



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE MANTIKSAL
OPERATÖRLERDEN ELDE EDİLEN KAPANIŞ
OPERATÖRLERİ**

(Doktora Tezi)

Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR

**Danışman
Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU**

**RİZE
2024**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU danışmanlığında, Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR tarafından hazırlanan *Sınırlı Kafesler Üzerinde Mantıksal Operatörlerden Elde Edilen Kapanış Operatörleri* adlı bu tez çalışması, 06/12/2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Musa ÖZİL	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE	
Üye	: Prof. Dr. Funda KARAÇAL	
Üye	: Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL	

ETİK BEYAN

Matematik doktora Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Sınırlı Kafesler Üzerinde Mantıksal Operatörlerden Elde Edilen Kapanış Operatörleri” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

06/12/2024

Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR

ÖN SÖZ

Bu çalışmada sınırlı kafesler üzerinde mantıksal operatörlerden elde edilen kapanış operatörleri incelenmiştir.

Tez çalışmamda ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU'a en içten duygularıyla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışma süresince tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocalarım Prof. Dr. Musa ÖZİL ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca yetişmemde emeği geçen RTEÜ Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan sevgili aileme, özellikle canım oğlum Atlas Çakar'a teşekkür ederim.

Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR

RİZE / 2024

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
KISALTMALAR.....	IX
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	4
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler	4
1.2. Kafesler	5
1.3. Üçgensel Normlar	9
1.4. Fuzzy Gerektirmeleri	16
1.5. Uninormlar	22
1.6. Kapanış Operatörleri.....	24
1.6.1. t-normlardan Elde Edilen Kapanış Operatörleri	26
1.6.2. U-uninormlardan Elde Edilen Kapanış Operatörleri	28
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	30
2.1. <i>F</i> -Kapanış Operatörleri	30
2.2. <i>I</i> -Kapanış Operatörü	41
2.3. Kapanış Operatörlerinden Elde Edilen Sıralamalar	50
3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	56
3.1. Sonuçlar	56
3.2. Öneriler	56
KAYNAKÇA.....	58

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Doktora

Danışman : Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Hazırlayan : Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 59

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE MANTIKSAL OPERATÖRLERDEN ELDE EDİLEN KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

Bu çalışmada sınırlı kafesler üzerinde bazı özelliklere sahip fonksiyonlardan elde edilen kapanış operatörleri incelenmiştir. T-normlar ve uninormlardan elde edilen T ve U kapanış operatörlerini genelleştirmek amaçlanmıştır. Bir fonksiyon ve onun eşleniği (dual fonksiyonu) tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Özel olarak R-, (S, N)-, QL- gerektirmelerinden elde edilen kapanış operatörleri incelenmiştir. Gerektirmelerden elde edilen kapanış operatörlerine göre kümelerin kapanışı incelenmiştir. Kapanış operatörlerinden elde edilen sıralamalar tanıtılmış ve özellikleri tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gerektirme, Kapanış Operatörü, T-norm, Uninorm, Sınırlı Kafes, Sıralama.

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematic

Thesis Type : Ph.D

Supervisor : Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Author : Ece KÜRKÇÜ ÇAKAR

Year : 2024

Pages : 59

ABSTRACT

CLOSURE OPERATORS CONSTRUCTED BY LOGICAL OPERATIONS ON BOUNDED LATTICES

In this paper, closure operators obtained from functions having some properties on bounded lattices are defined. By this way, it is aimed to generalize the notions T and U -closure operations obtained from t-norms and uninorms, respectively. The relationships between the closure operators obtained from functions and their conjugacies (dual functions) are determined. In special cases, the closure operations obtained from implications making closure operators from R-, (S,N)-, QL- implications are determined. Also, the closures of the sets according to the closure operations obtained from implications are studied. The orders obtained from closure operators are introduced and the properties are discussed.

Keywords: Implication, Closure Operator, T-norm, Uninorm, Bounded Lattice, Order.

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. 9 Temel Fuzzy Gerektirmesi.....	18
Tablo 2. F Fonksiyonu.....	31
Tablo 3. G Fonksiyonu.....	32



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. $(L, \leq)$	31
----------------------------	----



KISALTMALAR

A.T	:	Aksi Takdirde
(a, b)	:	Açık Aralık
$\cap$	:	Arakesit İşlemi
$\cup$	:	Birleşim İşlemi
$\emptyset$	:	Boş Küme
$>$	:	Büyüktür
$\geq$	:	Büyük veya Eşit
T_p	:	Çarpım t-norm
(EP)	:	Değiştirme Prensibi
S_D	:	Drastik Toplam
T_D	:	[0,1] Üzerindeki Drastik Çarpım
$\in$	:	Eleman
$\notin$	:	Eleman Değil
$\exists$	:	En Az
I_0	:	En Küçük Fuzzy Gerektirmesi
I_1	:	En Büyük Fuzzy Gerektirmesi
I	:	Gerektirme
$\forall$	:	Her
I_φ	:	I Fuzzy Gerektirmesinin φ Eşleniği
S_p	:	İstatistiksel toplam
L	:	Kafes
$\wedge$	:	Kafeste İnfimum
$\vee$	:	Kafeste Supremum
$[a, b]$	:	Kapalı Aralık
$\mathcal{P}$	:	Kısmen Sıralı Küme
$<$	:	Küçüktür
$\leq$	:	Küçük veya Eşit
$\subseteq$	:	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
S_L	:	Lukasiewicz t-konorm (sınırlı toplam)
T_L	:	Lukasiewicz t-norm

S_M	:	Maksimum t-konorm
T_M	:	Minimum t-norm
N	:	Negasyon
(NP)	:	Nötrallik özelliği
$T_\wedge$	:	Sınırlı Bir Kafes Üzerindeki En Büyük t-norm
t- norm	:	Üçgensel Norm
t- konorm	:	Üçgensel Konorm
$\mathcal{F}_I$	:	Tüm Fuzzy Gerektirmelerinin Kümesi
$\inf X$	:	X in Alt Sınırlarının En Büyüğü
$\underline{X}$	:	X in Alt Sınırlarının Kümesi
$\wp(X)$	:	X in Güç Kümesi
$\bar{X}$	:	X in Üst Sınırlarının Kümesi
$\sup X$	:	X in Üst Sınırlarının En Küçüğü

GİRİŞ

Karl Menger tarafından 1942’de yapılan ‘Statistical Metrics’ (Menger, 1942) adlı çalışmayla tanıtılan üçgensel normlar olasılıksal metrik uzaylar teorisi alanında büyük bir öneme sahiptir. Klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesiyle ortaya çıkan üçgensel normlar için ilerleyen yıllarda yapılan (Schweizer ve Abe Sklar, 1958) çalışmalarla günümüzde de kullanılan t-norm aksiyomları ortaya konmuştur.

Üçgensel normlar bilgi bilimlerinin birçok dalında önemli rol oynamaktadır. Kısmen sıralı kümeler ve sınırlı kafesler üzerindeki t-normlar üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. 1980 lerde bulanık küme teorisinde kullanılmaya başlanan t-normlar ve t-konormlar yardımıyla t-fuzzy cebirsel yapılar tanımlanmıştır. Klasik gerektirmelerin fuzzy mantığına genelleştirilmeleriyle fuzzy gerektirmeleri ortaya çıkmıştır. 1991 yılında yapılan çalışmalarla (Ma ve Wu, 1991) t-norm kavramı L tam kafesi üzerinde tanımlanarak, L tam kafesi üzerindeki gerektirmeler ile t-normlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Mantıksal operatörlerden sıralama bağıntısı üretme üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011) sınırlı bir kafes üzerindeki t-norm, t-konorm, uninorm ve nullnormlardan elde edilen sıralama bağıntıları incelenmiştir. L sınırlı kafesi üzerinde $\leq_T$ ile gösterilen t-kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak $\leq$ ile $\leq_T$ arasındaki bağlantılar araştırılmıştır. 2014 yılında yapılan çalışmada (Kesicioğlu, Mesiar, 2014) bir kafes üzerinde belirli özelliklere sahip gerektirmelerden elde edilen sıralama bağıntıları incelenmiştir. Kafes üzerindeki sıralama bağıntısı ve gerektirmelerden elde edilen sıralama bağıntısı arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. T-sıralama bağıntıları tarafından elde edilen t-normların sınıfları üzerinde denklik bağıntıları tartışılmıştır. (Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar, 2014).

Everett tarafından 1943 yılında yapılan “Kafeslerde Kapanış Operatörleri ve Galois Teorisi” adlı çalışmada (Everett, 1943) kısmi sıralı kümeler üzerinde kapanış operatörleri çalışılmıştır. Yapılan başka bir çalışmada (Dikranjan ve Giuli, 1986) tüm kapanış operatörleri çeşitlerini kapsayan bir notasyon sundukları ifade edilmiştir. Çalışmalarında epimorfizmalar, mutlak kapalı nesneler, bağımlılık-bağımsızlık gibi çeşitli kavramları incelemişlerdir.

“Kapanış Operatörlerinin Kategorik Yapısı” adlı çalışmada (Dikranjen ve Tholen, 1995) kapanış operatörlerinin cebir ve topolojide etkin bir şekilde kullanılmasının yanı sıra kapanış operatörlerinin çıkış noktasının analize dayandığı ifade edilmiştir. Ayrıca kapanış operatörlerinin bilgisayar biliminde önemli bir rol oynadığı gösterilmiştir.

2011 yılında yapılan çalışmada (Burris ve Sankappanavar, 2011) kapanış operatörleri tanımlanmıştır. Kapanış operatörleri matematiğin birçok alanında teorik kullanımının yanı sıra etkin bir şekilde uygulamalı olarak da kullanılmaktadır. Kafesler, topolojik uzaylar, fuzzy kümeleri, grafikler kullanıldığı alanlara örnek olarak verilebilir.

2019 yılında yapılan çalışmada (İnce ve Karaçal, 2019) L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı bir t -norm T ve en büyük elemanı içeren $A \subseteq L$ kümesi ile oluşturulan t -kapanış operatörleri ve t -kapanış operatörlerinin özellikleri incelenmiştir. Bazı önemli t -kapanış operatörlerine göre L nin kapalı alt kümeleri belirlenmiştir.

Karaçal ve Köroğlu tarafından 2022 yılında yapılan çalışmada (Karaçal ve Köroğlu, 2022) bir uninormdan elde edilen principal topoloji tanıtılmıştır. Ayrıca bu topoloji ile tanımlanan sınırlı kafes üzerinde sürekli ve kapalı olan bir uninorm incelenmiştir. Sınırlı kafes üzerinde uninormlardan elde edilen bu principal topoloji tarafından belirlenen ve $\leq_U$ ile gösterilen sıralama bağıntısı tanıtılmıştır. Sınırlı kafesler üzerinde t -normlar (t -konormlar) tarafından elde edilen sıralama bağıntıları incelenmiştir.

Bu çalışmada L sınırlı kafesinin bazı özelliklere sahip bir A alt kümesi ve F fonksiyonu yardımıyla L kafesi üzerinde $C_{A,F}$ kapanış operatörü tanımlanacaktır. Bu tanımdan yola çıkılarak $C_{A,F}$ kapanış operatörünün t -kapanış ve U -kapanış operatörlerinin bir genellemesi olduğu gösterilecektir. Kapanış operatörü tanımında F fonksiyonu yerine sırasıyla bir fuzzy gerektirmesi (t -konorm) alınarak sırasıyla I -(S -) kapanış operatörü tanımlanacaktır.

Bir F dönüşümü ve A alt kümesinden elde edilen kapanış operatörü ile sırasıyla $N(A)$ ($\varphi^{-1}(A)$) kümesi ve F nin N -dualı (φ -eşleniği) tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişki incelenecektir. $C_{N(A),F_N}$ kapanış operatörüne göre kapalı olan kümeler belirlenecektir. L sınırlı kafesi üzerinde bir A alt kümesi ve

I gerektirmesinden elde edilen $C_{A,I}$ kapanış operatörünün özellikleri incelenecektir. $C_{A,I}$ kapanış operatörü, A alt kümesinin ve I gerektirmesinin özel durumları için araştırılacaktır. L nin bir A alt kümesi ve L sınırlı kafesi üzerinde bir (S,N) -gerektirmesi tarafından elde edilen kapanış operatörü ve $N(A)$ alt kümesi ve t-konorm S tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Özel gerektirmeler tarafından üretilen kapanış operatörleri araştırılacak ve bu kapanış operatörlerine göre kapalı olan kümeler belirlenecektir. Herhangi bir rezidual gerektirme tarafından üretilen kapanış operatörlerine göre tek elemanlı kapalı küme olmadığı gösterilecektir. QL - gerektirmeleri tarafından elde edilen kapanış operatörleri araştırılacaktır. $C_{A,F}$ kapanış operatörü tarafından elde edilen, (İnce ve Karaçal, 2019) çalışmasında verilen sıralama bağıntısının genellemesi olan bağıntı tanımlanacaktır. Genellenmiş sıralama bağıntısının bir sıralama bağıntısı olmadığı ve bu bağıntıyı sıralama bağıntısı yapan bazı koşullar gösterilecektir. Sıralama bağıntısının özellikleri tartışılacaktır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Bu bölümün hazırlanmasında Lattice Theory (Birkhoff, 1967) kitabından yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.1. $\mathcal{P}$ bir küme ve $\leq$, $\mathcal{P}$ üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in \mathcal{P}$ için

P1. $x \leq x$ (Yansıma)

P2. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına $\mathcal{P}$ üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) bağıntısı denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan $\mathcal{P}$ kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(\mathcal{P}, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Her $x, y, z \in \mathcal{P}$ için yansıma ve geçişme özellikleri sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısına $\mathcal{P}$ üzerinde bir quasi sıralama bağıntısı denir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve ‘ x , y de öz olarak içerilir’ olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve ‘ y , x i içerir’ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır. Ayrıca ‘ $x \leq y$ yanlış ise $x \not\leq y$ yazılır. $x \not\leq y$ ve $y \not\leq x$ ise ‘ x ve y elemanları kıyaslanamaz’ denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Uyarı 1.1.2. $(\mathcal{P}, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

Bir $a \in \mathcal{P}$ elemanı her $x \in \mathcal{P}$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böylece bu eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve $\mathcal{P}$ ’nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

Bir $b \in \mathcal{P}$ elemanı her $x \in \mathcal{P}$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa 1 ile gösterilir ve $\mathcal{P}$ ’nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in \mathcal{P}$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1’e evrensel sınırlar denir.

Tanım 1.1.3. $(\mathcal{P}, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in \mathcal{P}$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(\mathcal{P}, \leq)$ kısmen sıralı kümesine tam sıralı küme veya zincir denir.

Tanım 1.1.4. $(\mathcal{P}, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: \mathcal{P} \rightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in \mathcal{P}$ için $x \leq_1 y$ ise $\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ dir.

$(\mathcal{P}, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in \mathcal{P}$ için $\theta(x) \leq_2 \theta(y) \Leftrightarrow x \leq_1 y$ sağlayacak şekilde birebir ve örten bir $\theta: \mathcal{P} \rightarrow Q$ dönüşümü mevcuttur. $(\mathcal{P}, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorftur ise bu durum $\mathcal{P} \cong Q$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5. $(\mathcal{P}, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, $X \subseteq \mathcal{P}$ ve $a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir. X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 1.1.6. $(\mathcal{P}, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun.

(i) $a \in \mathcal{P}$ elemanı ve her $x \in X$ için $x \leq a$ koşulunu sağlıyorsa a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. a , X in bir üst sınırı olmak üzere, X in herhangi bir c üst sınırı için $a \leq c$ ise, a elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $a = \sup X$ veya $a = \vee X$ ile gösterilir.

(ii) $b \in \mathcal{P}$ elemanı ve her $x \in X$ için $b \leq x$ koşulunu sağlıyorsa b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir. X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. b , X in bir alt sınırı olmak üzere, X in herhangi bir d alt sınırı için $d \leq b$ ise, b elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $b = \inf X$ veya $b = \wedge X$ ile gösterilir.

