

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

**SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİ-NULLNORMLAR VE
NULL-UNİNORMLAR VE ÖZELLİKLERİ**

İLKNUR KAYA SEÇKİN

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

JÜRİ ÜYELERİ

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL

RİZE-2022

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİ-NULLNORMLAR VE NULL-
UNİNORMLAR VE ÖZELLİKLERİ**

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE danışmanlığında, İlknur KAYA SEÇKİN tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 24/01/2022 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE	
Üye	: Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL	

Doç. Dr. Ahmet YANIK
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-Nullnormlar ve Null-Uninormlar ve Özellikleri incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak yapılmıştır.

Çalışma süresi boyunca bana her daim yardımcı olan, değerli fikirleriyle bana rehberlik eden, ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE'ye en içten dileklerimle saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU ve Sayın Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans öğrenim sürecinde bana katkı sağlayan Matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Her daim yanımda olan sevgili eşim Serhat SEÇKİN'e çok teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, varlığıyla bana güç veren, bu çalışmanın tamamlanmasında ve bugünlere gelmemde büyük emeği olan değerli ailem; babam Şevket KAYA'ya ve annem Aysel KAYA'ya sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İlknur KAYA SEÇKİN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-Nullnormlar ve Null-Uninormlar ve Özellikleri ” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 24/01/2022

İlknur KAYA SEÇKİN

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİ-NULLNORMLAR VE NULL-UNİNORMLAR VE ÖZELLİKLERİ

İlknur KAYA SEÇKİN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif İNCE

Uninormlar ve nullnormlar, üzerine birçok çalışmalar yapılmış, fuzzy niceleyiciler, uzman sistemler ve nöral ağlar gibi birçok uygulamalı bilim için son derece kullanışlı olan t-normların ve t-konormların genelleştirmesidir. ([4,7])

Birim reel aralıktaki uninormlar 1996 yılında Yager ve Rybalov([3]) tarafından tanımlanmış ve birim reel aralıkta uninormlar hakkında birçok çalışma yapılmıştır. 2015'te Karaçal ve Mesiar([8]) tarafından sınırlı kafesler üzerinde uninormlar tanımlandı ve özellikleri incelendi.

Nullnormlar üzerine ilk kez 1999'da Mas, Mayor ve Torrens([4]) tarafından ve 2001'de Calvo, De Baets ve Fodor ([6]) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda birim reel aralık üzerinde nullnormların özellikleri verilmiştir. Sınırlı kafesler üzerinde ilk çalışma 2015'te Karaçal, İnce ve Mesiar ([9]) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, bir L sınırlı kafesi üzerinde, a sıfır elemana sahip en büyük ve en küçük nullnormlar elde edilmiştir. Bu çalışmadan sonra, birçok araştırmacı sınırlı kafesler üzerinde tanımlı nullnormları incelemişlerdir([8,11,12]).

Uni-nullnormlar ve null-uninormlar; 2017 yılında Sun, Wang ve Qu ([10]) tarafından tanımlanan, nullnormların ve uninormların genelleştirilmesi olan çok önemli fonksiyonlardır. Bu çalışmada, birim reel aralık üzerinde uni-nullnormların ve null-uninormların birbirlerinin dual ikilileri olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, sınırlı kafesler üzerinde uni-nullnormlar 2019'da Wang, Zhan ve Liu ([11]) tarafından çalışılmıştır ve çalışmalarında, bir L sınırlı kafesi üzerinde uni-nullnormların tanımı ve özellikleri verilmiştir.

Bu çalışmada, sınırlı kafesler üzerinde, uni-nullnormlar ve null-uninormların bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde, $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı null-uninormlar ve $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı uni-nullnormların en küçük ve en büyüklerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bunun için öncelikle kafesler, t-normlar(t-konormlar), uninormlar ve nullnormların temel özelliklerinden bahsedilecektir.

2022, 56 sayfa.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı Kafes, Uninorm, Nullnorm, Uni-nullnorm, Null-uninorm.

ABSTRACT

UNI-NULLNORMS AND NULL-UNINORMS ON BOUNDED LATTICES AND THEIR PROPERTIES

İlknur KAYA SEÇKİN

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics
Master Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet Akif İNCE

Uninorms and nullnorms are generalizations of t-norms and t-conorms that have been extensively studied and are extremely useful for many applied sciences such as fuzzy quantifiers, expert systems, and neural networks([4,7]).

Uninorms in the unit real interval were defined by Yager and Rybalov ([3]) in 1996 and many studies were conducted on uninorms in the unit real interval. In 2015, uninorms on bounded lattices were defined and their properties were investigated by Karaçal and Mesiar([8]).

Nullnorms were first studied by Mas, Mayor and Torrens([4]) in 1999 and by Calvo, De Baets and Fodor ([6]) in 2001. In these studies, the properties of nullnorms on the unit real interval are given. The first study on bounded lattices was done by Karaçal, İnce and Mesiar ([9]) in 2015. In this study, the largest and smallest nullnorms with a zero element are obtained on a bounded lattice L . After this study, many researchers examined nullnorms defined on bounded lattices([8,11,12]).

Uni-nullnorms and null-uninorms; They are very important functions, which are the generalization of nullnorms and uninorms, defined by Sun, Wang, and Qu ([10]) in 2017. In this study, it is shown that uni-nullnorms and null-uninorms are dual pairs of each other on the unit real interval. Then, uni-nullnorms on bounded lattices were studied by Wang, Zhan and Liu ([11]) in 2019, and in their study, the definition and properties of uni-nullnorms on an L bounded lattice are given.

In this study, some properties of uni-nullnorms and null-uninorms will be examined on bounded lattices. In addition, it is aimed to determine the smallest and largest of $\{0, e\}_a$ 2-neutral element null-uninorms and $\{e, 1\}_a$ 2-neutral element uni-nullnorms on an arbitrary bounded lattice L . For this, firstly the basic properties of lattices, t-norms (t-conorms), uninorms and nullnorms will be mentioned.

2022, 56 sayfa

Keywords: Bounded Lattice, Uninorm, Nullnorm, Uni-nullnorm, Null-uninorm.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	VI
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
TABLolar DİZİNİ.....	VII
SEMBOL VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	VIII
1. ÖN BİLGİLER.....	1
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler.....	1
1.2. Kafesler.....	2
1.3. Üçgensel Normlar.....	4
1.4. Üçgensel Konormlar.....	7
1.5. $[0,1]$ Birim Reel Aralık Üzerinde Uni-nullnormlar ve Null-uninormlar.....	9
1.6. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar.....	12
1.7. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormlar.....	13
1.8. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-nullnormlar ve Null-uninormlar.....	15
1.8.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-nullnormlar.....	15
1.8.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Null-uninormlar.....	18
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	19
2.1. Bir L Sınırlı Kafesi Üzerinde Tanımlı $\{e, 1\}_a$ 2-nötral Elemanlı En Küçük ve En Büyük Uni-nullnormlar.....	19
2.2. Bir L Sınırlı Kafesi Üzerinde Tanımlı $\{0, e\}_a$ 2-nötral Elemanlı En Küçük ve En Büyük Null-uninormlar	51
3. Tartışma ve Sonuçlar.....	55
KAYNAKLAR.....	56

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. <i>L</i> kafesi.....	48
Şekil 2. <i>L</i> kafesi.....	49
Şekil 3. <i>L</i> kafesi.....	52



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. L üzerinde $UN_{\wedge}$	17
Tablo 2. L üzerinde $UN_{\vee}$	17
Tablo 3. L üzerinde V_1	20
Tablo 4. L üzerinde V_2	37
Tablo 5. L üzerinde $\underline{V}$ ve $\overline{V}$	48
Tablo 6. L üzerinde U_1	50
Tablo 7. L üzerinde U_2	51
Tablo 8. L üzerinde $\underline{U}$ ve $\overline{U}$	52

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman Değil
$\subseteq$	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
$\leq$	Küçük veya Eşit
$\geq$	Büyük veya Eşit
$\cap$	Arakesit İşlemi
$\cup$	Birleşim İşlemi
$\wedge$	Kafeste İnfimum
$\vee$	Kafeste Supremum
$\ $	Kıyaslanamaz
t-norm	Üçgensel Norm
t-konorm	Üçgensel Conorm
$[a, b]$	Kapalı Aralık
$[a, b[$ ($]a, b]$)	Yarı Açık Aralık
(a, b)	Açık Aralık
L	Kafes
P	Kısmen Sıralı Küme
$L_1 \times L_2$	L_1 ve L_2 Kafeslerinin Kartezyen Çarpımı
$\sup X$	X 'in Üst Sınırlarının En Küçüğü
$\inf X$	X 'in Alt Sınırlarının En Büyüğü
U	Uninorm
N	Nullnorm
UN	Uni-nullnorm
NU	Null-uninorm

1. ÖN BİLGİLER

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler [1]

Tanım 1.1.1. P bir küme ve $\leq$ P üzerinde bir bağıntı olsun ($\leq \subseteq P \times P$). Eğer her $a, b, c \in P$ için,

$$(P_1) \quad (a, a) \in \leq \quad \text{(Yansıma)}$$

$$(P_2) \quad (a, b), (b, a) \in \leq \Rightarrow a = b \quad \text{(Ters simetrik)}$$

$$(P_3) \quad (a, b), (b, c) \in \leq \Rightarrow (a, c) \in \leq \quad \text{(Geçişme)}$$

özellikleri sağlanıyorsa " $\leq$ " bağıntısına P üzerinde bir kısmen sıralama (sıralama) bağıntısı denir. $(a, b) \in \leq \Rightarrow a \leq b$ ile gösterilir. Buradaki P kümesine kısmen sıralı küme (sıralı) veya poset denir ve $(P, \leq)$ ile gösterilir.

$x \leq y$ veya $y \leq x$ koşulunu sağlayan x ve y elemanlarına kıyaslanabilir denir. $x \leq y$ ve $x \neq y \Rightarrow x < y$ ile gösterilir.

Bir kısmen sıralı kümede herhangi iki elemanın kıyaslanması gerekmez. Eğer $x \not\leq y$ ve $y \not\leq x$ oluyorsa, x ile y elemanlarına kıyaslanamaz elemanlar denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Herhangi iki elemanı kıyaslanabilen bir kısmen sıralı kümeye tam sıralı küme (veya zincir, lineer sıralı küme) denir.

Tanım 1.1.2. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, $X \subseteq P$ ve $a \in X$ olsun.

i) Eğer her $x \in X$, $a \leq x$ ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanıdır denir ve $EkeX$ ile gösterilir.

ii) Eğer her $x \in X$, $x \leq b$ ise bu b elemanına X kümesinin en büyük elemanıdır denir ve $EbeX$ ile gösterilir.

P kısmen sıralı kümesinin en küçük elemanı varsa " 0 " ile gösterilir.

P kısmen sıralı kümesinin en büyük elemanı varsa " 1 " ile gösterilir.

Bu elemanlara P sıralı kümesinin evrensel sınırları denir.

Tanım 1.1.3. $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine sınırlı kısmen sıralı küme denir : $\Leftrightarrow 0, 1 \in P$.

Tanım 1.1.4. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun.

i) $a \in P$ elemanına P nin bir maksimal elemanı denir : $\Leftrightarrow a \leq x$ olan her $x \in P$ için $a = x$. P nin tüm maksimal elemanlarının kümesi $MaksP$ ile gösterilir.

ii) $b \in P$ elemanına P nin bir minimal elemanı denir : $\Leftrightarrow x \leq b$ olan her $x \in P$ için $b = x$. P nin tüm minimal elemanlarının kümesi $MinP$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5. $(X, \leq_1)$ ve $(Y, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeler olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

i) f 'e sıra korur(izoton) dönüşüm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$.

ii) f 'e izomorfi denir : $\Leftrightarrow f$, 1-1, örten ve $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$.

iii) f 'e otomorfi denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$, 1-1, örten ve $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_1 f(b)$.

iv) f 'e ters sıra korur(antiton) denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Rightarrow f(b) \leq_2 f(a)$.

v) f 'e dual izomorfi denir : $\Leftrightarrow f$, 1-1, örten ve $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(b) \leq_2 f(a)$.

vi) Bir X sıralı kümesine self-dual denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$, dual izomorfisi mevcuttur. Yani, f , 1-1, örten ve $a, b \in X$ için, $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(b) \leq_1 f(a)$.

