



T.C.

**RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN VE T-
KONORMLARIN GENİŞLETİLMESİ İÇİN YÖNTEMLER**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ebru TURAN GENÇ

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

RİZE

2022

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE danışmanlığında, Ebru TURAN GENÇ tarafından hazırlanan *Sınırlı Kafesler Üzerinde T-Normların ve T-Konormların Genişletilmesi için Yöntemler* adlı bu tez çalışması, 30/09/2022 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Prof. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Sınırlı Kafesler Üzerinde T-Normların ve T-Konormların Genişletilmesi için Yöntemleri” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

30/09/2022

Ebru TURAN GENÇ

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, sınırlı kafesler üzerinde t-normların ve t-konormların genişletilmesi için yöntemlerini incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak yapılmıştır.

Yüksek Lisans eğitimim süresince akademik anlamda tez konusu seçimimden tezin nihai haline kadar her aşamasında benden bilgi, tecrübe ve zamanını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE'ye şükranlarımı sunarım.

Gerek yüksek lisans tez sürecinde değerli görüş ve tecrübeleriyle çalışmama katkıda bulunan tez savunma jüri üyesi hocalarım Prof. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU ve Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL'a gerek ders aşamasında bizlere emeği geçen Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarına teşekkürlerimi sunarım. Yaşamımın her anında beni özveriyle destekleyen, bana her zaman moral kaynağı olan sevgili ablam Emel TURAN AYDİN'a hayatımın her alanında maddi ve manevi emekleri bulunan annem ve babama, bana akademik anlamda yol gösteren, teşvik eden sevgili eşim İnanç GENÇ'e ve oğlum Ali Ertuğrul GENÇ'e teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Ebru TURAN GENÇ

2022 / RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN	II
ÖN SÖZ.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
KISALTMALAR	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VIII
GİRİŞ.....	1
1.ÖN BİLGİLER	3
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler	3
1.1.1. Kısmen Sıralı Kümeler	3
1.1.2. Kafesler	6
1.2. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar	8
1.2.1. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar.....	8
1.2.2. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar.....	9
1.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar.....	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	12
3.SONUÇ.....	43
KAYNAKÇA	44

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Yüksek Lisans

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

Hazırlayan : Ebru TURAN GENÇ

Yıl : 2022

Sayfa Sayısı : 55

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN VE T-KONORMLARIN GENİŞLETİLMESİ İÇİN YÖNTEMLER

Bu çalışmanın amacı sınırlı bir kafes üzerinde t-norm ve t-konormlar için yeni inşa yöntemleri ortaya koymaktır. Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ilk bölümde çalışmada kullanılacak ve elde edilen inşa yöntemlerine dayanak olabilecek bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde ise bir L sınırlı kafesi üzerinde bazı yeni t-norm ve t-konorm inşa yöntemleri verilmiştir. Bu inşa yöntemleri kullanılarak; L nin bir $[a, b]$ alt aralığı kısıtlanışı V t-normuna eşit olan tüm t-normlar sınıfının en küçük elemanı, aynı alt aralığa kısıtlanışı W t-konormuna eşit olan tüm t-konormlar sınıfının en büyük elemanı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı Kafes, Üçgensel Norm (t-norm), Üçgensel Konorm (t-konorm)

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics

Thesis Type : Master Thesis

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Akif İNCE

Author : Ebru TURAN GENÇ

Year : 2022

Pages : 55

ABSTRACT

METHODS FOR EXPANSIONS OF T-NORMS AND T-CONORMS ON BOUNDED LATTICES

The aim of this study is to introduce new construction methods for t-norms and t-conorms on a bounded lattice. This study consists of two parts. In the first part of the study, some basic definitions and theorems that will be used in the study and that can be used as a basis for the construction methods obtained are given. In the second part, some new t-norm and t-conorm construction methods are given on a bounded Lattice L . Using these construction methods, the smallest t-norm in the class of t-norms whose restriction to any interval $[a, b]$ of a bounded lattice L is equal to the priori fixed t-norm V has been determined and the largest element of the whole class of t-conorms whose restriction to the same subrange is equal to the W t-conorm is determined.

Keywords: Bounded lattices; t-Norms; t-Conorms;

KISALTMALAR

$\in$	:	Eleman
$\notin$	:	Eleman değil
$\mathbb{R}$	:	Reel sayı kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\subseteq$	:	Kümeler arasındaki alt küme bağıntısı
$\leq$	:	Küçük veya eşit
$\geq$	:	Büyük veya eşit
$\cap$	:	Arakesit işlemi
$\cup$	:	Birleşim işlemi
$\setminus$	:	Fark işlemi
$\emptyset$	:	Boş küme
$\wedge$	:	Kafeste infimum
$\vee$	:	Kafeste supremum
$\parallel$	:	Kıyaslanamaz
$\bar{X}$	:	X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	:	X in alt sınırlarının kümesi
t-norm	:	Üçgensel norm
t-konorm	:	Üçgensel konorm
$[a, b]$	:	Kapalı aralık
$[a, b[$ ($]a, b]$)	:	Yarı açık aralık
$]a, b[$	:	Açık aralık
$\sup X$	:	X 'in üst sınırlarının en küçüğü
$\inf X$	:	X 'in alt sınırlarının en büyüğü
I_a	:	a ile kıyaslanamayan elemanlar kümesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Bazı Kısmen Sıralı Kümeler Diyagramları.....	5
Şekil 2. T t-normu.....	25
Şekil 3. L nin Kafes Diyagramı.....	33
Şekil 4. S t-konormu.....	41



GİRİŞ

Üçgensel norm kavramı ilk kez 1942’de Karl Menger’in “Statistical Metrics” adlı çalışmasında literatüre girmiştir. Menger, bu çalışmasında iki eleman arasındaki uzaklığı rakamlar yerine daha genel bir ifadenin kullanılacağı metrik uzaylar inşa etmiştir. Nitekim üçgensel normlar (kısaca t-normlar), klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi sırasında daha genel bir yapı olarak oluşturulmuştur (Menger, 1942). Ancak Menger’in bu çalışmasından bir süre sonra 1943 yılında A. Wald, Menger’ in genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğini eleştirerek bu aksiyomda belirtilmemiş bir işlem içermesinden dolayı eksik olduğunu belirterek Menger’in üçgen eşitsizliğine alternatif olan çalışmasını yayınlamıştır (Wald, 1943, 196-197). 1951 yılında ise Menger kendi çalışmalarının spesifik örneklerini içeren yeni bir çalışmasında Wald’ın üçgen eşitsizliğini benimsenmiştir. (Menger, 1951, 178-179).

Matematiksel olarak, t-normlar teorisi; (özel) fonksiyonel eşitlik teorisi ve (özel topolojik) yarı-gruplar teorisi olmak üzere oldukça bağımsız iki kökene sahiptir (Kesicioğlu, 2012, 1). Fonksiyonel eşitliklerle ilgili olan t-normlar, birleşmelilik eşitliğiyle de yakından ilişkili olup bu alanda ilk çalışma Abel tarafından 1826 yılında yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda ise bu alanda Brouwer, Aczél ve Hosszu tarafından benzer çalışmalar yapılmıştır (Brouwer, 1909; Aczél, 1966; Hosszu, 1954). Topolojik yarı gruplarla bağlantılı olarak ise “nilpotent” elemanın mevcut olmadığı, “idempotent” sınır noktalarının yani sadece elemanların olduğu topolojik yarı gruplara yönelik çalışma ise 1955’te W.M. Faucett tarafından yapılmıştır (Faucett, 1955, 741-747). Üçgensel t-normların bugünkü aksiyomlarını ise Schweizer ve Sklar’ın üç ayrı çalışmasında ortaya konmuştur (Schweizer ve Sklar, 1958; Schweizer ve Sklar, 1960; Schweizer ve Sklar, 1961).

Sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normların geniş bir kullanım alanı olması nedeniyle alan araştırmacılarının odaklandığı bir konu olmuştur. Nitekim ilk olarak Menger tarafından $[0,1]$ birim reel aralığı üzerinde tanımlanan t-normlar, daha sonra bazı araştırmacılar tarafından bu fonksiyonun herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde de tanımlanarak detaylı özellikleri incelenmiştir (Saminger, 2006; Karaçal, İnce ve Mesiar, 2015; Çaylı, 2020; Aşıcı ve Mesiar, 2021).

İlgili literatür incelendiğinde;

Saminger (2006) sınırlı kafesler üzerinde keyfi bir aralıkta çalışmış ancak bu yöntem alınan herhangi bir kafes üzerinde ya da keyfi t- normlar için her durumda bir t-norm üretememiştir. Bu çalışmanın ardından Ertuğrul, Karaçal ve Mesiar (2015), sınırlı bir kafesin $[a, 1]$ alt aralığında tanımlı bir t-norm ile $[0, a]$ alt aralığında tanımlı t-konormdan L kafesi üzerinde bir t-norm ve t-konorm inşa etme yöntemi üzerine çalışmışlar ancak bu yöntem de L nin keyfi iki alt aralıklarında tanımlı t-normların ve t-konormları için geçerli olmaması zayıf tarafıdır.

Çaylı (2018) ise çalışmasında Ertuğrul, Karaçal ve Mesiar (2015)'in yaptığı çalışmanın belirli alanlarda (aralık değerli bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler, tip 2 bulanık kümeler vb.) sınırlı olduğu için, farklı sınırlı kafesler üzerinde geçerli olan yeni bir yöntem önermiştir.

Ertuğrul ve Yeşilyurt (2020) $[0, a]$ üzerinde T_1 t-normu ve $[a, 1]$ üzerinde tanımlı T_2 t-normu yardımıyla yeni bir inşa yöntemi çalışmışlardır. Alt aralık sayısını artırarak hiçbir ek şarta gerek olmaksızın yeni inşa yöntemi çalışmışlardır.