1.2. Kafesler

Bu bölümün hazırlanmasında Lattice Theory (Birkhoff, 1967) kitabından yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.1. $(\mathcal{P}, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in \mathcal{P}$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ mevcut ise $\mathcal{P}$ ye kafes denir.

$\mathcal{P}$ kafesinde $x, y \in \mathcal{P}$ için $x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(\mathcal{P}, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $\mathcal{P}$ üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(\mathcal{P}, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Tanım 1.2.2. Bir L kafesine tam kafes denir: $\Leftrightarrow L$ nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir, yani her $X \subseteq L$ alt kümesi için $\sup X$ ve $\inf X$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.2.2 de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Tanım 1.2.3. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Tanım 1.2.4. $(\mathcal{P}, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\mathcal{P}$ ve Q kısmen sıralı kümelerinin $\mathcal{P} \times Q = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{P}, y \in Q\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{P} \times Q$ kartezyen çarpım kümesi her $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ ve $y_1, y_2 \in Q$ için

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(\mathcal{P} \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine $\mathcal{P}$ ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.2.5. L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$$

dır.

Lemma 1.2.6. $\mathcal{P}$ kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) her $x, y, z \in \mathcal{P}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$L1. x \wedge x = x, \quad x \vee x = x, \quad (\text{İdempotent})$$

$$L2. x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad (\text{Komütatif})$$

$$L3. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad (\text{Birleşme})$$

$$L4. x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x. \quad (\text{Yok etme})$$

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ eşitliklerinin her birine denktir.

Lemma 1.2.7. $\mathcal{P}$, 0 evrensel alt sınırına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in \mathcal{P}$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ dir. Dual olarak $\mathcal{P}$, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in \mathcal{P}$ için $x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$ dir.

Teorem 1.2.8. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow \wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Lemma 1.2.9. Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sırayı korur, yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$$y \leq z \text{ ise } x \wedge y \leq x \wedge z \text{ ve } x \vee y \leq x \vee z$$

sağlanır.

Lemma 1.2.10. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$,

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.2.11. L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$$x \leq z \text{ ise } x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.2.12. Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

$$L5'. \text{ Her } x, y, z \in L \text{ için } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$L5''. \text{ Her } x, y, z \in L \text{ için } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Tanım 1.2.13. Bir kafese dağılmalı kafes denir: $\Leftrightarrow L5'$ özelliği (böylece $L5''$) sağlanır.

Tanım 1.2.14. L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

$$L6. x \leq z \text{ ise } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

sağlanır.

Tanım 1.2.15. L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir: $\Leftrightarrow x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir. Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.2.16. $x \in L$ elemanına bir atom denir : $\Leftrightarrow x, L \setminus \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır.

Tanım 1.2.17. $x \in L$ elemanına bir koatom denir : $\Leftrightarrow x, L \setminus \{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır.

Tanım 1.2.18. L sınırlı kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir: $\Leftrightarrow L$ dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Teorem 1.2.19. L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

$$L7. x \wedge x' = 0 \text{ ve } x \vee x' = 1,$$

$$L8. (x')' = x,$$

$$L9. (x \wedge y)' = x' \vee y' \text{ ve } (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.2.20. L bir tam kafes. $X \subseteq L$ olsun. X e L nin bir tam-alt kafesi denir : $\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq X, \vee A, \wedge A$ elemanları L de tanımlandıkları haliyle X te mevcuttur.

Örnek 1.2.21. $L = [-1,1]$ $X = \{x \in R \mid |x| < \frac{1}{3}\} \cup \{-1, 1\}$ $A = (0, \frac{1}{3}) \subseteq X$ için X te $V_X A = 1$ dir fakat L de $V_L A = \frac{1}{3}$ olduğundan X L nin tam-alt kafesi değildir.

Uyarı 1.2.22. L bir tam kafes, X alt kümesi L nin herhangi bir tam-alt kafesi olsun. $\emptyset \subseteq X$ olduğundan, tam-alt kafesin tanımına göre $\wedge \emptyset = 1, \vee \emptyset = 0 \in X$ olup X alt kümesi L nin evrensel sınırlarını içermek zorundadır.

1.3. Üçgensel Normlar

Bu bölümün hazırlanmasında Triangular Norms (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) kitabından yararlanılmıştır.

Tanım 1.3.1. L sınırlı bir kafes olsun. $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (kısaca t -norm) denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

- (i) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)
- (ii) $T(x, y) = T(y, x)$ (Değişme)
- (iii) $x \leq y$ ise $T(x, z) \leq T(y, z)$ (Monotonluk)
- (iv) $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

şartları sağlanır.

Uyarı 1.3.2. $T, [0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

Her T t-normu her $x \in [0,1]$ için

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0$$

$$T(1, x) = x$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklere ilave sınır şartı denir. Böylece her t-norm $[0,1]^2$ birim kare üzerinde çakışıktır.

Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) birleşme ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$$

sağlanır.

Örnek 1.3.3. $[0,1]$ birim aralık üzerinde bazı özel t-normlar;

$$T_M(x, y) = \min(x, y); \quad (\text{Minimum})$$

$$T_P(x, y) = x \cdot y; \quad (\text{Çarpım})$$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0); \quad (\text{Lukasiewicz})$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y), & A.T \end{cases} \quad (\text{Drastik çarpım})$$

olarak verilir.

Tanım 1.3.4.

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Eğer her $x, y \in [0, 1]$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2 T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.3.5.

(i) $T, [0, 1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun. Her $x, y \in [0, 1]$ için $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$ ve $T(x, y) \leq T(1, y) = y$ olup

$$T(x, y) \leq \min(x, y) = T_M(x, y)$$

dir. Böylece, T_M minimum t-normu en güçlü t-normdur. $[0, 1]^2$ nin sınırları üzerinde her t-norm çakışık ve her $x, y \in (0, 1)$ için $T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$ olduğundan T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Bu durumda keyfi T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Açıkça $T_L < T_P$ olduğundan dört temel t-norm arasında

$$T_D < T_L < T_P < T_M$$

ilişkisi mevcuttur.

Önerme 1.3.6. $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ bir küme ve $*$: $A^2 \rightarrow A$, A üzerinde bir ikili işlem ve her $x, y, z \in A$ için (T1)-(T3) özellikleri ile birlikte

$$x * y \leq \min(x, y)$$

özelligi sağlansın. O halde

$$T(x, y) = \begin{cases} x * y, & (x, y) \in (A \setminus \{1\})^2, \\ \min(x, y), & \text{A. T} \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir t-normdur. Üstelik, T nin, $(A \setminus \{1\})^2$ e kısıtlanması, $*$ işleminin $(A \setminus \{1\})^2$ ne kısıtlanması ile aynı olan tek t-normdur.

Tanım 1.3.7. Her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) ve $x * y \leq \min(x, y)$ özelliklerini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir t-altnorm denir.

Açık olarak her t-norm bir t-altnormdur, fakat tersinin doğru olması gerekmez: örneğin, sıfır fonksiyonu, yani $F(x, y) = 0$ ile verilen $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnormdur fakat bir t-norm değildir.

Sonuç 1.3.8. F bir t-altnorm ise

$$T(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & (x, y) \in [0,1]^2, \\ \min(x, y), & \text{A.T} \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.3.9. (Klement vd., 2000)

(i) Her $x \in [0,1]$ için $T(x, x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

(ii) Her $x \in [0,1]$ için $T(x, x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımıdır.

Uyarı 1.3.10 (Klement vd., 2000)

(i) Her t-norm T (T2) birleşme kuralı ve indüksiyon ile aşağıdaki n -li işleme genişletilebilir. Yani, her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n -sıralısı için

$$T_{i=1}^n x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n)$$

dir. Eğer özel olarak $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ ise kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \dots, x)$$

yazılır. Bu durumda $x_T^{(0)} = 1$ ve $x_T^{(1)} = x$ olarak tanımlanır.

(ii) $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi yani $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i=1}^n x_i$$

ile tanımlanır.

(iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ için, yani $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i \in I}$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve $T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i=1}^n x_i$ nin bir genellemesidir:

$$T_{i \in I} x_i = \inf \left\{ T_{j=1}^k x_{i_j} \mid (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), (x_i)_{i \in I} \text{nin sonlu alt ailesidir} \right\}.$$

Örnek 1.3.11. T_M minumum ve T_p çarpım t- normlarının n -li genişlemelerinin

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i,$$

olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımının n -li genişlemeleri

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(\sum_{i=1}^n x_i - (n-1), 0),$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & x_j = 1, \forall j \neq i \text{ ise,} \\ 0, & \text{A.T} \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 1.3.12. L sınırlı bir kafes, $T: L^2 \rightarrow L$ bir t -norm, $\varphi: L \rightarrow L$ birebir, örten, sıra korur dönüşüm olsun. Her $x, y \in L$ için

$$T_{\varphi}(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$$

olarak tanımlanan $T_{\varphi}: L^2 \rightarrow L$ dönüşümü bir t -normdur. Bu t -norma T nin φ eşleniği denir.

Tanım 1.3.13. T bir t -norm olsun.

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanına T nin bir idempotent elemanıdır denir : $\Leftrightarrow T(a, a) = a$ dır. 0 ve 1 her t -norm için idempotent elemanlar olup bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. (0,1) deki idempotent elemanlar ise trivialden farklı idempotent elemanlar olarak adlandırılır.

(ii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına t -norm T nin nilpotent elemanı denir : $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $a_T^{(n)} = 0$ dır.

(iii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına T nin sıfır böleni denir : $\Leftrightarrow \exists b \in (0,1)$ öyleki $T(a, b) = 0$ dır.

Tanım 1.3.14. (Casasnovas ve Mayor, 2008) T , sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t -norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T nin bir sıfır böleni denir : $\Leftrightarrow x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcuttur. T nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilecektir.

Eğer $Z(T) = \emptyset$ ise T ye sıfır bölensiz denir.

Tanım 1.3.15. (Casasnovas ve Mayor, 2008) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t -norm T e bölünebilirdir denir : $\Leftrightarrow x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Tanım 1.3.16. (Casasnovas ve Mayor, 2008) Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t -norm T alalım. Bir $x \in L$ elemanına T nin idempotent elemanıdır denir : $\Leftrightarrow T(x, x) = x$ eşitliği sağlanır.

Önerme 1.3.17. (De Baets, 1995) T , $[0,1]$ üzerinde bir t -norm olsun. T bölünebilirdir $\Leftrightarrow T$ süreklidir.

Tanım 1.3.18. L sınırlı bir kafes olsun. $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir üçgensel konorm (kısaca t –konorm) denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

- (i) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (Birleşme)
- (ii) $S(x, y) = S(y, x)$ (Değişme)
- (iii) $y \leq z$ ise $S(x, y) \leq S(x, z)$ (Monotonluk)
- (iv) $S(x, 0) = x$ (Sınır şartı)

şartları sağlanır.

$S(x, y) = 1$ iken $x = 1$ veya $y = 1$ ise bu t -konorma pozitif t -konorm denir.

Örnek 1.3.19. $[0,1]$ birim aralık üzerindeki bazı özel t -konormlar:

$$\begin{aligned}
 S_M(x, y) &= \max(x, y) && \text{(Maksimum)} \\
 S_P(x, y) &= x + y - xy && \text{(İstatistiksel toplam)} \\
 S_L(x, y) &= \min(x + y, 1) && \text{(Lukasiewicz t-konorm)} \\
 S_D(x, y) &= \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0,1]^2 \\ \max(x, y), & A.T \end{cases} && \text{(Drastik toplam)}
 \end{aligned}$$

olarak verilir.

Önerme 1.3.20. (Klement vd., 2000) $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. S bir t -konormdur $\Leftrightarrow$ Bir T t -normu her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

olacak şekilde mevcuttur.

Uyarı 1.3.21.

- (i) $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir t -konorm ise

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t -normdur.

(ii) (T_M, S_M) , (T_P, S_P) , (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikiyeşer tarzda birbirine dual t -norm ve t -konorm çiftleridir.

- (iii) $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir t -konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$S(1, x) = S(x, 1) = 1,$$

$$S(0, x) = x,$$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar $[0,1]^2$ nin sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

(iv) Duallik sıralamayı değiştirir; yani T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ve S_1 , T_1 t-normuna ve S_2 , T_2 t-normuna karşılık gelen dual t-konormlar ise $S_1 \geq S_2$ dir. Her S t-konormu için

$$S_M \leq S \leq S_D$$

dir. Yani S_M maksimum t-konormu en zayıf, S_D drastik toplam en güçlü t-konormdur. Temel dört t-konorm için aşağıdaki ilişki mevcuttur:

$$S_M < S_P < S_L < S_D.$$

(v) Verilen bir t-konorm S için $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n -sıralılarına, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere $(x_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$$S_{i=1}^n x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$S_{i=1}^\infty x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{i=1}^n x_i,$$

$$S_{i \in I} x_i = \sup \left\{ S_{j=1}^k x_{i_j} \mid (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), (x_i)_{i \in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir} \right\}.$$

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ olduğunda $S(x, x, \dots, x)$ yerine kısaca $x_S^{(n)}$ yazılır ve her $x \in [0,1]$ için $x_S^{(0)} = 0$ ve $x_S^{(1)} = x$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.22. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $N: L \rightarrow L$ fonksiyonuna negasyon denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için

$$(N1) \ x \leq y \text{ ise } N(y) \leq N(x),$$

$$(N2) \ N(0) = 1 \text{ ve } N(1) = 0$$

şartları sağlanır.

Tanım 1.3.23. $N: L \rightarrow L$ negasyonuna güçlü negasyon denir: $\Leftrightarrow$ Her $x \in L$ için $N(N(x)) = x$ dir.

Aşağıdaki gibi verilen N^- ve N^+ dönüşümleri herhangi bir L kafesi üzerinde negasyonlar olup herhangi bir N negasyonu için $N^- \leq N \leq N^+$ olduğu açıktır.

$$N^-(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & A.T \end{cases} \quad \text{ve} \quad N^+ = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & A.T. \end{cases}$$

Tanım 1.3.24. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, T ve N, L kafesi üzerinde sırasıyla bir t -norm ve güçlü negasyon olsun. Her $x, y \in L$ için

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$$

olarak tanımlanan $S: L^2 \rightarrow L$ bir t -konorm olup bu t -konorma t -norm T nin N -dual t -konormu denir.

1.4. Fuzzy Gerektirmeleri

Bu bölümün hazırlanmasında “Fuzzy Implications” (Baczynski ve Jayaram, 2008) kitabından yararlanılmıştır.

Tanım 1.4.1. L sınırlı bir kafes olsun. $I: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir gerektirme denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, x_1, y, y_1 \in L$ için

$$(I1) \ x_1 \leq x_2 \text{ ise her } y \in L \text{ için } I(x_1, y) \geq I(x_2, y),$$

$$(I2) \ y_1 \leq y_2 \text{ ise her } x \in L \text{ için } I(x, y_1) \leq I(x, y_2),$$

$$(I3) \ I(0, 0) = 1,$$

$$(I4) \ I(1, 1) = 1,$$

$$(I5) \ I(1, 0) = 0,$$

şartları sağlanır.

Bu çalışmada L kafesi üzerinde tanımlanan tüm fuzzy gerektirmelerinin kümesi $\mathcal{F}_I$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.2. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $I: L^2 \rightarrow L$ gerektirmesine

(i) Sol nötrallik özelliğini sağlar denir: $\Leftrightarrow$ Her $y \in L$ için

$$I(1, y) = y \quad (NP)$$

dir.

(ii) Yer değiştirme özelliğini sağlar denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z)) \quad (EP)$$

dir.

(iii) Bir t-norm T ye göre importasyon kuralını sağlar denir : $\Leftrightarrow$

Her $x, y, z \in L$ için

$$I(x, I(y, z)) = I(T(x, y), z) \quad (\text{LI})$$

dir.