1.2. Kafesler [1]

Tanım 1.2.1. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun.

i) Her $x \in X$ için $a \leq x$ olan $a \in P$ elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir. X kümesinin tüm alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. Böylece,

$$\underline{X} = \{a \in P \mid \text{her } x \in X \text{ için } a \leq x\}.$$

ii) Her $x \in X$ için $x \leq b$ olan $b \in P$ elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. X kümesinin tüm üst sınırlarının kümesi $\bar{X}$ ile gösterilir. Böylece,

$$\bar{X} = \{b \in P \mid \text{her } x \in X \text{ için } x \leq b\}.$$

iii) X alt kümesinin alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı mevcutsa, böyle bir elemana X kümesinin infimumu denir ve $\inf X$ ile gösterilir. Böylece, $\inf X = Ebe\bar{X}$.

iv) X alt kümesinin üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanı mevcutsa, böyle bir elemana X kümesinin supremumu denir ve $\sup X$ ile gösterilir. Böylece, $\sup X = Eke\bar{X}$.

Eğer mevcutsa infimum ve supremum elemanları tektir.

$X = \{a, b\}$ alınırsa,

$$\sup X = \sup\{a, b\} = a \vee b$$

$$\inf X = \inf\{a, b\} = a \wedge b \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 1.2.2. $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesine kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için, $a \vee b, a \wedge b \in L$.

Tanım 1.2.3. Bir L kafesine tam kafes denir : $\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq L$ için, $\wedge X, \vee X \in L$.

Uyarı 1.2.4.

i) Her tam kafes sınırlıdır.

ii) Herhangi bir kafesin duali de yine bir kafestir.

iii) Her sonlu kafes veya sonlu uzunluklu kafes bir tam kafestir.

iv) Her zincir bir kafestir.

Tanım 1.2.5. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X 'e L kafesinin bir alt kafesi denir : $\Leftrightarrow a, b \in X$ için $a \vee b, a \wedge b \in X$.

Uyarı 1.2.6. Bir alt kafesin ve kafesin kendisinin $\inf$ ve $\sup$ işlemleri aynıdır.

Boş küme, kafesin kendisi ve tek elemanlı alt küme bir alt kafestir.

Daha genel olarak, bir L kafesinde $a, b \in L$ için $a \leq b$ olsun.

$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ kapalı aralığı L kafesinin bir alt kafesidir.

Tanım 1.2.7. $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ kısmen sıralı iki küme olsun.

$P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$ şeklinde tanımlanır. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P \times Q$ için, $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) : \Leftrightarrow x_1 \leq_P x_2$ ve $y_1 \leq_Q y_2$ bağıntısı tanımlansın.

$(P \times Q, \leq)$ bir kısmen sıralı kümedir. Bu kısmen sıralı kümeye P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpımı denir.

Teorem 1.2.8. L ve M herhangi iki kafes olsun. Bu takdirde, $L \times M$ direkt çarpımı da bir kafestir.

Lemma 1.2.9. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(L_1) \quad x \wedge x = x, \quad x \vee x = x \quad (\text{İdempotent})$$

$$(L_2) \quad x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x \quad (\text{Değişme})$$

$$(L_3) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad (\text{Birleşme})$$

$$(L_4) \quad x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \quad (\text{Yok Etme})$$

Üstelik, $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ ve $x \wedge y = x$.

Lemma 1.2.10. Herhangi bir kafeste supremum ve infimum işlemleri izotondur.

Eğer $y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$.

Lemma 1.2.11. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafes ve $x, y, z \in L$ olsun.

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ve $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ sağlanır.

Lemma 1.2.12. Herhangi bir kafesin elemanları modüler eşitsizliği sağlar.

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

1.3. Üçgensel Normlar [5]

Tanım 1.3.1. Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) birim aralık $[0,1]$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemidir:

$$(T_1) \quad T(x, y) = T(y, x) \quad (\text{Değişme})$$

$$(T_2) \quad T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad (\text{Birleşme})$$

$$(T_3) \quad y \leq z \text{ ise } T(x, y) \leq T(x, z) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$(T_4) \quad T(x, 1) = 1 \quad (\text{Sınır Şartı})$$

Örnek 1.3.2. Temel t-normlar olan T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki şekilde verilir.

$$T_M(x, y) = \min(x, y) \quad (\text{Minimum t-norm})$$

$$T_P(x, y) = x \cdot y \quad (\text{Çarpım t-norm})$$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \quad (\text{Lukasiewicz t-norm})$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y) & \text{A.T.} \end{cases} \quad (\text{Drastic Çarpım})$$

Uyarı 1.3.3.

i) Tanım 1.3.1. den dolayı, herhangi bir t-norm T ve her $x \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0$$

$$T(1, x) = T(x, 1) = x$$

ii) Bir T t-normunun (T_3) ile verilen ikinci bileşene göre monotonluğu (T_1) değişmelilik özelliği ile birlikte her iki bileşene göre monotonluğuna eşdeğerdir, yani

$$x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \text{ için } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \text{ sağlanır.}$$

Tanım 1.3.4.

i) Eğer T_1, T_2 t-normları için her $(x, y) \in [0, 1]^2$ için, $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa T_1 t-normuna T_2 den daha zayıf veya T_2 t-normuna T_1 den daha güçlü t-norm denir ve $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani, her $(x, y) \in [0, 1]^2$ için,

$$T_1(x, y) \leq T_2(x, y) \text{ ve } \exists (x_0, y_0) \in [0, 1]^2 \text{ için } T_1(x_0, y_0) \neq T_2(x_0, y_0) \text{ ise}$$

$$T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0) \text{ dır ve } T_1 < T_2 \text{ olarak gösterilir.}$$

Uyarı 1.3.5.

i) Uyarı 1.3.3.'ün bir sonucu olarak tüm t-normlar $[0, 1]^2$ nin sınırları üzerinde çakıştırlar.

$$ii) \quad T_D < T_L < T_P < T_M$$

Önerme 1.3.6. $A,]0,1[\subseteq A \subseteq [0,1]$ olacak şekilde bir küme ve $*$: $A^2 \rightarrow A$, her $x, y \in A$ için $(T_1) - (T_3)$ özelliklerini sağlayan ve $x * y \leq \min(x, y)$ olacak şekilde bir ikili işlem olsun bu takdirde,

$$T(x, y) = \begin{cases} x * y & (x, y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ \min(x, y) & A.T. \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Üstelik, t-norm $T, (A \setminus \{1\})^2$ ye kısıtlanması $*$ ikili işlemi ile çakışan bir t-normdur.

Önerme 1.3.7.

i) Her $x \in [0,1]$ için $T(x, x) = x$ 'i sağlayan tek t-norm T_M -minimum t-normdur.

ii) Her $x \in [0,1[$ için $T(x, x) = 0$ 'ı sağlayan tek t-norm T_D -drastic çarpımdır.

Uyarı 1.3.8.

i) (T_2) birleşme kuralı kullanılarak, her t-norm T indüksiyon ile tek bir şekilde aşağıdaki gibi $n - li$ işleme genişletilebilir.

Her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n -sıralısı için,

$$T_{i=1}^n(x_i) := T(T_{i=1}^{n-1}x_i, x_n) := T(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Eğer özel olarak, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ ise,

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(x, x, \dots, x) = x_T^{(n)} \text{ ile gösterilir.}$$

Her $x \in [0,1]$ için,

$$x_T^{(0)} = 1 \quad \text{ve} \quad x_T^{(1)} = x \text{ olarak tanımlanır.}$$

ii) Her bir t-norm T' nin, T_M minimum t-normundan zayıf olması durumu onu sonsuz(sayılabılır) işleme genişletme imkanı verir. $[0,1]$ 'in elemanlarının her bir $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi için,

$$T_{i=1}^{\infty}(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i=1}^n(x_i)$$

Örnek 1.3.9.

T_M minimum, T_P çarpım, T_L Lukasiewicz ve T_D Drastic çarpım t-normlarının $n - li$ genişlemeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i$$

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n x_i - (n-1), 0\right)$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i & , \quad \text{eğer } j \neq i \text{ için } x_j = 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad A.T \end{cases}$$

1.4. Üçgensel Konormlar [5]

Tanım 1.4.1. Bir üçgensel konorm(veya kısaca t-konorm) $[0,1]$ birim aralığı üzerinde $(T_1) - (T_3)$ şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için $S(x, 0) = x$ eşitliğini sağlayan bir

$S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyondur.

(S_4) $S(x, 0) = x$ (Sınır Şartı).

T-norm ve t-konormlar, yalnızca sınır şartında farklılık gösterir.

T-norm ve t-konormlar bazı durumlarda dualdirler.

Örnek 1.4.2. S_M, S_P, S_L, S_D temel t-konormları sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_M(x, y) = \max(x, y) \quad (\text{Maksimum t-konorm})$$

$$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y \quad (\text{İstatistiksel Toplam})$$

$$S_L(x, y) = \min(x + y, 1) \quad (\text{Lukasiewicz t-konorm})$$

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in]0,1[^2 \\ \max(x, y) & A.T. \end{cases} \quad (\text{Drastik Toplam})$$

Önerme 1.4.3. Bir $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in [0,1]$ için, $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ olacak şekilde bir t-norm T mevcuttur.

Uyarı 1.4.4.

i) Önerme 1.4.3. ile her bir t-norm, bir t-konormun dual işlemidir.

$(T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L)$ ve (T_D, S_D) ikilileri dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

ii) Duallik sırayı değiştirir. Yani eğer T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ise onların dual t-konormları olan S_1 ve S_2 arasında $S_2 \leq S_1$ ilişkisi vardır.

$T_D < T_L < T_P < T_M$ olduğundan, $S_M < S_P < S_L < S_D$ dir.

iii) Bir t-konorm S' 'yi, uyarı 1.3.8. dekine benzer şekilde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n –sıralılarına ve $(x_i)_{i \in I} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$S_{i=1}^n(x_i) = S(S_{i=1}^{n-1}x_i, x_n) = S(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$S_{i=1}^{\infty}x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{i=1}^n x_i)$$

Örnek 1.4.5.

Temel t-konormların n –li genişlemeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$S_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \left(\sum_{i=1}^n x_i, 1 \right)$$

$$S_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i & , \quad j \neq i \text{ için } x_j = 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad \text{A.T.} \end{cases}$$

$$S_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Uyarı 1.4.6. Bir L sınırlı kafesi üzerinde, birim reel aralığa benzer şekilde t-normlar ve t-konormlar tanımlanabilir.

Tanım1.4.7. L bir sınırlı kafes olsun. L üzerinde bir t-norm T , değişme, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Örnek 1.4.8.

$$i) T_W(x, y) = \begin{cases} x & y = 1 \text{ ise,} \\ y & x = 1 \text{ ise,} \\ 0 & \text{A.T.} \end{cases}$$

olsun. O halde T_W , L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_W = T_D$ 'dir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm L üzerindeki en küçük t-normdur.

ii) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_{\wedge}(x, y) = x \wedge y$ ile verilen infimumdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_{\wedge} = T_M$ ' dir.

Tanım 1.4.9. L bir sınırlı kafes olsun. Bir L üzerinde t -konorm S , değişme, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 0- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Örnek 1.4.10.

$$i) S_W(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \text{ ise,} \\ y & x = 0 \text{ ise,} \\ 1 & \text{A.T.} \end{cases}$$

olsun. O halde S_W , L üzerinde bir t -konormdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $S_W = S_D$ 'dir. L üzerindeki keyfi t -konorm S için $S \leq S_W$ olduğundan bu t -konorm L üzerindeki en büyük t -konormdur.

ii) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en küçük t -konorm $S_V(x, y) = x \vee y$ ile verilen supremumdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $S_V = S_M$ ' dir.

1.5. $[0, 1]$ Birim Reel Aralık Üzerinde Uni-nullnormlar ve Null-uninormlar

Tanım 1.5.1. [2] $U: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir uninorm denir : $\Leftrightarrow U$, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve her $x \in [0,1]$, $U(x, e) = x$ olan $e \in [0,1]$ nötral elemana sahiptir.

Açıkça, $e = 1$ ise U bir t -norm, $e = 0$ ise U bir t -konormdur.

Tanım 1.5.2. [5] $N: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir nullnorm denir : $\Leftrightarrow N$, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve her $x \in [0,1]$, $N(x, a) = a$ olan $a \in [0,1]$ sıfır elemanına sahiptir. Buna göre;

$$i) \text{ Her } x \in [0, a], N(x, 0) = x$$

$$ii) \text{ Her } x \in [a, 1], N(x, 1) = x$$

Açıkça, $a = 0$ ise N bir t -norm, $a = 1$ ise N bir t -konormdur.

Buradan, uninormlar ve nullnormlar t -normlar ve t -konormların birer genelleştirmeleridir.