Bu çalışmada, belirli aralıklarla verilen t-normlar ve t-konormlarından, sınırlı bir kafes üzerinde t-norm ve t-konorm oluşturan bazı yöntemler verilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda bir L sınırlı kafesinin $[a, b]$ alt aralığında tanımlı bir t-norm ve bir t-konormu L kafesi üzerinde bir t-norm ve bir t-konorma genişleten inşa metotları üzerinde durulmuştur. Ayrıca L sınırlı kafesinin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanması V t-normların en küçüğü, yine L sınırlı kafesinin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanması W t-konormu olan t-konormların en büyüğü belirlenmiştir.

1.ÖN BİLGİLER

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

Bu bölümde çalışmanın konusunun zemin teşkil edecek kısmen sıralı kümeler ve kafeslerle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu tanım ve teoremler verilirken literatürdeki temel kaynaklardan yararlanılmıştır (Birkhoff, 1967).

1.1.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun.

(P1) Her $x \in P$ için $x \leq x$ (Yansıma)

(P2) $x, y \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

(P3) $x, y, z \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

(P1) -(P3) şartlarını sağlayan, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir kısmen sıralama (veya sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine kısmen sıralı küme (veya sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve ' x, y de öz olarak içerilir' denir. $x \leq y$ ilişkisi $y \geq x$ olarakta yazılır ve ' x, y de içerilir' şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ şeklinde de yazılır.

Örnek 1.2. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $a \mid b: \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+: b = a \cdot k$ olmak üzere $(\mathbb{Z}^+, \mid)$ bir kısmen sıralı bir kümedir.

Örnek 1.3. Herhangi bir M kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi $P(M)$ olsun. $(P(M), \subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

Uyarı 1.4. $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun

(i) $a \in K$ elemanı her $x \in K$ için $a \leq x$ şartını sağlıyorsa a elemanına K nin en küçük elemanı denir ve 0 ile gösterilir. Eğer en küçük eleman mevcut ise tektir.

(ii) $b \in K$ elemanı her $x \in K$ için $b \geq x$ şartını sağlıyorsa b elemanına K nin en büyük elemanı denir ve 1 ile gösterilir. Eğer en büyük eleman mevcut ise tektir. Eğer en büyük eleman (1) ve en küçük eleman (0) varsa, her $x \in K$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1'e K nin evrensel sınırları denir.

Lemma 1.5. Herhangi bir kısmen sıralı kümede x, y, z elemanları için $x < y$ olacak şekilde herhangi bir $x \in L$ yoktur. Ayrıca $x < y$ ve $y < z$ iken $x < z$ dir. Tersine, $x \leq y: \Leftrightarrow x < y$ veya $x = y$ dir, bağıntısı P1 ve P3 ü sağlar.

Lemma 1.6. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$ olsun. Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (ters devir) dir.

(P4) Her x ve y için $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

Tanım 1.7. Bir kısmen sıralı küme (P4) özelliğini sağlıyorsa bu kısmen sıralı kümeye tam sıralı küme, zincir veya lineer sıralı küme denir.

Örnek 1.8. Doğal sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Örnek.1.9. $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Teorem 1.10. $(P, \leq)$ bağlantısı altında bir kısmen sıralı küme olsun. $T \subseteq P$ ise T aynı bağıntı altında yine bir kısmen sıralı kümedir.

Bir zincirin herhangi bir alt kümesi yine zincirdir. P bir zincir ise T de zincirdir

Örnek 1.11. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Tanım 1.12. $(X, \leq_1)$ ve $(Y, \leq_2)$ sıralı kümeler olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

(i) f 'e sıra korur (izoton) dönüşüm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$.

(ii) f 'e izomorfi denir : $\Leftrightarrow f, 1 - 1$, örten ve izotondur. Yani, $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$.

(iii) f 'e otomorfi denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X, 1 - 1$, örten ve izotondur. Yani, her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_1 f(b)$.

(iv) f 'e ters sıra korur (antiton) denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Rightarrow f(b) \leq_2 f(a)$.

(v) f 'e dual izomorfi denir : $\Leftrightarrow f, 1 - 1$, örten ve antitondur. Yani, her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(b) \leq_2 f(a)$.

(vi) Bir X sıralı kümesine self-dual denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$, dual izomorfisi mevcuttur. Yani, $f, 1 - 1$, örten ve her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(b) \leq_1 f(a)$.

Tanım1.13. $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a \in K$ elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi I_a ile gösterilir. Böylece

$$I_a = \{x \in K : x \parallel a\}$$

Tanım 1.14. p , P üzerinde bir bağıntı olsun.

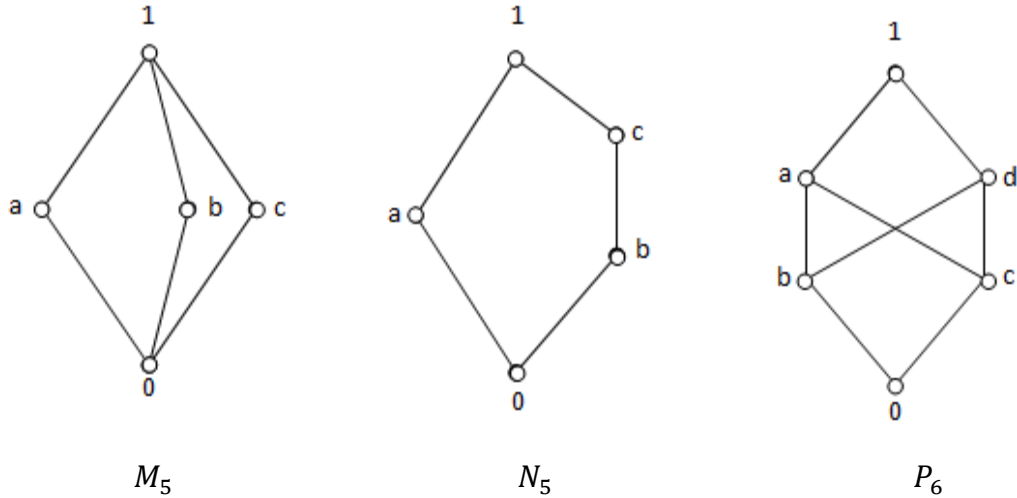
$$p^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in p \}$$

olarak tanımlanan p^{-1} bağıntısına p bağıntısının tersi denir.

Teorem 1.15. (Dualite Prensipleri): Bir kısmen sıralamanın tersi de yine bir kısmen sıralamadır.

Tanım 1.16. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için ' a örter b ' denir: $\Leftrightarrow a > b$ olup, $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Bir P kısmen sıralı bir kümesinin $n(P)$ mertebesi ile P nin elemanlarının (kardinal) sayısı kastedilir. Bu sayı sonlu ise P ye sonlu kısmen sıralı bir küme denir. Kapsama bağıntısı kullanılarak keyfi bir sonlu kısmen sıralı kümenin grafiksel gösterimi elde edilir. P nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir ve $a > b$ olduğunda a, b den daha yukarı yazılır. a, b yi örttüğünden a dan b ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle P nin bir diyagramı denir.



Şekil 1. Bazı Kısmen Sıralı Küme Diyagramları

Tanım 1.17. $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $Y \subseteq K$ olsun.

$a \in Y$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in Y$ mevcut değil ise bu a elemanına Y kümesinin bir minimal elemanı denir.

Y kümesinde maksimal eleman, dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 1.18. $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq K$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde Y kümesi minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.19. Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi alınan sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Tanım 1.20. $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $Y \subseteq K$ olsun.

(i) $a \in K$ ve her $y \in Y$ için $y \leq a$ ise, a elemanına Y kümesinin bir üst sınırı denir ve Y kümesinin tüm üst sınırlarının kümesi $\bar{Y}$ ile gösterilir.

Her $t \in \bar{Y}$ için $a \leq t$ ise, a elemanına Y kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = \sup Y$ veya $a = \bigvee Y$ ile gösterilir.

(ii) $b \in K$ ve her $y \in Y$ için $b \leq y$ ise, b elemanına Y kümesinin bir alt sınırı denir ve Y kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{Y}$ ile gösterilir. Her $k \in \underline{Y}$ için $k \leq b$ ise, b elemanına Y kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = \inf Y$ veya $b = \bigwedge Y$ ile gösterilir.

1.1.2. Kafesler

Tanım 1.21. $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in L$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ varsa L kısmen sıralı kümesine bir kafes denir.

$x, y \in L$ için $x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ olarak gösterilir.

Sınırlı bir kısmen sıralı küme olan L kafesi $(L, \leq, 0, 1)$ şeklinde gösterilir. Kısalık açısından bundan sonraki kısımda yalnızca “sınırlı bir L kafesi” ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 1.22. L bir kafes ve $A \subseteq L$ olsun. A alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ için $a \wedge b \in A$ ve $a \vee b \in A$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak,

$(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Benzer şekilde L kafesinin

$]a, b] := \{x \in L \mid a < x \leq b\}$,

$[a, b[:= \{x \in L \mid a \leq x < b\}$, yarı açık aralıkları ve

$]a, b[:= \{x \in L \mid a < x < b\}$ açık aralığı da tanımlanabilir.

Tanım 1.23. $(T, \leq_1)$ ve $(K, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. T ve K kısmen sıralı kümelerinin $T \times K = \{(x, y) | x \in T, y \in K\}$ şeklinde tanımlanan $T \times K$ kartezyen çarpım kümesi

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) : \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2, \quad x_1, x_2 \in T, \quad y_1, y_2 \in K$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(T \times K, \leq)$ kısmen sıralı kümesine T ve K kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.24. M ve N iki kafes olsun. $M \times N$ direkt çarpımı da yine bir kafestir.

Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times N$ için

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.25. K kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer varsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$L1. a \wedge a = a, \quad a \vee a = a, \quad (\text{İdempotent})$$

$$L2. a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a, \quad (\text{Değişme})$$

$$L3. (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (\text{Birleşme})$$

$$L4. a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a. \quad (\text{Yok etme})$$

Üstelik $a \leq b$ ifadesi $a \wedge b = a$ ve $a \vee b = b$ şartlarının her birine denktir.

Tanım 1.26. İdempotent, değişme ve birleşme özelliklerine sahip ikili işlemli bir sisteme yarı kafes denir.

