

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeği, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Pembe İPEK AL'a saygı ve şükranlarımı sunarım. İlminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim her zaman desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'a saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm'ündeki tüm değerli hocalarıma lisans ve yüksek lisans öğrenimim sürecinde gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime, ayrıca ailemden bildiğim dostlarıma çok teşekkür ederim.

Salih KAYA

Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektral Yarıçapı ve İlgili Eşitsizlikler” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Pembe İPEK AL’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20/06/2023

Salih KAYA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Gerekli Kavram ve Açıklamalar	4
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR	47
2.1. İki Operatörün Toplamının Spektral Yarıçapı Üzerine Bir Teorem	47
2.2. Hilbert Uzay Operatörleri İçin Spektral Yarıçap Eşitsizlikleri	52
2.3. Pozitif Komütatörler İçin Spektral Yarıçap Eşitsizlikleri	60
2.4. Kısmi Sıralı Banach Uzaylarının Yerel Spektral Yarıçapı Üzerine.....	71
2.5. Pozitif Operatörlerin Yerel Spektral Yarıçapı Üzerine.....	74
3. SONUÇLAR	84
4. ÖNERİLER.....	85
5. KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans

SINIRLI LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL YARIÇAPI VE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

Salih KAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Pembe İPEK AL
2023, 88 Sayfa

Bu tez çalışması iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sınırlı lineer operatörlerin spektral yarıçapı üzerine genel bir literatür çalışması yapılmıştır. İlave olarak, tez içerisinde kullanılan kavramlar ve ilgili temel bilgiler açıklayıcı örnekler ile verilmiştir.

İkinci bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Banach uzaylarında tanımlı lineer sınırlı operatörlerin toplamalarının spektral yarıçapı üzerine bir teoremden bahsedilmiştir. İkinci kısımda, Hilbert uzay operatörlerinin toplamaları, çarpımları ve komütatörleri için spektral yarıçap eşitsizlikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Banach uzaylarında iki pozitif komütatif operatörün komütatörünün yarı-nilpotentliği imâ eden koşullardan bahsedilmiştir. Dördüncü kısımda, Banach uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin toplamalarının ve çarpımlarının yerel spektral yarıçapı ile ilgili eşitsizlikler verilmiştir. Son kısımda ise, Banach uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin yerel spektral yarıçaplarının alt-toplanabilirliği ve alt-çarpılabilirliği için bazı yeter koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spektral yarıçap, yerel spektral yarıçap, komütatör, pozitif operatör, operatör matris, eşitsizlik.

SUMMARY

Master Thesis

THE SPECTRAL RADIUS OF BOUNDED LINEAR OPERATORS AND RELATED INEQUALITIES

Salih KAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department Of Mathematics
Supervisor: Assoc. Dr. Pembe İPEK AL
2023, 88 Pages

This thesis consists of two chapters. In the first chapter, a general literature review about the spectral radius of bounded linear operators is made. In addition, fundamental informations related to the terms are used in this thesis were given with descriptive examples.

The second chapter consists of five sections. In the first section, a theorem on the spectral radius of sums of bounded linear operators defined in Banach spaces is mentioned. In the second part, the spectral radius inequalities for the sums, products and commutators of Hilbert space operators are given. In the third section, the conditions implying the semi-nilpotentiality of the commutators of two positive commutative operators defined in Banach spaces are mentioned. In the fourth section, inequalities related to local spectral radius of sums and products of bounded linear operators defined in Banach spaces are given. In the last part, some sufficient conditions are given for the sub-additivity and sub-multiplicability of the local spectral radii of the bounded linear operators defined in Banach spaces.

Keyword: Spectral radius, local spectral radius, commutator, positive operator, operator matrix, inequality.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\bar{z}$	: $z \in \mathbb{C}$ sayısının kompleks eşleniği
$X \times Y$	: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$\dim A$	: A lineer uzayının boyutu
(x_n)	: Genel terimi x_n , $n \geq 1$ olan sayılar dizisi
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfı
$B(H)$	: H lineer normlu uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$L^2(H, (a, b))$	: $[a, b]$ aralığında H Hilbert uzayına tanımlanan Lebesgue ölçülebilir vektör-fonksiyonların Hilbert uzayı
$R_\lambda(A)$	: A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayırık spektrumu
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrumu
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	: A operatörünün görüntü kümesi
$\text{Ker} A$	: A operatörünün çekirdeği
$\dim H$	: H uzayının boyutu
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Literatürden bilindiği gibi Operatörlerin Spektral Teorisi'nin en temel sorunlarından biri, incelenen operatörün spektrum ve resolvent kümelerinin düzlemde geometrik yerinin net olarak belirlenmesidir. Operatörün lineer sınırlı olması durumunda resolvent kümesinin 0-merkezli, norm-yarıçaplı çemberin dışını kapsadığı kesin olarak bilinmektedir. Fakat çemberin üstündeki ve içindeki bazı noktaların da resolvent kümeye ait olma olasılığı vardır (ancak lineer sınırlı operatörler için tüm düzlem olamaz). Tüm zorlukları ile beraber, çemberin içindeki ve üzerindeki hangi noktaların resolvent kümeye ait olacağı hangi noktaların ait olmayacağı operatörler teorisinin önem arz eden sorularından birisidir. Spektral yarıçapın spektral normdan kesin küçük olduğu durumlarda yarıçapı spektral yarıçap olan çemberin dışındaki tüm noktaların da resolvent kümeye ait olduğu açıktır. Fakat spektral yarıçapı hesaplamının bu güne kadar bilinen tek yolu klasik Gelfand formülüdür ki, bu da çoğu zaman beraberinde büyük teknik zorluklar getirmektedir. Bugüne kadar, maalesef, spektral yarıçapı hesaplamının daha kullanışlı bir yöntemi bulunamamıştır. Bu nedenle spektral yarıçap ile ilgili eşitsizlikler literatürde büyük bir öneme sahiptir.

Matematik literatüründen bilindiği gibi spektral yarıçap hesabında kullanılan tek formül Gelfand formülü olup $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$ olarak bilinmektedir (Gelfand, 1941). Ayrıca H Hilbert uzayında lineer sınırlı normal bir A operatörü için $r(A) = \|A\|$ bağıntısının doğru olduğu matematikte iyi bilinen sonuçlardan biridir (bkz. (Hirsh, 1999)). Ancak genelde normal olmayan lineer sınırlı operatörler için bu eşitlik sağlanmayabilir. Bilindiği gibi $L_2(0,1)$ Hilbert uzayında $V: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$, $V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$, $f \in L_2(0,1)$ klasik Volterra operatörü için $r(V) = 0$ ve $\|V\| = 2/\pi$ (bkz. (Halmos, 1982)). Ayrıca bu kitapta $L_2(-1,1)$ Hilbert uzayında antisimetrik Volterra $V_0: L_2(-1,1) \rightarrow L_2(-1,1)$, $V_0(f)(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$, $f \in L_2(-1,1)$ operatörünün nilpotentlik derecesi 2 olan bir nilpotent operatör olup $r(V_0) = 0$ ve $\|V_0\| = 4/\pi$ olduğu gösterilmiştir.

Öte yandan klasik Volterra operatörü için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|n! V^n\| = 1/2$ sonucu Little ve Reade'nin (Little ve Reade, 1998) ve Kershaw'ın (Kershaw, 1999) çalışmalarında bulunmuştur.

(Gürdal vd., 2015) çalışmasında ise $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$ Lebesgue uzayında Hardy operatörünün normu için bir değerlendirme yapılmış ve bu operatörün Volterra tipli (kompakt ve yarı-nilpotent) operatör olduğu gösterilmiştir.

Withley'in (Withley, 1987) makalesinde $C[0,1]$ ve $L_p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzaylarında Volterra composition operatorünün nilpotentliği araştırılmış, Tong bu sonucu sürekli fonksiyonlar ve Lebesgue uzaylarında integral operörler için genişletmiş ise de $r(A) < \|A\|$ özelliğini araştırmamıştır (bkz. (Tong, 1989)). Bunun yanı sıra Zima'nın (Zima, 1992) çalışmasında $C[0,1]$ uzayında $(Af)(t) = L \int_0^t t^\alpha f(t^\beta) dt$, $f \in C[0,1]$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ integral operatörünün normu değil spektral yarıçapı hesaplanmış ve $r(A) = \frac{L}{\alpha+1} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n}$ olarak bulunmuştur.

Domanov'un (Domanov, 2007) makalesinde $\varphi \circ V$, $\varphi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ ve $V: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$ klasik Volterra operatörü olmak üzere, bileşke (composition) operatörünün noktasal spektrumunun tam ifadesi verilmiş, $\sigma_p(\varphi \circ V) = \{(1 - \alpha)\alpha^{n-1}\}$ ve $r(\varphi \circ V) = 1 - \alpha$ olarak bulunmuştur. Domanov'un (Domanov, 2008) eserinde ise $L_2(0,1)$ uzayında $\varphi \circ V$ kompakt operatörünün spektrumu φ fonksiyonunun $\varphi(x) > x$, $x \in (0,1)$ durumunda incelenmiştir. Fakat bu son iki çalışmada da operatörlerin normu hesaplanmamıştır. $L_p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayında $\varphi \circ V$ kompakt operatörünün spektral teorisi hakkında geniş bilgiler (Montes-Rodriguez vd., 2009) makalesinde yer almaktadır.

Kittaneh'in (Kittaneh, 2005) makalesinde toplam, çarpım ve komütatör operatörlerin spektral yarıçapı ve spektral normu arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sonsuz skaler elemanlı çift-bantlı üst üçgensel bir özel operatör matrisin c_0 , c ve l_∞ uzaylarında spektral yarıçap ve spektral norm arasındaki kesin eşitsizlik özelliğinin olmadığı gözlenmiştir (bkz. (Karakaya vd., 2010)).