Tanım 1.5.3. [9] $V: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ değişmeli bir ikili işlem ve

$0 \leq e_1 \leq a \leq e_2 \leq 1$ olan $\{e_1, e_2\}_a$ elemanlarına V nin 2-nötral elemanı denir : $\Leftrightarrow$

$$i) \text{ Her } x \in [0, a], V(e_1, x) = x$$

ii) Her $x \in [a, 1]$, $V(e_2, x) = x$

Tanım 1.5.4. [9] $U: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir 2-uninorm denir : $\Leftrightarrow U$, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve $\{e_1, e_2\}_a$ 2-nötral elemanı sahiptir.

Uyarı 1.5.5. [9] T-normlar ve t-konormlar 2-uninormların özel durumlarıdır.

i) $e_1 = a = e_2 = 1$ veya $0 = e_1 = a \leq e_2 = 1$ ise 2-uninorm bir t-normdur.

ii) $e_1 = a = e_2 = 0$ veya $0 = e_1 \leq a = e_2 = 1$ ise 2-uninorm bir t-konormdur.

Tanım 1.5.6. [13] $UN: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir uni-nullnorm denir : $\Leftrightarrow UN$, her $x \in [e, 1]$ için $UN(x, a) = a$ ve $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanı sahip olan bir 2-uninormdur.

Buradan açıkça; $0 \leq e \leq a \leq 1$ için,

i) Her $x \in [0, a]$, $UN(e, x) = x$

ii) Her $x \in [a, 1]$, $UN(x, 1) = x$

Tanım 1.5.7. [13] $NU: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir null-uninorm denir : $\Leftrightarrow NU$, her $x \in [0, e]$, $NU(x, a) = a$ ve $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanı sahip olan bir 2-uninormdur.

Buradan açıkça; $0 \leq a \leq e \leq 1$ için,

i) Her $x \in [0, a]$, $NU(0, x) = x$

ii) Her $x \in [a, 1]$, $NU(x, e) = x$

Uyarı 1.5.8. [13]

i) $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnorm UN , $e = 0$ ise bir nullnorm, $a = 1$ ise bir uninorm, $e = 0$ ve $a = 1$ ise bir t-konorm, $e = a = 0$ veya $e = a = 1$ ise bir t-normdur.

ii) $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninorm NU , $e = 1$ ise bir nullnorm, $a = 0$ ise bir uninorm, $e = 1$ ve $a = 0$ ise bir t-norm, $e = a = 0$ veya $e = a = 1$ ise bir t-konormdur.

Örnek 1.5.9. [13] $0 < e < a < 1$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $UN: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi, $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur:

$$UN(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in [0, e]^2 \\ \max(x, y) & (x, y) \in [e, a]^2 \\ a & (x, y) \in [e, a] \times]a, 1] \cup]a, 1] \times [e, a] \cup]a, 1]^2 \\ \min(x, y) & A.T. \end{cases}$$

Örnek 1.5.10. [13] $0 < e < a < 1$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $UN: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi, $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur:

$$UN(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \cup [a, 1]^2 \\ \max(x, y) & (x, y) \in [0, e] \times]e, a] \cup]e, a] \times [0, e] \\ a & A.T. \end{cases}$$

Örnek 1.5.11. [13] $0 < a < e < 1$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $NU: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi, $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninormdur:

$$NU(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in]e, 1]^2 \\ \min(x, y) & (x, y) \in [a, e]^2 \\ a & (x, y) \in [0, a[\times [a, e] \cup [a, e] \times [0, a[\cup]0, a]^2 \\ \max(x, y) & A.T. \end{cases}$$

Örnek 1.5.12. [13] $0 < a < e < 1$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $NU: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi, $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninormdur:

$$NU(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & (x, y) \in [0, a]^2 \cup [e, 1]^2 \\ \min(x, y) & (x, y) \in [a, e[\times [e, 1] \cup [e, 1] \times [a, e[\\ a & A.T. \end{cases}$$

Önerme 1.5.13. [13] $x \leq e \leq y \leq a$ veya $y \leq e \leq x \leq a$ ise, bu takdirde $\min(x, y) \leq UN(x, y) \leq \max(x, y)$ dir.

Önerme 1.5.14. [13] $e \leq x \leq a \leq y$ veya $e \leq y \leq a \leq x$ ise, bu takdirde $UN(x, y) = a$ dır.

Önerme 1.5.15. [13] $x \leq e < a \leq y$ veya $y \leq e < a \leq x$ ise, bu takdirde $\min(x, y) \leq UN(x, y) \leq a$ dır.

1.6 ve 1.7 de sırasıyla, bir L sınırlı kafesi üzerinde uninorm ve nullnorm, tanımları verilir.

1.6. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.6.1. [9] L bir sınırlı kafes olsun. $U: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine, L üzerinde bir uninorm denir : $\Leftrightarrow U$, değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve $e \in L$ nötral elemana sahiptir.

$A(e)$ ile aşağıdaki küme gösterilsin:

$$A(e) =]0, e] \times [e, 1[\cup [e, 1[\times]0, e]$$

Önerme 1.6.2. [9] L bir sınırlı kafes ve U , L üzerinde $e \in L \setminus \{0,1\}$ nötral elemana sahip bir uninorm olsun. Buna göre aşağıdakiler elde edilir:

- i) $(x, y) \in A(e)$ için $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$
- ii) $(x, y) \in L \times [0, e]$ için $U(x, y) \leq x$
- iii) $(x, y) \in [0, e] \times L$ için $U(x, y) \leq y$
- iv) $(x, y) \in L \times [e, 1]$ için $x \leq U(x, y)$
- v) $(x, y) \in [e, 1] \times L$ için $y \leq U(x, y)$

Örnek 1.6.3. [9] L bir sınırlı kafes ve $e \in L \setminus \{0,1\}$ olsun. $T_e, [0, e]$ üzerinde bir t-norm ve $S_e, [e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise, bu takdirde $U_T: L^2 \rightarrow L$ ve $U_S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonları aşağıdaki tanımları ile L üzerinde birer uninormdur:

$$U_T(x, y) = \begin{cases} T_e(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ x \vee y & (x, y) \in [0, e] \times]e, 1[\cup]e, 1[\times [0, e] \\ y & x \in [0, e], y \parallel e \\ x & y \in [0, e], x \parallel e \\ 1 & A.T. \end{cases}$$

$$U_S(x, y) = \begin{cases} S_e(x, y) & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ x \wedge y & (x, y) \in [0, e[\times [e, 1] \cup [e, 1] \times [0, e[\\ y & x \in [e, 1], y \parallel e \\ x & y \in [e, 1], x \parallel e \\ 0 & A.T. \end{cases}$$

Örnek 1.6.4. [9] $e \in L \setminus \{0,1\}$ olsun. Örnek 1.6.3. te, $T_e = T_\wedge$ ve $S_e = S_\vee$, alınırsa, aşağıdaki uninormlar sırasıyla L üzerinde e nötral elemana sahip en büyük ve en küçük uninormlardır:

$$U_{T_\wedge}(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & (x, y) \in [0, e]^2 \\ x \vee y & (x, y) \in [0, e] \times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e] \\ y & x \in [0, e], y \parallel e \\ x & y \in [0, e], x \parallel e \\ 1 & A.T. \end{cases}$$

$$U_{S_\vee}(x, y) = \begin{cases} x \vee y & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ x \wedge y & (x, y) \in [0, e[\times [e, 1] \cup [e, 1] \times [0, e[\\ y & x \in [e, 1], y \parallel e \\ x & y \in [e, 1], x \parallel e \\ 0 & A.T. \end{cases}$$

1.7. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormlar

Tanım 1.7.1. [10] L bir sınırlı kafes olsun. $N_a: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine, L üzerinde bir nullnorm denir : $\Leftrightarrow N_a$, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve bir $a \in L$ sıfır elemana sahip öyle ki;

i) $x \leq a$ için $N_a(x, 0) = x$

ii) $x \geq a$ için $N_a(x, 1) = x$.

Önerme 1.7.2. [10] L bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve N_a , L üzerinde a sıfır eleman sahip bir nullnorm olsun. Bu takdirde;

i) $N_a: [0, a]^2 \rightarrow [0, a]$, $[0, a]$ üzerinde bir t-konormdur.

ii) $N_a: [a, 1]^2 \rightarrow [a, 1]$, $[a, 1]$ üzerinde bir t-normdur.

D_a ve $\mathbb{I}_a$ ile aşağıdaki kümeler gösterilsin:

$$D_a = [0, a[\times]a, 1] \cup]a, 1] \times [0, a[$$

$$\mathbb{I}_a = \{x \in L \mid x \parallel a\}$$

Önerme 1.7.3. [10] L bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve N_a , L üzerinde a sıfır eleman sahip bir nullnorm olsun. Bu takdirde;

i) Her $(x, y) \in D_a$ için $N_a(x, y) = a$

ii) Her $(x, y) \in [a, 1]^2 \cup [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1]$ için $a \leq N_a(x, y)$

iii) Her $(x, y) \in [0, a]^2 \cup [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a]$ için $N_a(x, y) \leq a$

iv) Her $(x, y) \in L \times [a, 1]$ için $N_a(x, y) \leq y$

v) Her $(x, y) \in [a, 1] \times L$ için $N_a(x, y) \leq x$

vi) Her $(x, y) \in [0, a] \times L$ için $x \leq N_a(x, y)$

vii) Her $(x, y) \in L \times [0, a]$ için $y \leq N_a(x, y)$

viii) Her $(x, y) \in [0, a]^2$ için $x \vee y \leq N_a(x, y)$

ix) Her $(x, y) \in [a, 1]^2$ için $N_a(x, y) \leq x \wedge y$

x) Her $(x, y) \in [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$ için $(x \wedge a) \vee (y \wedge a) \leq N_a(x, y)$

xi) Her $(x, y) \in [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$ için $N_a(x, y) \leq (x \vee a) \wedge (y \vee a)$

Örnek 1.7.4. [10] L bir sınırlı kafes ve $a \in L \setminus \{0, 1\}$ olsun. $S, [0, a]$ üzerinde bir t-konorm ve $T, [a, 1]$ üzerinde bir t-norm ise aşağıdaki şekilde tanımlanan $N_a^S: L^2 \rightarrow L$ ve $N_a^T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonları L üzerinde birer nullnormdur:

$$N_a^S(x, y) = \begin{cases} S(x, y) & (x, y) \in [0, a]^2 \\ a & (x, y) \in [a, 1]^2 \cup [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup D_a \\ S(x \wedge a, y \wedge a) & (x, y) \in [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a \\ x \wedge y & A.T. \end{cases}$$

$$N_a^T(x, y) = \begin{cases} T(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ a & (x, y) \in [0, a]^2 \cup [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup D_a \\ T(x \vee a, y \vee a) & (x, y) \in [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a \\ x \vee y & A.T. \end{cases}$$

Örnek 1.7.5. [10] L bir sınırlı kafes ve $a \in L \setminus \{0, 1\}$ olsun. Örnek 1.7.4. de $T = T_\wedge$ ve $S = S_\vee$ alınırsa, aşağıdaki nullnormlar sırasıyla L üzerinde a sıfır elemana sahip en küçük ve en büyük nullnormlardır:

$$N_a^\vee(x, y) = \begin{cases} x \vee y & (x, y) \in [0, a]^2 \\ a & (x, y) \in [a, 1]^2 \cup [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup D_a \\ (x \wedge a) \vee (y \wedge a) & (x, y) \in [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a \\ x \wedge y & A.T. \end{cases}$$

$$N_a^\wedge(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ a & (x, y) \in [0, a]^2 \cup [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup D_a \\ (x \vee a) \wedge (y \vee a) & (x, y) \in [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a \\ x \vee y & A.T. \end{cases}$$

1.8. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-nullnormlar ve Null-uninormlar:

2-uninormlar, $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki tanımına benzer şekilde bir sınırlı L kafesi üzerinde de tanımlanabilir. Buna göre, sınırlı kafesler üzerinde uni-nullnormların ve null-uninormların tanımları verilebilir:

1.8.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uni-nullnormlar

Uyarı 1.8.1.1. Uni-nullnormların tanımının bir sonucu olarak, L sınırlı kafesinde $0 \leq e \leq a \leq 1$ olup,

i) e ile kıyaslanamayıp a dan küçük olan elemanların kümesi I_e ile,

ii) a ile kıyaslanamayıp e den büyük olan elemanların kümesi I_a ile,

iii) Hem e ile hem de a kıyaslanamayan elemanların kümesi $I_{e,a}$ ile gösterilecektir. Böylece, $I_e = \{x \in L: x \parallel e \text{ ve } x < a\}$, $I_a = \{x \in L: x \parallel a \text{ ve } x > e\}$ ve $I_{e,a} = \{x \in L: x \parallel e \text{ ve } x \parallel a\}$ kümeleri elde edilir.