Sonuç 1.27. K kısmen sıralı bir küme ve K' da alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. Bu takdirde $K, \wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak K kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise $K, \vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

Lemma 1.28. K , 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $a \in K$ için

$$0 \wedge a = 0 \text{ ve } 0 \vee a = a$$

dır. Dual olarak K , 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $a \in K$ için

$$a \wedge 1 = a \text{ ve } a \vee 1 = 1$$

dır.

Lemma 1.29. Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani bir L kafesinde $a, b, c \in L$ için

$$b \leq c \text{ ise } a \wedge b \leq a \wedge c \text{ ve } a \vee b \leq a \vee c$$

sağlanır.

Lemma 1.30. L bir kafes olsun. Her $a, b, c \in L$ için

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

1.2. [0,1] Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar

Bu bölümde çalışmanın konusun zemin teşkil edecek $[0,1]$ üzerinde üçgensel normlar ve üçgensel konormlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu tanım ve teoremler verilirken literatürdeki temel kaynaklardan yararlanılmıştır (Klement ve Mesiar,2000).

1.2.1. [0,1] Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.31 Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T , $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki dört özelliği sağlayan bir ikili işlemdir.

$$T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \text{ ve her } x, y, z \in [0,1] \text{ için}$$

$$(T1). T(x, y) = T(y, x) \quad (\text{Değişme})$$

$$(T2). T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad (\text{Birleşme})$$

$$(T3). y \leq z \text{ ise } T(x, y) \leq T(x, z) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$(T4). T(x, 1) = x \quad (\text{Sınır şartı})$$

Örnek 1.32 $[0,1]$ reel aralık üzerinde tanımlı dört temel t-norm olan T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

$$T_M(x, y) = \min(x, y) \quad (\text{Minimum})$$

$$T_P(x, y) = xy \quad (\text{Çarpım})$$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \quad (\text{Lukasiewicz t-norm})$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,1]^2 \\ \min(x, y), & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (\text{Drastik çarpım})$$

Uyarı 1.33 $T, [0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t- norm olsun.

(i) Tanım 1'den her T t-normu her $x \in [0,1]$ için aşağıdaki ilave sınır koşullarını karşılar:

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0 \quad (1.1)$$

$$T(1, x) = x \quad (1.2)$$

Bu nedenle her t-norm $[0,1]^2$ birim karenin sınırları üzerinde çakışıktır.

(ii) Bir T t-normunun, (T3) ile tanımlanan ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) değişme özelliği ile birlikte her iki bileşene göre monotonluğa denktir. Yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \quad (1.3)$$

sağlanır.

Tanım 1.34

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. $(x, y) \in [0,1]^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya eşdeğer olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.35

(i) Uyarı 3'un bir sonucu olarak; $T, [0,1]$ birim aralığı üzerinde keyfi bir t-norm olsun.

Bu durumda T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M \quad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Açıkça $T_L < T_P$ olduğundan dört temel t- norm aşağıdaki şekilde sıralanır:

$$T_D < T_L < T_P < T_M \quad (1.5)$$

1.2.2. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.36. $S, [0,1]$ birim aralığı üzerinde bir ikili işlem olsun, $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1) -(T3) şartlarını ve aşağıda belirtilen (S4) sınır şartını sağlıyorsa S fonksiyonuna bir üçgensel konorm (t-konorm) denir.

$$(S4) \quad S(x, 0) = x \quad (\text{Sınır şartı})$$

Aksiyomatik bir bakış açısından, t-normlar ve t-konormlar sadece sınır koşullarına göre farklılık gösterirler.

Örnek 1.37. $[0,1]$ birim aralığı üzerinde S_M , S_P , S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$$\begin{aligned} S_M(x, y) &= \max(x, y) && \text{(Maksimum)} \\ S_P(x, y) &= x + y - xy && \text{(İstatistiksel toplam)} \\ S_L(x, y) &= \min(x + y, 1) && \text{(Lukasiewicz t-konorm)} \\ S_D(x, y) &= \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0,1]^2 \\ \max(x, y), & \text{aksi taktirde} \end{cases} && \text{(Drastik toplam)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.38. $[0,1]$ birim aralığı üzerinde $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Her $(x, y) \in [0,1]^2$ için

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \quad (1.6)$$

olacak şekilde bir T t-normu mevcuttur.

Uyarı 1.39. T bir t-norm ise (1.6) ile tanımlanan S fonksiyonu (T1)-(T3) ve (S4)'ü sağlar, bu nedenle bir t-konormdur. Öte yandan S bir t-konorm ise o zaman $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu için;

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \quad (1.7)$$

(1.6) ile verilen t-konorma, T 'nin dual t-konormu ve benzer şekilde (1.7) ile verilen t-norma S 'nin dual t-normu denir.

Uyarı 1.40.

(i) Uyarı 1.39'dan her t-normun bir t-konormun dual ikili işlemi olduğunu ortaya koymaktadır.

(T_M, S_M) , (T_P, S_P) , (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikiyeşer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(ii) $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$S(1, x) = S(x, 1) = 1$$

$$S(0, x) = x$$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar birim karenin sınırları üzerinde çakışır.

(iii) Dualite sıralamayı değiştirir; T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$, eğer S_1 ve S_2 , T_1 ve T_2 'nin dual t-konormları ise $S_1 \geq S_2$ 'dir. Her S t-konormu için

$$S_M \leq S \leq S_D$$

dir. Yani, maksimum S_M en zayıftır ve drastik toplam S_D en güçlü t-konormudur. Örnek 1.7’de verilen dört temel t-konormun sıralaması aşağıdaki gibidir.

$$S_M < S_P < S_L < S_D$$

1.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar

Tanım 1.41. L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (t-norm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir (Karaçal ve Khadjiev 2005).

Örnek 1.42. Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde temel t-normlar olan T_W , $T_\wedge: L^2 \rightarrow L$ aşağıdaki gibi verilir:

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x \wedge y, & 1 \in \{x, y\} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$T_\wedge(x, y) = x \wedge y.$$

$L = [0,1]$ birim reel aralık alınırsa açıkça $T_W = T_D$, $T_\wedge = T_M$ olduğu görülür.

Uyarı 1.43. L sınırlı kafesi üzerindeki her t-norm T için $T_W \leq T \leq T_\wedge$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.44. L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel konorm S (t-konorm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 0- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Örnek 1.45. Herhangi bir L sınırlı bir kafesi üzerinde temel t-konormlar olan $S_V, S_W: L^2 \rightarrow L$ aşağıdaki gibi verilir.

$$S_W(x, y) = \begin{cases} x \vee y, & 0 \in \{x, y\} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$S_V(x, y) = x \vee y.$$

Uyarı 1.46. L sınırlı kafesi üzerindeki her t-konorm S için $S_V \leq S \leq S_W$ eşitsizliği sağlanır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, bir L sınırlı kafesinin alt aralıkları üzerinde verilen t-normlar ve t-konormlardan L üzerinde t-norm ve t-konorm elde etmek için bazı yöntemler araştırılmıştır. Ertuğrul, Karaçal ve Mesiar'ın (2015) yaptığı çalışmada sınırlı bir kafesin $[a, 1]$ alt aralığında tanımlı bir t-norm ile $[0, a]$ alt aralığında tanımlı t-konormdan L kafesi üzerinde bir t-norm ve t-konorm inşa etme yöntemi üzerine çalışmış ancak bu yöntemin tüm alt aralıklar üzerinde geçerli olmaması yöntemin zayıf tarafıdır. Çaylı (2018) yaptığı çalışmasında Ertuğrul, Karaçal ve Mesiar (2015)'in çalışmasını tüm alanlar için yeterli olmadığından yola çıkarak bu çalışmayı 2018 yılında geliştirmiştir. Ertuğrul ve Yeşilyurt (2020) önceden yapılan her iki çalışmayı geliştirerek; $[0, a]$ üzerinde bir t-norm T_1 ve $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm T_2 yardımıyla T t-normunu inşa etmişlerdir.

Literatürde L sınırlı kafesin $[a, b]$ alt aralığındaki bir t-normunu, L sınırlı kafes üzerinde bir t-norma genişleten yapım yöntemini Ertuğrul, Kesicioğlu, Karaçal (2019) yılında çalışarak literatürdeki boşluğu doldurmuştur. Yaptıkları “Some new construction methods for t norms on bounded lattices” çalışma bu bölümde çalışılmıştır. Sınırlı bir L kafesinin bir $[a, b]$ alt aralığında üzerindeki t-norm V nin varlığından yola çıkarak L kafes üzerinde t-norm inşa etmek için üç yöntem incelenmiştir. Ek olarak, $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı V t-normu olan tüm t-normların en küçüğü belirlenmiştir.

Ayrıca yine sınırlı bir L kafesinin bir $[a, b]$ alt aralığı üzerindeki t-konorm W nin varlığından yola çıkarak L üzerinde t-konorm inşa etmek için bir yöntem verilmiştir. İnşa edilen bu t-konormun, $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı W t-konormu olan tüm t-konormların en büyüğü olduğu gösterilerek Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal (2019)'ın açık problem olarak bıraktıkları soruya da kısmen cevap verilmiştir.