Her bir I fuzzy gerektirmesinin $x = 0$ ve $y = 1$ noktalarında çakışık olduğu açıktır, yani herhangi bir I fuzzy gerektirmesi aşağıda verilen sol ve sağ sınır şartını sağlar:

$$I(0, y) = 1, y \in [0, 1] \quad (\text{Sol sınır şartı}) \quad (\text{LB})$$

$$I(x, 1) = 1, x \in [0, 1] \quad (\text{Sağ sınır şartı}) \quad (\text{RB})$$

Şimdi herhangi bir I fuzzy gerektirmesinin sol ve sağ sınır şartlarını sağladığını gösterelim.

Her $y \in [0, 1]$ için $0 \leq y$ olup $1 = I(0, 0) \leq I(0, y)$ olduğundan $I(0, y) = 1$ dir.

Diğer taraftan, her $x \in [0, 1]$ için $x \leq 1$ olup $1 = I(1, 1) \leq I(x, 1)$ olduğundan $I(x, 1) = 1$ 'dir.

Örnek 1.4.3. Tablo 1. de literatürde sıkça kullanılan 9 temel fuzzy gerektirmesi listelenmiştir.

Tablo 1. 9 Temel Fuzzy Gerektirme

Lukasiewicz	$I_{LK}(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$
Gödel	$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$
Reichenbach	$I_{RC}(x, y) = 1 - x + xy$
Kleene-Dienes	$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$
Goguen	$I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$
Rescher	$I_{RS}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$
Yager	$I_{YG}(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ ve } y = 0 \\ y^x, & x > 0 \text{ veya } y > 0 \end{cases}$
Weber	$I_{WB}(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ y, & x = 1 \end{cases}$
Fodor	$I_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \max(1 - x, y), & x > y \end{cases}$

Tanım 1.4.4. (Baczynski ve Jayaram, 2008) $I_1, I_2 \in \mathcal{F}_I$ olmak üzere, I_1, I_2 den daha zayıftır denir : $\Leftrightarrow$ her $(x, y) \in [0, 1]^2$ için $I_1(x, y) \leq I_2(x, y)$ dir.

Örnek 1.4.5. 9 temel fuzzy gerektirmeleri arasında aşağıdaki ilişkiler söz konusudur:

$$I_{KD} < I_{RC} < I_{LK} < I_{WB}.$$

$$I_{RS} < I_{GD} < I_{GG} < I_{LK} < I_{WB}.$$

$$I_{YG} < I_{RC} < I_{LK} < I_{WB}.$$

$$I_{KD} < I_{FD} < I_{LK} < I_{WB}.$$

$$I_{RS} < I_{GD} < I_{FD} < I_{LK} < I_{WB}.$$

Önerme 1.4.6.

$$I_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ veya } y = 1 \\ 0, & x > 0 \text{ ve } y < 1 \end{cases}$$

$$I_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ ve } y = 0 \\ 1, & x < 1 \text{ veya } y > 0 \end{cases}$$

fonksiyonları sırasıyla $[0,1]$ üzerinde tanımlı en küçük ve en büyük fuzzy gerektirmeleridir.

İspat : $I_0 : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun en küçük fuzzy gerektirmesi olduğunu gösterelim.

$I \in \mathcal{F}_I$ keyfi olsun.

$x = 0$ veya $y = 1$ ise sol sınır şartı ile $I(0, y) = 1 = I_0(0, y)$ ve sağ sınır şartı ile $I(x, 1) = 1 = I_0(x, 1)$ dır.

$x \neq 0$ ve $y \neq 1$ olsun. Bu takdirde $I_0(x, y) = 0 \leq I(x, y)$ dır. Böylece her $(x, y) \in [0,1]^2$ için $I_0(x, y) \leq I(x, y)$ olduğundan $I_0 \leq I$ dır.

I_1 in en büyük fuzzy gerektirme olduğunu gösterelim. $I \in \mathcal{F}_I$ keyfi olsun.

$x = 1$ ve $y = 0$ ise $I(1, 0) = 0 = I_1(1, 0)$ olduğu açıktır.

$x < 1$ veya $y > 0$ olsun. $I(x, y) \leq 1 = I_1(x, y)$ dir. Böylece $I \leq I_1$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.4.7. (Baczynski ve Jayaram, 2008) I bir fuzzy gerektirmesi ve $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü 1-1, örten, artan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$I_{\varphi}(x, y) = \varphi^{-1}(I(\varphi(x), \varphi(y)))$$

ile tanımlanan fonksiyona I nın φ -eşleniği denir.

Tanım 1.4.8. (Baczynski ve Jayaram, 2008) Bir $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu (I1), (I3) ve (I5) özelliklerini sağlıyorsa, $N_I: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$N_I(x) = I(x, 0), \quad x \in [0, 1]$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir fuzzy negasyondur. Bu fonksiyon I tarafından elde edilen negasyon veya I nın doğal negasyonu olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.9. (Baczynski ve Jayaram, 2008) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $I: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna (S, N) -gerektirmesi denir : $\Leftrightarrow$ Bir t-konorm S ve bir negasyon $N: L \rightarrow L$

$$I(x, y) = S(N(x), y), \quad x, y \in L$$

olacak şekilde mevcuttur. N güçlü negasyon ise I gerektirmesine S -gerektirme denir.

Tanım 1.4.10. (Baczyński ve Jayaram, 2008) $I \in \mathcal{F}_I$ ve N bir negasyon olsun. Her $x, y, z \in L$ için,

- (i) I fuzzy gerektirmesi “ N negasyonuna göre zıt simetri özelliğini ” $CP(N)$ sağlar denir. : $\Leftrightarrow I(x, y) = I(N(y), N(x))$ dir.
- (ii) I fuzzy gerektirmesi “ N negasyonuna göre sol zıt simetri özelliğini ” $L - CP(N)$ sağlar denir. : $\Leftrightarrow I(N(x), y) = I(N(y), x)$ dir.
- (iii) I fuzzy gerektirmesi “ N negasyonuna göre sağ zıt simetri özelliğini ” $R - CP(N)$ sağlar denir. : $\Leftrightarrow I(x, N(y)) = I(y, N(x))$ dir.

Teorem 1.4.11. (Baczyński ve Jayaram, 2008) $I_{S,N}$ bir (S, N) - gerektirmesi ise

- (i) $I_{S,N} \in \mathcal{F}_I$ ve (NP) ve (EP) i sağlar.
- (ii) $N_{I_{S,N}} = N$ dir.
- (iii) N güçlü negasyon ise $I_{S,N}$ gerektirmesi $L - CP(N^{-1})$ i sağlar.
- (iv) N güçlü negasyon ise $I_{S,N}$ gerektirmesi $CP(N)$ i sağlar.

Tanım 1.4.12. Bir $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir R -gerektirme (Rezidual gerektirme) denir : $\Leftrightarrow$ Bir t -norm T mevcuttur öyle ki

$$I(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\} \quad x, y \in [0, 1]$$

sağlanır. Bir t -norm T ile üretilen bir R -gerektirme I_T ile gösterilir.

Tanım 1.4.13. Bir $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir QL -fonksiyonu denir : $\Leftrightarrow$ Bir T t -normu, bir S t -konormu ve bir N fuzzy negasyonu için

$$I(x, y) = S(N(x), T(x, y)) \quad x, y \in [0, 1]$$

eşitliği sağlanır. Eğer $I, (T, S, N)$ üçlüsü ile elde edilen bir QL gerektirme ise $I_{T,S,N}$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.14. $I_{T,S,N}$ bir QL fonksiyonu ise,

- (i) $I_{T,S,N}$ $(I2), (I3), (I4), (I5), (NC), (LB)$ ve (NP) yi sağlar.
- (ii) $N_{I_{T,S,N}} = N$.

Tanım 1.4.15. (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011) L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. $\leq_T$ bağıntısı her $x, y \in L$ için

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \exists \ell \in L \text{ öyleki } T(\ell, y) = x$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.4.16 (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011) L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t -norm olsun. Bu takdirde, $(L, \leq_T)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Önerme ile verilen $\leq_T$ sıralama bağıntısına t -norm T den elde edilen t -sıralama (üçgensel sıralama) denir.

Önerme 1.4.17. (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, T, L üzerinde bir t -norm ve $\leq_T$, t -norm T den elde edilen kısmen sıralama bağıntısı olsun. Eğer $x \leq_T y$ ise $x \leq y$, yani $\leq_T \subseteq \leq$ dir.

Tanım 1.4.18. L sınırlı bir kafes, S, L üzerinde bir t -konorm olsun.

$$x \leq_S y \Leftrightarrow \exists \ell \in L \text{ öyle ki } S(\ell, x) = y$$

t -konorm S için S -kısmi sıralama olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.19. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $U \in \mathcal{U}(e)$ bir konjaktif uninorm ve I U ya göre (LI) yı sağlayan bir gerektirme olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_I y \Leftrightarrow \exists \ell \leq e \text{ öyle ki } I(\ell, x) = y.$$

1.5. Uninormlar

Tanım 1.5.1. (Karaçal ve Mesiar, 2015) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $U: L^2 \rightarrow L$, ikili işlemine L üzerinde bir uninorm denir : $\Leftrightarrow U$ değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve $e \in L$ birimlidir.

$e = 1$ ($e = 0$) olduğunda U fonksiyonunun bir t -norm (t -konorm) olduğu açıktır. Bir U uninormuna $U(1,0) = 0$ olması durumunda konjanktif ve $U(1,0) = 1$ olması durumunda disjanktif uninorm denir.

$\mathcal{U}(e)$, e birimli uninormlar kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.5.2. (Baczynski ve Jayaram, 2008) U_{min} sınıfındaki $e \in (0, 1)$ birim elemanlı bir U uninormu aşağıdaki gibi verilir.

$$U(x, y) = \begin{cases} e.T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & , (x, y) \in [0, e]^2 \\ e + (1 - e).S\left(\frac{x - e}{1 - e}, \frac{y - e}{1 - e}\right) & , (x, y) \in [e, 1]^2 \\ \min(x, y) & , A.T. \end{cases}$$

U_{max} sınıfındaki $e \in (0, 1)$ birim elemanlı bir U uninormu aşağıdaki gibi verilir.

$$U(x, y) = \begin{cases} e.T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & , (x, y) \in [0, e]^2 \\ e + (1 - e).S\left(\frac{x - e}{1 - e}, \frac{y - e}{1 - e}\right) & , (x, y) \in [e, 1]^2 \\ \max(x, y) & , A.T. \end{cases}$$

Önerme 1.5.3. (Karaçal ve Mesiar, 2015) $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes, $e \in L \setminus \{0, 1\}$ ve e birim elemanına sahip L üzerinde U uninorm olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y, \quad (x, y) \in A(e).$
- (ii) $U(x, y) \leq x, \quad (x, y) \in L \times [0, e].$
- (iii) $U(x, y) \leq y, \quad (x, y) \in [0, e] \times L.$
- (iv) $x \leq U(x, y), \quad (x, y) \in L \times [e, 1].$
- (v) $y \leq U(x, y), \quad (x, y) \in [e, 1] \times L.$

Önerme 1.5.4. (Karaçal ve Mesiar, 2015) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L$ ve U, L üzerinde e nötral elemanlı uninorm olsun. O halde

- (i) $T^* = U|_{[0,e]^2} : [0, e]^2 \rightarrow [0, e], [0, e]$ üzerinde bir t-normdur.
- (ii) $S^* = U|_{[e,1]^2} : [e, 1]^2 \rightarrow [e, 1] [e, 1]$ üzerinde bir t-konormdur.

Teorem 1.5.5. (Karaçal ve Mesiar, 2015) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \setminus \{0, 1\}$ olsun. $[0, e]^2$ üzerinde bir T_e t-normu ve $[e, 1]^2$ üzerinde bir S_e t-konormu için

$$U_t(x, y) = \begin{cases} T_e(x, y), & (x, y) \in [0, e]^2 \text{ ise} \\ x, & (x, y) \in [0, e] \times (e, 1] \cup (e, 1] \times [0, e] \text{ ise} \\ y, & x \in [0, e], y \in I_e \text{ ise} \\ x, y \in [0, e], & x \parallel e \text{ ise} \\ 1, & A.T \end{cases}$$

ve

$$U_s(x, y) = \begin{cases} S_e(x, y), & (x, y) \in [e, 1]^2 \text{ ise} \\ x \wedge y, & (x, y) \in [0, e] \times [e, 1] \cup [e, 1] \times [0, e] \text{ ise} \\ y, & x \in [e, 1], y \parallel e \text{ ise} \\ x, & y \in [e, 1], x \parallel e \text{ ise} \\ 0, & A.T \end{cases}$$

olarak tanımlanan $U_t, U_s: L^2 \rightarrow L$ dönüşümleri L üzerinde uninormlardır.

Tanım 1.5.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $U \in \mathcal{U}(e)$ olsun. Her $x, y \in L$ için

$$x \leq_U y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, e] \text{ ve } U(k, y) = x \text{ olacak şekilde } k \in [0, e] \text{ mevcutsa,} \\ x, y \in [e, 1] \text{ ve } U(x, l) = y \text{ olacak şekilde } l \in [e, 1] \text{ mevcutsa,} \\ (x, y) \in L^* \text{ ve } x \leq y \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntıdır, burada $I_e = \{x \in L | x \parallel e\}$ ve $L^* = [0, e] \times [e, 1] \cup [0, e] \times I_e \cup [e, 1] \times [0, e] \cup [e, 1] \times I_e \cup I_e \times [0, e] \cup I_e \times [e, 1] \cup I_e \times I_e$.

Tanım 1.5.7. $N: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir nullnorm denir : $\Leftrightarrow N$ değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve $\forall x \in [0,1]$ için $N(x,a) = a$ olan $a \in [0,1]$ sıfırlayan elemana sahiptir öyle ki:

$$(i) \quad N(x, 0) = x, \quad \forall x \in [0, a]$$

$$(ii) \quad N(x, 1) = x, \quad \forall x \in [a, 1].$$

Açıkça, $a = 0$ ise N bir t -norm, $a = 1$ ise N bir t -konormdur.

$\mathcal{V}(a)$, a sıfırlayanına sahip tüm nullnormların kümesi olarak adlandırılır.

Böylece uninormlar ve nullnormlar t -norm ve t -konormların birer genelleştirmesidir.

Tanım 1.5.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $V \in \mathcal{V}(a)$ olsun. $x, y \in L$ için

$$x \preceq_V y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, a] \text{ ve } V(k, x) = y \text{ olacak şekilde } k \in [0, a] \text{ mevcutsa,} \\ x, y \in [a, 1] \text{ ve } V(y, l) = x \text{ olacak şekilde } l \in [a, 1] \text{ mevcutsa,} \\ (x, y) \in L^* \text{ ve } x \leq y \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısı olup bu sıralama bağıntısına V -sıralama bağıntısı denir, burada $I_a = \{x \in L \mid x \parallel a\}$ ve $L^* = [0, a] \times [a, 1] \cup [0, a] \times I_a \cup [a, 1] \times [0, a] \cup [a, 1] \times I_a \cup I_a \times [0, a] \cup I_a \times [a, 1] \cup I_a \times I_a$.

1.6. Kapanış Operatörleri

Tanım 1.6.1. (Burris ve Sankappanavar, 2011) L bir küme, $X, Y \subseteq L$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $C: \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ dönüşümüne L üzerinde bir kapanış operatörü denir : $\Leftrightarrow$

$$(C1) \quad X \subseteq C(X).$$

$$(C2) \quad X \subseteq Y \text{ için } C(X) \subseteq C(Y).$$

$$(C3) \quad C(C(X)) = C(X).$$

$C(X) = X$ ise L nin bir X alt kümesi kapalı alt küme olarak adlandırılır. Kısmen sıralama bağıntısı olarak küme kapsama bağıntısı alınırsa L nin kapalı alt kümelerinin kısmen sıralı kümesi L_C ile gösterilir.