Tanım 1.8.1.2. [14] L bir sınırlı kafes olsun. $UN: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine bir uni-nullnorm denir : $\Leftrightarrow UN, x \in [e, 1]$ için $UN(x, a) = a$ olan ve $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemana sahip olan bir 2-uninormdur.

Önerme 1.8.1.3. [14] L bir sınırlı kafes ve UN, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnorm olsun. Bu takdirde;

i) $U^* = UN|_{[0,a]^2}: [0, a]^2 \rightarrow [0, a]$, $[0, a]$ üzerinde bir uninormdur.

ii) $N^* = UN|_{[e,1]^2}: [e, 1]^2 \rightarrow [e, 1]$, $[e, 1]$ üzerinde bir nullnormdur.

iii) $T_1^* = UN|_{[0,e]^2}: [0, e]^2 \rightarrow [0, e]$, $[0, e]$ üzerinde bir t-normdur.

iv) $S^* = UN|_{[e,a]^2}: [e, a]^2 \rightarrow [e, a]$, $[e, a]$ üzerinde bir t-konormdur.

v) $T_2^* = UN|_{[a,1]^2}: [a, 1]^2 \rightarrow [a, 1]$, $[a, 1]$ üzerinde bir t-normdur.

Örnek 1.8.1.4. [15] L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $0 \leq e < a < 1$ olsun. T_1 $[0, e]$ üzerinde bir t-norm, S $[e, a]$ üzerinde bir t-konorm ve T_2 $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm

ise, bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlanan $UN: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemi L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur:

$$UN(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ S(x, y) & (x, y) \in [e, a]^2 \\ y & (x, y) \in [0, e] \times ([0, a] \setminus [0, e]) \\ x & (x, y) \in ([0, a] \setminus [0, e]) \times [0, e] \\ S(x \vee e, y \vee e) & (x, y) \in ([0, a] \setminus [0, e])^2 \setminus [e, a]^2 \\ T_2(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ a & A.T. \end{cases}$$

Önerme 1.8.1.5. [14] L bir sınırlı kafes, UN L , üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnorm olsun.

- i)** Her $(x, y) \in [0, a] \times [0, e] \cup I_e \times [0, e] \cup [a, 1] \times L$ için $UN(x, y) \leq x$.
- ii)** Her $(x, y) \in [0, e] \times [0, a] \cup [0, e] \times I_e \cup L \times [a, 1]$ için $UN(x, y) \leq y$.
- iii)** Her $(x, y) \in [0, a] \times [e, 1] \cup [0, a] \times I_a \cup I_e \times I_a \cup I_e \times [e, 1]$ için $UN(x, y) \geq x$.
- iv)** Her $(x, y) \in [e, 1] \times [0, a] \cup [e, 1] \times I_e \cup I_a \times I_e \cup I_a \times [0, a]$ için $UN(x, y) \geq y$.
- v)** Her $(x, y) \in [0, e]^2$ için $UN(x, y) \leq x \wedge y$.
- vi)** Her $(x, y) \in [e, a]^2$ için $x \vee y \leq UN(x, y) \leq a$.
- vii)** Her $(x, y) \in [a, 1]^2$ için $a \leq UN(x, y) \leq x \wedge y$.
- viii)** Her $(x, y) \in [e, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [e, a]$ için $UN(x, y) = a$.
- ix)** Her $(x, y) \in [0, e[\times]e, a] \cup]e, a] \times [0, e[$ için $x \wedge y \leq UN(x, y) \leq x \vee y$.
- x)** Her $(x, y) \in [e, a] \times I_a \cup I_a \times [e, a] \cup I_a \times I_a$ için $UN(x, y) \geq (x \wedge a) \vee (y \wedge a)$.
- xi)** Her $(x, y) \in [a, 1] \times I_a \cup I_a \times [a, 1] \cup I_a \times I_a$ için $UN(x, y) \leq (x \vee a) \wedge (y \vee a)$.
- xii)** Her $(x, y) \in [0, a] \times L \cup L \times [0, a] \cup I_e \times L \cup L \times I_e$ için

$$UN(x, y) \leq a.$$

xiii) Her $(x, y) \in [a, 1] \times [e, 1] \cup [e, 1] \times [a, 1] \cup I_a \times [a, 1] \cup [a, 1] \times I_a$ için $UN(x, y) \geq a$.

Önerme 1.8.1.6. L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L \setminus \{0, 1\}$ için $e \leq a$ olsun.

$z \in I_{e,a}$ ve $z \wedge a \leq e$ ise $z \wedge a = z \wedge e$.

Örnek 1.8.1.7. [14] L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L \setminus \{0, 1\}$ için $e \leq a$ olsun. T_1 $[0, e]$ üzerinde bir t-norm, S $[e, a]$ üzerinde bir t-konorm ve T_2 $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm ise aşağıdaki şekilde tanımlanan $UN_\wedge: L^2 \rightarrow L$ ve $UN_\vee: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonları L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı birer uni-nullnormdurlar:

$$UN_\wedge(x, y) = \begin{cases} S(x, y) & (x, y) \in [e, a]^2 \\ T_2(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y & (x, y) \in [0, e[\times]0, a] \cup]e, a] \times [0, e[\\ & \cup [0, e[\times I_e \cup I_e \times [0, e[\cup I_e \times I_e \\ y & (x, y) \in [e, a[\times I_e \\ x & (x, y) \in I_e \times [e, a[\\ a & A.T. \end{cases}$$

$$UN_\vee(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ T_2(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \vee y & (x, y) \in [0, a] \times]e, a] \cup]e, a] \times [0, e] \\ & \cup]e, a] \times I_e \cup I_e \times]e, a] \cup I_e \times I_e \\ y & (x, y) \in [0, e] \times I_e \\ x & (x, y) \in I_e \times [0, e] \\ a & A.T. \end{cases}$$

$I_{e,a}$	a			
I_a	a			
I_e	$x \wedge y$	y	a	$x \wedge y$
1	a		$T_2(x, y)$	a
a	$S(x, y)$		x	a
e	$x \wedge y$	a		$x \wedge y$
0	e	a	1	I_e

Tablo 1: L üzerinde $UN_\wedge$

$I_{e,a}$	a			
I_a	a			
I_e	y	$x \vee y$	a	$x \vee y$
1	a		$T_2(x, y)$	a
a	$x \vee y$		$x \vee y$	a
e	$T_1(x, y)$	a		x
0	e	a	1	I_e

Tablo 2: L üzerinde $UN_\vee$

1.8.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Null-uninormlar

Tanım 1.8.2.1. [15] L bir sınırlı kafes olsun. $NU: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine bir null-uninorm denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in [0, e]$ için $NU(x, a) = a$ olan ve $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı sahip olan bir 2-uninormdur.

Önerme 1.8.2.2. [15] L bir sınırlı kafes ve NU, L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninorm olsun. Bu takdirde;

i) $U^* = NU|_{[a,1]^2}: [a, 1]^2 \rightarrow [a, 1], [a, 1]$ üzerinde bir uninormdur.

ii) $T^* = NU|_{[a,e]^2}: [a, e]^2 \rightarrow [a, e], [a, e]$ üzerinde bir t-normdur.

Örnek 1.8.2.3. [15] L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $0 < a < e \leq 1$ olsun. S_1 $[0, a]$ üzerinde bir t-konorm, T $[e, a]$ üzerinde bir t-norm ve S_2 $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlanan $NU: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemi L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninormdur:

$$NU(x, y) = \begin{cases} S_1(x, y) & (x, y) \in [0, a]^2 \\ T(x, y) & (x, y) \in [a, e]^2 \\ S_2(x, y) & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ y & (x, y) \in [e, 1] \times ([a, 1] \setminus [e, 1]) \\ x & (x, y) \in ([a, 1] \setminus [e, 1]) \times [e, 1] \\ T(x \wedge e, y \wedge e) & (x, y) \in ([a, 1] \setminus [e, 1])^2 \setminus [a, e]^2 \\ a & A.T. \end{cases}$$

Şimdi sınırlı kafesler üzerinde en küçük ve en büyük uni-nullnormları ve en küçük ve en büyük null-uninormları inşa edelim.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, bir sınırlı kafesin herhangi bir kapalı alt aralığı üzerindeki t-norm ve t-konormların varlığı kullanılarak 2 tane uni-nullnorm, 2 tane null-uninorm inşa metodu verilecektir. Ayrıca bu metotlarda, bazı özel t-norm ve t-konormlar yazılarak, bir L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük ve en büyük uni-nullnormlar ile yine bir L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük ve en büyük null-uninormlar elde edilecektir. Bu bölümün hazırlanmasında [16] kaynağından faydalanılmıştır.

2.1. Bir L Sınırlı Kafesi Üzerinde Tanımlı $\{e, 1\}_a$ 2-nötral Elemanlı En Küçük ve En Büyük Uni-nullnormlar

Teorem 2.1.1. L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $e \leq a$, T_1 $[0, e]$ üzerinde bir t-norm, S $[e, a]$ üzerinde bir t-konorm ve T $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm ise aşağıdaki şekilde tanımlanan $V_1: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur:

$$V_1(x, y) = \begin{cases} T_1(x \wedge e, y \wedge e) & (x, y) \in [0, e]^2 \cup [0, e[\times (I_e \cup I_{e,a}) \cup (I_e \cup I_{e,a}) \times [0, e[\\ & \cup I_e \times I_e \cup I_e \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_e \cup I_{e,a} \times I_{e,a} \\ S(x \wedge a, y \wedge a) & (x, y) \in [e, a]^2 \cup [e, a[\times I_a \cup I_a \times [e, a[\cup I_a \times I_a \\ T(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y & (x, y) \in [0, e[\times ([e, a[\cup I_a) \cup ([e, a[\cup I_a) \times [0, e[\\ & \cup [0, e[\times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, e[\\ x \wedge a & (x, y) \in I_e \times ([e, 1] \cup I_a) \cup I_{e,a} \times ([e, 1] \cup I_a) \\ y \wedge a & (x, y) \in ([e, 1] \cup I_a) \times I_e \cup ([e, 1] \cup I_a) \times I_{e,a} \\ a & (x, y) \in [a, 1] \times ([e, a[\cup I_a) \cup ([e, a[\cup I_a) \times [a, 1] \end{cases}$$

$\mathbb{I}_{e,a}$	$T_1(x, y \wedge e)$	$y \wedge a$	$y \wedge a$	$T_1(x \wedge e, y \wedge e)$	$y \wedge a$	$T_1(x \wedge e, y \wedge e)$
$\mathbb{I}_a$	x	$S(x \wedge a, y \wedge a)$	a	x	$S(x \wedge a, y \wedge a)$	$x \wedge a$
$\mathbb{I}_e$	$T_1(x, y \wedge e)$	y	y	$T_1(x \wedge e, y \wedge e)$	y	$T_1(x \wedge e, y \wedge e)$
1	x	a	$T(x, y)$	x	a	$x \wedge a$
a	x	$S(x, y)$	a	x	$S(x \wedge a, y \wedge a)$	$x \wedge a$
e	$T_1(x, y)$	y	y	$T_1(x \wedge e, y)$	y	$T_1(x \wedge e, y)$
0	e	a	1	$\mathbb{I}_e$	$\mathbb{I}_a$	$\mathbb{I}_{e,a}$

Tablo 3. L üzerinde V_1

İspat: Her $x \in [0, a]$ için $V_1(x, e) = x$ ve her $t \in [a, 1]$ için $V_1(t, 1) = t$ dir. Böylece, $V_1, \{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlıdır. Tablo 3.ten değişmeli olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi, her $x, y, z \in L$ için V_1 nin birleşmeli olduğunu gösterilmelidir. $x, y, z \in L$ elemanları için oluşabilecek tüm durumları aşağıda verilmiştir:

(1) $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y, z \wedge e)) = T_1(x, T_1(y, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x, y), z \wedge e) = V_1(T_1(x, y), z) = V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

1.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = T_1(x, y) = V_1(T_1(x, y), z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

1.2. $e \leq y < a$

1.2.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

1.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_{T_1}(x, S(y, z \wedge a)) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

1.2.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

1.3. $y \geq a$

1.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

1.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

1.3.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T_1(y, z)) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