Tanım 2.1. (Dan, Hu ve Qiao 2019): L sınırlı bir kafes $a, b \in L \setminus \{0, 1\}$ ve $a < b$ olsun. Aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$I_a^b = \{x \in L: x \parallel a \text{ ve } x < b\},$$

$$I_b^a = \{x \in L: x \parallel b \text{ ve } x > a\},$$

$$I_{a,b} = \{x \in L: x \parallel a \text{ ve } x \parallel b\}.$$

Teorem 2.2. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve V, L nin $[a, b]$ alt aralığında bir t-norm olsun. O halde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur:

$T(x, y)$

$$= \begin{cases} V(x \wedge b, y \wedge b) & (x, y) \in [a, b]^2 \cup [a, b[\times I_b^a \cup I_b^a \times [a, b[\cup I_b^a \times I_b^a \\ x \wedge y \wedge a & (x, y) \in [0, a[\times L \cup L \times [0, a[\cup [a, b[\times I_a^b \cup I_a^b \times [a, b[\\ & \cup I_a^b \times I_a^b \cup I_a^b \times I_b^a \cup I_b^a \times I_a^b \cup I_a^b \times [b, 1[\\ & \cup [b, 1[\times I_a^b \cup I_{a,b} \times L \setminus \{1\} \cup L \setminus \{1\} \times I_{a,b} \\ x \wedge y \wedge b & (x, y) \in I_b^a \times [b, 1[\cup [b, 1[\times I_b^a \cup [b, 1[\times [a, b[\\ & \cup [a, b[\times [b, 1[\cup [b, 1[\times [b, 1[\\ x \wedge y & 1 \in \{x, y\}. \end{cases}$$

İspat:

(i) Monotonluk:

$x \leq y$ olan her $x, y, z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$ olduğunu gösterelim. Eğer x ve y nin aynı kümede olduğu durumlarda $T(x, z) \leq T(y, z)$ eşitsizliği tüm $z \in L$ ler için sağlanır. $z = 1$ olduğu durumlarda ise $T(x, z) = x \leq y = T(y, z)$ eşitsizliği açıktır. Eğer $z \in I_b^a$, $z \in [0, a[$, $z \in I_{a,b}$ durumlarından biri varsa $T(x, y) = x \wedge z \wedge a \leq y \wedge z \wedge a = T(y, z)$ olduğu açıktır. Kalan tüm olası durumlar aşağıda incelenmiştir.

1. $x \in [0, a[$

Bu durumda, $T(x, z) = x \wedge z \wedge a$ dır. Tüm $y, z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$ eşitsizliği sağlanır.

2. $x \in [a, b[$

2.1. $y \in I_b^a$

2.1.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x, z) \leq V(y \wedge b, z) = T(y, z).$$

2.1.2. $z \in I_b^a$

$$T(x, z) = V(x, z \wedge b) \leq V(y \wedge b, z \wedge b) = T(y, z).$$

2.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x \leq y \wedge b = y \wedge z \wedge b = T(y, z).$$

2.2. $y \in [b, 1[$

2.2.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x, z) \leq V(b, z) = z = T(y, z).$$

2.2.2. $z \in I_b^a$

$$T(x, z) = V(x, z \wedge b) \leq y \wedge z \wedge b = T(y, z).$$

2.2.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x \leq b = T(y, z).$$

$y = 1$

Bu durumda $T(x, z)$; $x \wedge z \wedge a$, $V(x, z)$, x ve $V(x, z \wedge b)$ değerlerinden birbirine eşittir. Tüm durumlar için $T(x, z) \leq z = T(1, z) = T(y, z)$ dir.

3. $x \in I_a^b$

Her $z \in L$ için $T(x, z) = x \wedge z \wedge a$ olduğundan $T(x, z) \leq T(y, z)$ eşitsizliği her $y, z \in L$ için sağlanır.

4. $x \in I_b^a$

4.1. $y \in [b, 1[$

4.1.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x \wedge b, z) \leq V(b, z) = z = T(y, z).$$

4.1.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, z) &= V(x \wedge b, z \wedge b) \leq V(b, z \wedge b) = z \wedge b = y \wedge z \wedge b \\ &= T(y, z). \end{aligned}$$

4.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x \wedge z \wedge b \leq b = T(y, z).$$

4.2. $y = 1$, için $T(x, z) \leq T(y, z)$ olduğu açıktır.

5. $x \in [b, 1[$

$x \leq y$ olduğundan, $y = 1$ durumuna bakılması gerekir. Bu durumda $T(x, z)$ ifadesi $z, x \wedge z \wedge a, x \wedge z \wedge b$ ve $x \wedge z$ değerlerinden birine eşittir. $y = 1$ olduğundan $T(y, z) = z$ olduğu açıktır. Böylece olası tüm $T(x, z)$ durumları için $T(x, z) \leq T(y, z)$ eşitsizliği sağlanır.

6. $x \in I_{a,b}$

Bu durumda, her $z \in L$ durumları için $T(x, z) = x \wedge z \wedge a$ olduğundan $T(x, z) \leq T(y, z)$ eşitsizliği her $y, z \in L$ için sağlanır.

(ii) Asosyatiflik:

Herhangi bir $x, y, z \in L$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. x, y ve z değerlerinden birinin 1 e eşit olması durumunda

eşitliğin he zaman sağlanacağı açıktır. Ayrıca $y \in [0, a[$, $y \in I_a^b$ ve $y \in I_{a,b}$ koşullarından biri geçerliyse,

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

Kalan diğer durumlar aşağıda incelenmiştir.

1. $x \in [0, a[$

1.1. $y \in [a, b[$

1.1.1. $z \in [0, a[\cup I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = x \wedge V(y, z) \wedge a = x = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.3 $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y) = x \wedge y \wedge a = x = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.4. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = x \wedge V(y, z \wedge b) \wedge a = x \\ &= x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.5. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x, z) = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2. $y \in [b, 1[$

1.2.1. $z \in [0, a[\cup [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.2. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, b) = x \wedge b \wedge a = x = x \wedge z \wedge a = T(x, z) \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.4. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = x \wedge (z \wedge b) \wedge a = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.5. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x, z) = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3. $y \in I_b^a$

1.3.1. $z \in [0, a[\cup I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = x \wedge V(y \wedge b, z) \wedge a = x \\ &= x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = x \wedge (y \wedge b) \wedge a = x \wedge y = x \\ &= x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.4. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = x \wedge V(y \wedge b, z \wedge b) \wedge a \\ &= x = x \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.5. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge y \wedge z \wedge a = x \wedge y \wedge z \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2. $x \in [a, b[$

2.1. $y \in [a, b[$

2.1.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= V(x, y) \wedge z \wedge a = T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = V(x, V(y, z)) = V(V(x, y), z) \\ &= T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y) = V(x, y) = T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z).$$

2.1.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = V(x, y) \wedge z \wedge a = T(V(x, y), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(x, V(y, z \wedge b)) \\ &= V(V(x, y), z \wedge b) = T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= V(x, y) \wedge z \wedge a = T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2. $y \in [b, 1[$

2.2.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge z \wedge a = T(x, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.2. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = T(T(x, y), z).$$

2.2.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, b) = x = T(x, z) = T(T(x, y), z).$$

2.2.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = x \wedge z \wedge a = T(x, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = V(x, z \wedge b) \\ &= T(x, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.6. $z \in I_{a,b}$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) \wedge a = z \wedge a$$

$$= x \wedge z \wedge a = T(x, z) = T(T(x, y), z).$$

2.3. $y \in I_b^a$

2.3.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= V(x, y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(V(x, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(x, V(y \wedge b, z)) \\ &= V(V(x, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, y \wedge b) = V(x, y \wedge b) \\ &= T(V(x, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = V(x, y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(V(x, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) \\ &= V(V(x, y \wedge b), z \wedge b) = T(V(x, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) \\ &= x \wedge (z \wedge a) \wedge a = z \wedge a = V(x, y \wedge b) \wedge z \wedge a \\ &= T(V(x, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3. $x \in [b, 1[$

3.1. $y \in [a, b[$

3.1.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= y \wedge z \wedge a = T(y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.1.2. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, V(y, z)) = V(y, z) = T(y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y) = y = T(y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.1.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = y \wedge z \wedge a = T(y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.1.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(y, z \wedge b) = T(y, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.1.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= y \wedge z \wedge a = T(y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2. $y \in [b, 1[$

3.2.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= b \wedge z \wedge a = T(b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.2. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = z = T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.2.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, b) = x \wedge b = b = b \wedge z = T(b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = z \wedge b \\ &= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= (x \wedge y) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3. $y \in I_b^a$

3.3.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= (y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(y \wedge b, z) = T(x \wedge y \wedge b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(y \wedge b, z) = T(y \wedge z, b) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, y \wedge b) = y \wedge b \\ &= T(y \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = (y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(y \wedge b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(y \wedge b, z \wedge b) \\ &= T(y \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) = z \wedge a \\ &= (y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(y \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4. $x \in I_a^b$

4.1. $y \in [a, b[$

4.1.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = x \wedge z \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.1.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = x \wedge V(y, z) \wedge a = x \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.1.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y) = x \wedge y \wedge a = x \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.1.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= x \wedge z \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.1.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = x \wedge V(y, z \wedge b) \wedge a = x \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.1.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge a, z) = T(T(x, y), z) \end{aligned}$$

4.2. $y \in [b, 1[$

4.2.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = x \wedge z \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.2.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, z) = x \wedge z \wedge a = x \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.2.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, b) = x \wedge b \wedge a = x \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge a, z) = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.2.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= x \wedge z \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.2.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = x \wedge (z \wedge b) \wedge a \\ &= x \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.2.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge y \wedge z \wedge a = x \wedge z \wedge a \\ &= T(x \wedge a, z) = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3. $y \in I_b^a$

4.3.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = x \wedge z \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = x \wedge V(y \wedge b, z) \wedge a = x \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = x \wedge (y \wedge b) \wedge a = x \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = x \wedge z \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = x \wedge V(y \wedge b, z \wedge b) \wedge a \\ &= x \wedge a = (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

4.3.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) \wedge a = x \wedge z \wedge a \\ &= (x \wedge a) \wedge z \wedge a = T(x \wedge a, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5. $x \in I_b^a$

5.1. $y \in [a, b[$

5.1.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= V(x \wedge b, y) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.1.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = V(x \wedge b, V(y, z)) = V(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(V(x \wedge b, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.1.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y) = V(x \wedge b, y) = T(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.1.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = V(x \wedge b, y) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.1.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(x \wedge b, V(y, z \wedge b)) \\ &= V(V(x \wedge b, y), z \wedge b) = T(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.1.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= V(x \wedge b, y) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y), z) \\ &= T(T(x, y), z) \end{aligned}$$

5.2. $y \in [b, 1[$

5.2.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= (x \wedge b) \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.2.2. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = V(x \wedge b, z) = T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z).$$

5.2.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, b) = x \wedge b = T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z).$$

5.2.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= (x \wedge b) \wedge z \wedge a = T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.2.5. $z \in I_b^a$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = V(x \wedge b, z \wedge b)$$

$$= T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z).$$

5.2.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (y \wedge z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= (x \wedge b) \wedge z \wedge a = T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3. $y \in I_b^a$