Bu tez çalışmasında, lineer sınırlı operatörlerin spektral yarıçapları ve ilgili eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapılmıştır. İlk olarak, lineer operatörlerin toplamının spektral yarıçapı üzerine bir teorem kurulacaktır (bkz. Zima, 1993). Daha sonra sınırlı pozitif lineer operatörlerin genel spektral yarıçaplarının yarı-toplanabilirliği ve yarı-çarpılabilirliği için bazı yeterli koşullar verilecektir (bkz. Zima, 2002). Ardından Hilbert uzay operatörlerin toplamalarının, çarpımlarının ve komütatörlerinin spektral yarıçapları üzerine bazı eşitsizlikler kanıtlanacak ve spektral yarıçap için sıkıştırma eşitsizlikleri elde edilecektir (bkz. Kittaneh, 2005). Ayrıca, iki pozitif operatörün komütatörlerinin spektral yarıçapının özellikleri incelenecek ve özellikle komütatörün yarı-nilpotentliğini ifade eden koşullar oluşturulacaktır (bkz. Zima, 2014). Son olarak komütatif iki operatörün yerel spektrumu hakkında bilinen eşitsizliklere alternatif koşullar verilecektir (bkz. Zima, 1997). Böylece bir bütün olarak sınırlı lineer operatörlerin spektral yarıçapları ve ilgili eşitsizliklerin aksiyomatik bir teorisi literatüre kazandırılmış olacaktır.

1.2. Gerekli Kavram ve Açıklamalar

Tanım 1.2.1. (Metrik Uzay) (Rynne vd., 2008)

X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$(\mathbf{m}_1) d(x, y) \geq 0;$$

$$(\mathbf{m}_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (özdeşlik aksiyomu);}$$

$$(\mathbf{m}_3) d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetriklik aksiyomu);}$$

$$(\mathbf{m}_4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği),}$$

aksiyomlarını sağlıyorsa ona X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.2.2. (Kreyszig, 1978)

$X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y|$$

d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

Gerçekten;

$$(\mathbf{m}_1) \text{ Her } x, y \in \mathbb{R} \text{ için } d(x, y) = |x - y| \geq 0;$$

$$(\mathbf{m}_2) \text{ Her } x, y \in \mathbb{R} \text{ için } d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(\mathbf{m}_3) \text{ Her } x, y \in \mathbb{R} \text{ için } d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |(-1)||y - x| = d(y, x);$$

(**m₄**) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$

$$\leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

gerçeklenir. O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.3. (Rynne vd., 2008)

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere keyfi bir $k \geq 1$ için

$$d: K^k \times K^k \rightarrow \mathbb{R}, d: (x, y) = \left(\sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü K^k üzerinde bir metrik olup ona K^k üzerinde standart metrik adı verilir.

Tanım 1.2.4. (Lineer Uzay) (Rynne vd., 2008)

X boş olmayan bir küme ve $K(\mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C})$ bir cisim olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y, x, y \in X$$

$$\circ: K \times X \rightarrow X, (\alpha, x) \rightarrow \alpha x, \alpha \in K, x \in X$$

dönüşümleri ile tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

a. $x + y = y + x$;

b. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

c. $x + 0 = x$ olacak şekilde bir tek $0 \in X$ elemanı vardır;

d. $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir tek $-x \in X$ elemanı vardır;

e. $1 \cdot x = x$;

$$\mathbf{f.} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$\mathbf{h.} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

X 'e K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir. K 'nın elemanlarına skaler, X 'in elemanlarına ise vektör adı verilir. $K = \mathbb{R}$ ($K = \mathbb{C}$) ise X 'e bir reel (kompleks) lineer uzay denir.

Örnek 1.2.5. (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki lineer uzay olsun. Bu durumda $X \times Y$ uzayı

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \alpha \in K, (x, y) \in X \times Y$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.2.6. (Lineer Altuzay) (Rynne vd., 2008)

X bir lineer uzay ve $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ olmak üzere Y kümesi X lineer uzayı üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler altında bir lineer uzay oluşturuyorsa Y 'ye X 'in bir lineer altuzayı denir.

Örnek 1.2.7. (Kreyszig, 1978)

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots): x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ kümesi $K = \mathbb{R}$ cismi üzerinde

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \alpha \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

işlemleri altında bir lineer uzay olup

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3): x_1 = x_2 \text{ ve } x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

alt kümesi aynı işlemler altında $\mathbb{R}^3$ 'ün bir lineer altuzayıdır.

Tanım 1.2.8. (Normlu Lineer Uzay) (Rynne vd., 2008)

X, K cismi üzerinde tanımlanan bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|_X: X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|_X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

$$(n_1) \|x\|_X \geq 0;$$

$$(n_2) \|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = \theta_X;$$

$$(n_3) \|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X;$$

$$(n_4) \|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

aksiyomlarını sağlıyorsa ona X lineer uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|_X)$ ikilisine bir normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir.

Örnek 1.2.9. (Rynne vd., 2008)

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\|\cdot\|: K^n \rightarrow \mathbb{R}, \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyon K^n üzerinde bir normdur. Bu norma K^n standart norm adı verilir.

Şimdi yukarıdaki örnek genelleştirilsin.

Örnek 1.2.10. (Rynne vd., 2008)

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X, K üzerinde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına sahip sonlu boyutlu bir lineer uzay olsun. Keyfi $x \in X$ elemanı

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$$

olacak biçimde tek türlü yazılabilir. Bu durumda,

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir normdur. Gerçekten; keyfi $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$ elemanları ve $\alpha \in K$ alınsın. Bu durumda $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j e_j$ olup aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

$$(n_1) \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \geq 0,$$

(n_2) Eğer $x = 0$ ise $\|x\| = 0$ 'dır. Tersine; eğer $\|x\| = 0$ ise $\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} = 0$ ve böylece $1 \leq j \leq n$ için $\lambda_j = 0$ bulunur. Yani; $x = 0$ dır;

$$(n_3) \|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha \lambda_j|^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|;$$

(n_4) Hölder eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j + \mu_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \mu_j + \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j \lambda_j + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_j \mu_j) + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^n |\lambda_j| |\mu_j| + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Böylece $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliği elde edilir. O halde $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Bir çok ilginç normlu uzay sonlu boyutlu değildir.

Örnek 1.2.11. (Rynne vd., 2008)

M bir kompakt metrik uzay ve $C_K(M)$, M üzerinde tanımlı K değerli sürekli fonksiyonların lineer uzayı olsun. Bu durumda,

$$\|\cdot\|: C_K(M) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu $C_K(M)$ üzerinde bir normdur. Bu norma $C_K(M)$ üzerinde standart norm adı verilir. Gerçekten; keyfi $f, g \in C_K(M)$ ve $\alpha \in K$ elemanları alınsın.

$$(n_1) \|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\} \geq 0;$$

(n_2) Eğer f sıfır fonksiyonu ise her $x \in M$ için $f(x) = 0$ olup $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\} = 0$ elde edilir. Tersine, eğer $\|f\| = 0$ ise $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\} = 0$ olup her $x \in M$ için $f(x) = 0$ bulunur. Böylece f , sıfır fonksiyonudur;

$$(n_3) \|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)|: x \in M\} = |\alpha| \sup\{|f(x)|: x \in M\} = |\alpha| \|f\|;$$

(n_4) Eğer $y \in M$ ise

$$|(f + g)(y)| \leq |f(y)| + |g(y)| \leq \|f\| + \|g\|$$

olup böylece

$$\|f + g\| = \sup\{|(f + g)(x)|: x \in M\} \leq \|f\| + \|g\|$$

bulunur.

O halde $(C_K(M), \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek 1.2.12. (Rynne vd., 2008)

a. $\ell_p := \{(x_n): x_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$ lineer uzayı her $(x_n) \in \ell_p$ için

$$\|(x_n)\|_{\ell_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p},$$

b. $\ell_{\infty} := \{(x_n): x_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \sup_n |x_n| < \infty\}$ lineer uzayı her $(x_n) \in \ell_{\infty}$ için

$$\|(x_n)\|_{\ell_{\infty}} = \sup \{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar altında birer normlu uzaydır.

Teorem 1.2.13. (Rynne vd., 2008)

X , $\|\cdot\|$ normu ile bir lineer uzay olsun.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlı dönüşüm X üzerinde bir metriktir.

İspat: Keyfi $x, y, z \in X$ elemanları alınsın. Norm özellikleri kullanılarak

$$(m_1) \quad d(x, y) = \|x - y\| \geq 0,$$

$$(m_2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(m_3) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\|$$

$$= |(-1)| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

$$(m_4) \quad d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\|$$

$$\leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

$$\leq d(x, y) + d(y, z)$$

aksiyomları sağlanır. Bu halde d , X üzerinde bir metriktir.

Tanım 1.2.14. (Bartle, 1966)

Bir X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ değerli, Σ -ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$ fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümü $L_p(X, \Sigma, \mu)$ ile gösterilir. Bu $L_p(X, \Sigma, \mu)$ lineer uzayı

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

fonksiyonu altında bir normlu uzaydır (Bartle, 1966).

Özel durumda, $X \subset \mathbb{R}$, Σ , X 'in Lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin oluşturduğu σ -cebiri ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçümü ise $L_p(X, \Sigma, \mu)$ Lebesgue uzayı $L_p(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.15. (Yakınsak dizi) (Rynne vd., 2008)

$(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|_X$ normuna göre yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_X} x$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

Örnek 1.2.16. (Rynne vd., 2008)

$(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R}) := \{f|f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve sürekli}\}$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n$, $n \geq 1$ şeklinde tanımlansın. (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_1))$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında $f(t) = 0$ noktasına yakınsaktır.

Gerçekten;

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \int_0^1 (t^n - 0) dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ bulunur. Bu ise $f_n(t) := t^n$, $n \geq 1$ dizisinin $\|\cdot\|_1$ normuna göre $f(t) = 0$ noktasına yakınsadığını gösterir.