1.4. $y \in I_a$

1.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x, y \wedge e), z \wedge e) = V_1(T_1(x, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

1.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y) = T_1(x, y \wedge e) = V_1(T_1(x, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

1.5. $y \in I_a$

1.5.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

1.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = x = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

1.6. $y \in I_{e,a}$

1.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x, y \wedge e), z \wedge e) = V_1(T_1(x, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

1.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y \wedge a) = T_1(x, y \wedge e) \\ &= V_1(T_1(x, y \wedge e), z) = V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5.} \end{aligned}$$

ten)

(2) $e \leq x < a$

2.1. $y < e$

2.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y, z \wedge e)) = T_1(y, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

2.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.2. $e \leq y < a$

2.2.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(S(x, y), z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y, z \wedge a)) = S(x, S(y, z \wedge a)) = V_1(S(x, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

2.2.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = a = V_1(S(x, y), z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.3. $y \geq a$

2.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = a = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.3.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T(y, z)) = a = T(a, z) = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.4. $y \in I_e$

2.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

2.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

2.5. $y \in I_a$

2.5.1. $z < e$ veya $z > a$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(S(x, y \wedge a), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

2.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) \\ &= S(S(x, y \wedge a), z \wedge a) = V_1(S(x, y \wedge a), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

2.6. $y \in I_{e,a}$

2.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) \\ &= V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

2.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y \wedge a) = y = V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

(3) $x \geq a$

3.1. $y < e$

3.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y, z \wedge e)) = T_1(y, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

3.2. $e \leq y < a$

3.2.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

3.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = a = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.2.3. $z \geq a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, a) = T(x, a) = a = T(a, z) = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.3. $y \geq a$

3.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(T(x, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, a) = T(x, a) = a = V_1(T(x, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.3.3. $z \geq a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T(y, z)) = T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \\ &= V_1(T(x, y), z) = V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.4. $y \in I_e$

3.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

3.5. $y \in I_a$

3.5.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

3.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = a = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.5.3. $z \geq a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, a) = T(x, a) = a = T(a, z) = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

3.6. $y \in I_{e,a}$

3.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) \\ &= V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

3.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y \wedge a) = y \wedge a = V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

(4) $x \in I_e$

4.1. $y < e$

4.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y, z \wedge e)) = T_1(x \wedge e, T_1(y, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x \wedge e, y), z \wedge e) = V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y) = T_1(x \wedge e, y) = V_1(T_1(x \wedge e, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.2. $e \leq y < a$

4.2.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

4.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, S(y, z \wedge a)) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

4.2.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

4.3. $y \geq a$

4.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

4.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

4.3.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T(y, z)) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

4.4. $y \in I_e$

4.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x \wedge e, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z \wedge e) = V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y) = T_1(x \wedge e, y \wedge e) = V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.5. $y \in I_a$

4.5.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

4.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = x = V_1(x, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.5.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x = V_1(x, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

4.6. $y \in I_{e,a}$

4.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x \wedge e, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) = V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

4.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \\ &= V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) = V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme} \\ &\quad \text{1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

(5) $x \in I_a$

5.1. $y < e$

5.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y, z \wedge e)) = T_1(y, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

5.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.2. $e \leq y < a$

5.2.1. $z < e$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(S(x \wedge a, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

5.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y, z \wedge a)) = S(x \wedge a, S(y, z \wedge a)) \\ &= S(S(x \wedge a, y), z \wedge a) = V_1(S(x \wedge a, y), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

5.3. $y \geq a$

5.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(S(x \wedge a, y), z) = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

5.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = a = V_1(a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.3.3. $z \geq a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T(y, z)) = a = T(a, z) = V_1(a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

5.4. $y \in I_e$

5.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z) \\ = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = y = V_1(y, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.5. $y \in I_a$

5.5.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, z \wedge a) = z \wedge a = V_1(S(x \wedge a, y \wedge a), z) \\ = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x \wedge a, S(y \wedge a, z \wedge a)) \\ = S(S(x \wedge a, y \wedge a), z \wedge a) = V_1(S(x \wedge a, y \wedge a), z) \\ = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.5.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = a = V_1(S(x \wedge a, y \wedge a), z) \\ = V_1(V_1(x, y), z)$$

5.6. $y \in I_{e,a}$

5.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) \\ = V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)}$$

5.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y \wedge a) = y \wedge a = V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

(6) $x \in I_{e,a}$

6.1. $y < e$

6.1.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) \\ = V_1(y \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

6.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, y) = T_1(x \wedge e, y) = V_1(T_1(x \wedge e, y), z) \\ = V_1(V_1(x, y), z)$$

6.2. $e \leq y < a$

6.2.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

6.2.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y, z \wedge a)) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.2.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

6.3. $y \geq a$

6.3.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

6.3.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

6.3.3. $z \geq a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T(y, z)) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.4. $y \in I_e$

6.4.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x \wedge e, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z \wedge e) = V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y) = T_1(x \wedge e, y \wedge e) = V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.5. $y \in I_a$

6.5.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, z \wedge a) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \text{ (Önerme 1.8.1.5. ten)} \end{aligned}$$

6.5.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.5.3. $z \geq a$

$$V_1(x, V_1(y, z)) = V_1(x, a) = x \wedge a = V_1(x \wedge a, z) = V_1(V_1(x, y), z)$$

6.6. $y \in I_{e,a}$

6.6.1. $z < e$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) = T_1(x \wedge e, T_1(y \wedge e, z \wedge e)) \\ &= T_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z \wedge e) = V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) \\ &= V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

6.6.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_a$

$$\begin{aligned} V_1(x, V_1(y, z)) &= V_1(x, y \wedge a) = T_1(x \wedge e, y \wedge e) \\ &= V_1(T_1(x \wedge e, y \wedge e), z) = V_1(V_1(x, y), z) \end{aligned}$$

(Önerme 1.8.1.5. ten)

Böylece, V_1 birleşmelidir.

$x, y \in L$ için $x \leq y$ olsun. Şimdi, her $z \in L$ için monoton olduğunu; yani $V_1(x, z) \leq V_1(y, z)$ göstermeliyiz.

(1) $x < e$

1.1. $y < e$

$$1.1.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq T_1(y, z) = V_1(y, z)$$

$$1.1.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y = V_1(y, z)$$

$$1.1.3. z \geq a, V_1(x, z) = x = V_1(y, z)$$

1.1.4. $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$,

$$V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq T_1(y, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

1.2. $e \leq y < a$

$$1.2.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.2.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \leq y \leq S(y, z) = V_1(y, z)$$

$$1.2.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$1.2.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.2.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y \leq S(y, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$1.2.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

1.3. $y \geq a$

$$1.3.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.3.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$1.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq y \leq T(y, z) = V_1(y, z)$$

$$1.3.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.3.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x < a = V_1(y, z)$$

$$1.3.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$1.4. y \in I_e$$

$$1.4.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq T_1(y \wedge e, z) = V_1(y, z)$$

$$1.4.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y = V_1(y, z)$$

$$1.4.3. z \in I_e \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

$$1.5. y \in I_a$$

$$1.5.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.5.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z) = V_1(y, z)$$

$$1.5.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$1.5.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$1.5.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$1.5.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$1.6. y \in I_{e,a}$$

$$1.6.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq T_1(y \wedge e, z) = V_1(y, z)$$

$$1.6.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_a,$$

$$V_1(x, z) = x \leq y \wedge a = V_1(y, z)$$

$$1.6.3. z \in I_e \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_1(x, z) = T_1(x, z \wedge e) \leq T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

$$(2) e \leq x < a$$

$$2.1. y < e \text{ imkansız durum}$$

$$2.2. e \leq y < a$$

$$2.2.1. z < e \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$2.2.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = S(x, z) \leq S(y, z) = V_1(y, z)$$

$$2.2.3. z \geq a, V_1(x, z) = a = V_1(y, z)$$

$$2.2.4. z \in I_a, V_1(x, z) = S(x, z \wedge a) \leq S(y, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$2.2.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$2.3. y \geq a$$

$$2.3.1. z < e \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$2.3.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = S(x, z) \leq a = V_1(y, z)$$

$$2.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = a \leq T(y, z) = V_1(y, z)$$

$$2.3.4. z \in I_a, V_1(x, z) = S(x, z \wedge a) \leq a = V_1(y, z)$$

$$2.3.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

2.4. $y \in I_e$ imkansız durum

2.5. $y \in I_a$

$$2.5.1. z < e \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$2.5.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = S(x, z) \leq S(y \wedge a, z) = V_1(y, z)$$

$$2.5.3. z \geq a, V_1(x, z) = a = V_1(y, z)$$

$$2.5.4. z \in I_a, V_1(x, z) = S(x, z \wedge a) \leq S(y \wedge a, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$2.5.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

2.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(3) $x \geq a$

3.1. $y < e$ imkansız durum

3.2. $e \leq y < a$ imkansız durum

3.3. $y \geq a$

$$3.3.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$3.3.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = a = V_1(y, z)$$

$$3.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = T_1(x, z) \leq T_1(y, z) = V_1(y, z)$$

$$3.3.4. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

3.4. $y \in I_e$ imkansız durum

3.5. $y \in I_a$ imkansız durum

3.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(4) $x \in I_e$

4.1. $y < e$ imkansız durum

4.2. $e \leq y < a$

$$4.2.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.2.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \leq y \leq S(y, z) = V_1(y, z)$$

$$4.2.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$4.2.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.2.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y \leq S(y, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$4.2.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$4.3. y \geq a$$

$$4.3.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.3.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x < a = V_1(y, z)$$

$$4.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq a \leq T(y, z) = V_1(y, z)$$

$$4.3.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.3.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$4.3.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$4.4. y \in I_e$$

$$4.4.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq T_1(y \wedge e, z) = V_1(y, z)$$

$$4.4.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y = V_1(y, z)$$

$$4.4.3. z \in I_e \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

$$4.5. y \in I_a$$

$$4.5.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.5.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z) = V_1(y, z)$$

$$4.5.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \leq a = V_1(y, z)$$

$$4.5.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$4.5.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$4.5.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

$$4.6. y \in I_{e,a}$$

$$4.6.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq T_1(y \wedge e, z) = V_1(y, z)$$

$$4.6.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_a,$$

$$V_1(x, z) = x \leq y \wedge a = V_1(y, z)$$

$$4.6.3. z \in I_e \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

$$(5) x \in I_a$$

$$5.1. y < e \text{ imkansız durum}$$

$$5.2. e \leq y < a \text{ imkansız durum}$$

$$5.3. y \geq a$$

$$5.3.1. z < e \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$5.3.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = S(x \wedge a, z) \leq a = V_1(y, z)$$

$$5.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = a \leq T(y, z) = V_1(y, z)$$

$$5.3.4. z \in I_a, V_1(x, z) = S(x \wedge a, z \wedge a) \leq a = V_1(y, z)$$

$$5.3.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

5.4. $y \in I_e$ imkansız durum

5.5. $y \in I_a$

$$5.5.1. z < e \text{ veya } z \in I_e, V_1(x, z) = z = V_1(y, z)$$

$$5.5.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = S(x \wedge a, z) \leq S(y \wedge a, z) = V_1(y, z)$$

$$5.5.3. z \geq a, V_1(x, z) = a = V_1(y, z)$$

$$5.5.4. z \in I_a, V_1(x, z) = S(x \wedge a, z \wedge a) \leq S(y \wedge a, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$5.5.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = z \wedge a = V_1(y, z)$$

5.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(6) $x \in I_{e,a}$

6.1. $y < e$ imkansız durum

6.2. $e \leq y < a$ imkansız durum

6.3. $y \geq a$

$$6.3.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$6.3.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq a = V_1(y, z)$$

$$6.3.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq T(y, z) = V_1(y, z)$$

$$6.3.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$6.3.5. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

6.4. $y \in I_e$ imkansız durum

6.5. $y \in I_a$

$$6.5.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq z = V_1(y, z)$$

$$6.5.2. e \leq z < a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z) = V_1(y, z)$$

$$6.5.3. z \geq a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq a = V_1(y, z)$$

$$6.5.4. z \in I_e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = V_1(y, z)$$

$$6.5.5. z \in I_a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq y \wedge a \leq S(y \wedge a, z \wedge a) = V_1(y, z)$$

$$6.5.6. z \in I_{e,a}, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge a = V_1(y, z)$$

6.6. $y \in I_{e,a}$

$$6.6.1. z < e, V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z) \leq T_1(y \wedge e, z) = V_1(y, z)$$

$$6.6.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_a, V_1(x, z) = x \wedge a \leq y \wedge a =$$

$$V_1(y, z)$$

6.6.3. $z \in I_e$ veya $z \in I_{e,a}$,

$$V_1(x, z) = T_1(x \wedge e, z \wedge e) \leq T_1(y \wedge e, z \wedge e) = V_1(y, z)$$

Sonuç olarak, $V_1, \{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur.