5.3.1. $z \in [0, a[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z) = x \wedge z \wedge a = z \\ &= V(x \wedge b, y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3.2. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(x \wedge b, V(y \wedge b, z)) \\ &= V(V(x \wedge b, y \wedge b), z) = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = V(x \wedge b, y \wedge b) \\ &= T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3.4. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a = z \wedge a \\ &= V(x \wedge b, y \wedge b) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3.5. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(x \wedge b, V(y \wedge b, z \wedge b)) \\ &= V(V(x \wedge b, y \wedge b), z \wedge b) = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

5.3.6. $z \in I_{a,b}$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge a) = T(x, z \wedge a) = x \wedge (z \wedge a) \wedge a \\ &= z \wedge a = V(x \wedge b, z \wedge b) \wedge z \wedge a = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

6. $x \in I_{a,b}$

Eğer $T(y, z) = y \wedge z \wedge a$ ise

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge T(y, z) \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a = T(x \wedge y \wedge a, z) \\ &= T(T(x, y), z) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Şimdi $T(y, z)$ nin $y \wedge z \wedge a$ den farklı olduğu durumlara bakalım

6.1. $y \in [a, b[$ ve $z \in I_b^a$

$T(y, z) = V(y, z \wedge b)$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge V(y, z \wedge b) \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

6.2. $y \in [a, b[$ ve $z \in [b, 1[$

$T(y, z) = y$ olduğundan

$$T(x, T(y, z)) = x \wedge y \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a = T(T(x, y), z).$$

6.3. $y \in I_b^a$ ve $z \in [a, b[$

$T(y, z) = V(y \wedge b, z)$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge V(y \wedge b, z) \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

6.4. $y \in I_b^a$ ve $z \in I_b^a$

$T(y, z) = V(y \wedge b, z \wedge b)$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge V(y \wedge b, z \wedge b) \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

6.5. $y \in I_b^a$ ve $z \in [b, 1[$

$T(y, z) = y \wedge z \wedge b$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge (y \wedge z \wedge b) \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

6.6. $y \in [b, 1[$ ve $z \in [a, b[$

$T(y, z) = y$ olduğundan

$$T(x, T(y, z)) = x \wedge y \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a = T(T(x, y), z).$$

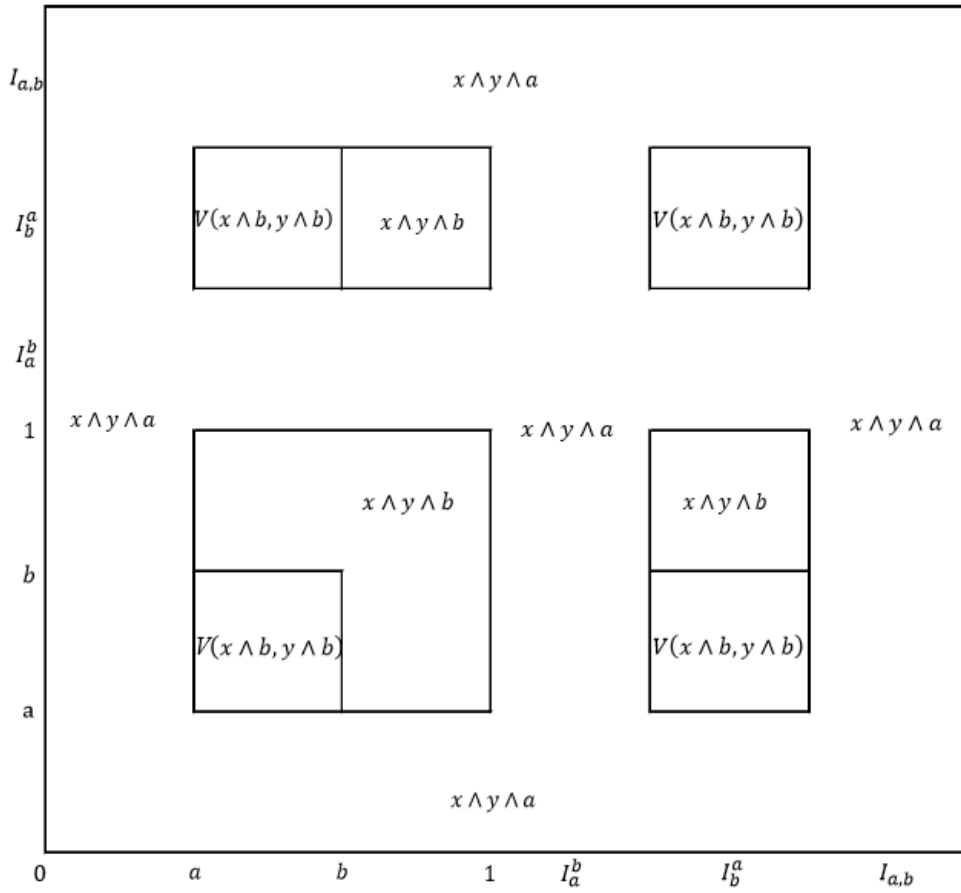
6.7. $y \in [b, 1[$ ve $z \in I_b^a$

$T(y, z) = y \wedge z \wedge b$ olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= x \wedge (y \wedge z \wedge b) \wedge a = x \wedge a = x \wedge y \wedge z \wedge a \\ &= T(T(x, y), z) \end{aligned}$$

T' nin değişme ve birim eleman özelliğini sağlandığı açıktır. Böylece T bir t-normdur.

Teorem 2.1. de verilen t-norm T aşağıdaki gibi tabloda ifade edilmiştir.



Şekil 2. T nin değerleri

Uyarı 2.3. Teorem 2.2 de verilen dönüşüm, $b = 1$ alınması durumunda, Ertuğrul, Karaçal ve Mesiar (2015) tarafından verilen aşağıdaki inşa yöntemi ile çakışır.

$$T(x, y) = \begin{cases} x \wedge y, & 1 \in \{x, y\} \\ V(x, y), & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y \wedge a, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Teorem 2.4. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve V, L' 'nin $[a, b]$ alt aralığında bir t-norm olsun. O halde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur:

$T(x, y)$

$$= \begin{cases} V(x \wedge b, y \wedge b) & (x, y) \in [a, b]^2 \cup [a, b[\times I_b^a \cup I_b^a \times [a, b[\cup I_b^a \times I_b^a \\ x \wedge y \wedge b & (x, y) \in [b, 1[\times I_b^a \\ x \wedge y & (x, y) \in [a, b[\times [b, 1[\cup [b, 1[\times [a, b[\cup [b, 1]^2 \\ x \wedge y & 1 \in \{x, y\} \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

İspat:

(i) Monotonluk: $x \leq y$ olan her $x, y, z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$ olduğu gösterilmeli. Eğer $x \in I_a^b \cup I_{a,b}$ ise $T(x, z) = 0$ olduğundan eşitsizlik sağlanır. Eğer $z \in [0, a[\cup I_a^b \cup I_{a,b}$ ise $T(x, z) = 0$ ve $T(y, z) = 0$ her iki tarafta sıfırdır eşitsizlik sağlanır. $z = 1$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır.

Bu durumlar dışında kalan diğer durumlar aşağıda incelenmiştir.

1. $x \in [a, b[$

1.1. $y \in I_b^a$

1.1.1 $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x, z) \leq V(y \wedge b, z) = T(y, z).$$

1.1.2. $z \in I_b^a$

$$T(x, z) = V(x, z \wedge b) \leq V(y \wedge b, z \wedge b) = T(y, z).$$

1.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x \leq y \wedge b = y \wedge z \wedge b = T(y, z).$$

1.2. $y \in [b, 1[$

1.2.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x, z) \leq x \wedge z \leq z = T(y, z).$$

1.2.2. $z \in I_b^a$

$$T(x, z) = V(x, z \wedge b) \leq y \wedge z \wedge b = T(y, z).$$

1.2.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x < b \leq y \wedge z = T(y, z).$$

1.3. $y = 1$. $T(x, z)$ nin $V(x, z)$, x veya $V(x, z \wedge b)$ değerlerinden birine eşittir.

$x \in [a, b[$, $T(x, z) \leq z = T(1, z)$ tüm durumlar için sağlanır.

2. $x \in I_b^a$

2.1. $y \in [b, 1[$

2.1.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, z) = V(x \wedge b, z) \leq x \wedge b \wedge z \leq z = T(y, z).$$

2.1.2. $z \in I_b^a$

$$T(x, z) = V(x \wedge b, z \wedge b) \leq x \wedge z \wedge b \leq y \wedge z \wedge b = T(y, z).$$

2.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, z) = x \wedge z \wedge b \leq y \wedge z = T(y, z).$$

2.2. $y = 1$ durumunda $T(x, z); V(x \wedge b, z), V(x \wedge b, z \wedge b)$ veya $x \wedge z \wedge b$ değerlerinden birine eşittir. Tüm olası durumlar için, $T(x, z) \leq z = T(y, z)$.

3. $x \in [b, 1[$.

$x \leq y$ olduğundan $y = 1$ durumunu araştırmak yeterlidir. Bu durumda $T(x, z); z, x \wedge z \wedge b, x \wedge z$ değerlerinden birine eşittir. Tüm olası durumlar için $T(x, z) \leq z = T(1, z)$ ifadesi sağlanır.

(ii) Asosyatiflik:

Her $x, y, z \in L$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. x, y ve z den birisi 1 ise eşitlik açıkça her zaman sağlanır. Ayrıca $x \in [0, a[\cup I_a^b \cup I_{a,b}$, $y \in [0, a[\cup I_a^b \cup I_{a,b}$ ve $z \in [0, a[\cup I_a^b \cup I_{a,b}$ durumlarında $T(x, T(y, z)) = 0 = T(T(x, y), z)$ dir. Kalan tüm olası durumlar aşağıda incelenmiştir.