Teorem 1.6.2. (Burris ve Sankappanavar, 2011) A kümesi üzerinde bir kapanış operatörü C olsun. O halde

$$\bigwedge_{i \in I} C(A_i) = C\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

ve

$$\bigvee_{i \in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

işlemleriyle L_C bir tam kafestir.

Teorem 1.6.3. (Burris ve Sankappanavar, 2011) Her tam kafes C kapanış operatörüne göre kapalı olan alt kümelerinin kafesine izomorftur.

Tanım 1.6.4. (Burris ve Sankappanavar, 2011) A kümesi üzerinde tanımlı bir C kapanış operatörüne bir cebirsel kapanış operatörüdür denir : $\Leftrightarrow$ her $X \subseteq A$ için $C(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \subseteq X \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$.

Tanım 1.6.5. (Burris ve Sankappanavar, 2011) C, A kümesi üzerinde cebirsel kapanış operatörü ise L_C cebirsel kafestir ve L_C nin kompakt elemanları X in A kümesinin sonlu bir alt kümesi olan $C(X)$ kapalı kümeleridir.

Tanım 1.6.6. (Burris ve Sankappanavar, 2011) C, A üzerinde bir kapanış operatörü ve Y A nın kapalı bir alt kümesi ise $C(X) = Y$ eşitliğini sağlayan X kümesine Y nin üreten kümesi denir. Y için sonlu bir üreten küme varsa Y kümesine sonlu üretilen küme denir. Eğer X, Y yi üretiyorsa ve X in hiçbir öz alt kümesi Y yi üretmiyorsa X e minimal üreten küme denir.

Sonuç 1.6.7. (Burris ve Sankappanavar, 2011) C, A üzerinde bir cebirsel kapanış operatörü olsun. A nın sonlu üretilen alt kümeleri L_C nin kompakt elemanlarıdır.

Teorem 1.6.8. (Burris ve Sankappanavar, 2011) Her cebirsel kafes C cebirsel kapanış operatörü üzerinde A kümelerinin kapalı alt kümelerinin kafesine izomorftur.

1.6.1. T-normlardan Elde Edilen Kapanış Operatörleri

Teorem 1.6.1.1. (İnce ve Karaçal, 2019) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $A \subseteq L$, $1 \in A$ ve T t-norm L üzerinde her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olan bir t-norm olsun. Her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A,T}(X) = T(X, A)$$

olarak tanımlanan $C_{A,T} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ dönüşümü L üzerinde bir kapanış operatörüdür.

Uyarı 1.6.1.2. (İnce ve Karaçal, 2019) $C_{A,T}$ nin kapanış operatörü olabilmesi için A kümesi L nin bir alt kafesi olmak zorunda değildir.

Örnek 1.6.1.3. (İnce ve Karaçal, 2019) Üç elemanlı bir $M = \{a, b, c\}$ kümesinin tüm alt kümelerinin kafesini ele alalım. L üzerinde

$$L = (\mathcal{P}(M), \subseteq, \emptyset, M, \cap, \cup), \quad A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\} \quad \text{ve} \quad T = T_{\wedge}$$

olsun. Böylece her $X \in \mathcal{P}(L)$ için $C_{A,T}(X) = T_{\wedge}(X, A)$ dır. $1 \in A$ ve her $x, y \in A$ için $T_{\wedge}(x, y) \in A$ olduğundan, $C_{A,T}$ nin L üzerinde bir kapanış operatörü olduğu açıktır. Fakat A L nin bir alt kafesi değildir. Çünkü $\{a\}, \{b\} \in A$ fakat $\{a\} \cup \{b\} \notin A$ dır.

Tanım 1.6.1.4. (İnce ve Karaçal, 2019) Teorem 1.6.1.1 de verilen $C_{A,T}$ kapanış operatörüne L üzerinde bir t-kapanış operatörü denir.

Uyarı 1.6.1.5. Sınırlı bir L kafesi üzerinde $C_{A,T}$ kapanış operatörü ele alınırsa, her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A,T}(X) = \bigcup_{x \in X} C_{A,T}(\{x\})$$

dır. Böylece L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı tüm t-kapanış operatörleri (A ve T nin yardımıyla) cebirseldir. Bu sebeple $C_{A,T}(X)$ yerine, $C_{A,T}(\{x\})$ ($x \in X$) kümeleri üzerinde çalışılabilir.

Önerme 1.6.1.6. (İnce ve Karaçal, 2019) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $C_{A,T}$ L üzerinde bir t-kapanış operatörü olsun. $L_{C_{A,T}}, T$ ikili işlemi altında kapalıdır, yani her $X, Y \in L_{C_{A,T}}$ için $T(X, Y) \in L_{C_{A,T}}$ dir.

Önerme 1.6.1.7. (İnce ve Karaçal, 2019) $C_{A,T}$ L sınırlı kafesi üzerinde bir t-kapanış operatörü olsun. $A = \{1\}$ olması için gerek ve yeter şart L nin tüm alt kümelerinin t-kapanış operatörü $C_{A,T}$ ye göre kapalı alt kümeler olmasıdır.

Sonuç 1.6.1.8. (İnce ve Karaçal, 2019) $C_{A,T}$, L sınırlı kafesi üzerinde bir t-kapanış operatörü olsun. $A = \{1\} \Leftrightarrow L_{C_{A,T}} = \mathcal{P}(L)$ denkliği sağlanır.

Önerme 1.6.1.9. (İnce ve Karaçal, 2019) L sınırlı kafesi üzerinde en zayıf t -norm

$$T_w(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in L \setminus \{1\} \\ x \wedge y, & \text{A. T} \end{cases}$$

göz önüne alınsın. O halde, t-kapanış operatörü C_{A,T_w}

$$C_{A,T_w}(X) = \begin{cases} X \cup \{0\} & 1 \notin X, \\ X \cup A \cup \{0\} & \{1\} \subsetneq X \\ A & \{1\} = X. \end{cases}$$

dir.

Sonuç 1.6.1.10. (İnce ve Karaçal, 2019) L sınırlı kafesi üzerinde bir C_{A,T_D} kapanış operatörünü göz önüne alınsın. $\{1\} \subsetneq A \subseteq L$ için

$$L_{C_{A,T_D}} = \{X \in \mathcal{P}(L): 0 \in X \text{ ve } (A \subseteq X \text{ ya da } 1 \notin X)\}$$

dir.

Önerme 1.6.1.11. (İnce ve Karaçal, 2019) $L = ([0,1], \leq)$ reel birim aralık ve $A = [0,1]$ olsun. O halde, her $x \in L$ için

$$C_{A,T}(\{x\}) = \begin{cases} \{0, x\} & x \neq 1 \\ A, & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow T = T_D$$

denkliği sağlanır.

Önerme 1.6.1.12. (İnce ve Karaçal, 2019) $L = ([0,1], \leq)$ reel birim aralık ve $1 \in A$ olacak şekilde $A \subseteq L$ olsun. $\{1\} \subsetneq A$ ise $C_{A,T}$ ye göre kapalı olan tek elemanlı herhangi bir $X = \{x_0\} \subseteq [0,1]$ alt küme yoktur.

Önerme 1.6.1.13. (İnce ve Karaçal, 2019) $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes, $A \subseteq L$ ve $X \in \mathcal{P}(L)$ olsun. L üzerinde en büyük t -norm olan her $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ göz önüne alınsın. $\forall X \leq \wedge A$ ise $X, C_{A, T_\wedge}$ t -kapanış operatörüne göre kapalıdır.

Uyarı 1.6.1.14. (İnce ve Karaçal, 2019) Önerme 1.6.1.13 ün tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 1.6.1.15. (İnce ve Karaçal, 2019) $L = ([0, 1], \leq)$ reel birim kafesi göz önüne alınsın. $a \in]0, 1[$, $A = [a, 1]$ için L üzerinde $T = T_\wedge$ olsun. $X = [a, (a + 1)/2] \in \mathcal{P}(L)$ elemanı için, $C_{A, T_\wedge}(X) = X$ yani X kapalıdır fakat $\forall X \not\leq \wedge A$.

Önerme 1.6.1.16. (İnce ve Karaçal, 2019) $L = ([0, 1], \leq)$ reel birim kafesi göz önüne alınsın. $1 \in A$ olacak şekilde $A \subseteq [0, 1]$ olsun. $[0, 1]$ üzerinde tüm T_1, T_2 t -normları için $C_{A, T_1} = C_{A, T_2} \Leftrightarrow A = \{1\}$ veya $A = \{0, 1\}$ dir.

Önerme 1.6.1.17. (İnce ve Karaçal, 2019) $L = ([0, 1], \leq)$ reel birim kafesi göz önüne alınsın ve $A = [0, 1]$ olsun. $1 \in X$ ise her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A, T}(X) = A$$

dır.

1.6.2. Uninormlardan Elde Edilen Kapanış Operatörleri

Önerme 1.6.2.1. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) L sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde e nötral elemanlı bir uninorm olsun. A kümesi, $e \in A$ ve $U(A, A) \subseteq A$ olacak şekilde L nin bir alt kümesi olsun. Her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{U, A}(X) := U(X, A)$$

olarak tanımlanan $C_{U, A} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ operatörü L üzerinde bir topolojik kapanış operatörüdür. $C_{U, A}$ aksi belirtilmediği sürece C ile gösterilecektir.

Tanım 1.6.2.2. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) $C(X) = X$ ise L nin bir X alt kümesine kapalı alt küme denir. L nin tüm kapalı alt kümelerinin ailesi $\zeta_C = \{C(X) : X \subseteq L\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.6.2.3. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) $C(X)$, $X \subseteq L$ nin bir kapanışı olsun. O halde $\xi_C = \{L \setminus C(X) : X \in P(L)\}$ L üzerinde bir topolojidir.

Önerme 1.6.2.4. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) ζ_C ailesi keyfi kesişim özelliğini sağlar yani ζ_C nin $\{X_\lambda : \lambda \in I\}$ keyfi alt ailesi için

$$C\left(\bigcap_{\lambda \in I} X_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in I} (X_\lambda)$$

dir.

Tanım 1.6.2.5. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) U , L sınırlı kafesi üzerinde e nötral elemanına sahip bir uninorm ve A kümesi, $e \in A$ ve $U(A, A) \subseteq A$ olacak şekilde L nin bir alt kümesi olsun. $x \preceq_U y \Leftrightarrow x \in C(\{y\})$ bağıntısına U -preorder denir.

Önerme 1.6.2.6. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) U , L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm (veya t-konorm) ve A kümesi, $e \in A$ ve $U(A, A) \subseteq A$ olacak şekilde L nin bir alt kümesi olsun. O halde, $\preceq_U$ bir sıralama bağıntısıdır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. F -Kapanış Operatörleri

Bu bölümde kafeslerin alt kümeleri ve bazı özelliklere sahip dönüşümler kullanılarak sınırlı kafesler üzerinde kapanış operatörleri tanımlanacaktır. Ayrıca bir dönüşüm tarafından elde edilen kapanış operatörü ile onun eşleniği (duali) tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki teoremden bir alt küme ve bir dönüşüm tarafından elde edilen kapanış operatörleri sınırlı kafesler üzerinde inşa edilecektir.

Teorem 2.1.1. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $F: L^2 \rightarrow L$ bir dönüşüm ve $e \in A \subseteq L$ olsun. Eğer

- (i) $F: L^2 \rightarrow L$ dönüşümü e elemanına göre (NP) yi sağlıyorsa
- (ii) F dönüşümü, e birimli ve her $x, y \in A$ için $G(x, y) \in A$ koşulunu sağlayan bir G dönüşümüne göre (LI) yı sağlıyorsa her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A,F}(X) = F(A, X)$$

ile tanımlanan $C_{A,F}: \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ dönüşümü bir kapanış operatörüdür.

İspat: (C1) $X \in \mathcal{P}(L)$ ve $y \in X$ keyfi olsun. F , e elemanına göre (NP) yi sağladığından ve $e \in A$ olduğundan

$$y = F(e, y) \in F(A, X) = C_{A,F}(X)$$

olup $X \subseteq C_{A,F}(X)$ elde edilir. Böylece (C1) özelliği sağlanır.

(C2) $X, Y \in \mathcal{P}(L)$ için $X \subseteq Y$ olsun. $w \in F(A, X)$ keyfi alalım. Bu takdirde, $a \in A$, $x \in X$ elemanları $w = F(a, x)$ olacak şekilde mevcuttur. $X \subseteq Y$ olduğundan $w = F(a, x) \in F(A, Y)$ olup

$$C_{A,F}(X) = F(A, X) \subseteq F(A, Y) = C_{A,F}(Y)$$

dir. Yani (C2) özelliği sağlanır.

(C3) Öncelikle $G(A, A) = A$ olduğunu gösterelim. $e \in A$ olduğundan $a = G(e, a) \in G(A, A)$ ile $A \subseteq G(A, A)$ elde edilir.

Tersine $u \in G(A, A)$ olsun. Bu takdirde, $x, y \in A$ elemanları mevcuttur öyle ki $u = G(x, y) \in A$ dır. Buradan $G(A, A) \subseteq A$ olup $G(A, A) = A$ elde edilir.

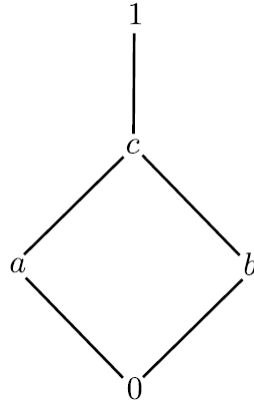
Şimdi her $X \in \mathcal{P}(L)$ için $C_{A,F}(C_{A,F}(X)) = C_{A,F}(X)$ olduğunu gösterelim. (LI) özelliği ve $G(A, A) = A$ ile

$$\begin{aligned} C_{A,F}(C_{A,F}(X)) &= C_{A,F}(F(A, X)) = F(A, F(A, X)) \\ &= F(G(A, A), X) = F(A, X) = C_{A,F}(X) \end{aligned}$$

olduğu yani (C3) özelliğinin sağlandığı elde edilir.

Tanım 2.1.2. Teorem 2.1.1 de verilen $C_{A,F}$ kapanış operatörüne L üzerinde A ve F ile belirlenen “ F -kapanış operatörü” denir.

Örnek 2.1.3. $(L, \leq, 0, 1)$ şekil 1 de verilen kafes diyagramı olsun. L nin $A = \{0, a, b, 1\}$ alt kümesi, Tablo 1 ve Tablo 2 de verilen F ve G dönüşümlerini alalım.



Şekil 1. $(L, \leq)$

Tablo 2. F Fonksiyonu

F	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	b	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Tablo 3. G Fonksiyonu

G	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

F ve G fonksiyonları ve A alt kümesi için Teorem 2.1.1 deki şartlar sağlanır. Böylece $C_{A,F}$ L üzerinde bir kapanış operatörüdür.

Uyarı 2.1.4.

(i) Eğer $C_{A,F}$ kapanış operatörü L sınırlı kafesi üzerinde bir F -kapanış operatörü ise o halde her $X \in \mathcal{P}(L)$ için $C_{A,F}(X) = \bigcup_{x \in X} C_{A,F}(\{x\})$ dir. Böylece (A ve F yardımıyla) L sınırlı kafesi üzerine tanımlanan tüm F -kapanış operatörleri cebirseldir. Bu sebeple, bu çalışmada genel olarak $C_{A,F}(X)$ yerine $C_{A,F}(\{x\})$ ($x \in X$) kümeleri üzerinde çalışacağız. Kısmen sıralama bağıntısı olarak küme kapsama bağıntısı alınırsa L nin kapalı alt kümelerinin kısmen sıralı kümesi $L_{C_{A,F}}$ ile gösterilir.

(ii) Teorem 2.1.1 de F ve G dönüşümleri yerine t-norm T alalım. Her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olduğunda Teorem 2.1.1 de verilen şartların sağlandığı açıktır. Böylece, $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olması durumunda A kümesinden ve t-norm T den elde edilen $C_{A,T}$ kapanış operatörü (İnce ve Karaçal, 2019) çalışmasında tanımlanan kapanış operatörü ile çıkarır.