Sonuç 2.1.2. [17] Teorem 2.1.1. de geçen T_1, T t-normları ve S t-konormu aşağıdaki gibi alınsın:

$[0, e]$ üzerinde $T_1 = T_W$, $[e, a]$ üzerinde $S = S_V$ ve $[a, 1]$ üzerinde $T = T_W$.

Bu takdirde, aşağıdaki uni-nullnorm, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük uni-nullnormdur:

$$\underline{V}(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in [0, e[\times (I_e \cup I_{e,a}) \cup (I_e \cup I_{e,a}) \times [0, e[\\ & \cup I_e \times I_e \cup I_e \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_e \cup I_{e,a} \times I_{e,a} \cup [0, e]^2 \\ (x \wedge a) \vee (y \wedge a) & (x, y) \in [e, a]^2 \cup [e, a[\times I_a \cup I_a \times [e, a[\\ & \cup I_a \times I_a \\ T_W(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y & (x, y) \in [0, e[\times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, e[\\ & \cup [0, e[\times ([e, a[\cup I_a) \cup ([e, a[\cup I_a) \times [0, e[\\ x \wedge a & (x, y) \in I_e \times ([e, 1] \cup I_a) \cup I_{e,a} \times ([e, 1] \cup I_a) \\ y \wedge a & (x, y) \in ([e, 1] \cup I_a) \times I_e \cup ([e, 1] \cup I_a) \times I_{e,a} \\ a & (x, y) \in [a, 1] \times ([e, a[\cup I_a) \cup ([e, a[\cup I_a) \times [a, 1] \end{cases}$$

İspat. V, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı keyfi bir uni-nullnorm olsun.

Gösterilmesi gereken, her $(x, y) \in L^2$ için $\underline{V}(x, y) \leq V(x, y)$

- $(x, y) \in [0, e]^2 \cup [0, e[\times (I_e \cup I_{e,a}) \cup (I_e \cup I_{e,a}) \times [0, e[\cup I_e \times I_e \cup I_e \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_e \cup I_{e,a} \times I_{e,a}$ için $\underline{V}(x, y) = 0 \leq V(x, y)$.
- $(x, y) \in [e, a]^2 \cup [e, a[\times I_a \cup I_a \times [e, a[\cup I_a \times I_a$ için $\underline{V}(x, y) = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (vi) ve (x) den)
- $(x, y) \in [a, 1]^2$ için $\underline{V}(x, y) = T_W(x, y) = a \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (vii) den)
- $y = 1$ ve $x \in [a, 1]$ için $\underline{V}(x, y) = x = V(x, 1) = V(x, y)$.
 $x = 1$ ve $y \in [a, 1]$ için $\underline{V}(x, y) = y = V(1, y) = V(x, y)$.
- $(x, y) \in [0, e[\times [e, a[\cup [e, a[\times [0, e[$ için $\underline{V}(x, y) = x \wedge y \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (ix) den)
- $(x, y) \in [0, e[\times I_a$ için $\underline{V}(x, y) = x = V(x, e) \leq V(x, y)$ ve $(x, y) \in I_a \times [0, e[$ için $\underline{V}(x, y) = y = V(e, y) \leq V(x, y)$.

- $(x, y) \in I_e \times ([e, a[\cup I_a)$ için $\underline{V}(x, y) = x \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (iii) den)

$(x, y) \in ([e, a[\cup I_a) \times I_e$ için $\underline{V}(x, y) = y \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (iv) den)

- $(x, y) \in I_{e,a} \times ([e, a[\cup I_a)$ için $\underline{V}(x, y) = x \wedge a = V(x \wedge a, e) \leq V(x, y)$.

$(x, y) \in ([e, a[\cup I_a) \times I_{e,a}$ için $\underline{V}(x, y) = y \wedge a = V(e, y \wedge a) \leq V(x, y)$.

- $(x, y) \in [a, 1] \times [e, a] \cup [e, a] \times [a, 1]$ için $\underline{V}(x, y) = a = V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (viii) den)

- $(x, y) \in ([0, e[\cup I_e) \times [a, 1]$ için $\underline{V}(x, y) = x \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (iii) den)

$(x, y) \in [a, 1] \times ([0, e[\cup I_e)$ için $\underline{V}(x, y) = y \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (iv) den)

- $(x, y) \in I_a \times [a, 1] \cup [a, 1] \times I_a$ için $\underline{V}(x, y) = a \leq V(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (xiii) den)

- $(x, y) \in I_{e,a} \times [a, 1]$ için $\underline{V}(x, y) = x \wedge a = V(x \wedge a, e) \leq V(x, y)$.

- $(x, y) \in [a, 1] \times I_{e,a}$ için $\underline{V}(x, y) = y \wedge a = V(e, y \wedge a) \leq V(x, y)$.

Buradan, $\underline{V} < V$ elde edilir ve böylece $\underline{V}, L$ üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük uni-nullnormdur.

Teorem 2.1.3. L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $e \leq a$, T_1 $[0, e]$ üzerinde bir t-norm ve T $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm olsun. $[e, a]$ üzerinde S_W t-konormu göz önüne alınmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan $V_2: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur:

$$V_2(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ S_W(x, y) & (x, y) \in]e, a[^2 \\ T(x \vee a, y \vee a) & (x, y) \in [a, 1]^2 \cup [a, 1] \times (I_a \cup I_{e,a}) \\ & \cup (I_a \cup I_{e,a}) \times [a, 1] \cup I_a \times I_a \\ & \cup I_a \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_a \cup I_{e,a} \times I_{e,a} \\ x & (x, y) \in I_e \times [0, e[\cup [e, a[\times [0, e[\\ y & (x, y) \in [0, e[\times I_e \cup [0, e[\times [e, a[\\ a & A.T. \end{cases}$$

$\mathbb{I}_{e,a}$	a	a	$T(x, y \vee a)$	a	$T(x \vee a, y \vee a)$	$T(x \vee a, y \vee a)$
$\mathbb{I}_a$	a	a	$T(x, y \vee a)$	a	$T(x \vee a, y \vee a)$	$T(x \vee a, y \vee a)$
$\mathbb{I}_e$	y	a	a	a	a	a
1	a	a	$T(x, y)$	a	$T(x \vee a, y)$	$T(x \vee a, y)$
a	y	$S_W(x, y)$	a	a	a	a
e	$T_1(x, y)$	x	a	x	a	a
	0	e	a	1	$\mathbb{I}_e$	$\mathbb{I}_a$
					$\mathbb{I}_{e,a}$	

Tablo 4. L üzerinde V_2

İspat : Her $x \in [0, a]$ için $V_2(x, e) = x$ ve her $t \in [a, 1]$ için $V_2(t, 1) = t$ dir. Böylece, $V_2, \{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlıdır. Tablo 4.ten değişmeli olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi, her $x, y, z \in L$ için V_2 nin birleşmeli olduğunu gösterilmelidir. $x, y, z \in L$ elemanları için oluşabilecek tüm durumları aşağıda verilmiştir:

(1) $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z < e$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, T_1(y, z)) = T_1(x, T_1(y, z)) = T_1(T_1(x, y), z) \\ &= V_2(T_1(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

1.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, z) = z = V_2(T_1(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.1.3. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(T_1(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.2. $e \leq y < a$

1.2.1. $z < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, y) = y = V_2(y, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.2.2. $e \leq z < a$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, S_W(y, z)) = S_W(y, z) = V_2(y, z) \\ &= V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

1.2.3. $z \geq a$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(y, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.3. $y \geq a$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, T(y, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\ &= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

1.4. $y \in I_e$

1.4.1. $z < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, y) = y = V_2(y, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.4.2. $e \leq z < a$ veya $z \geq a$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(y, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

1.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, T(y \vee a, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y \vee a, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\ &= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

(2) $e \leq x < a$

2.1. $y < e$

2.1.1. $z < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, T_1(y, z)) = x = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

2.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

2.1.3. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

2.2. $e \leq y < a$

2.2.1. $z < e$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, y) = S_W(x, y) = V_2(S_W(x, y), z) \\ &= V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

2.2.2. $e \leq z < a$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, S_W(y, z)) = S_W(x, S_W(y, z)) = S_W(S_W(x, y), z) \\ &= V_2(S_W(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

2.2.3. $z \geq a$ veya $z \in I_e$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(S_W(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

2.3. $y \geq a$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, T(y, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\ &= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

2.4. $y \in I_e$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, y) & z < e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\ &= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

2.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, T(y \vee a, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y \vee a, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \end{aligned}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

(3) $x \geq a$

3.1. $y < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, T_1(y, z)) & z < e \\ V_2(x, z) & e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

3.2. $e \leq y < a$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, z) & z < e \\ V_2(x, S_W(y, z)) & e \leq z < a \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

3.3. $y \geq a$

3.3.1. $z < e$ veya $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(T(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

3.3.2. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, T(y, z \vee a)) = T(x, T(y, z \vee a))$$

$$= T(T(x, y), z \vee a) = V_2(T(x, y), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

3.4. $y \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, y) & z < e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

3.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

3.5.1. $z < e$ veya $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(T(x, y), z) = V_2(T(x, y \vee a), z)$$

$$= V_2(V_2(x, y), z)$$

3.5.2. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned}
V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, T(y \vee a, z \vee a)) = T(x, T(y \vee a, z \vee a)) \\
&= T(T(x, y \vee a), z \vee a) = V_2(T(x, y \vee a), z) \\
&= V_2(V_2(x, y), z)
\end{aligned}$$

(4) $x \in I_e$

4.1. $y < e$

4.1.1. $z < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, T_1(y, z)) = x = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

4.1.2. $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

4.1.3. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(x, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

4.2. $e \leq y < a$

$$\begin{aligned}
V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, y) & z < e \\ V_2(x, S_W(y, z)) & e \leq z < a \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\
&= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)
\end{aligned}$$

4.3. $y \geq a$

$$\begin{aligned}
V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, T(y, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\
&= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)
\end{aligned}$$

4.4. $y \in I_e$

$$\begin{aligned}
V_2(x, V_2(y, z)) &= \begin{cases} V_2(x, y) & z < e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases} \\
&= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)
\end{aligned}$$

4.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, T(y \vee a, z)) & z \geq a \\ V_2(x, T(y \vee a, z \vee a)) & z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a} \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

(5) $x \in I_a$ veya $x \in I_{e,a}$

5.1. $y < e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, T_1(y, z)) & z < e \\ V_2(x, z) & e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

5.2. $e \leq y < a$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, z) & z < e \\ V_2(x, S_W(y, z)) & e \leq z < a \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

5.3. $y \geq a$

5.3.1. $z < e$ veya $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, a) = a = V_2(T(x, y), z) = V_2(T(x \vee a, y), z) \\ &= V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

5.3.2. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, T(y, z \vee a)) = T(x \vee a, T(y, z \vee a)) \\ &= T(T(x \vee a, y), z \vee a) = V_2(T(x \vee a, y), z) = V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

5.4. $y \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = \begin{cases} V_2(x, y) & z < e \\ V_2(x, a) & A.T. \end{cases}$$

$$= a = V_2(a, z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

5.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

5.5.1. $z < e$ veya $e \leq z < a$ veya $z \in I_e$

$$V_2(x, V_2(y, z)) = V_2(x, a) = a = V_2(T(x \vee a, y \vee a), z) = V_2(V_2(x, y), z)$$

5.5.2. $z \geq a$ veya $z \in I_a$ veya $z \in I_{e,a}$

$$\begin{aligned} V_2(x, V_2(y, z)) &= V_2(x, T(y \vee a, z \vee a)) = T(x \vee a, T(y \vee a, z \vee a)) \\ &= T(T(x \vee a, y \vee a), z \vee a) = V_2(T(x \vee a, y \vee a), z) \\ &= V_2(V_2(x, y), z) \end{aligned}$$

Böylece, V_2 birleşmelidir.

$x, y \in L$ için $x \leq y$ olsun. Şimdi, her $z \in L$ için monoton olduğu; yani $V_1(x, z) \leq V_1(y, z)$ olduğu gösterilmelidir.