1. $x \in [a, b[$

1.1. $y \in [a, b[$

1.1.1. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = V(x, V(y, z)) = V(V(x, y), z) \\ &= T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(x, V(y, z \wedge b)) = V(V(x, y), z \wedge b) \\ &= T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y) = V(x, y) = T(V(x, y), z) = T(T(x, y), z).$$

1.2. $y \in I_b^a$

1.2.1. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(x, V(y \wedge b, z)) \\
&= V(V(x, y \wedge b), z) = T(V(x, y \wedge b), z) \\
&= T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

1.2.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) \\
&= V(V(x, y \wedge b), z \wedge b) = T(V(x, y \wedge b), z) \\
&= T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

1.2.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, T(y \wedge z \wedge b)) = T(x, y \wedge b) = V(x, y \wedge b) \\
&= T(V(x, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

1.3. $y \in [b, 1[$

1.3.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = T(T(x, y), z).$$

1.3.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = V(x, z \wedge b) \\
&= T(x, z) = T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

1.3.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z) = x = T(x, z) = T(T(x, y), z).$$

2. $x \in I_b^a$

2.1. $y \in [a, b[$

2.1.1. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z)) = V(x \wedge b, V(y, z)) \\
&= V(V(x \wedge b, y), z) = T(V(x \wedge b, y), z) \\
&= T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

2.1.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned}
T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(x \wedge b, V(y, z \wedge b)) \\
&= V(V(x \wedge b, y), z \wedge b) = T(V(x \wedge b, y), z) \\
&= T(T(x, y), z).
\end{aligned}$$

2.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y) = V(x \wedge b, y) = T(V(x \wedge b, y), z)$$

$$= T(T(x, y), z).$$

2.2. $y \in I_b^a$

2.2.1. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(x \wedge b, V(y \wedge b, z)) \\ &= V(V(x \wedge b, y \wedge b), z) = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(x \wedge b, V(y \wedge b, z \wedge b)) \\ &= V(V(x \wedge b, y \wedge b), z \wedge b) = T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = V(x \wedge b, y \wedge b) \\ &= T(V(x \wedge b, y \wedge b), z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3. $y \in [b, 1[$

2.3.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = V(x \wedge b, z) = T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z).$$

2.3.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = V(x \wedge b, z \wedge b) \\ &= T(x \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) \wedge b = x \wedge b = T(x \wedge b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3. $x \in [b, 1[$

3.1. $y \in [a, b[$

3.1.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, V(y, z)) = V(y, z) = T(y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.1.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y, z \wedge b)) = V(y, z \wedge b) = T(y, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.1.3. $z \in [b, 1[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y) = y = T(y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.2. $y \in I_b^a$

3.2.1. $z \in [a, b[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z)) = V(y \wedge b, z) = T(y \wedge b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, V(y \wedge b, z \wedge b)) = V(y \wedge b, z \wedge b) \\ &= T(y \wedge b, z) = T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.2.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, y \wedge b) = y \wedge b = T(y \wedge b, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3. $y \in [b, 1[$

3.3.1. $z \in [a, b[$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, z) = z = T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z).$$

3.3.2. $z \in I_b^a$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z \wedge b) = T(x, z \wedge b) = z \wedge b = T(x \wedge y, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

3.3.3. $z \in [b, 1[$

$$\begin{aligned} T(x, T(y, z)) &= T(x, y \wedge z) = x \wedge y \wedge z = x \wedge b = T(x \wedge y, z) \\ &= T(T(x, y), z). \end{aligned}$$

T' nin değişme ve birim eleman özelliğini sağladığı açıktır. Böylece T bir t-normdur.

Teorem 2.4. te tanımlanan t-norm T de $x, y \in [b, 1[$ iken T nin değeri b alınır, Teorem 2.4. te verilen, sınırlı kafesler üzerinde başka bir inşaa yöntemi elde edilir:

Teorem 2.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve V, L' nin $[a, b]$ alt aralığında bir t-norm olsun. O halde, aşığıdaki şekilde tanımlanan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur:

$T(x, y)$

$$= \begin{cases} V(x \wedge b, y \wedge b) & (x, y) \in [a, b]^2 \cup [a, b[\times I_b^a \cup I_b^a \times [a, b[\cup I_b^a \times I_b^a \\ x \wedge y \wedge b & (x, y) \in [b, 1[\times I_b^a \cup I_b^a \times [b, 1[\\ x \wedge y & (x, y) \in [a, b[\times [b, 1[\cup [b, 1[\times [a, b[\\ b & (x, y) \in [b, 1]^2 \\ x \wedge y & 1 \in \{x, y\} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

İspat: Teorem 2.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Uyarı 2.6. Teorem 2.4 ve Teorem 2.5. te verilen inşa yöntemleri, $b = 1$ alınırsa açıkça, Çaylı'nın 2018 de yaptığı aşağıdaki şekilde verilen inşa yöntemiyle çakışır:

$(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes ve $a \in L \setminus \{0, 1\}$ olsun. $V, [a, 1]$ alt aralığında bir t-norm bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur.

$$T(x, y) = \begin{cases} V(x, y) & x, y \in [a, 1[\\ x \wedge y & 1 \in \{x, y\} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Önerme 2.7. Teorem 2.4'te verilen t-norm L nin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışları t-norm V ye eşit, olan t-normların en küçüğüdür.

İspat: $T^*, [a, b]$ alt aralığında kısıtlanışı t-norm V ye eşit olan herhangi bir keyfi t-norm olsun.

- (i) $(x, y) \in [a, b]^2$ olsun. O halde $T = T^*$ dir.
- (ii) $(x, y) \in [a, b[\times I_b^a$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = V(x, y \wedge b) = T^*(x, y \wedge b) \leq T^*(x, y).$
- (iii) $(x, y) \in I_b^a \times [a, b[$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = V(x \wedge b, y) = T^*(x \wedge b, y) \leq T^*(x, y).$
- (iv) $(x, y) \in I_b^a \times I_b^a$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = V(x \wedge b, y \wedge b) = T^*(x \wedge b, y \wedge b) \leq T^*(x, y).$
- (v) $(x, y) \in [b, 1[\times I_b^a$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = x \wedge y \wedge b \leq y \wedge b = V(b, y \wedge b) = T^*(b, y \wedge b) \leq T^*(x, y).$
- (vi) $(x, y) \in I_b^a \times [b, 1[$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = x \wedge y \wedge b \leq x \wedge b = V(x \wedge b, b) = T^*(x \wedge b, b) \leq T^*(x, y).$
- (vii) $(x, y) \in [a, b[\times [b, 1[$ olsun. O halde,
 $T(x, y) = x \wedge y \leq x = V(x, b) = T^*(x, b) \leq T^*(x, y).$

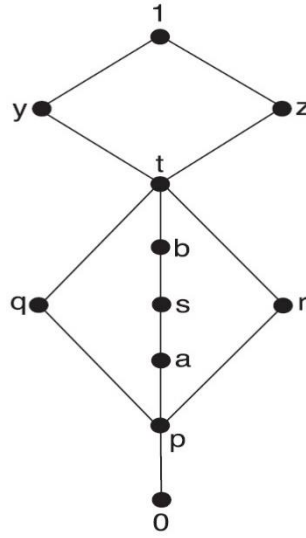
- (viii) $(x, y) \in [b, 1[\times [a, b[$ olsun. O halde,

$$T(x, y) = x \wedge y \leq y = V(b, y) = T^*(b, y) \leq T^*(x, y).$$
- (ix) $(x, y) \in [b, 1]^2$ olsun. O halde,

$$T(x, y) = b = V(b, b) = T^*(b, b) \leq T^*(x, y).$$
- (x) $x = 1$ veya $y = 1$ olsun. T ve T^* t-norm olduğundan $T(x, y) = T^*(x, y)$ eşitliği açıktır.
- (xi) Geri kalan tüm durumlar için $T(x, y) = 0$ olduğundan, $T(x, y) \leq T^*(x, y)$ olduğu açıktır.

$T(x, y) \leq T^*(x, y)$ olduğundan, tüm $(x, y) \in L$ durumları için, $T \leq T^*$ sağlanıyor. Böylece Teorem 2.5. te verilen t-norm, L nin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı V t-normuna eşit olan t-normların en küçüğüdür.

Uyarı 2.8 Teorem 2.2., Teorem 2.4 ve Teorem 2.5. te verilen inşa yöntemlerinin birbirinden farklı olduğunu görmek için aşağıdaki örnek incelensin:



Şekil 3. L nin kafes diyagramı

Örnek 2.9. Yukarıda şekil 2.2 de verilen kafes diyagramı ile karakterize edilen L örgüsünü ele alalım. $[a, b]$ üzerinde $W = \wedge$ olsun. T_1 , T_2 ve T_3 sırasıyla Teorem 2.2, Teorem 2.4 ve Teorem 2.5 yöntemleriyle oluşturulan t-normlardır.

Burada $T_1(p, s) = p \neq 0 = T_2(p, s)$, $T_1(p, s) = p \neq 0 = T_3(p, s)$ ve $T_2(y, y) = y \neq b = T_3(y, y)$ dir. Bu nedenle T_1 , T_2 ve T_3 t-normları birbirinden farklıdır. Farklılıkların t-norm V nin seçiminden bağımsız olduğuna dikkat edin.

Teorem 2.10. L bir sınırlı kafes ve W , L nin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde bir t-konorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlanan $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir t-konormdur:

$$S(x, y) = \begin{cases} W(x \vee a, y \vee a) & (x, y) \in]a, b]^2 \cup]a, b] \times I_a^b \cup I_a^b \times]a, b] \cup I_a^b \times I_a^b \\ x \vee y \vee a & (x, y) \in]0, a] \times I_a^b \cup I_a^b \times]0, a] \\ x \vee y & (x, y) \in]a, b] \times]0, a] \cup]0, a] \times]a, b] \text{ veya } 0 \in \{x, y\} \\ a & (x, y) \in]0, a]^2 \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

İspat:

(i) Monotonluk: $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $x \leq y$ olacak şekilde $S(x, z) \leq S(y, z)$ olduğunu gösterelim. İspatta x, y, z tüm olası durumları verilmiştir.