(iii) Teorem 2.1.1 de F ve G dönüşümleri yerine L üzerinde e nötral elemanlı bir uninorm U alınırsa, $U(A, A) \subseteq A$ sağlandığında Teorem 2.1.1 deki şartların sağlandığı görülür. Böylece, $C_{U,A}$ kapanış operatörü (Karaçal ve Köroğlu, 2022) çalışmasındaki kapanış operatörü ile çıkarır.

(iv) Teorem 2.1.1 de F ve G dönüşümleri yerine t-konorm S alalım. Her $x, y \in A$ için $S(x, y) \in A$ olduğunda Teorem 2.1.1 de verilen şartların sağlandığı açıktır. Böylece bir A kümesinden ve bir t-konorm S den elde edilen $C_{A,S}$ operatörü

bir kapanış operatörü olup bu kapanış operatörüne “ S -kapanış operatörü” denir. Bu durumda S -kapanış operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $A \subseteq L$, $0 \in A$ ve S, L üzerinde $x, y \in A$ için $S(x, y) \in A$ olan bir t -konorm olsun. Her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A,S}(X) = S(X, A)$$

olarak tanımlanan $C_{A,S} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ kapanış operatörüne “ S -kapanış operatörü” denir.

Uyarı 2.1.6. Teorem 2.1.1’de F ve G dönüşümleri yerine sırasıyla bir I - gerektirmesi ve bir T t -normunu alalım. Bu takdirde Teorem 2.1.1 de verilen şartlar altında A ve I ile elde edilen $C_{A,I}$ operatörünün bir kapanış operatörü olduğu açıktır. Bu şekilde A kümesi ve I -gerektirmesi ile tanımlanan $C_{A,I}$ kapanış operatörüne “ I -kapanış operatörü” denir.

Bu durumda A kümesi ve I -gerektirmesinden elde edilen $C_{A,I}$ kapanış operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.7. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $A \subseteq L$, $1 \in A$ ve I, L üzerinde bir gerektirme olsun. I gerektirmesi (NP) yi ve her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ koşulunu sağlayan bir t -norm T ye göre (LI) yı sağlıyorsa

$$C_{A,I}(X) = I(A, X)$$

ile tanımlanan $C_{A,I} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ kapanış operatörüne “ I -kapanış operatörü” denir.

Bu çalışmada $C_{A,F}$ bir kapanış operatörü olarak alındığında Teorem 2.1.1 de verilen şartlara uygun F ve G dönüşümlerinin mevcut olduğu, (i) ve (ii) şartlarının sağlandığı kabul edilecektir.

Önerme 2.1.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $C_{A,F} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ üzerinde bir F -kapanış operatörü olsun. Eğer G değişmeli ise $L_{C_{A,F}}$ kümesi F dönüşümü altında kapalıdır, yani her $X, Y \in L_{C_{A,F}}$ için $F(X, Y) \in L_{C_{A,F}}$ dir.

İspat: $X, Y \in L_{C_{A,F}}$ olsun. Bu durumda, $C_{A,F}(X) = F(A, X) = X$ ve $C_{A,F}(Y) = F(A, Y) = Y$ dir. F dönüşümü G ye göre (LI) yı sağladığından ve G değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} C_{A,F}(F(X, Y)) &= F(A, F(X, Y)) \\ &= F(G(A, X), Y) \\ &= F(G(X, A), Y) \\ &= F(X, F(A, Y)) \\ &= F(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $F(X, Y) \in L_{C_{A,F}}$ olup $L_{C_{A,F}}$ F dönüşümü altında kapalıdır.

Sonuç 2.1.9. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun.

(i) $C_{A,I}$ operatörü $\mathcal{P}(L)$ üzerinde bir kapanış operatörü olsun. Bu takdirde $L_{C_{A,I}}$, I -gerektirmesi altında kapalıdır.

(ii) $C_{A,S}$ bir kapanış operatörü olsun. Bu takdirde, $L_{C_{A,S}}$ t -konorm S altında kapalıdır.

İspat:

(i) $X, Y \in L_{C_{A,I}}$ olsun. Bu durumda, $C_{A,I}(X) = I(A, X) = X$ ve $C_{A,I}(Y) = I(A, Y) = Y$ dir.

$$\begin{aligned} C_{A,I}(I(X, Y)) &= I(A, I(X, Y)) \\ &= I(T(A, X), Y) \\ &= I(T(X, A), Y) \\ &= I(X, I(A, Y)) \\ &= I(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $I(X, Y) \in L_{C_{A,I}}$ olup $L_{C_{A,I}}$, I -gerektirmesi altında kapalıdır.

(ii) $X, Y \in L_{C_{A,S}}$ olsun. Bu durumda, $C_{A,S}(X) = S(A, X) = X$ ve $C_{A,S}(Y) = S(A, Y) = Y$ dir. S birleşme özelliğine sahip olduğundan

$$\begin{aligned} C_{A,S}(S(X, Y)) &= S(A, S(X, Y)) \\ &= S(S(A, X), Y) \\ &= S(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $S(X, Y) \in L_{C_{A,S}}$ olup $L_{C_{A,S}}$, S t -konormu altında kapalıdır.

Aşağıdaki önermede bir F dönüşümü ve A alt kümesinden elde edilen kapanış operatörü ile $N(A)$ kümesi ve F nin N -dualı tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Önerme 2.1.10. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F L üzerinde e elemanına göre (NP) özelliğini sağlayan bir fonksiyon ve F_N , $N(e) = e$ olan F nin N -dual fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

$$C_{A,F} \text{ bir kapanış operatörüdür} \iff C_{N(A),F_N} \text{ bir kapanış operatörüdür.}$$

İspat: “ $\Rightarrow$ ”, $C_{A,F}$ bir kapanış operatörü olsun. $e \in A$ ve $e = N(e) \in N(A)$ olduğundan $e \in N(A)$ dır.

(i) $y \in N(A)$ için,

$$F_N(e, y) = N\left(F(N(e), N(y))\right) = N\left(F(e, N(y))\right) = N(N(y)) = y.$$

(ii) F , e nötral elemanlı ve $x, y \in A$ için $G(x, y) \in A$ olan G fonksiyonuna göre (LI) yı sağlasın. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} F_N(x, F_N(y, z)) &= F_N\left(x, N\left(F(N(y), N(z))\right)\right) \\ &= N\left(F\left(N(x), N\left(N\left(F(N(y), N(z))\right)\right)\right)\right) \\ &= N\left(F\left(N(x), F(N(y), N(z))\right)\right) = N\left(F(G(N(x), N(y)), N(z))\right) \\ &= F_N(N(G(N(x), N(y))), z) = F_N(G_N(x, y), z). \end{aligned}$$

Böylece F_N , G_N ye göre (LI) özelliğini sağlar. $x, y \in N(A)$ olsun. Bu takdirde, $x = N(a)$ ve $y = N(b)$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.

$$G_N(x, y) = N(G(N(x), N(y))) = N(G(a, b)) \in N(A)$$

ve

$$G_N(e, y) = N\left(G(N(e), N(y))\right) = N\left(G(e, N(y))\right) = N(N(y)) = y.$$

Böylece $C_{N(A),F_N}$ bir kapanış operatörüdür.

“ $\Leftarrow$ ”, $C_{N(A),F_N}$ bir kapanış operatörü olsun. $e \in A$ nın F_N nin nötral elemanı olduğu açıktır.

(i) $x \in A$ olmak üzere $N(x) = y \in N(A)$ olup $C_{N(A), F_N}$ bir kapanış operatörü olduğundan

$$F_N(e, y) = y$$

dir. $y = F_N(e, y) = N(F(N(e), N(y)))$ olup eşitliğin her iki tarafının N ile görüntüsü alınırsa

$$N(y) = F(N(e), N(y))$$

olduğu böylece

$$x = N(N(x)) = N(y) = F(N(e), N(y)) = F(e, x)$$

elde edilir.

(ii) $x, y, z \in A$ olsun. Bu taktirde $N(x), N(y), N(z) \in N(A)$ olup $F_N(N(x), F_N(N(y), N(z))) = F_N(G_N(N(x), N(y)), N(z))$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} N \left(F \left(N(N(x)), N \left(N \left(F \left(N(N(y)), N(N(z)) \right) \right) \right) \right) \right) \\ = N \left(F \left(N \left(N \left(G \left(N(N(x)), N(N(y)), N(N(z)) \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. N güçlü negasyon olduğunda

$$F(x, F(y, z)) = F(G(x, y), z)$$

eşitliği sağlanır.

$a, b \in A$ olsun. $N(a), N(b) \in N(A)$ olup $C_{N(A), F_N}$ bir kapanış operatörü olduğundan $G_N(N(a), N(b)) \in N(A)$ dir. Buradan

$$N \left(G \left(N(N(a)), N(N(b)) \right) \right) = N(G(a, b)) \in N(A)$$

olup $G(a, b) \in A$ olduğu elde edilir.

$x \in A$ olsun. $N(x) \in N(A)$ ve $G_N N(e)$ birimli olduğundan

$$G_N(N(e), N(x)) = N(x)$$

dir. Buradan $N(x) = N \left(G \left(N(N(e)), N(N(x)) \right) \right) = N(G(e, x))$ olup $G(e, x) = x$ elde edilir.

Böylece $C_{A, F}$ bir kapanış operatörüdür.

Sonraki önermede F_N , F nin N -duali olmak üzere $C_{N(A),F_N}$ kapanış operatörüne göre kapalı kümeleri belirleyeceğiz.

Önerme 2.1.11. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F L üzerinde bir dönüşüm, F_N , F nin N -duali ve $C_{A,F}$ bir kapanış operatörü olsun. Bu takdirde

$$L_{C_{N(A),F_N}}(X) = \{N(X) \mid X \in L_{C_{A,F}}\}.$$

İspat: $X \in L_{C_{A,F}}$ olsun. Bu takdirde, $C_{A,F}(X) = X$ dir.

$$\begin{aligned} C_{N(A),F_N}(N(X)) &= F_N(N(A), N(X)) \\ &= N(F(N(N(A)), N(N(X)))) \\ &= N(F(A, X)) \\ &= N(C_{A,F}(X)) \\ &= N(X) \end{aligned}$$

olup $N(X) \in L_{C_{N(A),F_N}}$ dir. Böylece $\{N(X) \mid X \in L_{C_{A,F}}\} \subseteq L_{C_{N(A),F_N}}$ dir.

$Y \in L_{C_{N(A),F_N}}$ olsun. N güçlü olduğundan bir $X \in \mathcal{P}(L)$ mevcuttur öyle ki $N(X) = Y$ dir.

Buradan $C_{N(A),F_N}(Y) = C_{N(A),F_N}(N(X)) = N(X)$ olup $F_N(N(A), N(X)) = N(X)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} N(F(A, X)) &= N(F(N(N(A)), N(N(X)))) \\ &= F_N(N(A), N(X)) \\ &= N(X). \end{aligned}$$

N güçlü olduğundan $F(A, X) = X$, yani $X \in L_{C_{A,F}}$ dir. Böylece $L_{C_{N(A),F_N}} \subseteq \{N(X) \mid X \in L_{C_{A,F}}\}$ olduğu elde edilir.

Aşağıdaki önermede bir A alt kümesi ve bir F dönüşümünden elde edilen kapanış operatörü ile $\varphi^{-1}(A)$ kümesi ve F nin φ -eşleniği tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Önerme 2.1.12. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F dönüşümü L üzerinde e ye göre sol nötrallik özelliğini (NP) sağlayan bir dönüşüm ve φ L üzerinde 1-1, örten ve sıra koruyan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$C_{A,F}$ bir kapanış operatörüdür $\Leftrightarrow C_{\varphi^{-1}(A),F_\varphi}$ bir kapanış operatörüdür.

İspat: “ $\Rightarrow$ ”, $C_{A,F}$ bir kapanış operatörü olsun. F fonksiyonu e elemanına göre (NP) yi sağladığından $F(e, y) = y$ dir.

$$\begin{aligned} F_\varphi(\varphi^{-1}(e), y) &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(\varphi^{-1}(e)), \varphi(y)\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F(e, \varphi(y))\right) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

dir. $F_\varphi \varphi^{-1}(e)$ elemanına göre (NP) yi sağlar. $C_{A,F}$ bir kapanış operatörü olduğundan, F dönüşümü $x, y \in A$ için $G(x, y) \in A$ olan G dönüşümüne göre (LI) yı sağlar. $x, y \in \varphi^{-1}(A)$ olsun. Bu takdirde $\varphi(x), \varphi(y) \in A$ olduğundan $G(\varphi(x), \varphi(y)) \in A$ dır. Böylece $\varphi^{-1}\left(G(\varphi(x), \varphi(y))\right) \in \varphi^{-1}(A)$ ile $G_\varphi(x, y) \in \varphi^{-1}(A)$ elde edilir. Ayrıca, $e \in A$ olduğundan $\varphi^{-1}(e) \in \varphi^{-1}(A)$ olduğu açıktır.

Şimdi F_φ nin G_φ ye göre (LI) yı sağladığını gösterelim. $x, y, z \in A$ için

$$\begin{aligned} F_\varphi\left(x, F_\varphi(y, z)\right) &= F_\varphi\left(x, \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(y), \varphi(z)\right)\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(x), F\left(\varphi(y), \varphi(z)\right)\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F\left(G\left(\varphi(x), \varphi(y)\right), \varphi(z)\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}\left(G\left(\varphi(x), \varphi(y)\right)\right)\right), \varphi(z)\right)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi\left(G_\varphi(x, y)\right), \varphi(z)\right)\right) \\ &= F_\varphi(G_\varphi(x, y), z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, F_φ, G_φ ye göre (LI) yı sağlar. Böylece $C_{\varphi^{-1}(A),F_\varphi}$ bir kapanış operatörüdür.

“ $\Leftarrow$ ”, $C_{\varphi^{-1}(A),F_\varphi}$ bir kapanış operatörü olsun. Önermenin hipotezi ile F nin e elemanına göre (NP) yi sağladığı açıktır. $C_{\varphi^{-1}(A),F_\varphi}$ bir kapanış operatörü

olduğundan $a, b \in \varphi^{-1}(A)$ için $H(a, b) \in \varphi^{-1}(A)$ koşulunu sağlayan bir H dönüşümüne göre (LI) yı sağlar. Şimdi $G(x, y) = \varphi \left(H \left(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \right) \right)$ dönüşümünü alalım ve F nin G ye göre (LI) yı sağladığını ve her $x, y \in A$ için $G(x, y) \in A$ olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ olsun. Bu takdirde $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \in \varphi^{-1}(A)$ olup

$$H \left(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \right) \in \varphi^{-1}(A)$$

dır. Böylece $G(x, y) = \varphi \left(H \left(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \right) \right) \in \varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$ olduğu elde edilir. Şimdi F nin G ye göre (LI) yı sağladığını gösterelim. $x, y, z \in A$ olsun. Bu takdirde $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z) \in \varphi^{-1}(A)$ olup F_φ, H ye göre (LI) yı sağladığından

$$F_\varphi \left(\varphi^{-1}(x), F_\varphi(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) \right) = F_\varphi \left(H(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)), \varphi^{-1}(z) \right)$$

dır. Bu takdirde

$$\varphi^{-1} \left(F(x, F(y, z)) \right) = \varphi^{-1} \left(F \left(\varphi \left(H(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \right), \varphi^{-1}(z) \right) \right)$$

olup

$$\begin{aligned} F(x, F(y, z)) &= F \left(\varphi \left(H(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \right), \varphi^{-1}(z) \right) \\ &= F(G(x, y), z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, F, G ye göre (LI) yı sağlar. Böylece, $C_{A,F}$ bir kapanış operatörüdür.