Tanım 1.2.17. (Cauchy Dizisi) (Rynne vd., 2008)

$(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ doğal değerlerinde $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ise $(x_n) \subset X$ dizisine $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Örnek 1.2.18. (Rynne vd., 2008)

$C([0,1], \mathbb{R}) := \{f|f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve sürekli}\}$ olmak üzere $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n$ şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi

$$(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

uzayında bir Cauchy dizisi olup

$$(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}, f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gerçekten;

İlk olarak (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. $n > m$ olduğundan

$$\int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^n - t^m) dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$$

bağıntısı elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ alınırsa her $m, n > n_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f_m\|_1 \frac{1}{m} < \varepsilon$$

olduğundan

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$$

eşitsizliği bulunur. Böylece (f_n) dizisini $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

(f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Aksine (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayalım. $m, n > \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğu için

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|t^n - t^m|: 0 \leq t \leq 1\} = \sup\{t^n - t^m: 0 \leq t \leq 1\}$$

eşitliği elde edilir. Kolay hesaplamalarla

$$\sup\{t^n - t^m: 0 \leq t \leq 1\} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Böylece

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $m = k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2k \in \mathbb{N}$ alınırsa

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{k}{2k}\right)^{\frac{k}{2k-k}} \left(1 - \frac{k}{2k}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

olur ki bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise çelişkidir.

Sonuç olarak, (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Tanım 1.2.19. (Tam Uzay) (Rynne vd., 2008)

Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise o uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.2.20. (Banach Uzayı) (Rynne vd., 2008)

Tam normlu uzaya bir Banach Uzayı denir.

Örnek 1.2.21. (Kreyszig, 1978)

$\ell_\infty := \{z := (z_1, \dots, z_n, \dots) : (z_n) \subset \mathbb{C} \text{ sınırlı bir dizi}\}$ lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ normu her $z \in \ell_\infty$ için

$$\|z\|_\infty := \sup\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

Gerçekten; $(z^{(n)}) = \left((z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}, \dots) \right) \subset \ell_\infty$, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir öyle ki $p, q \in \mathbb{N}$; $p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|z^{(p)} - z^{(q)}\|_\infty < \varepsilon$$

bağıntısı doğrudur. Burada

$$\|z^{(p)} - z^{(q)}\|_\infty = \sup\{|z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| : k \in \mathbb{N}\}$$

olduğundan son eşitsizlikten her $k \in \mathbb{N}$ için $(z_k^{(n)}) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her $p, q \in \mathbb{N}$; $p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$|z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| < \varepsilon$$

şartını sağladığı görülür. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $(z_k^{(n)}) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her biri birer Cauchy dizisidir. Cauchy yakınsaklık kriterine göre her $k \in \mathbb{N}$ için $(z_k^{(n)}) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her biri yakınsaktır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z_k := \lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)} \text{ ve } z := (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$$

olsun.

a. $z \in \ell_\infty$ 'dur. Gerçekten; $(z^{(n)}) = \left((z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}, \dots) \right) \subset \ell_\infty, (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $1 > 0$ sayısına karşılık $N \equiv N(1) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki $p, q \in \mathbb{N}; p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|z^{(p)} - z^{(q)}\|_\infty < 1.$$

Özel olarak her $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için

$$\|z^{(n)} - z^{(N)}\|_\infty < 1$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\|z^{(n)} - z^{(N)}\|_\infty = \sup \left\{ |z_k^{(n)} - z_k^{(N)}| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için

$$|z_k^{(n)} - z_k^{(N)}| < 1$$

olup buradan

$$|z_k^{(n)}| \leq 1 + |z_k^{(N)}|$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|z_k^{(N)}| \leq \|z^{(N)}\|_\infty$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için

$$|z_k^{(n)}| \leq 1 + \|z^{(N)}\|_\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k := \lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)}$ olduğundan

$$|z_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_k^{(n)}|$$

şeklindedir. O halde son eşitsizlikten her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_k^{(n)}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \|z^{(N)}\|_\infty).$$

Yani, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|z_k| \leq 1 + \|z^{(N)}\|_\infty$$

olduğu elde edilir. O halde

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) \in \ell_\infty.$$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = z$ 'dir. Gerçekten; $(z^{(n)}) = \left((z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}, \dots) \right) \subset \ell_\infty, (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ sayısına karşılık

bir $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir öyleki her $p, q \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\|z^{(p)} - z^{(q)}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

şeklindedir. O halde

$$\|z^{(p)} - z^{(q)}\|_\infty = \sup \left\{ |z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $p, q \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$|z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)}$ olduğundan $p \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ sayıları sabit olarak göz önüne alındığında $q \rightarrow +\infty$ için limit alındığında her $p, k \in \mathbb{N}$ öyleki $p \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\lim_{q \rightarrow \infty} |z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| < \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2}$$

dolayısıyla

$$|z_k^{(p)} - z_k^{(q)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu bulunur. O halde her $p \in \mathbb{N}; p \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\|z^{(p)} - z\|_{\infty} = \sup \left\{ |z_k^{(p)} - z_k| : k \in \mathbb{N} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

şeklindedir. Sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}, n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\|z^{(p)} - z\|_{\infty} < \varepsilon$$

olduğundan $(z^{(n)}) \subset \ell_{\infty}$ dizisi $(\ell_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ normlu uzayında $z \in \ell_{\infty}$ noktasına yakınsaktır. Sonuç olarak $(\ell_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak olup $(\ell_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ bir Banach uzayıdır.

Örnek 1.2.22. (Kreyszig, 1978)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismi ve $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ olan iki reel sayı olmak üzere $C([a, b], \mathbb{R})$ lineer uzayı

$$C([a, b], \mathbb{R}) := \{f | [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, f \in C([a, b], \mathbb{R})$$

normlu uzayı bir Banach uzayı değildir. Gerçekten; her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) := f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < 0 \\ nx, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (f_n) dizisi $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup yakınsak bir dizi değildir.

Tanım 1.2.23. (İç Çarpım Uzayı) (Rynne vd., 2008)

$X, K (K = \mathbb{C}, K = \mathbb{R})$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $(\cdot, \cdot)_X: X \times X \rightarrow K$ dönüşümü;

$$(i_1) \forall x \in X \text{ için } (x, x)_X \geq 0 \text{ ve } (x, x)_X = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$(i_2) \forall x, y \in X \text{ için } (x, y)_X = \overline{(y, x)_X};$$

$$(i_3) \forall x, y \in X \text{ ve } \alpha \in K \text{ için } (\alpha x, y)_X = \alpha (x, y)_X;$$

$$(i_4) \forall x, y, z \in X \text{ için } (x + y, z)_X = (x, z)_X + (y, z)_X$$

aksiyomlarını sağlıyorsa ona X lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu, $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir. $K = \mathbb{C} (K = \mathbb{R})$ ise ona kompleks (reel) iç çarpım uzayı denir.

$K = \mathbb{R}$ ise her $x, y \in X$ için $(x, y)_X = (y, x)_X$ eşitliği doğrudur.

Ayrıca her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$1. (\alpha x + \beta y, z)_X = (\alpha x, z)_X + (\beta y, z)_X = \alpha (x, z)_X + \beta (y, z)_X;$$

$$2. (x, \alpha y)_X = \overline{(\alpha y, x)_X} = \overline{\alpha (y, x)_X} = \bar{\alpha} \overline{(y, x)_X} = \bar{\alpha} (x, y)_X;$$

$$3. (x, \alpha y + \beta z)_X = \overline{(\alpha y + \beta z, x)_X} = \overline{\alpha (y, x)_X + \beta (z, x)_X} \\ = \bar{\alpha} \overline{(y, x)_X} + \bar{\beta} \overline{(z, x)_X} = \bar{\alpha} (x, y)_X + \bar{\beta} (x, z)_X$$

bağıntılarının doğruluğu elde edilir.

1.2.24. Örnek (Rynne vd., 2008)

$$(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) = \sum_{n=1}^k x_n y_n$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}^k$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpım $\mathbb{R}^k$ üzerinde standart iç çarpım olarak adlandırılır. Gerçekten; keyfi $x, y \in \mathbb{R}^k$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$(i_1) (x, x) = \sum_{n=1}^k x_n^2 \geq 0;$$

$$(i_2) (x, x) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq n \leq k \text{ için } x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0;$$

$$\begin{aligned} (i_3) (\alpha x + \beta y, z) &= \sum_{n=1}^k (\alpha x_n + \beta y_n) z_n \\ &= \alpha \sum_{n=1}^k x_n z_n + \beta \sum_{n=1}^k y_n z_n \\ &= \alpha (x, z) + \beta (y, z); \end{aligned}$$

$$(i_4) (x, y) = \sum_{n=1}^k x_n y_n = \sum_{n=1}^k y_n x_n = (y, x)$$

aksiyomları sağlanır. Böylece $(\cdot, \cdot)$, $\mathbb{R}^k$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Örnek 1.2.25. (Gohberg, vd., 2003)

$\alpha \in C[a, b]$, $\alpha(t) > 0$, $t \in [a, b]$ olmak üzere

$$(f, g)_{L_2[a, b]} = \int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{g(t)} dt, f, g \in L_2[a, b]$$

dönüşümü $L_2[a, b]$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 1.2.26. (İç Çarpımın Ürettiği Norm) (Rynne vd., 2008)

$(X, (\cdot, \cdot)_X)$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere $x \in X$ için

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

fonksiyonu X üzerinde bir norm olup bu norma iç çarpımın ürettiği norm adı verilir.

Teorem 1.2.27. (Rynne vd., 2008)

$X, (\cdot, \cdot)$ iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayı ve bu iç çarpıma karşılık gelen norm $\|\cdot\|$ olsun. Bu halde, her $x, y \in X$ için aşağıdakiler sağlanır:

a. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (paralelkenar kuralı);

b. X reel ise

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2;$$

c. X kompleks ise

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \text{ (polarizasyon eşitliği)}.$$

Not. Bir lineer uzay üzerinde tanımlı normun bir iç çarpım tarafında üretilmediğini göstermenin bir yolu, onun paralel kenar kuralını sağlamadığını göstermektedir.