$x \in]b, 1] \cup I_b^a \cup I_{a,b}$, $z \in]b, 1] \cup I_b^a \cup I_{a,b}$ ve $y \in]b, 1] \cup I_b^a \cup I_{a,b}$ durumlarında $S(x, z) = 1, S(y, z) = 1$ olduğundan $S(x, z) \leq S(y, z)$ tüm x durumları için eşitsizlik sağlanır.

1. $x \in]0, a]$

1.1. $y \in]0, a]$

1.1.1 $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = a \leq a = S(y, z).$$

1.1.2. $z \in]a, b]$

$$S(x, z) = x \vee z = z \leq y \vee z = S(y, z).$$

1.1.3. $z \in I_a^b$

$$S(x, z) = x \vee z \vee a = z \vee a \leq y \vee z \vee a = S(y, z).$$

1.2. $y \in]a, b]$

1.2.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = a \leq y \vee z = S(y, z).$$

1.2.2. $z \in]a, b]$

$$S(x, z) = x \vee z = z = z \vee a \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

1.2.3. $z \in I_a^b$

$$S(x, z) = x \vee z \vee a = z \vee a \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

1.3. $y \in I_a^b$

1.3.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = a \leq y \vee z \vee a = S(y, z).$$

1.3.2. $z \in]a, b]$

$$S(x, z) = x \vee z = z = z \vee a \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

1.3.3. $z \in I_a^b$

$$S(x, z) = x \vee z \vee a = z \vee a \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

2. $x \in]a, b]$

2.1. $y \in]a, b]$

2.1.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = S(y, z).$$

2.1.2. $z \in]a, b]$

$$S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

2.1.3. $z \in I_a^b$

$$S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

2.2. $y \in I_a^b$

2.2.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = y \vee z \vee a = S(y, z).$$

2.2.2. $z \in]a, b] \cup I_a^b$

$$S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

3. $x \in I_a^b$

3.1. $y \in]a, b]$

3.1.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, z) = x \vee z \vee a = x \vee a \leq y = y \vee z = S(y, z).$$

3.1.2. $z \in]a, b] \cup I_a^b$

$$S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) \leq W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z).$$

S fonksiyonu monotondur.

(ii) Asosyatiflik: Her $x, y, z \in L$ için $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ eşitliğinin sağlandığını gösterilmelidir.

- x, y, z , den en az birinin 0 olması durumunda birleşme özelliğinin sağlandığı açıktır.

- $z \in]b, 1] \cup I_b^a \cup I_{a,b}$ ve $y \in]b, 1] \cup I_b^a \cup I_{a,b}$ durumlarında $S(y, z) = 1$ olduğundan $S(x, S(y, z)) = S(x, 1) = 1 = S(1, z) = S(x, S(y, z))$ eşitliği sağlanır.

1. $x \in]0, a]$

1.1. $y \in]0, a]$

1.1.1. $z \in]0, a]$

$$S(x, S(y, z)) = S(x, a) = a = S(a, z) = S(S(x, y), z).$$

1.1.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z) = S(x, z) = x \vee z = z = (x \vee y) \vee z \\ &= S(x \vee y, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.1.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, z \vee a) = x \vee z \vee a = z \vee a \\ &= a \vee z \vee a = S(a, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2. $y \in]a, b]$

1.2.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z) = S(x, y) = x \vee y = y = y \vee z = S(y, z) \\ &= S(x \vee y, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z)) = x \vee W(y, z) \\ &= W(y, z) = W(y \vee a, z \vee a) = S(y, z) = S(x \vee y, z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.2.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z \vee a)) \\ &= x \vee W(y, z \vee a) = W(y, z \vee a) = W(y \vee a, z \vee a) \\ &= S(y, z) = S(x \vee y, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3. $y \in I_a^b$

1.3.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, y \vee a) = x \vee y \vee a = y \vee a \\ &= (y \vee a) \vee z = S(y \vee a, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y \vee a, z)) \\ &= x \vee W(y \vee a, z) = W(y \vee a, z \vee a) \\ &= W((y \vee a) \vee a, z \vee a) = S(y \vee a, z) \\ &= S(x \vee y \vee a, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

1.3.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = x \vee W(y \vee a, z \vee a) \\ &= W(y \vee a, z \vee a) = W((y \vee a) \vee a, z \vee a) S(y \vee a, z) \\ &= S(x \vee y \vee a, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2. $x \in]a, b]$

2.1. $y \in]0, a]$

2.1.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, a) = x \vee a = x = x \vee z = S(x, z) = S(x \vee y, z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z) = S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) = S(x, z) \\ &= S(x \vee y, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.1.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, z \vee a) = W(x \vee a, (z \vee a) \vee a) \\ &= W(x, z \vee a) = W(x \vee a, z \vee a) = S(x, z) = S(x \vee y, z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2. $y \in]a, b]$

2.2.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z) = S(x, y) = W(x \vee a, y \vee a) = W(x, y) \\ &= W(x, y) \vee z = S(W(x, y), z) = S(W(x \vee a, y \vee a), z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.2.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z)) \\ &= W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a) \vee a) = W(x, W(y, z)) \\ &= W(W(x, y), z) = W(W(x \vee a, y \vee a) \vee a, z \vee a) \end{aligned}$$

$$= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).$$

2.2.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z \vee a)) \\ &= W(x \vee a, W(y, z \vee a) \vee a) = W(x, W(y, z \vee a)) \\ &= W(W(x, y), z \vee a) = W(W(x, y) \vee a, z \vee a) \\ &= S(W(x, y), z) = S(W(x \vee a, y \vee a), z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3. $y \in I_a^b$

2.3.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, y \vee a) = W(x \vee a, (y \vee a) \vee a) \\ &= W(x, y \vee a) = W(x, y \vee a) \vee z = S(W(x, y \vee a), z) \\ &= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y \vee a, z)) \\ &= W(x \vee a, W(y \vee a, z) \vee a) = W(x, W(y \vee a, z)) \\ &= W(W(x, y \vee a), z) = W(W(x, y \vee a) \vee a, z \vee a) \\ &= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

2.3.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y \vee a, z \vee a)) \\ &= W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a) \vee a) = W(x, W(y \vee a, z \vee a)) \\ &= W(W(x, y \vee a), z \vee a) = W(W(x \vee a, y \vee a) \vee a, z \vee a) \\ &= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

3. $x \in I_a^b$

3.1. $y \in]0, a]$

3.1.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, a) = x \vee a \vee a = x \vee a = (x \vee a) \vee z = S(x \vee a, z) \\ &= S(x \vee y \vee a, z) = S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

3.1.2. $z \in]a, b]$

$$S(x, S(y, z)) = S(x, y \vee z) = S(x, z) = W(x \vee a, z \vee a) = W(x \vee a, z)$$

$$\begin{aligned}
&= W(x \vee a \vee a, z \vee a) = S(x \vee a, z) = S(x \vee y \vee a, z) \\
&= S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.1.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, z \vee a) = W(x \vee a, z \vee a \vee a) \\
&= W(x \vee a, z \vee a) = S(x, z) = S(x \vee y, z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.2. $y \in]a, b]$

3.2.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z) = S(x, y) = W(x \vee a, y \vee a) = W(x \vee a, y) \\
&= W(x \vee a, y) \vee z = S(W(x \vee a, y), z) \\
&= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.2.2. $z \in]a, b]$

$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z)) \\
&= W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a) \vee a) = W(x \vee a, W(y, z)) \\
&= W(W(x \vee a, y), z) = W(W(x \vee a, y \vee a) \vee a, z \vee a) \\
&= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.2.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y, z \vee a)) \\
&= W(x \vee a, W(y, z \vee a) \vee a) = W(x \vee a, W(y, z \vee a)) \\
&= W(W(x \vee a, y) \vee a, z \vee a) = S(W(x \vee a, y), z) \\
&= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.3. $y \in I_a^b$

3.3.1. $z \in]0, a]$

$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, y \vee z \vee a) = S(x, y \vee a) = W(x \vee a, (y \vee a) \vee a) \\
&= W(x \vee a, y \vee a) = W(x \vee a, y \vee a) \vee z \\
&= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.3.2. $z \in]a, b]$

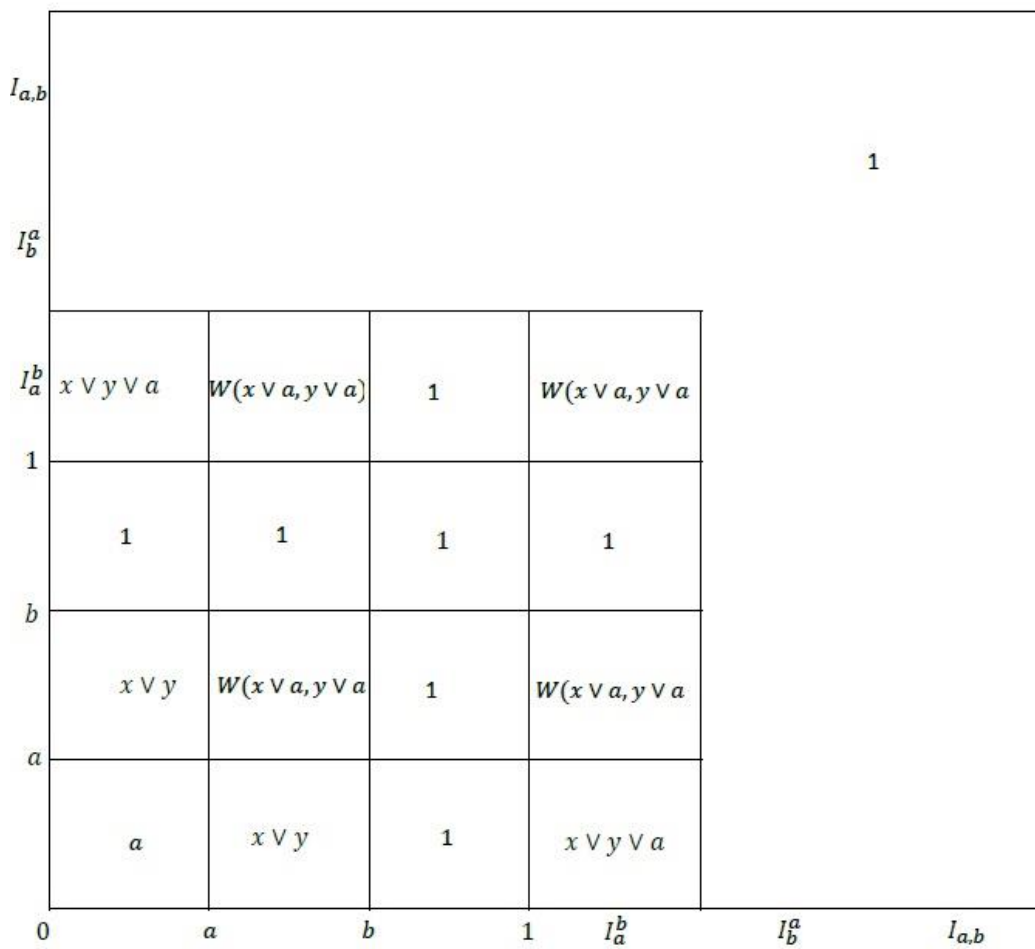
$$\begin{aligned}
S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y \vee a, z)) \\
&= W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a) \vee a) = W(x \vee a, W(y \vee a, z)) \\
&= W(W(x \vee a, y \vee a), z) = W(W(x \vee a, y \vee a) \vee a, z \vee a) \\
&= S(W(x \vee a, y \vee a), z) = S(S(x, y), z).
\end{aligned}$$