Aşağıdaki önermede $C_{A,F}$ ve $C_{\varphi^{-1}(A), F_\varphi}$ kapanış operatörlerine göre kapalı olan kümeler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Önerme 2.1.13. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F, L üzerinde e ye göre sol nötrallik özelliğini (NP) sağlayan bir dönüşüm ve φ L üzerinde 1-1, örten ve sıra koruyan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$L_{C_{\varphi^{-1}(A), F_\varphi}}(X) = \{\varphi^{-1}(X) \mid X \in L_{C_{A,F}}\}$$

dir.

İspat: $X \in L_{C_{A,F}}$ olsun. Buradan $C_{A,F}(X) = X$ dir.

Aşağıdaki eşitlikler ile

$$\begin{aligned}
C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}(\varphi^{-1}(X)) &= F_{\varphi}(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(X)) \\
&= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(\varphi^{-1}(A)), \varphi(\varphi^{-1}(X))\right)\right) \\
&= \varphi^{-1}(F(A, X)) \\
&= \varphi^{-1}(C_{A, F}(X)) \\
&= \varphi^{-1}(X)
\end{aligned}$$

$\varphi^{-1}(x) \in L_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}}$ olduğu elde edilir. Buradan

$$\{\varphi^{-1}(X) \mid X \in L_{C_{A, F}}\} \subseteq L_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}} \quad (1)$$

elde edilir.

$Y \in L_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}}$ olsun. $\varphi(Y) = X$ alalım. $X \in L_{C_{A, F}}$ olduğunu gösterelim. $Y \in L_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}}$ olduğundan $C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}(Y) = Y$ dir. Böylece $F_{\varphi}(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(X)) = \varphi^{-1}(X)$ tir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(F(A, X)) &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(\varphi^{-1}(A)), \varphi(\varphi^{-1}(X))\right)\right) \\
&= F_{\varphi}(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(X)) = \varphi^{-1}(X)
\end{aligned}$$

dir. φ 1-1, örten bir dönüşüm olduğundan $F(A, X) = X$ olup $X \in L_{C_{A, F}}$ dir.

Buradan

$$L_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}} \subseteq \{\varphi^{-1}(X) \mid X \in L_{C_{A, F}}\} \quad (2)$$

elde edilir.

Uyarı 2.1.14. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F, L üzerinde e ye göre sol nötrallik özelliğini (NP) sağlayan bir dönüşüm ve φ L üzerinde 1-1, örten ve sıra koruyan bir dönüşüm olsun. Her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$\begin{aligned}
C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}(X) &= F_{\varphi}(\varphi^{-1}(A), X) = \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(\varphi^{-1}(A)), \varphi(X)\right)\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(F(A, \varphi(X))\right) = \varphi^{-1}(C_{A, F}(\varphi(X))) \\
&= (C_{A, F})_{\varphi}(X)
\end{aligned}$$

olduğu, yani

$$C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi} = (C_{A, F})_{\varphi}$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.1.15. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F, L üzerinde e ye göre sol nötrallik özelliğini (NP) sağlayan bir dönüşüm ve φ L üzerinde 1-1, örten ve sıra koruyan bir dönüşüm olsun. $(C_{A,F})_\varphi$ dönüşümüne $C_{A,F}$ kapanış operatörünün “ φ -eşleniği” denir.

2.2. I-Kapanış Operatörü

Bu bölümde sınırlı kafeslerin alt kümeleri ve gerektirmelerden elde edilen kapanış operatörlerinin özellikleri sınırlı kafesler üzerinde araştırılacaktır. Sınırlı kafeslerin alt kümeleri ve gerektirmelerin özel durumları için kapanış operatörleri incelenecektir. Sınırlı bir kafes üzerinde (S, N) gerektirmesi ve bir A kümesinden elde edilen dönüşümün bir kapanış operatörü olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir. En büyük ve en küçük (S, N) gerektirmeleri tarafından elde edilen kapanış operatörleri incelenecektir. Ayrıca sınırlı kafeslerin alt kümeleri ve rezidual gerektirmelerden elde edilen kapanış operatörleri araştırılacaktır. Herhangi bir rezidual gerektirmeden elde edilen kapanış operatörüne göre tek elemanlı kapalı küme olmadığı gösterilecektir. Ayrıca QL- gerektirmelerinden elde edilen kapanış operatörleri tartışılacaktır.

Aşağıdaki önermede $A = \{1\}$ durumunda sınırlı kafeslerin her alt kümesinin gerektirmelerden elde edilen kapanış operatörlerine göre kapalı olduğu gösterilecektir.

Önerme 2.2.1. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $C_{A,I}$ bir I-kapanış operatörü olsun. $A = \{1\}$ ise L nin her alt kümesi $C_{A,I}$ kapanış operatörüne göre kapalıdır.

İspat: $A = \{1\}$ ve $X \in \mathcal{P}(L)$ keyfi olsun. $I, (NP)$ yi sağladığından

$$C_{A,I}(X) = C_{\{1\},I}(X) = \{I(1, x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$$

dır. Böylece, X kümesi $C_{A,I}$ kapanış operatörüne göre kapalıdır.

Önerme 2.2.2. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,I}$ bir I-kapanış operatörü olsun. Eğer $A = \{0, 1\}$ ise her $X \in \mathcal{P}(L)$ için $C_{A,I}(X) = X \cup \{1\}$ dir.

İspat: $A = \{0, 1\}$ ve $X \in \mathcal{P}(L)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} C_{A,I}(X) &= I(A, X) = \{I(a, x) \mid a \in A, x \in X\} \\ &= \{I(0, x) \mid x \in X\} \cup \{I(1, x) \mid x \in X\} \end{aligned}$$

$$= \{1\} \cup X$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.3. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,I} \mathcal{P}(L)$ üzerinde bir kapanış operatörü ve $A = \{0, 1\}$ olsun. $C_{A,I}(X) = X \Leftrightarrow 1 \in X$.

İspat: “ $\Rightarrow$ ”, $C_{A,I}(X) = X$ olsun. Önerme 2.2.2 ile

$$X \cup \{1\} = C_{A,I}(X) = X$$

olup $1 \in X$ olduğu açıktır.

“ $\Leftarrow$ ”, $1 \in X$ olsun. $C_{A,I}(X) = X \cup \{1\} = X$ dir.

Aşağıdaki önermede bir A alt kümesi ve (S, N) - gerektirmesinden elde edilen $C_{A,I_{S,N}}$ kapanış operatörü ile t -konorm S ve $N(A)$ alt kümesinden elde edilen $C_{N(A),S}$ kapanış operatörü arasındaki ilişki incelenecektir.

Önerme 2.2.4. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $1 \in A \subseteq L$ ve $I_{S,N}$ L üzerinde bir (S, N) - gerektirmesi olsun. Bir t -norm T ye göre (LI) yı sağlayan $I_{S,N}$ gerektirmesi ile elde edilen $C_{A,I_{S,N}}$ operatörü bir kapanış operatörüdür $\Leftrightarrow C_{N(A),S}$ bir kapanış operatörüdür, burada S t -norm T nin N – dual t -konormudur.

İspat: “ $\Rightarrow$ ”, $C_{A,I_{S,N}}$ her $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olan t -norm T ye göre (LI) yı sağlayan (S, N) - gerektirmesi $I_{S,N}$ ile elde edilen kapanış operatörü olsun. Bu takdirde, Teorem 7.3.2 (Baczynski ve Jayaram, 2008) ile S t -normu T nin N – dual t -konormudur; yani $S = T_N$ dir. Ayrıca, $1 \in A$ olduğundan $0 = N(1) \in N(A)$ olduğu açıktır.

$a, b \in N(A)$ keyfi olsun. N güçlü olduğundan $a = N(x)$, $b = N(y)$ olacak şekilde $x, y \in A$ mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} S(a, b) &= S(N(x), N(y)) = T_N(N(x), N(y)) \\ &= N\left(T\left(N(N(x)), N(N(y))\right)\right) \\ &= N(T(x, y)) \in N(A). \end{aligned} \quad (T(x, y) \in A)$$

Böylece $C_{N(A),S}$ bir kapanış operatörüdür.

“ $\Leftarrow$ ”, $C_{N(A),S}$ bir kapanış operatörü ve S , t -norm T nin N -dual t -konormu olsun. $0 \in N(A)$ olduğundan $0 = N(x)$ olacak şekilde bir $x \in A$ mevcuttur. Buradan, N güçlü ve $N(x) = 0 = N(1)$ olduğundan $1 = x \in A$ elde edilir.

$a, b \in A$ alalım. Buradan $N(a), N(b) \in N(A)$ dır. $C_{N(A),S}$ kapanış operatörü olduğundan $S(N(a), N(b)) \in N(A)$ olduğu tanım ile açıktır. S, T nin N -dual t -konormu olduğundan

$$\begin{aligned} N(T(a, b)) &= N(T(N(N(a)), N(N(b)))) \\ &= S(N(a), N(b)) \in N(A) \end{aligned}$$

olup bir $x \in A$ mevcuttur öyle ki $N(T(a, b)) = N(x)$ dir. N güçlü olduğundan $T(a, b) = x \in A$ elde edilir.

Teorem 7.3.2 (Baczynski ve Jayaram, 2008) ile T ye göre (LI) yı sağladığı açıktır. Böylece $C_{A,I_{S,N}}$ bir kapanış operatörüdür.

Tanım 2.2.5. (Klement vd., 2000) $I_1, I_2 : L^2 \rightarrow L$ iki gerektirme olsun.

- (i) I_1, I_2 den daha zayıftır denir ve $I_1 \leq I_2$ ile gösterilir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $I_1(x, y) \leq I_2(x, y)$ sağlanır.
- (ii) I_1, I_2 den küme anlamında daha zayıftır denir ve $I_1 \leq I_2$ ile gösterilir : $\Leftrightarrow$ Her $A, B \subseteq L$ için $I_1(A, B) \subseteq I_2(A, B)$ dir.

Önerme 2.2.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $1 \in A_1, A_2 \subseteq L, X \in \mathcal{P}(L)$ ve I_1, I_2 sınırlı L kafesi üzerinde iki gerektirme olsun. Bu takdirde,

- (i) $A_1 \subseteq A_2$ ise $C_{A_1, I} \subseteq C_{A_2, I}$
- (ii) $I_1 \leq I_2$ ise $C_{A, I_1} \subseteq C_{A, I_2}$

dir.

İspat:

(i) $I(a, x) \in C_{A_1, I}(X)$ olsun. Buradan $I(a, x) \in I(A_1, X)$ dir. Böylece $a \in A_1, x \in X$ olup $A_1 \subseteq A_2$ olduğundan $a \in A_2$ dir. Ayrıca $I(a, x) \in I(A_2, X) = C_{A_2, I}(X)$ olup $C_{A_1, I}(X) \subseteq C_{A_2, I}(X)$ elde edilir.

- (ii) $I_1 \leq I_2$ olsun. Her $X \in \mathcal{P}(L)$ için

$$C_{A, I_1}(X) = I_1(A, X) \subseteq I_2(A, X) = C_{A, I_2}(X)$$

olup $C_{A, I_1} \subseteq C_{A, I_2}$ elde edilir.

Uyarı 2.2.7. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, T L üzerinde bir t-norm ve I_T t-norm T den elde edilen R -gerektirme olsun. Bu durumda I_T nin (NP) yi ve T ye göre (LI) yı sağladığı açıktır. Böylece, C_{A,I_T} nin kapanış operatörü olduğunu göstermek için $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir. Bu çalışmada C_{A,I_T} kapanış operatörü olduğunda $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ koşulunun varlığı kabul edilecektir.

Şimdi aşağıda tanımlanan en küçük (S,N)-gerektirmesi I_D ve en büyük (S,N)-gerektirmesi I_{WB} den elde edilen kapanış operatörlerini inceleyeceğiz. I_D ve I_{WB} gerektirmeleri aşağıdaki gibidir:

$$I_D(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ y, & x > 0. \end{cases}$$

$$I_{WB}(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ y, & x = 1. \end{cases}$$

Aşağıdaki önermede sınırlı kafesin herhangi bir alt kümesi ve en küçük (S,N)-gerektirmesi tarafından elde edilen kapanış operatörü incelenecektir.

Önerme 2.2.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $1 \in A \subseteq L$ olsun. En küçük (S,N)-gerektirmesini ele alınsın. Bu takdirde her $X \in P(L)$ için

$$C_{A,I_D}(X) = \begin{cases} X \cup \{1\}, & 0 \in A, \\ X, & 0 \notin A. \end{cases}$$

İspat: $0 \in A$ olsun. Her $X \in P(L)$ için

$$\begin{aligned} C_{A,I_D}(X) &= \{ I_D(a, x) \mid a \in A, x \in X \} \\ &= \{ I_D(0, x) \mid x \in X \} \cup \{ I_D(a, x) \mid a \neq 0, a \in A, x \in X \} \\ &= \{1\} \cup X \end{aligned}$$

$0 \notin A$ olsun. Her $a \in A$ için $a > 0$ olduğu açıktır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} C_{A,I_D}(X) &= \{ I_D(a, x) \mid a \in A, x \in X \} \\ &= \{x \mid x \in X\} = X. \end{aligned}$$

$$I_{WB}(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ y, & x = 1 \end{cases} \text{ şeklinde tanımlanan gerektirmenin sınırlı bir } L$$

kafesinde en büyük R -gerektirme olduğu açıktır.

Önerme 2.2.9. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. L kafesi üzerinde I_{WB} Weber-gerektirmesi göz önüne alınsın. Bu takdirde $\{1\} \subsetneq A$ ise her $X \in P(L)$ için

$$C_{A, I_{WB}}(X) = X \cup \{1\}$$

dir.

İspat: $\{1\} \subsetneq A$ olsun. Her $X \in P(L)$ için

$$\begin{aligned} C_{A, I_{WB}}(X) &= I_{WB}(A, X) = \{I_{WB}(a, x) \mid a \in A, x \in X\} \\ &= \{I_{WB}(1, x) \mid x \in X\} \cup \{I_{WB}(a, x) \mid a \neq 1, a \in A, x \in X\} \\ &= X \cup \{1\}. \end{aligned}$$

Sonuç 2.2.10. $C_{A, I_{WB}}$ kapanış operatörünü göz önüne alınsın. $\{1\} \subsetneq A$ için

$$L_{C_{A, I_{WB}}}(X) = \{X \in P(L) \mid 1 \in X\}$$

dir.

Sonuç 2.2.11. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $0 \in A$ ise her $I(S, N)$ -gerektirmesi I için $C_{A, I}(X) = X \cup \{1\}$.

İspat: Önerme 2.2.6. ile

$$X \cup \{1\} = C_{A, I_D}(X) \subseteq C_{A, I}(X) \subseteq C_{A, I_{WB}}(X) = X \cup \{1\}.$$

Böylece $C_{A, I}(X) = X \cup \{1\}$ elde edilir.

Sonuç 2.2.12. Her $I(S, N)$ -gerektirmesi için,

- (i) $1 \notin X$ ise, $C_{A, I}(X) = X$ veya $C_{A, I}(X) = X \cup \{1\}$ dir.
- (ii) $1 \in X$ ise, $C_{A, I}(X) = X$ tir. Bu durumda her X kümesi herhangi bir

(S, N) -gerektirmesinden elde edilen kapanış operatörüne göre kapalıdır.

Aşağıdaki önermede birim reel aralık üzerinde herhangi bir rezidual gerektirmeye göre tek elemanlı kapalı küme olmadığı gösterilecektir.

Önerme 2.2.13. $L = [0, 1]$ birim reel aralık, $A \subseteq L$ öyle ki $\{1\} \subsetneq A$ olsun. Tüm $\{y_0\} \subseteq [0, 1[$ tek elemanlı kümeleri kapalı olacak şekilde C_{A,I_T} kapanış operatörü mevcut değildir.