(1) $x < e$

1.1. $y < e$

$$1.1.1. z < e, V_2(x, z) = T_1(x, z) \leq T_1(y, z) = V_2(y, z)$$

$$1.1.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = x \leq y = V_2(y, z)$$

$$1.1.3. z \geq a \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$1.1.4. z \in I_e, V_2(x, z) = z = V_2(y, z)$$

1.2. $e \leq y < a$

$$1.2.1. z < e, V_2(x, z) = T_1(x, z) \leq x \leq y = V_2(y, z)$$

$$1.2.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = z \leq S_w(y, z) = V_2(y, z)$$

$$1.2.3. z \geq a \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$1.2.4. z \in I_e, V_2(x, z) = z < a = V_2(y, z)$$

1.3. $y \geq a$

$$1.3.1. z < e, V_2(x, z) = T_1(x, z) \leq a = V_2(y, z)$$

$$1.3.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = x < a = V_2(y, z)$$

$$1.3.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$1.3.4. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

1.4. $y \in I_e$

$$1.4.1. z < e, V_2(x, z) = T_1(x, z) \leq x \leq y = V_2(y, z)$$

$$1.4.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = x < a = V_2(y, z)$$

$$1.4.3. z \geq a \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

1.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$1.5.1. z < e, V_2(x, z) = T_1(x, z) \leq a = V_2(y, z)$$

$$1.5.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = x \leq a = V_2(y, z)$$

$$1.5.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z) = V_2(y, z)$$

$$1.5.4. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z \vee a) = V_2(y, z)$$

(2) $e \leq x < a$

2.1. $y < e$ imkansız durum

2.2. $e \leq y < a$

$$2.2.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq y = V_2(y, z)$$

$$2.2.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = S_W(x, z) \leq S_W(y, z) = V_2(y, z)$$

$$2.2.3. z \geq a \text{ veya } z \in I_e \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

2.3. $y \geq a$

$$2.3.1. z < e, V_2(x, z) = x < a = V_2(y, z)$$

$$2.3.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = S_W(x, z) \leq a = V_2(y, z)$$

$$2.3.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$2.3.4. z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$2.3.5. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

2.4. $y \in I_e$ imkansız durum

2.5. $y \in I_a$

$$2.5.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq a = V_2(y, z)$$

$$2.5.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = S_W(x, z) \leq a = V_2(y, z)$$

$$2.5.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z) = V_2(y, z)$$

$$2.5.4. z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$2.5.5. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z \vee a) = V_2(y, z)$$

2.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(3) $x \geq a$

3.1. $y < e$ imkansız durum

3.2. $e \leq y < a$ imkansız durum

3.3. $y \geq a$

$$3.3.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$3.3.2. z \geq a, V_2(x, z) = T(x, z) \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$3.3.2. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = T(x, z \vee a) \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

3.4. $y \in I_e$ imkansız durum

3.5. $y \in I_a$ imkansız durum

3.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(4) $x \in I_e$

4.1. $y < e$ imkansız durum

4.2. $e \leq y < a$

$$4.2.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq y = V_2(y, z)$$

$$4.2.2. e \leq z < a, V_2(x, z) = a \leq S_W(y, z) = V_2(y, z)$$

$$4.2.3. z \geq a \text{ veya } z \in I_e \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

4.3. $y \geq a$

$$4.3.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq a = V_2(y, z)$$

$$4.3.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$4.3.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$4.3.4. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

4.4. $y \in I_e$

$$4.4.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq y = V_2(y, z)$$

$$4.4.2. e \leq z < a \text{ veya } z \geq a \text{ veya } z \in I_e \text{ veya } z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

4.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$4.5.1. z < e, V_2(x, z) = x \leq a = V_2(y, z)$$

$$4.5.2. e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$4.5.3. z \geq a, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z) = V_2(y, z)$$

$$4.5.4. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a}, V_2(x, z) = a \leq T(y \vee a, z \vee a) = V_2(y, z)$$

(5) $x \in I_a$

5.1. $y < e$ imkansız durum

5.2. $e \leq y < a$ imkansız durum

5.3. $y \geq a$

$$5.3.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$5.3.2. z \geq a, V_2(x, z) = T(x \vee a, z) \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$5.3.3. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = T(x \vee a, z \vee a) \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

5.4. $y \in I_e$ imkansız durum

5.5. $y \in I_a$

$$5.5.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$5.5.2. z \geq a, V_2(x, z) = T(x \vee a, z) \leq T(y \vee a, z) = V_2(y, z)$$

$$5.5.3. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = T(x \vee a, z \vee a) \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

5.6. $y \in I_{e,a}$ imkansız durum

(6) $x \in I_{e,a}$

6.1. $y < e$ imkansız durum

6.2. $e \leq y < a$ imkansız durum

6.3. $y \geq a$

$$6.3.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$6.3.2. z \geq a, V_2(x, z) = T(x \vee a, z) \leq T(y, z) = V_2(y, z)$$

$$6.3.3. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = T(x \vee a, z \vee a) \leq T(y, z \vee a) = V_2(y, z)$$

6.4. $y \in I_e$ imkansız durum

6.5. $y \in I_a$ veya $y \in I_{e,a}$

$$6.5.1. z < e \text{ veya } e \leq z < a \text{ veya } z \in I_e, V_2(x, z) = a = V_2(y, z)$$

$$6.5.2. z \geq a, V_2(x, z) = T(x \vee a, z) \leq T(y \vee a, z) = V_2(y, z)$$

$$6.5.3. z \in I_a \text{ veya } z \in I_{e,a},$$

$$V_2(x, z) = T(x \vee a, z \vee a) \leq T(y \vee a, z \vee a) = V_2(y, z)$$

Sonuç olarak, V_2, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı bir uni-nullnormdur.

Sonuç 2.1.4. [17] Teorem 2.1.3. te geçen T_1, T t-normları ve S t-konormu aşağıdaki gibi alınsın:

$$[0, e] \text{ üzerinde } T_1 = T_\wedge, [e, a] \text{ üzerinde } S = S_W, [a, 1] \text{ üzerinde } T = T_\wedge.$$

Bu takdirde, aşağıdaki uni-nullnorm, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en büyük uni-nullnormdur:

$$\bar{V}(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & (x, y) \in [0, e]^2 \\ S_W(x, y) & (x, y) \in]e, a[^2 \\ (x \vee a) \wedge (y \vee a) & (x, y) \in [a, 1] \times (I_a \cup I_{e,a}) \cup (I_a \cup I_{e,a}) \times [a, 1] \\ & \cup I_a \times I_a \cup I_a \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_a \cup I_{e,a} \times I_{e,a} \cup [a, 1]^2 \\ x & (x, y) \in I_e \times [0, e[\cup [e, a[\times [0, e[\\ y & (x, y) \in [0, e[\times I_e \cup [0, e[\times [e, a[\\ a & A.T. \end{cases}$$

İspat. V, L üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı keyfi bir uni-nullnorm olsun.

Gösterilmesi gereken, her $(x, y) \in L^2$ için $V(x, y) \leq \bar{V}(x, y)$.

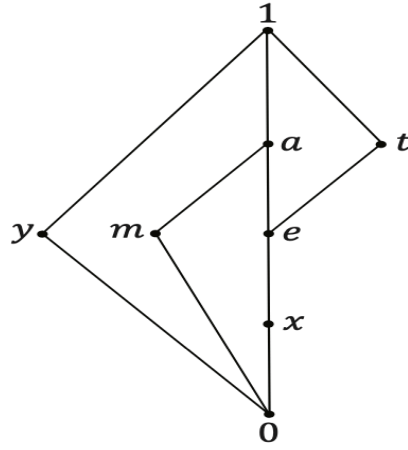
- $(x, y) \in [0, e]^2 \cup [a, 1]^2$ için $V(x, y) \leq T_\wedge(x, y) = \bar{V}(x, y)$, çünkü V bu aralıkta bir t-normdur.
- $(x, y) \in]e, a[^2$ için $V(x, y) \leq S_W(x, y) = \bar{V}(x, y)$, çünkü V bu aralıkta bir t-konormdur.
- $(x, y) \in [a, 1] \times (I_a \cup I_{e,a}) \cup (I_a \cup I_{e,a}) \times [a, 1] \cup I_a \times I_a \cup I_a \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_a \cup I_{e,a} \times I_{e,a}$ için $V(x, y) \leq V(x \vee a, 1) = x \vee a$ ve $V(x, y) \leq V(1, y \vee a) = y \vee a$.

Buradan, $V(x, y) \leq (x \vee a) \wedge (y \vee a) = \bar{V}(x, y)$.

- $(x, y) \in I_e \times [0, e] \cup [e, a[\times [0, e]$ için $V(x, y) \leq x = \bar{V}(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (i) den)
- $(x, y) \in [0, e] \times I_e \cup [0, e] \times [e, a[$ için $V(x, y) \leq y = \bar{V}(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (ii) den)
- Diğer tüm durumlar için $V(x, y) \leq a = \bar{V}(x, y)$. (Önerme 1.8.1.4. (iii) den)

Buradan, $V \leq \bar{V}$ elde edilir ve $\bar{V}, L$ üzerinde $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en büyük uni-nullnormdur.

Örnek 2.1.5. Şekil 3. te verilen $L = \{0, x, m, e, a, t, y, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. Bu kafes üzerinde, $\underline{V}$ ve $\bar{V}$ $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı uni-nullnormları, Şekil 1. deki gibi elde edilir.



Şekil 1. L kafesi

$\underline{V}$	0	x	m	e	a	t	y	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	x	x	x	0	x
m	0	0	0	m	m	m	0	m
e	0	x	m	e	a	e	0	a
a	0	x	m	a	a	a	0	a
t	0	x	m	e	a	e	0	a
y	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	x	m	a	a	a	0	1

$\overline{V}$	0	x	m	e	a	t	y	1
0	0	0	m	0	a	a	a	a
x	0	x	m	x	a	a	a	a
m	m	m	a	m	a	a	a	a
e	0	x	m	e	a	a	a	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a
t	a	a	a	a	a	1	1	a
y	a	a	a	a	a	1	1	a
1	a	a	a	a	a	a	a	1

Tablo 5. L üzerinde $\underline{V}$ ve $\overline{V}$

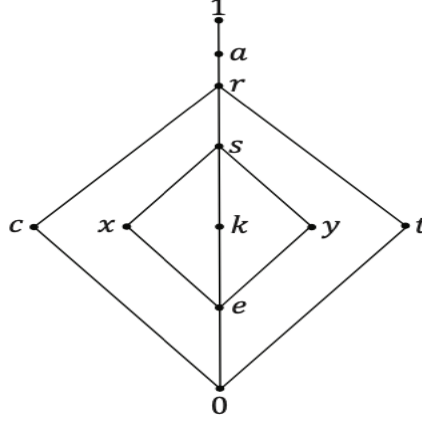
Uyarı 2.1.6.

i) Teorem 2.1.3. ve Sonuç 2.1.4. de, bu fonksiyonların ikinci parçaları $((x, y) \in]e, a[^2)$ a ya eşit olsa da bunu yerine $S_W(x, y)$ yazılmıştır. Bunun sebebi; bu uni-nullnormların $[e, a]^2$ ye kısıtlanışının birer t-konorm olduğunu vurgulamaktır. Böylece, $S_W(x, y) = a$ yazılarak V_2 uni-nullnormu aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$V_2^*(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ T(x \vee a, y \vee a) & (x, y) \in [a, 1] \times (I_a \cup I_{e,a}) \cup (I_a \cup I_{e,a}) \times [a, 1] \\ & \cup I_a \times I_a \cup I_a \times I_{e,a} \cup I_{e,a} \times I_a \cup I_{e,a} \times I_{e,a} \cup [a, 1]^2 \\ x & (x, y) \in I_e \times [0, e[\cup [e, a[\times [0, e[\\ y & (x, y) \in [0, e[\times I_e \cup [0, e[\times [e, a[\\ a & A.T. \end{cases}$$

ii) $V_2(x, y)$ nin ikinci parçası olan $S_W(x, y)$, başka bir t-konorm ile değiştirilirse bu durumda $V_2(x, y)$ bir uni-nullnorm olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örnek incelensin.

Örnek 2.2.1.6. Şekil 4. teki $L = \{0, e, x, k, y, s, c, h, r, a, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 2. L kafesi

$(x, y) \in]e, a[^2$ için V_2 teki $S_w(x, y)$ t-konormu ile $S_v(x, y)$ t-konormunu değiştirilerek aşağıdaki fonksiyon elde edilir:

$$V(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) & (x, y) \in [0, e]^2 \\ S_v(x, y) & (x, y) \in]e, a[^2 \\ T(x, y) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x & (x, y) \in I_e \times [0, e[\cup [e, a[\times [0, e[\\ y & (x, y) \in [0, e[\times I_e \cup [0, e[\times [e, a[\\ a & A.T. \end{cases}$$

$c, r, k \in L$ elemanları, $c \leq r$ için $V(c, k) = a \not\leq r = r \vee k = S_v(r, k) = V(r, k)$ yani monotonluk bozulmuştur. Buradan, V 'nin bir uni-nullnorm olmadığı görülür.