Örnek 1.2.28. (Rynne vd., 2008)

$C[0,1]$ üzerindeki standart norm bir iç çarpım tarafından üretilmez. Gerçekten; $[0,1]$ üzerinde tanımlı $f(x) = 1$, $g(x) = x$ fonksiyonları düşünölsün. $f, g \in C[0,1]$ olup $[0,1]$ üzerinde tanımlı standart norma göre

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 4 + 1 = 5 \text{ ve } 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2(1 + 1) = 4$$

bulunur. Dolayısı ile paralelkenar kuralı sağlanmaz. Yani, bu norm bir iç çarpım tarafından üretilmez.

Tanım 1.2.29. (Hilbert Uzayı) (Rynne vd., 2008)

Bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiğı norma göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 1.2.30. (Rynne vd., 2008)

$X = L_2(a, b)$, $(f, g) := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$, $f, g \in L_2(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ fonksiyonu $L_2(a, b)$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu olup $L_2(a, b)$ uzayı iç çarpımın ürettiğı

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, f \in L_2(a, b), a, b \in \mathbb{R}$$

normu altında bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.31. (Rynne vd., 2008; Narici, vd., 1972)

X ve Y iki lineer uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzayı olsun. $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir operatör denir.

$D(A) := \{x \in X: Ax \text{ tanımlı}\} \subset X$ kümesine A operatörünün tanım kümesi,

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax: x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine A operatörünün değer kümesi,

$Ker A := \{x \in D(A): Ax = 0\} \subset X$ kümesine ise A operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 1.2.32. (Lineer Operatör) (Kreyszig, 1978)

X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne bir lineer operatör denir.

Tanım 1.2.33. (Birim Operatör) (Kreyszig, 1978)

X bir lineer uzay olmak üzere $I: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $Ix = x$ operatörüne birim operatör denir.

Tanım 1.2.34. (Sıfır Operatörü) (Kreyszig, 1978)

X bir lineer uzay olmak üzere $0: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $0x = 0$ operatörüne sıfır operatörü denir.

Örnek 1.2.35. (Kreyszig, 1978)

$A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Af(t) = f(t) + 1$, $f \in [a, b]$ şeklinde tanımlanan A operatörü lineer değildir. Gerçekten; $f, g \in C[a, b]$ için $f + g \in C[a, b]$ olup lineer operatörü tanımındaki $\alpha = \beta = 1$ için

$$Af(f + g) = f(t) + g(t) + 1 \text{ ve } Af(t) + Ag(t) = f(t) + g(t) + 1$$

olup

$$A(f + g)(t) \neq Af(t) + Ag(t)$$

olduğundan A operatörü lineer değildir.

Tanım 1.2.36. (Süreklili Operatörler) (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör ve $a \in D(A)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki $\|x - a\| < \delta$ olan $\forall x \in D(A)$ için $\|Ax - Aa\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa A operatörü $x = a$ noktasında süreklidir denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise ona sürekli operatör denir.

Teorem 1.2.37. (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(a) A düzgün süreklidir;

(b) A süreklidir;

(c) A , 0 noktasında süreklidir;

(d) $\|x\| \leq 1$ olan her $x \in X$ için $\|A(x)\| \leq k$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı vardır;

(e) Her $x \in X$ için $\|A(x)\| \leq k\|x\|$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı vardır.

Örnek 1.2.38. (Rynne vd., 2008)

$A: C_K[0,1] \rightarrow K$, $A(f) = f(0)$ lineer dönüşümü sürekli. Gerçekten; $f \in C_K[0,1]$ olsun. Bu durumda

$$|A(f)| = |f(0)| \leq \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\} = \|f\|$$

elde edilir. Böylece Teorem 1.2.37 (e) şikkından $k = 1$ olup A operatörü sürekli.

Örnek 1.2.39. (Rynne vd., 2008)

$\{c_n\} \in l^\infty$ olmak üzere $A: l^1 \rightarrow K$,

$$A(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

lineer dönüşümü sürekli. Gerçekten; öncelikle A dönüşümünün iyi tanımlı olduğu gösterilsin. Keyfi $\{c_n\} \in l^\infty$ ve $\{x_n\} \in l^1$ alınsın. Bu durumda

$$\lambda = \|\{c_n\}\|_\infty = \sup \{|c_n|: n \in \mathbb{N}\} < \infty \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

elde edilir. Dolayısı ile her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|c_n x_n| \leq \lambda |x_n|$$

olup karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|$ serisi yakınsaktır. Böylece $\{c_n x_n\} \in l^1$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \leq \|\{c_n\}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak; A operatörü iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$\|A\{x_n\}\| = |\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \leq \|\{c_n\}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|\{c_n\}\|_\infty \|\{x_n\}\|_1$$

elde edilir. Böylece Teorem 1.2.37'de (e) şikkından $k = \|\{c_n\}\|_\infty$ olup A operatörü sürekli.

Tanım 1.2.40. (Sınırlı Operatör) (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa A operatörüne sınırlı operatör adı verilir. X 'den Y 'ye tüm sınırlı operatörlerin oluşturduğu aile $B(X, Y)$, özel olarak $X = Y$ ise bu aile $B(X)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.41. (Gohberg, vd., 2003)

$k(t, s)$ fonksiyonu $D = [a, b] \times [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $f \in L_2(a, b)$ için

$$Kf(t) := \int_a^b k(t, s) f(s) ds$$

şeklinde tanımlı operatör sınırlı lineerdir. Gerçekten, K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğu gösterilsin. Her $f \in L_2(a, b)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\int_a^b |k(t, s) f(s)| ds \right)^2 \leq \int_a^b |k(t, s)|^2 ds \int_a^b |f(s)|^2 ds$$

olup

$$\|Kf\|_{L_2(a, b)}^2 = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t, s) f(s)| ds \right)^2 dt \leq \|f\|_{L_2(a, b)}^2 \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt$$

olduğu ve buradan her $f \in L_2(a, b)$ için $Kf \in L_2(a, b)$ olduğu ve

$$\|Kf\|_{L_2(a, b)}^2 \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \|f\|_{L_2(a, b)}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $K: L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 1.2.42. (Rynne vd., 2008)

$C([a, b], \mathbb{R}) := \{f|f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli}\}$ ve

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) := \{f|f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f':[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ var ve } f' \text{ sürekli}\}$$

olmak üzere

$$S: C^1([0,1], \mathbb{R}||\cdot||_\infty) \rightarrow C^1([0,1], \mathbb{R}||\cdot||_\infty), \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}$$

$$S(f) := f', f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan operatör lineer olup sınırlı değildir.

Tanım 1.2.43. (Operatörün Normu) (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

$$\|A\| := \inf\{M: M > 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\}$$

sayısına A operatörünün normu adı verilir.

Teorem 1.2.44. (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu taktirde

$\left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \text{ ve } x \neq \theta_X \right\}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olup A operatörünün normu için aşağıdaki

formüller geçerlidir.

1. $\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \text{ ve } x \neq \theta_X \right\};$
2. $\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X \leq 1 \};$
3. $\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X < 1 \};$
4. $\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve } \|x\|_X = 1 \}.$

Örnek 1.2.45. (Rynne vd., 2008)

$A: C_K[0,1] \rightarrow K$, $A(f) = f(0)$ şeklinde tanımlı lineer sınırlı operatörü için $\|A\| = 1$ 'dir. Gerçekten; Örnek 1.2.38'den her $f \in C_K[0,1]$ için $|A(f)| \leq \|f\|$ olduğu biliniyor. Böylece,

$$\|A\| = \inf \{M: m > 0 \text{ ve } \forall x \in C_K[0,1] \text{ için } \|A\lambda\| \leq M\|x\|\} \leq 1$$

bulunur. Diğer taraftan; eğer $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$, $g(x) = 1$ olarak alınırsa $g \in C_K[0,1]$,

$$\|g\| = \sup \{|g(x)|: x \in [0,1]\} = 1$$

ve

$$|A(g)| = |g(0)| = 1$$

bulunur. Böylece

$$1 = |A(g)| \leq \|A\|\|g\| = \|A\|$$

elde edilir. Böylece $\|A\| = 1$ bulunur.

Teorem 1.2.46. (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki normlu uzay olmak üzere X 'den Y 'ye tanımlı lineer sınırlı operatörlerin oluşturduğu $B(X, Y)$ lineer uzayı $\|\cdot\|$ operatör normu altında bir normlu uzaydır.

İspat: Keyfi $A, B \in B(X, Y)$ ve $\lambda \in K$ alınsın.

(n₁) $\|A\| \geq 0$ olduğu açıktır;

(n₂) Her $x \in X$ için R sıfır dönüşümünün $R(x) = 0$ özelliğinden

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ için } \|Ax\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ için } Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ bir sıfır dönüşümüdür}$$

elde edilir;

$$(\mathbf{n}_3) \|A(x)\| \leq \|A\|\|x\| \text{ olduğundan her } x \in X \text{ için } \|(\lambda A)(x)\| \leq |\lambda|\|A\|\|x\|$$

elde edilir. Böylece $\|(\lambda A)(x)\| \leq |\lambda|\|A\|$, eğer $\lambda \neq 0$ ise

$$\|A\| = \|\lambda^{-1}\lambda A\| \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda A\| \leq |\lambda|^{-1}|\lambda|\|A\| = \|A\|$$

bulunur. Böylece $\|A\| = |\lambda|^{-1}\|\lambda A\|$ ve buradan da

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$$

bulunur;

($\mathbf{n}_4$) Üçgen eşitsizliği kontrol edilsin:

$$\|(A + B)(x)\| \leq \|A(x)\| + \|B(x)\|$$

$$\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\|$$

$$\leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

olup $\|(A + B)\| \leq \|A\| + \|B\|$ bulunur.

Böylece $B(X, Y)$ bir normlu lineer uzaydır.