İspat: Farz edelim ki bir I rezidual gerektirmesi mevcut öyle ki $Y = \{y_0\} \subseteq [0, 1)$ tek elemanlı kümesi I dan elde edilen kapanış operatörüne göre kapalı olsun. Bu takdirde

$$C_{A,I}(\{y_0\}) = \{y_0\}$$

dır. Böylece, $\{y_0\} = C_{A,I}(\{y_0\}) = I(A, \{y_0\}) = \{I(a, y_0) \mid a \in A\}$ dır. Burada, her $a \in A$ için $I(a, y_0) = y_0$ olduğu elde edilir. $\{1\} \subsetneq A$ olduğundan bir $x_0 \in A$ elemanı mevcuttur öyle ki $x_0 < 1$ olup $I(x_0, y_0) = y_0$ dır. Özel olarak $y_0 = \frac{x_0+1}{2} \in [0, 1[$ alalım. Bu durumda $x_0 \leq y_0$ dır. Gerçekten, $x_0 > y_0$ olsa $\frac{x_0+1}{2} < x_0$ olduğunda $x_0 > 1$ elde edilir ki bu ise $x_0 < 1$ olmasıyla çelişir. I_{GD} en küçük R -gerektirme olduğundan, $y_0 = I(x_0, y_0) \geq I_{GD}(x_0, y_0) = 1$ olup bu ise $y_0 \neq 1$ olmasıyla çelişir. Böylece, varsayım yanlış olup böyle bir $C_{A,I}$ kapanış operatörü mevcut değildir.

Önerme 2.2.14. $L = [0, 1]$ birim aralık, $A = [0, 1]$ ve $I = [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir R -gerektirme olsun. Bu takdirde, her $y \neq 1$ için

$$C_{A,I}(\{y\}) = \{y, 1\}$$

dir.

İspat: Önerme 2.2.9 ile $\{1\} \subsetneq A$ ve $X = \{y\}$ alınırsa,

$$C_{A,I_{WB}}(X) = C_{A,I_{WB}}(\{y\}) = \{y\} \cup \{1\} = \{y, 1\}$$

elde edilir. Şimdi X kümesinin I_{GD} gerektirmesi ve A kümesinden elde edilen kapanış operatörünü belirleyelim.

$$\begin{aligned} C_{A,I_{GD}}(\{y\}) &= I_{GD}(A, \{y\}) = \{I_{GD}(a, y) \mid a \in A\} \\ &= \{I_{GD}(a, y) \mid a \leq y, a \in A\} \cup \{I_{GD}(a, y) \mid a > y, a \in A\} \\ &= \{y, 1\} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, herhangi bir R -gerektirme I için

$$I_{GD} \leq I \leq I_{WB}$$

olduğu açıktır. Önerme 2.2.6 ile

$$\{y, 1\} = C_{A,I_{GD}}(\{y\}) \subseteq C_{A,I}(\{y\}) \subseteq C_{A,I_{WB}}(\{y\}) = \{y, 1\}$$

olup $C_{A,I}(\{y\}) = \{y, 1\}$ elde edilir.

Uyarı 2.2.15. $A \neq [0, 1]$ ise Önerme 2.2.14 verilen ifadenin doğru olması gerekmez. Aşağıdaki örneği incelensin.

Örnek 2.2.16. $L = [0, 1]$, $A = [\frac{1}{2}, 1]$ ve $y = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} C_{A,I_{GD}}(\{y\}) &= C_{A,I_{GD}}(\{0\}) \\ &= I_{GD}(A, \{0\}) \\ &= \{I_{GD}(a, 0) \mid a \in [\frac{1}{2}, 1]\} \\ &= \{0\} \\ &\neq \{0, 1\} \end{aligned}$$

olup önermedeki eşitlik sağlanmaz.

Önerme 2.2.17. $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes, $A \subseteq L$ ve $X \in P(L)$ olsun. En küçük rezidual gerektirme I_{GD} yi ele alalım. Eğer $\forall X < \wedge A$ veya her $x \in X$, $a \in A \setminus \{1\}$ için $x \parallel a$ ise bu takdirde X kümesi $C_{A,I_{GD}}$ ye göre kapalıdır.

İspat: Bir $(L, \leq)$ tam kafesi üzerinde en küçük rezidual gerektirme

$$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & A.T \end{cases}$$

yi ele alınsın. $\forall X < \wedge A$ olsun. Bu takdirde her $x \in X$, $a \in A$ için $x < a$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} C_{A,I_{GD}}(X) &= \{I_{GD}(a, x) \mid a \in A, x \in X\} \\ &= \{x \mid x \in X\} \\ &= X. \end{aligned}$$

Her $x \in X$, $a \in A \setminus \{1\}$ için $x \parallel a$ olsun. Bu takdirde $I_{GD}(a, x) = x$ olduğundan $C_{A,I_{GD}}(X) = X$ olduğu açıktır.

Önerme 2.2.18. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $A \subseteq L$ ve $1 \notin X \subseteq L$ olsun. Eğer $u \geq a$ olacak şekilde $u \in X$ ve $a \in A$ elemanları mevcutsa

$$C_{A,I_{GD}}(X) = X \cup \{1\}$$

dir.

İspat: $u \geq a$ olacak şekilde $u \in X$ ve $a \in A$ elemanlarının mevcut olsun. O halde,

$$\begin{aligned} C_{A,I_{GD}}(X) &= I_{GD}(A, X) = \{I_{GD}(a, x) \mid a \in A, \quad x \in X\} \\ &= \{I_{GD}(1, x) \mid x \in X\} \cup \{I_{GD}(a, x) \mid x \in X, \quad 1 \neq a \in A\} \\ &= X \cup \{I_{GD}(a, x) \mid x \in X, a \leq x, 1 \neq a \in A\} \cup \{I_{GD}(a, x) \mid \\ &\quad a \not\leq x, \quad a \in A, \quad x \in X\} \\ &= X \cup \{1\} \cup \{I_{GD}(a, x) \mid a \not\leq x, \quad a \in A, \quad x \in X\}. \end{aligned}$$

Ayrıca, $\{I_{GD}(a, x) \mid a \not\leq x, \quad a \in A, \quad x \in X\} \subseteq X$ olduğundan

$$C_{A,I_{GD}}(X) = X \cup \{1\}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.19. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $A \subseteq L$ ve $X \in \mathcal{P}(L)$ olsun.

(i) $u \geq a$ olacak şekilde $u \in X$ ve $a \in A$ elemanları mevcutsa herhangi bir rezidual gerektirmeden ve A kümesinden elde edilen kapanış operatörü

$$C_{A,I}(X) = X \cup \{1\}.$$

(ii) Her $x \in X$ ve $a \in A$ için $x \leq a$ veya $x \parallel a$ ise herhangi bir rezidual gerektirmeden ve A kümesinden elde edilen kapanış operatörü $C_{A,I}(X) = X$ veya $C_{A,I}(X) = X \cup \{1\}$ dir.

İspat:

(i) $u \geq a$ olacak şekilde $u \in X$ ve $a \in A$ elemanları mevcut olsun.

Önerme 2.3.6 ile

$$X \cup \{1\} = C_{A,I_{GD}}(X) \subseteq C_{A,I}(X) \subseteq C_{A,I_{WB}}(X) = X \cup \{1\}$$

elde edilir. Böylece $C_{A,I}(X) = X \cup \{1\}$.

(ii) Her $x \in X$ ve $a \in A$ için $x \leq a$ veya $x \parallel a$ olsun. Bu takdirde,

$$X = C_{A,I_{GD}}(X) \subseteq C_{A,I}(X) \subseteq C_{A,I_{WB}}(X) = X \cup \{1\}.$$

Böylece $C_{A,I}(X) = X$ veya $C_{A,I}(X) = X \cup \{1\}$ elde edilir.

Lemma 2.2.20. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, T bir t-norm, $N: L \rightarrow L$ bir güçlü negasyon ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. O halde $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A \Leftrightarrow a = N(x)$ ve $b = N(y)$ için $S(a, b) \in N(A)$ dir.

İspat: " $\Rightarrow$ ", $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olsun. O halde, $a = N(x) \in N(A)$ ve $b = N(y) \in N(A)$ dir. S, T nin N -dual t-konormu olduğundan,

$$S(a, b) = S(N(x), N(y)) = N \left(T \left(\left(N(N(x)) \right), \left(N(N(y)) \right) \right) \right) \\ = N(T(x, y)) \in N(A).$$

“ $\Leftarrow$ ”, $x, y \in A$ olmak üzere $a = N(x)$ ve $b = N(y)$ için $S(a, b) \in N(A)$ olsun.

$$T(x, y) = N \left(S(N(x), N(y)) \right) = N(S(a, b))$$

elde edilir. $S(a, b) \in N(A)$ olduğundan $S(a, b) = N(k)$ olacak şekilde $k \in A$ mevcuttur. Buradan

$$T(x, y) = N(N(k)) = k \in A$$

olduğu elde edilir. Böylece $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ dır.

Aşağıdaki önermede QL-gerektirmelerinden elde edilen kapanış operatörleri incelenecektir.

Önerme 2.2.21. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $1 \in A \subseteq L$ ve $I_{T^*, S^*, N^*}: L^2 \rightarrow L$, t-norm T^* , t-konorm S^* ve güçlü negasyon N^* ile elde edilen bir QL-gerektirmesi olsun. $C_{A, I_{T^*, S^*, N^*}}$, bir t-norm T ye göre (LI) yı sağlayan I_{T^*, S^*, N^*} den elde edilen bir kapanış operatörüdür $\Leftrightarrow C_{N^*(A), S}$ bir kapanış operatörüdür, burada $S(x, y) = S^*(x, T^*(N^*(x), y))$, T nin N^* -dualidir.

İspat: “ $\Rightarrow$ ”, $C_{A, I_{T^*, S^*, N^*}}$ bir t-norm T ye göre (LI) yı sağlayan I_{T^*, S^*, N^*} den elde edilen bir kapanış operatörü olsun. Önerme 7.3.9 (Baczynski ve Jayaram, 2008) ile, I_{T^*, S^*, N^*} QL-gerektirmesi $I_{T^*, S^*, N^*} S(x, y) = S^*(x, T^*(N^*(x), y))$ t-konormundan ve S nin N^* -dualinin T olduğu N^* negasyonundan elde edilen bir (S,N)-gerektirmesidir. Böylece $I_{T^*, S^*, N^*}(x, y) = S(N^*(x), y)$ ve Önerme 2.2.4 ten, $C_{N^*(A), S}$ bir kapanış operatörüdür.

“ $\Leftarrow$ ”, $S(x, y) = S^*(x, T^*(N^*(x), y))$ T nin N^* -duali ve $C_{N^*(A), S}$ bir kapanış operatörü olsun. O halde bir t-konorm S ve bir negasyon N^* ile elde edilen (S,N)-gerektirmesi I_{S, N^*} t-norm T e göre (LI) özelliğini sağlar. Önerme 7.3.9 (Baczynski ve Jayaram, 2008) ile, I_{T^*, S^*, N^*} bir QL-gerektirmesidir ve bir t norm T ye göre (LI) yı sağlar. Ayrıca, I_{T^*, S^*, N^*} nin (NP) yı sağladığı aşikârdır. $C_{A, I_{T^*, S^*, N^*}}$ nin bir kapanış operatörü olduğunu ispat etmek için, $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olduğunu göstermek yeterlidir. $C_{N^*(A), S}$ bir kapanış operatörü olduğundan, $u, v \in N^*(A)$ için $S(u, v) \in$

$N^*(A)$ dır. Lemma 2.2.20 ile, $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ dır. Böylece $C_{A, I_{T^*, S^*, N^*}}$ bir kapanış operatörüdür.

Önerme 2.2.22. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $1 \in A \subseteq L$ ve $I_{T, S, N}$ bir pozitif t-konorm S , bir t-norm T ve bir negasyon N ile elde edilen bir QL-gerektirmesi olsun. $x, y \in A$ için $T(x, y) \in A$ olsun. Bu takdirde, $C_{A, I_{T, S, N}}$ bir kapanış operatörüdür.

İspat: Önerme 2.6.7 (Baczynski ve Jayaram, 2008) ile $I_{T, S, N} = I_{WB}$ olduğundan ispat aşikârdır.

2.3. Kapanış Operatörlerinden Elde Edilen Sıralama Bağlılıkları

Bu bölümde, kapanış operatörlerinden elde edilen (Karaçal ve Kesicioğlu, 2011) deki sıralama bağlantılarının bir genellemesi olan ancak sıralama bağlantısı olmayan bir bağlantı verilecektir. Bu bağlantıyı sıralama bağlantısı yapan bazı durumlar üzerinde çalışılacaktır. Kapanış operatörlerinden elde edilen genişletilmiş sıralama bağlantılarının özellikleri tartışılacaktır.

Önerme 2.3.1. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A, F}$ bir F dönüşümü ve $e \in A \subseteq L$ kümesinden elde edilen bir kapanış operatörü olsun. Bu takdirde $x, y \in L$ için

$$x \leq_{C_{A, F}} y \Leftrightarrow x \in C_{A, F}(\{y\})$$

L üzerinde bir quasi sıralama bağlantısıdır.

İspat: F - kapanış operatörü tanımı ile,

$$x = F(e, x) \in F(A, \{x\}) = C_{A, F}(\{x\})$$

olduğundan $x \leq_{C_{A, F}} x$ tir. Böylece yansıma özelliği sağlanır.

$x \leq_{C_{A, F}} y$ ve $y \leq_{C_{A, F}} z$ olsun. $x \in C_{A, F}(\{y\})$ ve $y \in C_{A, F}(\{z\})$ dir. $\leq_{C_{A, F}}$ bağlantısının tanımından $a, b \in A$ mevcuttur öyle ki

$$x = F(a, y), \quad y = F(b, z)$$

dir. F, G fonksiyonuna göre (LI) y1 sağladığından,

$$\begin{aligned} x &= F(a, y) = F(a, F(b, z)) \\ &= F(G(a, b), z) = F(l, z) \in C_{A, F}(\{z\}), \quad l = G(a, b) \in A \end{aligned}$$

olup $x \leq_{C_{A, F}} z$ elde edilir. Böylece $\leq_{C_{A, F}}$ bağlantısı geçişme özelliğini sağlar.

Önerme 2.3.2. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,F}$ bir F fonksiyon ve $e \in A \subseteq L$ kümesinden elde edilen bir kapanış operatörü olsun. F bir monoton fonksiyon ve e , A nın en büyük elemanı ise $\leq_{C_{A,F}}$ bağıntısı L üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: Önerme 2.3.1 ile $\leq_{C_{A,F}}$ bağıntısının yansıma ve geçişme özelliklerini sağladığı açıktır. $\leq_{C_{A,F}}$ nin bir sıralama bağıntısı olduğunu göstermek için ters simetrik olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{A,F}} y$ ve $y \leq_{C_{A,F}} x$ olsun. Bu takdirde

$$x \in C_{A,F}(\{y\}) = F(A, \{y\}) \text{ ve } y \in C_{A,F}(\{x\}) = F(A, \{x\})$$

elde edilir. $C_{A,F}$ nin tanımından $a, b \in A$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$x = F(a, y) \text{ ve } y = F(b, x)$$

tir. F nin monotonluğundan

$$x = F(a, y) \leq F(e, y) = y \text{ ve } y = F(b, x) \leq F(e, x) = x$$

olduğundan $x = y$ elde edilir. $\leq_{C_{A,F}}$ ters simetri özelliğini sağlar. Böylece $\leq_{C_{A,F}}$, L üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

Şimdi bu sıralama bağıntısını aşağıdaki önermedeki gibi genelleştirelim.

Önerme 2.3.3. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,F}$ bir F fonksiyonu ve $e \in A \subseteq L$ alt kümesinden elde edilen bir kapanış operatörü olsun. F monoton ve e , Teorem 2.1.1 deki koşulları sağlayan monoton bir G fonksiyonuna göre sol nötrallik özelliğini sağlıyorsa,

$$x \leq_{C_{A,F}} y \Leftrightarrow \exists a \in A, a \leq e \text{ öyle ki } x \in C_{\{a\},F}(\{y\})$$

bağıntısı L üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: F kapanış operatörü tanımı ile

$$x = F(e, x) \in C_{\{e\},F}(\{x\}),$$

olduğundan $x \leq_{C_{A,F}} x$ dir.

