = 1$ olur ki bu ise $k \neq 1$ kabulü ile çelişir. Böylece, $\ell_1 \geq \frac{1}{2}$ dir.

$k = I(\ell_1, x) = \max(1 - \ell_1, x) = x$ olduğundan

$$x = k = I(\ell_2, y),$$

yani $x \preccurlyeq_I y$ olduğu elde edilir. Bu ise x ve y elemanlarının $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olmasıyla çelişir. Böylece, $k = 1$ olup

$$x \wedge_I y = 1$$

dir. Buradan, $([0,1], \preccurlyeq_I)$ bir kafestir.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

1. Bir sınırlı L kafesi üzerinde I gerektirmesi yardımıyla $\preccurlyeq_I$ ile gösterilen bir bağıntı tanımlanmış ve $\preccurlyeq_I$ nın hangi şartlar altında kısmen sıralama bağıntısı olduğu incelenmiştir
2. $\leq$ ile $\preccurlyeq_I$ arasındaki ilişki araştırılmıştır.
3. $(L, \preccurlyeq_I)$ kısmen sıralı kümesinin en büyük ve en küçük elemanları incelenmiştir.
4. L bir kafes olsa bile L nin $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre bir kafes olması gerekmediği örneklerle gösterilmiştir. L' i $\preccurlyeq_I$ sıralamasına göre kafes yapan şart belirlenmiştir.
5. T sol sürekli bir t-norm ve I_T, t-norm T'den elde edilen bir rezidual gerektirme olmak üzere I_T ve T' den elde edilen kısmen sıralama bağıntılarının birbirinden bağımsız olduğu örnek ile açıklanmıştır.
6. Bir L sınırlı kafesi üzerinde tanımlanan $I(x, y) = N(x) \vee y$ gerektirmesinden elde edilen $\preccurlyeq_I$ sıralamasının L deki $\leq$ sıralamaya eşit olduğu ispatlanmıştır.

4. ÖNERİLER

1. Bu çalışmada sınırlı bir L kafesi üzerinde I gerektirmesi yardımıyla $\preccurlyeq_I$ ile gösterilen bir bağıntı tanımlanmış ve $\preccurlyeq_I$ bağıntısnın bir sıralama bağıntısı olması için bazı gerek şartlar belirlenmiştir. Bu şartlardan başka hangi şartlar altında $\preccurlyeq_I$ bağıntısının yine bir sıralama bağıntısı olduğu araştırılabilir.

2. Aynı şartlar altında iki gerektirme yardımıyla tanımlanan sıralamaların eşitliğine dayalı denklik bağıntısına göre birbirine denk olan gerektirmeler incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abel, N., 1826. Untersuchungen der Functionen Zweier Unabhängigen Veränderlichen Gröβen x und y Wie f(x,y), Welche die Eigenschaft Haben daβ f(z,f(x,y)) Eine Sym metrische Funktion Von x, y und z ist J. Reine. Angew Mathe, 1, 11 – 15.

Aczél, J., 1949. Sur Les Opérations Definies Pour Des Nombres Réels, Bull. Societe Mathematiques. France, 76, 59 –64.

Aczél J., 1961. Vorlesungen Über Funktionalgleichhungen und Ihre Anwendungen. Birkhäuser, Basel.

Aczél J., 1966. Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York.

Alsina, C., Trillas, E. and Valverde, L., 1980. On non-distibutive logical connectives for fuzzy sets theory. Busefal, 3, 18-29.

Anthony, J.M. and Sherwood H., 1979. Fuzzy groups redefined. J. Mathematics. Analysıs Applications, 69, 124-130.

Baczyński, M. and Jayaram, B., 2008. Fuzzy implications. Studfuzz, vol, 231, Springer, Heidelberg.

Baczyński, M., 2010. S-implications in Atanassov's intuitionistic and interval-valued fuzzy set theory revisited, in:K.T. Atanassov et al (Eds.), Developments in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics. Foundations, Warsaw, I, 33-42.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. 3 rd edition. Providence, Rhode Island.

Borzooei, R. A., Bakhshi, M., and Marshinchi, M., 1924. Lattice structure on some fuzzy algebraic systems, Soft Computing, 12, 739-749.