Tanım 1.2.47. (Kompakt Küme) (Rynne vd., 2008)

X bir normlu uzay ve $A \subset X$ bir küme olsun. Her $(x_n) \subset A$ dizisi A kümesinde bulunan bir elemana yakınsayan bir alt dizi içeriyorsa $A \subset X$ kümesine kompakt küme denir.

Örneğin; $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Öklid uzayında her kapalı sınırlı küme kompakttır.

Tanım 1.2.48. (Kompakt Operatör) (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Her sınırlı $M \subset X$ kümesi için $\overline{A(M)}$ kompakt ise A operatörüne kompakt operatör denir. X 'den Y 'ye kompakt operatörler ailesi $C_\infty(X, Y)$ ile ayrıca $X = Y$ ise bu aile $C_\infty(X)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.49. (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ lineer sınırlı bir operatör olsun. A operatörünün kompakt operatör olması için gerek ve yeter şart her sınırlı $(x_n) \subset X$ dizisi için $(Ax_n) \subset Y$ dizisinin yakınsak alt dizi içeriyor olmasıdır.

Örnek 1.2.50. (Rynne vd., 2008)

H bir kompleks Hilbert uzayı ve $y, z \in H$ iki sabit eleman olsun.

$$T: H \rightarrow H, Tx = (x, y)_H z, x \in H$$

operatörü bir kompakt operatördür. Gerçekten; alınan her $M \subset H$ sınırlı alt kümesi için

$$T(M) = \{(x, y)_H z : x \in M\}$$

görüntü kümesi için $\dim \overline{\text{span}(T(M))} \leq 1$ olduğundan durum açıktır.

Teorem 1.2.51. (Rynne vd., 2008)

X ve Y iki normlu uzay ve $A \in C_\infty(X, Y)$ olsun. Bu durumda A operatörü sınırlıdır. Yani;

$$C_\infty(X, Y) \subset B(X, Y)$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: A operatörünün sınırlı olmadığı kabul edilsin. Bu durumda her $n \geq 1$ tamsayısı için $\|A_{x_n}\| \geq n$ olacak şekilde bir x_n birim vektörü vardır. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan A operatörü kompakt olduğu için yakınsak bir $\{A_{x_{n(k)}}\}$ alt dizisi vardır.

Fakat bu $\|A_{x_{n(k)}}\| \geq n(k)$ olması ile çelişir. Böylece A operatörü sınırlı olmak zorundadır.

Teorem 1.2.52. (Gohberg, vd., 2003)

H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı olmak üzere $(K_n) \subset C_\infty(H_1, H_2)$, $K \in B(H_1, H_2)$ ve $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ ise $K \in C_\infty(H_1, H_2)$ şeklindedir.

Örnek 1.2.53. (Gohberg, vd., 2003)

$K: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, $Kf(t) := \int_a^b k(t, s)f(s) ds$ ve $k(t, s)$ fonksiyonu $D = [a, b] \times [a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olsun. K operatörünün kompakt olduğu gösterilsin. Bu bağlamda, $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in L_2[a, b]$ Hilbert uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere $L_2([a, b] \times [a, b])$ Hilbert uzayı için

$$\varphi_{i,j}(t, s) = \varphi_i(t) \times \varphi_j(s) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

tabanı göz önünde bulundurulsun (Gohberg, vd., 2003). Bu durumda

$$k = \sum_{i,j=1}^{+\infty} (k, \varphi_{i,j})_{L_2([a,b] \times [a,b])} \varphi_{i,j}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca

$$k_n = \sum_{i,j=1}^n (k, \varphi_{i,j})_{L_2([a,b] \times [a,b])} \varphi_{i,j}, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklindeki fonksiyonlar için

$$\|k - k_n\|_{L_2([a,b] \times [a,b])} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

bulunur.

Ayrıca

$$K_n: L_2([a, b] \times [a, b]), \quad K_n f(t) := \int_a^b k_n(t, s)f(s) ds$$

şeklinde tanımlanan lineer operatörler için $\dim R(K_n) < \infty$ olduğundan kompakt operatörlerdir (Rynne vd., 2008). Ayrıca

$$\|k - k_n\| \leq \|k - k_n\|_{L_2([a,b] \times [a,b])} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

olduğundan K operatörünün kompakt olduğu elde edilir (Gohberg, vd., 2003).

Örnek 1.2.54. (Gohberg, vd., 2003)

$K: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $K(x_n) := (\lambda_n x_n)$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ise K operatörü kompakt bir operatördür. Gerçekten; her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2$,

$$K_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, 0, \dots)$$

operatörler dizisi tanımlansın. Burada $\dim R(K_n) \leq n < \infty$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$K_n \in C_\infty(\ell_2)$ (Rynne vd., 2008). Ayrıca her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$\begin{aligned} \|K_n(x_n) - K(x_n)\|_{\ell_2} &= \|(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots) - (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, 0, \dots)\|_{\ell_2} \\ &= \|(0, 0, \dots, \lambda_{n+1} x_{n+1}, \lambda_{n+2} x_{n+2}, \dots)\|_{\ell_2} \\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \|(x_n)\|_{\ell_2} \end{aligned}$$

olup burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|K_n - K\| \leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \rightarrow 0$$

bulunur. Bilinen bir sonuçtan $K \in C_\infty(\ell_2)$ olduğu elde edilir (Gohberg, vd., 2003).

Tanım 1.2.55. (Kapalı Lineer Operatör) (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. A operatörünün grafiği

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

$X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise A operatörüne kapalı lineer operatör denir.

Teorem 1.2.56. (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu taktirde A operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A x_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

Örnek 1.2.57. (Kreyszig, 1978)

$A: D(A) \subset C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax := x'$ olsun. A operatörü kapalı bir operatördür. Gerçekten; $(x_n) \subset D(A)$ için

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ ve } Ax_n = x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$$

olsun. $C[0,1]$ normunda yakınsaklık $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaklığa denk olduğundan ve $x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ kabulünden

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x'_n(\tau) d\tau = x(t) - x(0).$$

Yani,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau) d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $x \in D(A)$ ve $x' = y$ olduğu anlamına gelir. Teorem 1.2.56'dan A operatörü kapalı bir operatördür.

Örnek 1.2.58. (Akhizer, vd., 1994)

$T: D(T) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $Tf := xf(1)$, $D(T) = C[0,1]$ şeklinde tanımlanan operatör kapalı değildir. Gerçekten $(f_n), (h_n) \subset C[0,1]$ için

$$(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{L_2[0,1]}} u(x), (h_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{L_2[0,1]}} u(x)$$

ancak

$$f_n(1) = 1, h_n(1) = 0, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde $Tf_n = x, Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 1.2.59. (Bire-Bir Operatör) (Kreyszig, 1978)

X ve Y iki lineer uzay, $D(A)$, X 'in bir lineer altuzay ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ iken $Ax_1 \neq Ax_2$ oluyorsa A operatörüne bire-bir operatör denir.

Tanım 1.2.60. (Eşlenik Operatör) (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H 'nin bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda

$$D(A^*) := \{y \in H: \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır öyleki } (Ax, y)_H = (x, z)_H\}$$

olmak üzere

$$A^*: D(A^*) \subset H \rightarrow H, A^*y := z$$

operatörüne A operatörünün eşlenik operatörü adı verilir.

Örnek 1.2.61. (Gohberg, vd., 2003)

$V: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$, $Vf(x) := \int_0^x f(t)dt$ şeklinde tanımlanan lineer Volterra operatörünün eşleniği bulunsun. V operatörünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca her $f, g \in L_2(0,1)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|Vf\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 |Vf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^2 \\
&\leq \left[\left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&= \int_0^1 1 \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L_2(0,1)}^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\|Vf\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

olup V operatörünün sınırlı olduğu görülür. O halde V^* eşlenik operatörü var olup her $f, g \in L_2(0,1)$ için

$$\begin{aligned}
(Vf, g)_{L_2(0,1)} &= \int_0^1 Vf(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) d \left(- \int_x^1 g(t) dt \right) \\
&= \left(\int_0^x f(t) dt \right) \overline{\left(- \int_x^1 g(t) dt \right)} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f(x) \left(\overline{\int_x^1 g(t) dt} \right) dx \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\overline{\int_x^1 g(t) dt} \right) dx = \left(f(x), \int_0^1 g(t) dt \right)_{L_2(0,1)} \\
&= (f, V^*g)_{L_2(0,1)}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$V^*g(t) = \int_x^1 g(t) dt$$

bulunur.

Tanım 1.2.62. (Özeşlenik Operatör) (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H 'nin bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ bir lineer operatör ve A^* , A operatörünün eşlenik operatörü olsun. $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$ ise A operatörüne özeşlenik operatör denir.

Örnek 1.2.63. (Rynne vd., 2008)

Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in B(L_2[0,1])$ operatörü

$$(T_f g)(t) := f(t)g(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda reel değerli $f \in C[0,1]$ için T_f özeşlenik operatördür.

Gerçekten; her $g, h \in L_2[0,1]$ için

$$(T_f g, h)_{L_2[0,1]} = \int_0^1 f(t) g(t) \overline{h(t)} dt = \int_0^1 g(t) \overline{\overline{f(t)} h(t)} dt = (g, T_{\overline{f}} h)_{L_2[0,1]}$$

olup $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bulunur. $f \in C[0,1]$ fonksiyonu reel değerli olduğundan $f = \overline{f}$

olup $(T_f)^* = T_f$ eşleniği elde edilir.

Tanım 1.2.64. (Kreyszig, 1978)

$S_r: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $S_r(x_n) = (x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, \dots)$ ve $S_l: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $S_l(x_n) = (x_{n+1}) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ operatörlerine sırayla ℓ_2 lineer uzayı üzerinde sağa ve sola öteleme operatörleri denir.

Örnek 1.2.65. (Rynne vd., 2008)

$S_r: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ sağa öteleme ve $S_l: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ sola öteleme operatörleri lineer operatörler olup özeşlenik olmayan operatörlerdir.