$x \leq_{C_{A,F}} y$ ve $y \leq_{C_{A,F}} x$ olsun. Buradan, $a_1, a_2 \leq e$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır öyle ki $x \in C_{\{a_1\},F}(\{y\})$ ve $y \in C_{\{a_2\},F}(\{x\})$ tir. Bu takdirde $x = F(a_1, y)$ ve $y = F(a_2, x)$ dir. F nin monotonluğu ile

$$x = F(a_1, y) \leq F(e, y) = y \text{ ve } y = F(a_2, x) \leq F(e, x) = x$$

elde edilir. Böylece $x = y$ dir.

Şimdi $x \leq_{C_{A,F}} y$ ve $y \leq_{C_{A,F}} z$ olsun. Buradan $a, b \leq e$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır öyle ki $x \in C_{\{a\},F}(\{y\})$ ve $y \in C_{\{b\},F}(\{z\})$ dir. Böylece $x = F(a, y)$ ve $y = F(b, z)$ dir. (LI) ile

$$\begin{aligned} x &= F(a, y) = F(a, F(b, z)) \\ &= F(G(a, b), z) = F(k, z) \in C_{\{k\},F}(\{z\}), \end{aligned}$$

burada $k = G(a, b) \leq G(e, e) = e$ elde edilir. Böylece $\leq_{C_{A,F}}$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Uyarı 2.3.4.

(i) F ve G fonksiyonlarının yerine t-norm T alınırsa, $\leq_{C_{A,F}}$ bir sıralama bağıntısıdır ve (İnce ve Karaçal, 2019) da verilen $\leq_{C_{A,T}}$ sıralama bağıntısı ile çakışır.

(ii) F ve G fonksiyonlarının yerine bir uninorm U alınırsa, $\leq_{C_{A,F}}$ bir sıralama bağıntısıdır. (Karaçal ve Köroğlu, 2022) çalışmasında verilen, bir uninorm U ve bir alt küme ile oluşturulan kapanış operatöründen elde edilen bağıntı bir sıralama bağıntısı olmamasına rağmen, Önerme 2.3.3 te verilen bağıntı bir sıralama bağıntısıdır.

(iii) Önerme 2.3.3. te verilen bağıntı

$x \leq_{C_{A,F}} y \Leftrightarrow a \leq e$ olacak şekilde $a \in A$ mevcuttur öyle ki $y \in C_{\{a\},F}(\{x\})$ olarak tanımlanırsa $\leq_{C_{A,F}}$ nin bir sıralama bağıntısı olduğu açıktır. Bu durumda F ve G fonksiyonları yerine sırasıyla bir gerektirme I ve bir t-norm T alınırsa (Kesicioğlu, 2018) daki $\leq_I$ ve $\leq_{C_{A,I}}$ sıralama bağıntıları arasında $\leq_{C_{A,I}} \subseteq \leq_I$ ilişkisi vardır.

Önerme 2.3.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $\leq_{C_{A,F}}$ Önerme 2.3.3 te tanımlanan sıralama bağıntısı olsun. G değişmeli ise her $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{A,F}} y$ ise her $z \in L$ için $F(z, x) \leq_{C_{A,F}} F(z, y)$ dir.

İspat: $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{A,F}} y$ olsun. Bu takdirde $a \leq e$ olacak şekilde $a \in A$ mevcuttur öyle ki $x \in C_{\{a\},F}(\{y\})$ dir. Böylece $x = F(a, y)$ dir. G değişmeli olduğundan ve F, G ye göre (LI) yı sağladığından

$$\begin{aligned} F(z, x) &= F(z, F(a, y)) \\ &= F(G(z, a), y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F(G(a, z), y) \\
&= F(a, F(z, y))
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $F(z, x) \in C_{\{a\}, F}(\{F(z, y)\})$ dir. Böylece, $F(z, x) \leq_{C_{A, F}} F(z, y)$ elde edilir.

Şimdi L üzerinde e nötral elemanlı G fonksiyonu ile elde edilen $\leq_G$ bağıntısını tanımlayalım:

$$x \leq_G y \Leftrightarrow l \leq e \text{ mevcuttur öyle ki } G(l, y) = x.$$

Önerme 2.3.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $\leq_{C_{A, F}}$ Önerme 2.3.3 te tanımlanan sıralama bağıntısı olsun. $x, y \in L$ için $x \leq_G y$ ise her $z \in L$ için $F(x, z) \leq_{C_{A, F}} F(y, z)$ dir.

İspat: $x \leq_G y$ olsun. Bu takdirde $l \leq e$ mevcuttur öyle ki $G(l, y) = x$ tir. $F(l, F(y, z)) = F(G(l, y), z) = F(x, z)$ ve $l \leq e$ olduğundan $F(x, z) \in C_{\{l\}, F}(\{F(y, z)\})$ dir. Böylece $F(x, z) \leq_{C_{A, F}} F(y, z)$ elde edilir.

Şimdi F dönüşümü ve onun φ eşleniği ile elde edilen kapanış operatörleri ile elde edilen sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Önerme 2.3.7. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A, F}$ bir kapanış operatörü ve $\leq_{C_{A, F}}$ Önerme 2.3.3 te tanımlanan sıralama bağıntısı olsun. $\varphi: L \rightarrow L$, $\varphi(e) = e$ olan sırakoruyan birebir ve örten bir dönüşüm olsun. O halde her $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}} y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_{C_{A, F}} \varphi(y)$ dir.

İspat: $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{\varphi^{-1}(A), F\varphi}} y$ olsun. Bu takdirde $u \leq e$ olan $u \in \varphi^{-1}(A)$ elemanı mevcuttur öyle ki $x \in C_{\{u\}, F\varphi}(\{y\})$ dir. O halde

$$x = F_{\varphi}(u, y) = \varphi^{-1}(F(\varphi(u), \varphi(y)))$$

olup

$$\varphi(x) = F(\varphi(u), \varphi(y))$$

dir. $u \in \varphi^{-1}(A)$ olduğundan $\varphi(u) \in A$ ve $\varphi(u) \leq \varphi(e) = e$ olduğu açıktır. Böylece, $\varphi(x) \in C_{\{\varphi(u)\}, F}(\{\varphi(y)\})$ dir. Yani, $\varphi(x) \leq_{C_{A, F}} \varphi(y)$ elde edilir.

Tersine olarak, $\varphi(x) \leq_{C_{A,F}} \varphi(y)$ olsun. Bu takdirde $a \leq e$ olan bir $a \in A$ vardır öyle ki $\varphi(x) \in C_{\{a\},F}(\{\varphi(y)\})$ dir. Böylece, $\varphi(x) = F(a, \varphi(y))$ elde edilir. Ayrıca $a \in A$ için $\varphi^{-1}(a) \leq \varphi^{-1}(e) = e$, $\varphi^{-1}(a) \in \varphi^{-1}(A)$ olup

$$\begin{aligned} x &= \varphi^{-1}\left(F(a, \varphi(y))\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(F\left(\varphi(\varphi^{-1}(a)), \varphi(y)\right)\right) \\ &= F_{\varphi}(\varphi^{-1}(a), y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in C_{\{\varphi^{-1}(a)\},F_{\varphi}}(\{y\})$, yani $x \leq_{C_{\varphi^{-1}(A),F_{\varphi}}} y$ dir.

Aşağıdaki önermede tanımlanan bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğu Önerme 2.3.3 e benzer şekilde gösterilebilir.

Önerme 2.3.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,F}$ bir F fonksiyonu ve $e \in A \subseteq L$ den elde edilen bir kapanış operatörü olsun. Eğer F monoton ve e , Teorem 2.1.1 deki koşulları sağlayan monoton bir G fonksiyonuna göre sol nötral eleman ise,

$x \leq_{C_{A,F}} y \Leftrightarrow a \geq e$ olacak şekilde $a \in A$ mevcuttur öyle ki $x \in C_{\{a\},F}(\{y\})$ bağıntısı L üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

Şimdi bir F fonksiyonu ve onun N -dual fonksiyonundan elde edilen kapanış operatörlerinin oluşturduğu $\leq_{C_{A,F}}$ ve $\leq_{C_{N(A),F_N}}$ sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Önerme 2.3.9. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $C_{A,F}$ kapanış operatörü ve $\leq_{C_{A,F}}$ Önerme 2.3.3 te tanımlanan sıralama bağıntısı olsun. $N: L \rightarrow L$, $N(e) = e$ yi sağlayan güçlü bir negasyon olsun. Her $x, y \in L$ için

$$x \leq_{C_{A,F}} y \Leftrightarrow N(x) \leq_{C_{N(A),F_N}} N(y)$$

dir.

İspat: $x, y \in L$ için $x \leq_{C_{A,F}} y$ olsun. Buradan $a \leq e$ olacak şekilde bir $a \in A$ mevcuttur öyle ki $x \in C_{\{a\},F}(\{y\})$ yani $x = F(a, y)$ dir. $a \leq e$ için $N(a) \geq N(e) = e$ ve $N(a) \in N(A)$ olduğu açıktır. $N(N(x)) = F(N(N(a)), N(N(y)))$ olduğundan

$$\begin{aligned}
N(x) &= N\left(F\left(N(N(a)), N(N(y))\right)\right) \\
&= F_N(N(a), N(y))
\end{aligned}$$

dir. Böylece $N(x) \in C_{N(A), F_N}(\{N(y)\})$, yani $N(x) \leq_{C_{N(A), F_N}} N(y)$ dir.

Tersine olarak, $N(x) \leq_{C_{N(A), F_N}} N(y)$ olsun. $u \geq e$ olacak şekilde bir $u \in N(A)$ mevcuttur öyle ki $N(x) \in C_{\{u\}, F_N}(\{N(y)\})$, yani $N(x) = F_N(u, N(y))$ dir. $u \in N(A)$ olduğundan bir $a \in A$ mevcuttur öyle ki $u = N(a)$ dir. N negasyonu $N(e) = e$ eşitliğini sağlayan güçlü negasyon ve $N(a) = u \geq e$ olduğundan $a \leq e$ dir. $N(x) = F_N(u, N(y))$ eşitliği kullanılırsa $N(x) = N\left(F(N(u), N(N(y))\right) = N(F(a, y))$ elde edilir. Buradan, $x = F(a, y)$ olup $x \in C_{\{a\}, F}(\{y\})$ dir. Yani, $x \leq_{C_{A, F}} y$ elde edilir.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

3.1. Sonuçlar

- 1- L sınırlı kafesi üzerinde, bazı özelliklere sahip F fonksiyonu ve L nin A alt kümesi tarafından üretilen $C_{A,F}$ kapanış operatörü tanıtılmıştır. Böylece İnce ve Karaçal tarafından 2019 yılında yapılan çalışmada verilen kapanış operatörü kavramı genelleştirilmiştir.
- 2- Kapanış operatörlerinin genel formundaki fonksiyon yerine bir gerektirme alınarak I kapanış operatörleri elde edilmiştir.
- 3- Bir fonksiyon ve onun eşleniği ve dual fonksiyonları tarafından elde edilen kapanış operatörleri arasındaki ilişkiler belirlenmiştir.
- 4- Bazı özel (S, N)-gerektirmeleri ve özel alt kümeler tarafından üretilen kapanış operatörleri belirlenmiştir.
- 5- Bazı koşullar altında rezidual gerektirmelerden elde edilen kapanış operatörleri incelenmiştir.
- 6- Kapanış operatörleri tarafından elde edilen, (İnce ve Karaçal, 2019) tarafından verilen sıralama bağıntısının genelleştirmesi olan bir bağıntı tanımlanmıştır. Bu bağıntıyı sıralama bağıntısı yapan bazı koşullar belirlenmiştir.
- 7- Kafeslerin alt kümeleri ve belirli özelliklere sahip bir fonksiyon ile tanımlanan kapanış operatörlerinden elde edilen sıralama bağıntılarının özellikleri araştırılmıştır.

3.2. Öneriler

- 1- İki fonksiyonun kartezyen çarpımından elde edilen kapanış operatörü ve fonksiyonların kapanış operatörlerinin kartezyen çarpımları arasındaki ilişki belirlenebilir.
- 2- Teorem 2.1.1 de verilen şartları sağlayan başka diğer mantıksal operatörlerden elde edilen kapanış operatörleri incelenebilir.
- 3- Kapanış operatörlerinden elde edilen sıralamaların hangi şartlar altında bir cebirsel kafes yapısı oluşturduğu araştırılabilir.

- 4- Bir mantıksal operatör ve onun φ -eşleniğinden elde edilen kapanış operatörlerinden elde edilen cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler üzerinde çalışılabilir.



KAYNAKÇA

- Baczynski, M. ve Jayaram, B. (2008). *Fuzzy Implications*. Springer-Verlag.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. 3rd ed. Rhode Island: American Mathematical Society Providence.
- Burris, S. ve Sankappanavar, H.P. (2011). *A Course in Universal Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Casasnovas, J. and Mayor, G., 2008. Discrete t-norms and operations on extended multisets. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 1165-1177.
- De Baets, B., 1995. Oplossen van vaag relationele vergelijkingen: een orde theoretische benadering. Ph. Doctoral Dissertation, University of Gent, 389s.
- De Baets, B.ve Mesiar, R. (1999). Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets Systems*, 104, 61-75.
- De Cooman, G. ve Kerre, E. (1994). Order norms on bounded partially ordered sets. *J. Fuzzy Mathematics*, 2, 281-310.
- Dikranjan, D. Ve Tholen, W. (1995). *Categorical Structure of Closure Operators*. Kluwer Academic Publishers.
- Drossos, C. ve Navara, M. (1996). Generalized t-conorms and closure operators. *Proceedings 4 th European Congress in Intelligent Techniques and Soft Computing*, Aachen, Germany, 22-26.
- Drossos, C.A. (1999). Generalized t-norm structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 104, 53-59.
- Ertuğrul. U., Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal,F. (2016). Ordering based on uninorms. *Information Sciences*, 330, 315-327.
- Everett, C.J. (1944). Closure Operators and Galois Theory in Lattices. *Transactions of the American Mathematical Society*, 55:3, 514-525
- İnce, M.A. ve Karaçal, F. (2019). t-closure Operators. *International Journal of General Systems*, 48:2, 139-156.
- Karaçal, F. ve Kesicioğlu, M.N. (2011). A T-partial order obtained from t-norms. *Kybernetika*, 47, 311-314.
- Karaçal F. ve Khadjiev Dj. (2005). $\vee$ -Distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 341-352.
- Karaçal, F. ve Köroğlu, T. (2022). Principal topology generated by uninorms, *Kybernetika*, 58, 863-882.

- Karaçal,F. ve Mesiar, R. (2015). Uninorms on bounded lattices. *Fuzzy sets and systems*,33-43.
- Kesicioğlu, M.N., Karaçal,F. ve Mesiar, R. (2015). Order-equivalent triangular norms. *Fuzzy sets and systems*, 268, 59-71.
- Kesicioğlu, M.N. ve Mesiar, R. (2014). Ordering based on implications. *Information Sciences*, 276, 377-386.
- Kesicioğlu, M. N. (2018). About the orders induced by implications satisfying the law of importation, *International Journal of Uncertainty Fuzziness and KnowledgeBased Systems*, 26, 655-677.
- Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ma, Z. and Wu, W.M. (1991). Logical operators on complete lattices. *Information Sciences*, 55, 77-97.
- Menger, K. (1942). Statistical metrics, Proceedings National Academy. *Sciences of the United States of America*, 28, 535-537.
- Schweizer, B. and Sklar, A. (1958). Espaces Metriques Aleatoires. *Comptes Rendus de Academie des Sciences de Paris*, 247, 2092 – 2094.
- Zhang D. (2005). Triangular norms on partially ordered sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 153, 195-209.