Brouwer, L.E.J., 1909. Die Theorie der Endlichen Kontinuierlichen Gruppen Unabhängig Von Den Axiomen Von Lie. Mathematische Annalen, 67, 246 – 267.

Cartan, E., 1930. La theorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs. Mem. Sciences Mathematiques, 42, 1165-1226.

Casasnovas, J. and Mayor, G., 2008. Discrete t-norms and operations on extended multisets. Fuzzy Sets and Systems, 159, 1165-1177.

Clifford, A.H., 1954. Naturally totally ordered commutative semigroups. American Mathematical Society, 76, 631-646.

Climescu, A.C., 1946. Sur l'equation fonctionelle de l'associativite, Bull. Ecole Polytechnic İssy, 1, 1-16.

De Baets, B., 1995. Oplossen van vaag relationele vergelijkingen: een orde theortische benadering. Ph. Doctoral Dissertation, University of Gent, 389s.

De Baets, B. and Mesiar, R., 1999. Triangular norms on product lattices. Fuzzy Sets Systems, 104, 61-75.

De Cooman, G. and Kerre, E., 1994. Order norms on bounded partially ordered sets. J. Fuzzy Mathematics, 2, 281-310.

Dubois, D., 1980. Triangular norms for fuzzy sets. Proceedings. 2nd ınternatıonal Seminar of Fuzzy Set Theory, Linz, 39-68.

Dubois, D. and Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press, New York.

Dubois, D. and Prade, H., 1991. Fruzzy sets in approximate reasoning. Part 1: inference eith possibility distributions, Fuzzy Sets Systems, 40, 143-202.

Drossos, C. and Navara, M., 1996. Generalized t-conorms and closure operators. Proceedings 4 th Eurropean Congress ın Intelligent Techniques and Soft Computing, Aachen, Germany, 22-26.

Drossos, C.A., 1999. Generalized t-norm structures. Fuzzy Sets and Systems, 104, 53-59.

Ertuğrul. U., Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal, F., 2016. Ordering based on uninorms. Informatıon sciences, 330, 315-327.

Faucett, W.M., 1955. Compact Semigroups Irreducibly Connected Between Two Idempotents, Procedings American Mathematics Societe, 6, 741 – 747.

Foder, J. C. and Roubens, M., 1994. Fuzzy preference modelling and multicriteria Decision Support. Kluwer, Academic Publishers.

Frank, M.J., 1979. On the Simultaneous Associativity of F(x,y) and x+y -F(x+y) . Aequations Mathematics, 19, 194 – 226.

Goguen, J., 1967. L-Fuzzy sets, J. Mathematical. Analysis Appllications, 18, 145-174.

Goguen, J.A., 1968-1969. The logic of inexact concepts. Synthese, 19 , 325-373.

Jenei S., De Baets, B., 2003. On the direct decomposability of t-norms on product Lattices. Fuzzy Sets and Systems, 139, 699-707.

Karaçal F., Khadjiev Dj., 2005. ∨-Distributive and infinitely ∨-distributive t-norms on complete lattice. Fuzzy Sets and Systems, 151, 341-352.

Karaçal, F., 2006. On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices. Information Sciences, 176, 3011-3025.

Karaçal, F. ve Sağiroğlu, Y., 2009. Infinitely $\vee -$ distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements. Fuzzy Sets and Systems, 160, 32 – 43.

Karaçal, F. ve Kesicioğlu, M.N., 2011. A T-partial order obtained from t-norms. Kybernetika, 47, 311-314.

Kesicioğlu, M.N. ve Mesiar, R., 2014. Ordering based on implications. Information Sciences, 276, 377-386.

Kesicioğlu, M.N., Karaçal, F. ve Mesiar, R., 2015. Order-equivalent triangular norms. Fuzzy sets and systems, 268, 59-71.

Kesicioğlu, M.N., Ertuğrul. U. ve Karaçal, F., 2017. An equivalence relation based on the U-partial order. Information sciences, 411, 39-51

Kitainik, L., 1993. Fuzzy decision proceduics with binary relations. Kluwer, Dordrecht.

Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E., 2000. Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E., 2004. Problems on triangular norms and related operators. Fuzzy Sets and Systems, 145, 471-479.