Gerçekten; her $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$\begin{aligned} S_r(\alpha x + \beta y) &= S_r((\alpha x_n) + (\beta y_n)) = (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) \\ &= (0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (0, \beta y_1, \beta y_2, \dots) = \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots) \\ &= \alpha(x_{n-1}) + \beta(y_{n-1}) = \alpha S_r x + \beta S_r y \end{aligned}$$

olup $S_r: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ sağa öteleme operatörü lineerdir. Benzer şekilde $S_l: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ sola öteleme operatörünün de lineer olduğu gösterilebilir.

Sağa öteleme ve sola öteleme operatörlerinin eşlenikleri ise her $(y_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots) = S_l$$

ve

$$S_l^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots) = S_r$$

olup her ikisi de özeşlenik olmayan operatörlerdir.

Tanım 1.2.66. (Normal Operatör) (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H 'nin bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ bir lineer kapalı operatör ve A^* , A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Eğer,

$$\text{a. } D(A) = D(A^*) \text{ ve}$$

$$\text{b. Her } f \in D(A) \text{ için } \|Af\|_H = \|A^*f\|_H$$

ise A 'ya H 'da normal operatör adı verilir.

Örnek 1.2.67. (Rynne vd., 2008)

Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in B(L_2[0,1])$ operatörü $(T_f g)(t) := f(t)g(t)$ şeklinde tanımlansın. T_f operatörü normal bir operatördür. Gerçekten; Örnek 1.2.63'den her $f \in C[0,1]$ için $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ olduğu bilinir. O halde her $g \in L_2[0,1]$ için

$$(T_f(T_f)^*)(g) = T_f(T_{\bar{f}}(g)) = T_f(\bar{f}g) = f\bar{f}g$$

ve

$$((T_f)^* T_f)(g) = T_{\bar{f}}(T_f(g)) = T_{\bar{f}}(fg) = \bar{f}fg = f\bar{f}g$$

olup

$$T_f(T_f)^* = (T_f)^* T_f$$

T_f operatörünün normal olduğu bulunur.

Örnek 1.2.68. (Rynne vd., 2008)

$S_r: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $S_r(x_n) = (x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, \dots)$ sağa öteleme operatörü normal bir operatör değildir. Gerçekten; her $(y_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*(y, y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots) = S_l$$

olduğu bilinir. Her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*(S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_l(S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_l(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

ve

$$S_r(S_r^*(x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_r(S_l(x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_r(x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$$

olup

$$S_r^* S_r \neq S_r S_r^*$$

elde edilir. Dolayısıyla sağa öteleme operatörü normal değildir. Benzer şekilde sola öteleme operatörünün de normal olmadığı gösterilebilir.

Tanım 1.2.69. (Üniter Operatör) (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı $A: H \rightarrow H$ bir lineer operatör ve A^* , A operatörünün eşlenik operatörü olsun. $AA^* = A^*A = I$ ise A operatörüne üniter operatör denir.

Tanım 1.2.70. (Pozitif Operatör) (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ bir lineer özeşlenik operatör olsun. Her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x)_H \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir ve $A \geq 0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.2.71. (Nilpotent ve Yarı-nilpotent Operatör) (Rynne vd., 2008)

X bir Banach uzayı ve $A \in B(X)$ olsun. $A^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise A operatörüne nilpotent operatör,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

ise A operatörüne yarı-nilpoten operatör denir. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $A^{n-1} \neq 0$ ancak $A^n = 0$ ise $n \in \mathbb{N}$ sayısına A operatörünün nilpotentlik derecesi denir.

Örnek 1.2.72. (Halmos vd., 1982)

$S: L_2(-1,1) \rightarrow L_2(-1,1)$, $Sf(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$, $f \in L_2(-1,1)$ ters simetrik Volterra operatörü nilpotentlik derecesi 2 olan nilpotent operatördür.

Gerçekten; her $f \in L_2(-1,1)$ için

$$S^2(f(x)) = S(Sf(x)) = S\left(\int_{-x}^x f(t)dt\right) = \int_{-x}^x \left(\int_{-t}^t f(y)dy\right) dt = 0$$

olup buradan $S \neq 0$ ve $S^2 = 0$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.73. (Spektrum, Rezolvent Küme) (Kreyszig, 1978)

H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H 'nin bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer bir operatör olsun. $I: H \rightarrow H$ birim operatör olmak üzere

1. $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{bir } x \in H, x \neq 0 \text{ için } Ax = \lambda x\}$ kümesine A 'nın noktasal spektrumu denir.

$$2. \sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ bire - bir, } R(A - \lambda I) \neq H, \overline{R(A - \lambda I)} = H \right\}$$

kümesine A 'nın sürekli spektrumu denir.

3. $\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ bire - bir, } \overline{R(A - \lambda I)} \neq H \right\}$ kümesine A 'nın kalan spektrumu denir.

4. $\sigma(A) := \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ kümesine A 'nın spektrumu denir. Bu halde

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ terslenemezdir}\}.$$

5. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ kümesine A 'nın rezolvent kümesi denir. Bu halde

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ terslenebilir}\}.$$

6. $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına A 'nın özdeğeri, $Ax = \lambda x$, $x \in H$, $x \neq 0$ denkleminin çözümüne ise A 'nın λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörü denir.

Tanım 1.2.74. (Rezolvent Operatör) (Kreyszig, 1978)

H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H 'nin bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer bir operatör olsun. Bu taktirde λ bir kompleks sayı olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörü terslenebilir (tersi var ve sınırlı) ise

$$A_\lambda^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$$

operatörüne A operatörünün rezolvent operatörü denir ve $R_\lambda(A)$ sembolüyle ifade edilir.

Teorem 1.2.75. (Narici, vd., 1972)

A lineer operatörü sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_c(A) = \emptyset$ ve $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Teorem 1.2.76. (Narici, vd., 1972)

H bir Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ olsun.

a. $A = A^*$ ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$

b. A normal bir operatör ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Teorem 1.2.77. (Kreyszig, 1978)

H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in B(H)$ ise $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Tanım 1.2.78. (Spektral Yarıçap) (Rynne vd., 2008)

H bir Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ olsun.

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

sayısına A operatörünün spektral yarıçapı denir ve $r(A)$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.2.79. (Yerel Spektral Yarıçap) (Daneš, 1987)

H bir Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ ve $x \in H$ olsun. Bu durumda

$$r(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|A^n x\|^{\frac{1}{n}}$$

sayısına A operatörünün x noktasındaki yerel spektral yarıçapı denir ve $r(A, x)$ sembolü ile gösterilir.

Örnek 1.2.80. (Hirsh, vd., 1999)

$H = L_2(0,1)$ uzayında $A: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$,

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x, y) f(y) dy$$

operatörünün spektrumu ve spektral yarıçapı bulunsun. Bu durumda her $f \in L_2(0,1)$ için A operatörü

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x, y) f(y) dy = \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy$$

şeklinde ifade edilebilir. İlk önce A operatörünün noktasal spektrumu araştırılsın. $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Af(x) = \lambda f(x), f \in L_2(0,1)$$

denkleminin çözümü bulunsun. Bu halde

$$\int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy = \lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevi alınır

$$xf(x) + \int_x^1 f(y) dy - xf(x) = \lambda f'(x)$$

denklemini, yani

$$\int_x^1 f(y) dy = \lambda f'(x)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin tekrar her iki tarafının türevi alınır

$$-f(x) = \lambda f''(x)$$

olduğu bulunur. Eğer $\lambda = 0$ ise $f = 0$ bulunur. Yani $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A)$.

Şimdi $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. Yukarıda yapılan işlemlerden incelenen problem

$$f(x) = \begin{cases} f''(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x), f \in L_2(0,1), \lambda \in \mathbb{C}, \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$f(x) = c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}}x + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}}x, x \in [0,1]$$

şeklindedir. $f(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$ sınır değerleri kullanılırsa

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$$

olarak bulunur. Böylece, $\cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$ olduğu elde edilir. Son eşitsizlikten

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, k \in \mathbb{Z}$$

olup

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Bu sonuncudan ise, A 'nın özdeğerlerinin

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2}, k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olduğu bulunur, yani

$$\sigma_p(A) = \left\{ \frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir.

$A: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$, $A \in C_\infty(L_2(0,1))$ (Hirsh, vd., 1999) ve $\dim L_2(0,1) = \infty$ olduğundan A^{-1} sınırlı olamaz (Rynne vd., 2008). Dolayısıyla $0 \notin \rho(A)$. Ayrıca A

operatörü özdeşlenik bir operatör olduğundan Teorem 1.2.76'dan $\sigma_r(A) = \emptyset$ 'dur. Bu halde $0 \notin \sigma_r(A)$, $0 \notin \rho(A)$ ve $\sigma_r(A) = \emptyset$ olduğundan $0 \in \sigma_c(A)$. Böylece A operatörünün spektrumu

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{(k+1/2)^2 \pi^2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

olarak bulunur.

Ayrıca, A operatörünün özdeğerlerinin en büyüğü $k = 0$ için $4/\pi^2$ olup $r(A) = 4/\pi^2$ 'dir.