3.3.3. $z \in I_a^b$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= S(x, W(y \vee a, z \vee a)) = S(x, W(y \vee a, z \vee a)) \\ &= W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a) \vee a) = W(x \vee a, W(y \vee a, z \vee a)) \\ &= W(W(x \vee a, y \vee a) \vee a, z \vee a) = S(W(x \vee a, y \vee a), z) \\ &= S(S(x, y), z). \end{aligned}$$

S' nin değişme ve birim eleman özelliğini sağladığı açıktır. Böylece S bir t-konormdur.

Teorem 2.6’da verilen t-konorm S aşağıdaki tabloda ifade edilmiştir.



Şekil 4. S t-konormu

Uyarı 2.11. Teorem 2.9 da verilen inşa yöntemi, $a=0$ alınırsa, açıkça, Çaylı (2018) nın yaptığı ve aşağıdaki şekilde verilen inşa yöntemiyle çıkarılır:

$(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes, $b \in L \setminus \{0, 1\}$ ve $W, [a, b]$ alt aralığında bir t-konorm olsun. Bu taktirde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-konormdur:

$$S(x, y) = \begin{cases} W(x, y) & x, y \in [0, b[\\ x \vee y & 0 \in \{x, y\} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Önerme 2.12. Yukarıdaki teoremden verilen t-konorm S, L üzerinde tanımlı ve L nin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanması W konormuna eşit olan tüm t-konormların en büyüğüdür.

İspat: S^* $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanması t-konorm W ye eşit olan herhangi bir keyfi t-norm olsun.

- (ii) $(x, y) \in]a, b]^2$ olsun. O halde $S = S^*$ dir.
- (iii) $(x, y) \in]a, b] \times I_a^b$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = W(x, y \vee a) = S^*(x, y \vee a) \geq S^*(x, y).$
- (iv) $(x, y) \in I_a^b \times]a, b]$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = W(x \vee a, y) = S^*(x \vee a, y) \geq S^*(x, y).$
- (v) $(x, y) \in I_a^b \times I_a^b$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = W(x \vee a, y \vee a) = S^*(x \vee a, y \vee a) \geq S^*(x, y).$
- (vi) $(x, y) \in]0, a] \times I_a^b$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = x \vee y \vee a \geq y \vee a = W(a, y \vee a) = S^*(a, y \vee a) \geq S^*(x, y).$
- (vii) $(x, y) \in I_a^b \times]0, a]$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = x \vee y \vee a \geq x \vee a = W(x \vee a, a) = S^*(x \vee a, a) \geq S^*(x, y).$
- (viii) $(x, y) \in]a, b] \times]0, a]$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = x \vee y \geq x = W(x, a) = S^*(x, a) \geq S^*(x, y).$
- (ix) $(x, y) \in]0, a] \times]a, b]$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = x \vee y \geq y = W(a, y) = S^*(a, y) \geq S^*(x, y).$
- (x) $(x, y) \in]0, a]^2$ olsun. O halde,
 $S(x, y) = a = W(a, a) = S^*(a, a) \geq S^*(x, y).$

(xi) $0 \in \{x, y\}$ olsun. S ve S^* t-konorm olduğundan $S(x, y) = S^*(x, y)$ eşitliği açıktır.

(xii) Geri kalan tüm durumlar için $S(x, y) = 1$ olduğundan, $S(x, y) \geq S^*(x, y)$ olduğu açıktır.

$S(x, y) \geq S^*(x, y)$ olduğundan, tüm $(x, y) \in L$ durumları için, $S \geq S^*$ dır.

Böylece Teorem 2.9 da verilen t-konorm S , $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı t-konorm W olan tüm t-konormların en büyüğüdür.



3.SONUÇ

1.Üçgensel normların inşası için üç yöntem ortaya konulmuştur. Ortaya konan bu yöntemlerin hangi durumlarda daha önce yapılan çalışmalarla çakıştığı gösterilmiştir.

2. Sınırlı bir L kafesinin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı V t-normu olan t-normların en küçüğü belirlenmiştir.

3. Sınırlı bir L kafesinin $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı W t-konormu olan t-normların en büyüğü belirlenmiştir. İnşa edilen bu t-konormun, $[a, b]$ alt aralığına kısıtlanışı W t-konormu olan tüm t-konormların en büyüğü olduğu gösterilerek Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal (2019)'ın açık problem olarak bıraktıkları soruya da kısmen cevap verilmiştir.

KAYNAKÇA

- Abel, N.H. (1826). Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von z, x und y ist.. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 11-15. Erişim tarihi: 12.04.2022, <http://eudml.org/doc/183045>.
- Aşıcı, E. ve Mesiar, R. (2021). On generating uninorms on some special classes of bounded lattices. Fuzzy Sets and Systems, 439, 102-125. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.06.010>.
- Brouwer, L.E.J. (1910). Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. Mathematische Annalen. 69, 181–203. <https://doi.org/10.1007/BF01456870>.
- Aczél, J. (1966). Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, New York.
- Birkhoff, G. (1967). Lattice theory (3rd ed.). Providence: American Mathematical Society, Col Pub.
- Çaylı, G.D. (2018). On a new class of t-norms and t-conorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 332, 129-143, <https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.07.015>.
- Çaylı, G.D. (2020). Nullnorms on bounded lattices derived from t-norms and t-conorms. Information Sciences, 512, 1134-1154. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.10.059>.
- Dan, Y., Hu B. Q. ve Qiao, J. (2019) New construction of t-norms and t-conorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 395, 40-70 <https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.05.017>.
- Ertuğrul, Ü., Karaçal, F. ve Mesiar, R. (2015) Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices, International Journal of Intelligent Systems, 30, 807-817 <https://doi.org/10.1002/int.21713>.
- Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu M. N. ve Karaçal, F. (2019) Some new construction methods for t-norms on bounded lattices, International Journal of General Systems, 48:7,775-791 <https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1658757>.
- Ertuğrul, Ü. and Yeşilyurt, M. (2020). Ordinal sums of triangular norms on bounded lattices. Information Sciences, vol.517, pp.198-216.
- Faucett, W. M. (1955). Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents, Proceedings of the American Mathematical Society, 6, 741 – 747. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1955-0071712-X>
- Hosszú, M. (1954). Some Functional Equations Related with the Associativity Law, Publ. Math. Debrecen, 3, 205 – 214.

- Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj.(2005) $\vee$ - distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 341-352. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.06.013>.
- Karaçal, F., İnce, M. A. ve Mesiar, R. (2015). Nullnorms on bounded lattices. Information Sciences, 325, 227-236. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.06.052>.
- Kesicioğlu, M. N. (2012). t-normlardan elde edilen t-kısmen sıra. (doktora tezi). <https://tez.yok.gov.tr>. 306774
- Kesicioğlu, M. N., Karaçal, F. ve Mesiar, R. (2015). Order-equivalent triangular norms. Fuzzy Sets and Systems, 268, 59-71 <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.10.006>.
- Menger, K. (1942). Statistical metrics, Proceedings national academy sciences of the United States of America, 28, 535-537.
- Menger, K. (1951). Probabilistic theories of relations, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 37, 178-180. <https://doi.org/10.2307/88063>.
- Medina, J. (2010) A characterization of ordinal sums being t-norms on bounded lattices by ordinal sums of drastic t-norms, International Conference on Fuzzy Systems <https://doi.org/10.1109/FUZZY.2010.5584754>.
- Medina, J. (2012). Characterizing when an ordinal sum of t-norms is a t-norm on bounded lattices. Fuzzy Sets and Systems. 202,75-88 <https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.03.002>.
- Ouyang, Y. ve Zhang, H.P. (2020). Constructing uninorms via closure operators on a bounded lattice. Fuzzy Sets and Systems, 395, 93-106. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.05.006>.
- Saminger, S. (2006). On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices. Fuzzy Sets and Systems, 157, 1403–1416. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.12.021>.
- Schweizer, B. ve Sklar, A. (1958). Espaces metriques aleatoires, comptes rendus aead. Sei. Paris 247,2092-2094.
- Schweizer, B. ve Sklar, A. (1960). Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10, 313 – 334.
- Schweizer, B. ve Sklar, A.(1961). Associative fuctions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8, 169-186.
- Schweizer, B. ve Sklar, A. (1963). Associative fuctions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10, 69-81.
- Saminger-Platz, S., Klement E. P. ve Mesiar, R. (2008) On extensions of triangular norms on bounded lattices, Indagationes Mathematicae, 19, 135-150. [https://doi.org/10.1016/S0019-3577\(08\)80019-5](https://doi.org/10.1016/S0019-3577(08)80019-5)

Wald, A. (1943). On a statistical generalization of metric spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 29, 196-197. <https://doi.org/10.2307/87776>