Liang, X. and Pedrycz, W., 2009. Logic-based fuzzy Networks A study in system modeling with triangular norms and uninorms. Fuzzy Sets an Systems, 160, 3475-3502.

Ling, C., 1965. Representation of associative functions Publ. Mathematicae Debrecen, 12, 189-212.

Ma, Z. and Wu, W.M., 1991. Logical operators on complete lattices. Information Sciences 55, 77-97.

Maes, K.C. and Mesiarova-Zemankova, A., 2009. Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms. Information Sciences, 179, 1221-1233.

Mas, M., Monserrat, M., Trillas, E. and survey, V., 2007. On fuzzy implication functions. IEE.Transactions, Fuzzy Systems, 15, 1107-1121.

Mas, M., Monserrat, M. and Torrens, J., 2009. The law of importation for discrete implications. Information Sciences, 179, 4208-4218.

Medina, J. and Ojeda-Aciego M., 2010. Multi-adjoint t-concept lattices . Information Sciences, 180, 712-725.

Menger, K., 1942. Statistical metrics, Proceedings National Academiy. Sciences of the United States of America, 28, 535-537.

Mesiarova, A., 2006. H-transformation of t-norms. Information Sciences, 176, 1531-1545.

Mitsch, H., 1986. A natural partial order for semigroups. Proceedings of the American Mathematical Society, 97, 384-388.

Mostert, P.S. and Shields, A.L., 1957. On the structure of semi-groups on a compact manifold with boundary. Ann. of Mathematics, 65, 117-143.

Nuguyen, H. and Walker, E., 1997. A first Course in Fuzzy Logic. CRC Press, Boca Raton,

Paalman-de Miranda, A.B., 1964. Topological Semigroups. Matematisch Centrum, Amsterdam.

P*ó*cs, J., 2012. Note on generation fuzzy concept lattices via Galois connections. Information Sciences 185, 128-136.

Ray, S., 1997. Modified TL-subgroups of a group. Fuzzy Sets and Systems, 91, 375-387.

Riera, J.V. and Torrens, J., 2013. Residual implications on the set of discrete fuzzy numbers. Information Sciences, 247, 131-143.

Saminger, S., 2006. On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices. Fuzzy Sets ans Systems, 157, 1403-1416.

Saminger-Platz, S., Klement, E.P. and Mesiar, R., 2009. On extensions of triangular norms on bounded lattices. Indagations Mathematicae, 19, 135-150.

Schweizer, B. and Sklar, A., 1958. Espaces Metriques Aleatories. Comptes Rendus de Academie des Sciences de Paris, 247, 2092 – 2094.

Wang, Z. and Yu, Y., 2002. Pseudo t-norms implications operators on a complete Brouwerian lattice. Fuzzy Sets Systems, 132, 113-124.

Wang, Z. and Yu, Y., 2003. Pseudo-t-norms and implication operators: direct products and direct product decompositions. Fuzzy Sets and Systems, 139, 673 – 683.

Wang, Z.D. and Fang, J.X., 2009. Residual operators of left and right uninorms on a complete lattice. Fuzzy Sets Systems, 160, 22-31.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.

Zhang D., 2005. Triangular norms on partially ordered sets. Fuzzy Sets and Systems, 153, 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Berna Kara 1988 yılında Rize’ de doğdu. İlköğrenimini İstanbul’ da orta ve lise öğrenimini Rize’ de tamamladı. 2005 yılında K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü kazandı. Bir yıl fizik eğitimi aldıktan sonra 2007 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve öğrenimine matematik bölümünde devam etti. Bir yıl hazırlık eğitimi sonrasında 2012 yılında K.O.U Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Öğrenciliği süresinde formasyon eğitimi aldı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Ensitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisans öğrenimi halen devam ettirmektedir.

2013 yılında Rize Ardeşen Işıklı Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi’ e Matematik Öğretmeni olarak atandı ve burada 3 yıl çalıştı. 2016-2018 yılları arasında Rize Merkez Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi nde görev yaptı. 2018-2019 eğitim öğretim yılında İstanbul Sultanbeyli Anadolu İmam Hatip Lisesi’nde dört ay görev yaptıktan sonra aynı yıl Üsküdar Hakkı Demir Anadolu İmam Hatip Lisesi’nde göreve başladı. Halen aynı kurumda görevine devam etmektedir.