Örnek 1.2.81. (Halmos, 1982)

$V: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$, $Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$ lineer sınırlı Volterra operatörünün spektrumu $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir. Gerçekten; $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(V - \lambda I)f = g, f, g \in L_2(0,1)$$

spektrum problemine bakılsın. Öncelikle

a. $g = 0, \lambda \neq 0$ durumu incelensin. Bu halde problem

$$(V - \lambda I)f = 0$$

şeklinde olup buradan

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda f(x), f \in L_2(0,1)$$

elde edilir. Bu integral denklem

$$\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) & \lambda - \text{h. h. y} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüşür. Buradan

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \quad \lambda - \text{h.h.y}$$

olup böylece $f(x)$ çözümü

$$f(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x} c$$

olarak elde edilir. Burada $f(0) = 0$ sınır-değer şartı yerine yazılırsa $f(x) = 0 \quad \lambda - \text{h.h.y}$ bulunur. Bu $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir.

b. $g = 0, \lambda = 0$ durumu incelensin. Bu halde $Vf = 0$ olup

$$\int_0^x f(t)dt = 0, f \in L_2(0,1)$$

olur. Buradan $f(x) = 0 \quad \lambda - \text{h.h.y}$ olduğu bulunur. Bu ise $\lambda = 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Böylece (a) ve (b) durumlarında $\sigma_p(V) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

c. $g \neq 0, \lambda \neq 0$ durumu ele alınsın. Bu durumda

$$(V - \lambda I)f = g, f, g \in L_2(0,1).$$

Yani,

$$\int_0^x f(t)dt - \lambda f(x) = g(x), f, g \in L_2(0,1)$$

olur. Burada

$$h(x) := \int_0^x f(t)dt$$

alınırsa integral denklemi

$$\begin{cases} h'(x) = -\frac{1}{\lambda} h(x) = -\frac{1}{\lambda} g(x) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x}c - \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)ds$$

şeklinde olup. $h(0) = 0$ sınır koşulundan $c = 0$ olarak bulunur ve böylece

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)ds$$

eşitliği elde edilir. $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ olduğundan

$$\begin{aligned} (V - \lambda E)^{-1}g(x) = f(x) = h'(x) &= \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)ds \right)' \\ &= -\frac{1}{\lambda} g(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)ds \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Son eşitlikten $R_\lambda(V) = (V - \lambda I)^{-1}$ 'in var olduğu ve

$$(V - \lambda I)^{-1} \in B(L_2(0,1))$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$ olup $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir.

d. $g \neq 0$, $\lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$$

bulunur. Bu durumda $r(V) = 0$ şeklindedir.

Tanım 1.2.82. (Krasnosel'skiĭ vd, 1972)

K altkümesi kapalı ve K, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.

i. Her $x \in K$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$,

ii. $x, y \in K$ ise $x + y \in K$,

iii. $x, -x \in K$ ise $x = \theta$

şartları sağlanır ise K 'ya bir "koni" denir.

K alt kümesinin, X Banach uzayında $x, y \in X$ için

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in K$$

kısmi sıralama bağıntısına sahip olduğu bilinmektedir (bkz. örneğin (Krasnosel'skiĭ, 1972)).

Tanım 1.2.83. (Krasnosel'skiĭ vd, 1972)

K bir koni olsun. $\theta < x < y$ iken $\|x\| \leq \gamma \|y\|$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ sayısı varsa K konisine "normal" denir. Bu koşulu sağlayan en küçük γ sayısına K 'nın normal sabiti denir. Açıkçası $\gamma \geq 1$ 'dir.

Tanım 1.2.84. (Krasnosel'skiĭ vd, 1972)

K, X 'te bir koni ve $A : X \rightarrow X$ bir sınırlı lineer operatör olsun. $A(K) \subset K$ ise A operatörüne "pozitif" denir.

$A(K) \subset K$ olmasının A 'nın arttığı anlamına geldiğine dikkat edilsin, yani $x < y$ ise $Ax < Ay$ sağlanır.

Tanım 1.2.85. (Krasnosel'skiĭ vd, 1972)

K, X 'te bir koni, $u_0 \in K$ ve $u_0 \neq \theta$ olsun. Her $x \in X$ için, $Ax < \alpha(x)u_0$ olacak şekilde negatif olmayan bir $\alpha(x)$ sayısı varsa, $A : X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatörüne u_0 -üst sınırlıdır denir.

Tanım 1.2.86. (Banach Kafesi) (Birkhoff, 1948)

Her $x, y \in X$ için

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

bağıntısı sağlanıyorsa $(X, |\cdot|)$ kafes düzenine sahip tam normlu lineer uzayına bir Banach kafesi denir. Burada, mutlak değer $|x| = x \vee -x$ ile tanımlıdır.

Örnek 1.2.87.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi mutlak değer normu ile bir Banach kafesidir.

Örnek 1.2.88.

X bir topolojik uzay, Y bir Banach kafesi ve $\mathcal{C}(X, Y)$ uzayı

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

normu ile X 'den Y 'ye sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{C}(X, Y)$ noktasal kısmi sıralamada bir Banach kafesidir, yani,

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) \leq g(x).$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. İki Operatörün Toplamının Spektral Yarıçapı Üzerine Bir Teorem

Bu bölümde, lineer operatörlerin toplamalarının spektral yarıçapı üzerine bir teorem kurulacak daha sonra teoremin sürekli fonksiyonlar uzayına bir uygulaması verilecektir. Bu kısım (Zima, 1993) çalışması göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır. (Riesz, vd., 1955)'de, iki operatörün toplamının spektral yarıçapı üzerine aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 2.1.1. (Riesz, vd., 1955)

$A, B, (X, \|\cdot\|)$ Banach uzayında lineer ve sınırlı operatörler olsun. Bu operatörler komütatif ise yani, her $x \in X$ için $ABx = BAx$ ise,

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $r(A), r(B)$ ve $r(A + B)$ sırayla A, B ve $A + B$ operatörlerinin spektral yarıçaplarını gösterir.

(Krasnosel'skiĭ, vd., 1972) eserindeki örneğinde gösterdiği gibi, komütatiflik varsayımı önemlidir. Gerçekten,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

operatörleri dikkate alınsın. Açıkça görüleceği gibi A ve B operatörleri değişmeli olmayıp $r(A) = r(B) = 0$ ve $r(A + B) = 1$ şeklindedir.

Bu kısımda $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ eşitsizliğinin sağlanması için komütatiflikten farklı olarak yeterli bir koşul vermesi amaçlanmaktadır.

$(X, \|\cdot\|, \prec)$, $\prec$ ikili bağıntısı ile $x \in X$ elemanlarının Banach uzayı olsun. Kabul edilsin ki,

$1^\circ \prec$ bağıntısı yansıma ve geçişme özelliğine sahiptir,

2° $\|\cdot\|$ normu monotondur, yani $\Theta < x < y$ ise $\|x\| \leq \|y\|$,

3° $x < y$ ise, $x, y, z \in X$ için $x + z < y + z$.

Teorem 2.1.2.

$(X, \|\cdot\|, <)$ uzayında, $A: X \rightarrow X, B: X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatörleri verilsin.

4° $\Theta < x$ ise $\Theta < Ax$ ve $\Theta < Bx$,

5° Öyle bir $x_0 \in X, \Theta < x_0$ elemanı var öyle ki

$$(a) r(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x_0\|^{\frac{1}{n}} \text{ ve } r(A+B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A+B)^n x_0\|^{\frac{1}{n}},$$

$$(b) BA^j B^k x_0 < A^j B^{k+1} x_0, j = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots$$

koşulları sağlansın.

4° ve 5° varsayımları altında

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B) \quad (1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Teoremin hipotezlerinden keyfi bir $n \in N$ için,

$$\Theta < (A+B)^n x_0 < \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i} x_0$$

bağıntısının sağlandığı açıktır. Dolayısıyla 2° ve bir lineer operatörün normunun özelliğinden

$$\|(A+B)^n x_0\| \leq \left\| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i} x_0 \right\| \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \|A^i\| \|B^{n-i} x_0\| \quad (2)$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın bundan sonraki adımı, (Riesz, vd., 1955) eseri sayfa 450'den bir parçanın tekrarıdır. Böylece, Gelfand formülüne göre (bkz. örneğin (Deimling, 1985; Riesz, vd., 1955))

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}, \quad (3)$$

ve 5°den

$$r(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x_0\|^{1/n} \text{ ve } r(A+B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A+B)^n x_0\|^{1/n} \quad (4)$$

elde edilir.

$$p > r(A) \text{ ve } q > r(B). \quad (5)$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi p ve q sayıları alınsın. Her $n \geq K$ için

$$\|A^n\|^{1/n} < p \text{ ve } \|B^n x_0\|^{1/n} < q$$

dolayısı ile

$$\|A^n\| < p^n \text{ ve } \|B^n x_0\| < q^n, n \geq K$$

bağıntılarını sağlayan bir $K > 0$ tamsayısı vardır. Ayrıca, her $n \in N$ için,

$$\|A^n\| \leq s \text{ ve } \|B^n x_0\|^{1/n} \leq t$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, $n > 2K$ için

$$\|(A+B)^n x_0\| \leq \|A^i\| \|B^{n-i} x_0\| + \sum_{i=n-K+1}^n \|A^i\| \|B^{n-i} x_0\|$$

$$\begin{aligned} &< \sum_{i=0}^{K-1} \binom{n}{i} s^i q^{n-i} + \sum_{i=K}^{n-K} \binom{n}{i} s^i q^{n-i} + \sum_{i=n-K+1}^n \binom{n}{i} p^i t^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \left(\frac{s}{p}\right)^i + \sum_{i=K}^{n-K} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} + \sum_{i=n-K+1}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \left(\frac{t}{q}\right)^{n-i} \\ &\leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} M \end{aligned}$$

bağıntısı sağlanır. Burada, $M = \max_{0 \leq i \leq K-1} \left(\frac{s}{p}\right)^i + 1 + \max_{0 \leq i \leq K-1} \left(\frac{t}{q}\right)^i$.

O halde $\|(A + B)^n x_0\|^{1/n} < (p + q)^n M$ eşitsizliği sağlanır ve M , n 'ye bağlı değildir. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A + B)^n x_0\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [(p + q)M^{1/n}] = p + q$$

elde edilir. (3), (4) ve (5)'e göre p ve q sayıları keyfi seçildiğinden

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 2.1.3.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde verilen A ve B matrisleri için Teorem 2.1.2'in koşulları geçerli değildir. Gerçekten, 5°(b) sadece $x_0 = (0,0)$ için geçerli olup bu durum 5°(a) ile çelişir.

Hatırlatma 2.1.4.