2.2. Bir L Sınır Kafesi Üzerinde Tanımlı $\{0, e\}_a$ 2-nötral Elemanlı En Küçük ve En Büyük Null-uninormlar

Aşağıdaki Teorem 2.2.1.'de ve Teorem 2.2.3.'de elde edilen iki null-uninorm, teorem 2.1.1. ve Teorem 2.1.3. te verilen iki uni-nullnormdan dual olarak elde edildiği için Teorem 2.2.1. ve Teorem 2.2.3. ispatsız olarak verilecektir.

Bu bölümde, a ile karşılaştırılamayan ancak e 'den daha küçük ancak elemanlar kümesi T_a ile, e ile karşılaştırılamayan ancak a 'dan daha büyük olan elemanlar kümesini T_e ile, a ve e ile karşılaştırılamayan elemanlar kümesi $T_{a,e}$ ile gösterilecektir. Buradan,

$$T_a = \{x \in L : x \parallel a \text{ ve } x < e\}, T_e = \{x \in L : x \parallel e \text{ ve } x > a\} \text{ ve}$$

$$T_{a,e} = \{x \in L : x \parallel a \text{ ve } x \parallel e\}.$$

Teorem 2.2.1. L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $a \leq e$, S_1 $[0, a]$ üzerinde bir t-conorm, T $[a, e]$ üzerinde bir t-norm ve S $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise aşağıdaki şekilde tanımlanan $U_1: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninormdur:

$$U_1(x, y) = \begin{cases} S_1(x, y) & (x, y) \in [0, a]^2 \\ S(x \vee e, y \vee e) & (x, y) \in]e, 1] \times (T_e \cup T_{a,e}) \cup (T_e \cup T_{a,e}) \times]e, 1] \\ & \cup T_e \times T_e \cup T_e \times T_{a,e} \cup T_{a,e} \times T_e \cup T_{a,e} \times T_{a,e} \cup]e, 1]^2 \\ T(x \vee a, y \vee a) & (x, y) \in]a, e]^2 \cup]a, e] \times T_a \cup T_a \times]a, e] \cup T_a \times T_a \\ x \vee y & (x, y) \in]e, 1] \times [0, a] \cup [0, a] \times]e, 1] \\ & \cup]e, 1] \times ([a, e] \cup T_a) \cup ([a, e] \cup T_a) \times]e, 1] \\ x \vee a & (x, y) \in T_e \times ([0, e] \cup T_a) \cup T_{a,e} \times ([0, e], T_a) \\ y \vee a & (x, y) \in ([0, e] \cup T_a) \times T_e \cup ([0, e] \cup T_a) \times T_{a,e} \\ a & (x, y) \in [0, a] \times ([a, e] \cup T_a) \cup ([a, e] \cup T_a) \times [0, a] \end{cases}$$

$\mathbb{I}_{a,e}$	$y \vee a$	$y \vee a$	$S(x, y \vee e)$	$y \vee a$	$S(x \vee e, y \vee e)$	$S(x \vee e, y \vee e)$
$\mathbb{I}_e$	y	y	$S(x, y \vee e)$	y	$S(x \vee e, y \vee e)$	$S(x \vee e, y \vee e)$
$\mathbb{I}_a$	a	$T(x, y \vee a)$	x	$T(x \vee a, y \vee a)$	x	$x \vee a$
1	y	y	$S(x, y)$	y	$S(x \vee e, y)$	$S(x \vee e, y)$
e	a	$T(x, y)$	x	$T(x \vee a, y)$	x	$x \vee a$
a	$S_1(x, y)$	a	x	a	x	$x \vee a$
0	a	e	1	$\mathbb{I}_a$	$\mathbb{I}_e$	$\mathbb{I}_{a,e}$

Tablo 6. L üzerinde U_1

Sonuç 2.2.2. Teorem 2.2.1.'de $[0, a]$ üzerinde $S_1 = S_W$, $]a, e]$ üzerinde $T = T_\wedge$ ve $]e, 1]$ üzerinde $S = S_W$ alınırsa, aşağıdaki null-uninorm, L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı en büyük null-uninormdur:

$$\bar{U}(x, y) = \begin{cases} S_W(x, y) & (x, y) \in [0, a]^2 \\ 1 & (x, y) \in]e, 1] \times (T_e \cup T_{a,e}) \cup (T_e \cup T_{a,e}) \times]e, 1] \\ & \cup T_e \times T_e \cup T_e \times T_{a,e} \times T_e \cup T_{a,e} \times T_{a,e} \cup]e, 1]^2 \\ (x \vee a) \wedge (y \vee a) & (x, y) \in]a, e]^2 \cup]a, e] \times T_a \cup T_a \times]a, e] \cup T_a \times T_a \\ x \vee y & (x, y) \in]e, 1] \times ([a, e] \cup T_a) \cup ([a, e] \cup T_a) \\ & \cup]e, 1] \times [0, a] \cup [0, a] \times]e, 1] \\ x \vee a & (x, y) \in T_e \times ([0, e] \cup T_a) \cup T_{a,e} \times ([0, e] \cup T_a) \\ y \vee a & (x, y) \in ([0, e] \cup T_a) \times T_e \cup ([0, e] \cup T_a) \times T_{a,e} \\ a & (x, y) \in [0, a] \times ([a, e] \cup T_a) \cup ([a, e] \cup T_a) \times [0, a] \end{cases}$$

Teorem 2.2.3. L bir sınırlı kafes ve $e, a \in L$ için $a \leq e$, S_1 $[0, a]$ üzerinde bir t-konorm ve S $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm olsun. $[a, e]$ üzerinde T_W t-normu göz önüne alınmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan $U_2: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı bir null-uninormdur:

$$U_2(x, y) = \begin{cases} S(x, y) & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ T_W(x, y) & (x, y) \in]a, e]^2 \\ S_1(x \wedge a, y \wedge a) & (x, y) \in [0, a] \times (T_a \cup T_{a,e}) \cup (T_a \cup T_{a,e}) \times [0, a] \\ & \cup T_a \times T_a \cup T_a \times T_{a,e} \cup T_{a,e} \times T_a \cup T_{a,e} \times T_{a,e} \cup [0, a]^2 \\ x & (x, y) \in T_e \times]e, 1] \cup]a, e] \times]e, 1] \\ y & (x, y) \in]e, 1] \times T_e \cup]e, 1] \times]a, e] \\ a & A.T. \end{cases}$$

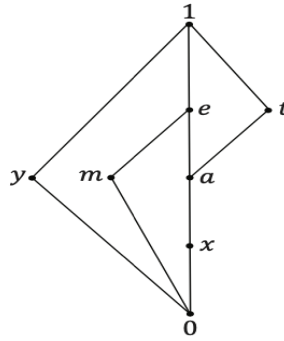
$\mathbb{I}_{a,e}$	$S_1(x, y \wedge a)$	a	a	$S_1(x \wedge a, y \wedge a)$	a	$S_1(x \wedge a, y \wedge a)$
$\mathbb{I}_e$	a	a	y	a	a	a
$\mathbb{I}_a$	$S_1(x, y \wedge a)$	a	a	$S_1(x \wedge a, y \wedge a)$	a	$S_1(x \wedge a, y \wedge a)$
1	a	x	$S(x, y)$	a	x	a
e	a	$T_W(x, y)$	y	a	a	a
a	$S_1(x, y)$	a	a	$S_1(x \wedge a, y)$	a	$S_1(x \wedge a, y)$
0	a	e	1	$\mathbb{I}_a$	$\mathbb{I}_e$	$\mathbb{I}_{a,e}$

Tablo 7. L üzerinde U_2

Sonuç 2.2.4. Teorem 2.2.3.'de; $[0, a]$ üzerinde $S_1 = S_v$, $[e, 1]$ üzerinde $S = S_v$ alınırsa aşağıdaki null-uninorm, L üzerinde $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük null-uninormdur:

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} x \vee y & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ (x \wedge a) \vee (y \wedge a) & (x, y) \in T_a \times T_{a,e} \cup T_{a,e} \times T_a \cup T_{a,e} \times T_{a,e} \\ & \cup [0, a]^2 \cup [0, a] \times (T_a \cup T_{a,e}) \cup (T_a \cup T_{a,e}) \times [0, a] \\ x & (x, y) \in T_e \times]e, 1] \cup]a, e] \\ y & (x, y) \in]e, 1] \times T_e \cup]e, 1] \times]a, e] \\ a & A.T. \end{cases}$$

Örnek 2.2.5. Şekil 7. de verilen $L = \{0, x, m, e, a, t, y, 1\}$ kafesini göz önüne alınsın. Bu kafes üzerinde, $\underline{U}$ ve $\overline{U}$ $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı null-uninormları Tablo 2. deki gibi elde edilir.



Şekil 3. L kafesi

$\underline{U}$	0	x	m	e	a	t	y	1
0	0	x	0	e	a	a	0	a
x	x	x	x	a	a	a	x	a
m	0	x	0	a	a	a	0	a
e	e	a	a	e	a	a	a	1
a	a	a	a	a	a	a	a	a
t	a	a	a	a	a	a	a	t
y	0	x	0	a	a	a	0	a
1	a	a	a	1	a	t	a	1

$\overline{U}$	0	x	m	e	a	t	y	1
0	0	x	a	a	a	t	1	1
x	x	a	a	a	1	t	1	1
m	a	a	e	e	a	t	1	1
e	a	a	e	e	a	t	1	1
a	a	1	a	a	a	t	1	1
t	t	t	t	t	t	1	1	1
y	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tablo 8. L üzerinde $\underline{U}$ ve $\overline{U}$

3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, bir L sınır kafesi üzerinde tanımlı $\{e, 1\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük ve en büyük uni-nullnormlar ile $\{0, e\}_a$ 2-nötral elemanlı en küçük ve en büyük null-uninormlar belirlenmiştir. Bu amaçla sınırlı bir kafes üzerinde t-normlar ile t-konormları kullanarak iki uni-nullnorm ve iki null-uninorm inşa edilmiştir. Ayrıca her yöntem örneklerle desteklenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory, third ed., Providence.
- [2] Fodor, J.C., 1995. Contrapositive symmetry of fuzzy implications, Fuzzy Sets and Systems, 69, 141-156.
- [3] Yager, R. R., Rybalov, A., 1996. Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets Systems, 180, 111-120.
- [4] De Baets, B. and Mesiar, R., 1999. Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, 61-75.
- [5] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E., 2000. Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [6] Calvo, T., DeBaets, B., Fodor, J., 2001. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120, 385-394.
- [7] Akella, P., 2007. Structure of n -uninorms, Fuzzy Sets and Systems 158, 1631-1651.
- [8] Drewniak, J., Drygas, P., Rak, E., 2008. Distributivity between uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 159, 1646-1657.
- [9] Karaçal, F., Mesiar, R., 2015. Uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 261, 33-43.
- [10] Karaçal, F., İnce, M. A., Mesiar, R., 2015. Nullnorms on bounded lattices, Information Sciences, 325, 227-236.
- [11] Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M. N., Karaçal, F., 2016. Ordering based on uninorms, Information Sciences, 330, 315-327.
- [12] İnce, M. A., Karaçal, F., Mesiar, R., 2016. Medians and nullnorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 289, 74-81.
- [13] Sun, F., Wang, W., Qu, X., 2017. Uni-nullnorms and null-uninorms, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 32, 1969-1981.
- [14] Wang, Y.M., Zhan, H., Liu, H.W., 2019. Uni-nullnorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, In press, 386, 132-144.
- [15] Zhang, H. P., Ouyang, Y. ve Baets, D. B., 2019. Constructions of uni-nullnorms and null-uninorms on a bounded lattice, Fuzzy Sets and Systems, 403, 78-87.
- [16] İnce, M. A., Karaçal, F., 2019. Determination of the smallest-greatest uni-nullnorms and null-uninorms on an arbitrary bounded lattice L , International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, submitted.

[17] Wu, X., Liang, S., Luo, Y., Çaylı, G. D., 2022. Construction methods for the smallest and largest uni-nullnorms on bounded lattices, *Fuzzy Sets and Systems*, 427, 132-148.