Teorem 2.1.2'ye dönersek, x_0 olarak, örneğin bir normal koninin bir iç elemanını, böyle bir elemanın var olduğunu Banach uzaylarında seçebiliriz.

Şimdi Teorem 2.1.2'nin sürekli fonksiyonlar uzayına bir uygulaması verilsin.

Örnek 2.1.5.

$\|u\| = \max_{[0,T]} |u(t)|$ normu ile $[0, T]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı düşünölsün.

$x < y$ olarak ifade edilecektir ancak ve ancak her $t \in [0, T]$ için $x(t) \leq y(t)$. Açıkça görülür ki bu bağıntı 1°-3° koşullarını sağlar. Şimdi,

$$(A_1 u)(t) = L_1 \int_0^{h(t)} u(s) ds$$

ve

$$(A_2 u)(t) = L_2 u(H(t))$$

şeklinde tanımlı iki operatör ele alınsın. Burada, $h, H: [0, T] \rightarrow [0, T]$ fonksiyonlarının sürekli, her $t \in [0, T]$ için $h(H(t)) \leq h(t)$ ve L_1, L_2 'nin pozitif sabitler olduğu kabul edilsin.

$C[0, T]$ uzayında negatif olmayan fonksiyonların bir K konisi düşünölsün. K konisi normal ve $\text{int}K \neq 0$ 'dır.

$x_0(t) \equiv 1, t \in [0, T]$ olacak şekilde bir $x_0 \in \text{int}K$ elemanı dikkate alınsın. Teorem 2.1.2'nin 5°(b) koşulunun sağlandığı yani,

$A_2 A_1^j A_2^k x_0 < A_1^j A_2^{k+1} x_0, j = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots$ bağıntısının sağlandığı gösterilsin.

$$(A_2 A_1^j A_2^k x_0)(t) = L_1^j L_2^{k+1} \int_0^{h(H(t))} \left(\int_0^{h(t_1)} \dots \int_0^{h(t_{j-1})} 1 dt_j \dots \right) dt_1$$

ve

$$(A_1 A_2^{k+1} x_0)(t) = L_1^j L_2^{k+1} \int_0^{h(t)} \left(\int_0^{h(t_1)} \dots \int_0^{h(t_{j-1})} 1 dt_j \dots \right) dt_1$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır.

Her $t \in [0, T]$ için $h(H(t)) \leq h(t)$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & L_1^j L_2^{k+1} \int_0^{h(H(t))} \left(\int_0^{h(t_1)} \dots \int_0^{h(t_{j-1})} 1 dt_j \dots \right) dt_1 \\ & \leq L_1^j L_2^{k+1} \int_0^{h(t)} \left(\int_0^{h(t_1)} \dots \int_0^{h(t_{j-1})} 1 dt_j \dots \right) dt_1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $A_2 A_1^j A_2^k x_0 < A_1^j A_2^{k+1} x_0$ bağıntısının sağlandığını gösterir.

4° ve 5°(a) koşullarının sağlandığını göstermek kolaydır. Böylece,

$$r(A_1 + A_2) \leq r(A_1)r + r(A_2)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. Hilbert Uzay Operatörleri İçin Spektral Yarıçap Eşitsizlikleri

Bu kısımda Hilbert uzay operatörlerinin toplamları, çarpımları ve komütatörleri için birkaç spektral yarıçap eşitsizliği ispatlanacaktır. Spektral yarıçap için sıkıştırma eşitsizlikleri de elde edilecektir. Bu bölüm (Kittaneh, 2005) çalışması göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

$B(H)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin sınıfı olsun. $A \in B(H)$ için $r(A)$ ve $\|A\|$, sırayla A 'nın spektral yarıçapını ve olağan operatör normunu gösterebilir. Her $A \in B(H)$ için

$$r(A) \leq \|A\| \quad (6)$$

olduğu ve A normal operatörler ise eşitlik halinin geçerli olduğu iyi bilinmektedir. (6) eşitsizliğine ek olarak, spektral yarıçapın en önemli özelliği şu şekildedir:

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}. \quad (7)$$

Özel durumda her pozitif n tamsayısı için,

$$r(A^n) = (r(A))^n \quad (8)$$

sağlanır. Ayrıca her $A, B \in B(H)$ için

$$r(AB) = r(BA) \quad (9)$$

değişme özelliği vardır.

(9) özelliği, AB ve BA operatörlerinin spektrumlarının aynı sıfır olmayan öğelere sahip olmasının doğrudan bir sonucudur.

Spektral yarıçap formülü (7)'den kolayca elde edilir ki $A, B \in B(H)$ operatörleri için $AB = BA$ özelliği sağlanıyorsa

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B) \quad (10)$$

ve

$$r(AB) \leq r(A)r(B) \quad (11)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Diğer taraftan, değişmeli olmayan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatörleri için spektral yarıçapın ne alt-toplamsal ne de alt-çarpımsal olmadığı görülür.

Genel spektral yarıçap eşitsizliği, (9) özelliğine ve $H \oplus H$ üzerinde 2×2 operatör matrislerine ilişkin aşağıdaki çok faydalı lemmaya dayanmaktadır. Bu lemmanın genellemeleri ve uygulamaları için (Hou, vd., 1995; Kittaneh, 2003) eserine ve buradaki referanslara bakılabilir.

Lemma 2.2.1.

$A, B, C, D \in B(H)$ ise,

$$r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \leq r\left(\begin{bmatrix} \|A\| & \|B\| \\ \|C\| & \|D\| \end{bmatrix}\right) \quad (12)$$

bağıntısı sağlanır.

Şimdi genel spektral yarıçap eşitsizliğini verilebilir.

Teorem 2.2.2.

$A_1, A_2, B_1, B_2 \in B(H)$ ise,

$$\begin{aligned} & r(A_1B_1 + A_2B_2) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\|B_1A_1\| + \|B_2A_2\| + \sqrt{(\|B_1A_1\| - \|B_2A_2\|)^2 + 4\|B_1A_2\|\|B_2A_1\|} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A_1, A_2, B_1, B_2 \in B(H)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
r(A_1B_1 + A_2B_2) &= r\left(\begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= r\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= r\left(\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \text{ ((9) özelliğine göre)} \\
&= r\left(\begin{bmatrix} B_1A_1 & B_1A_2 \\ B_2A_1 & B_2A_2 \end{bmatrix}\right) \\
&\leq r\left(\begin{bmatrix} \|B_1A_1\| & \|B_1A_2\| \\ \|B_2A_1\| & \|B_2A_2\| \end{bmatrix}\right) \text{ (Lemma 2.2.1'den)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|B_1A_1\| + \|B_2A_2\| + \sqrt{(\|B_1A_1\| - \|B_2A_2\|)^2 + 4\|B_1A_2\|\|B_2A_1\|}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2 özel durumlar olarak birkaç spektral yarıçap eşitsizliği içerir. Bu eşitsizlikler arasında, operatörlerin toplamları ve komütatörleri için spektral yarıçap eşitsizlikleri elde edilir. Spektral yarıçap için sıkıştırma eşitsizlikleri de elde edilir.

Sonuç 2.2.3.

$A, B \in B(H)$ ise,

$$r(A + B) \leq \frac{1}{2}\left(\|A\| + \|B\| + \sqrt{(\|A\| - \|B\|)^2 + 4\min(\|AB\|, \|BA\|)}\right) \quad (14)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Teorem 2.2.2'de $A_1 = A$, $A_2 = B_1 = I$, ve $B_2 = B$ alınırsa,

$$r(A + B) \leq \frac{1}{2}\left(\|A\| + \|B\| + \sqrt{(\|A\| - \|B\|)^2 + 4\|BA\|}\right) \quad (15)$$

eşitsizliği elde edilir.

Simetriklik ve (15)'den

$$r(A + B) \leq \frac{1}{2} \left(\|A\| + \|B\| + \sqrt{(\|A\| - \|B\|)^2 + 4\|AB\|} \right) \quad (16)$$

elde edilir. (15) ve (16)'den ise (14) elde edilir.

(14) eşitsizliği ile ilgili pozitif operatörlerin toplamları için üçgen eşitsizliğinden daha keskin olan norm eşitsizlikleri, (Kittaneh, 2002) çalışmasında verilmiştir. (14) eşitsizliğindeki spektral yarıçapın olağan operatör normu ile değiştirilemeyeceği belirtilmelidir. Bunu görmek için $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ operatörleri düşünölsün.

Bu durumda,

$$r(A + B) \leq \frac{1}{2} \left(\|A\| + \|B\| + \sqrt{(\|A\| - \|B\|)^2 + 4\min(\|AB\|, \|BA\|)} \right) = 2$$

elde edilir. Ancak

$$\|A + B\| = 2\sqrt{2}$$

olduğu açıktır.

A ve B operatörlerinin komütatörünün $AB - BA$ operatörü olduğu hatırlansın. İyi bilinen Kleinecke-Shirokov Teoremi, $AB - BA$ komütatörü A ile yer değışirse $r(AB - BA) = 0$ olduğunu söyler. (bkz. örn., (Halmos, 1982)). Aşağıdaki iki sonuç, herhangi bir değışme varsayımı olmaksızın $r(AB - BA)$ için tahminler vermektedir.

Sonuç 2.2.4.

$A, B \in B(H)$ ise,

$$r(AB \pm BA) \leq \frac{1}{2} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| - \|BA\|)^2 + 4\|A^2\|\|B^2\|} \right) \quad (17)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (17) eşitsizliği, Teorem 2.2.2’de $A_1 = B_2 = A$, $B_1 = B$ ve $A_2 = \pm B$ alınarak elde edilir.

Sonuç 2.2.5.

$A, B \in B(H)$ ise,

$$r(AB \pm BA) \leq \|AB\| + \sqrt{(\min(\|A\|\|AB^2\|), \|B\|\|A^2B\|)} \quad (18)$$

ve

$$r(AB \pm BA) \leq \|BA\| + \sqrt{(\min(\|A\|\|B^2A\|), \|B\|\|BA^2\|)} \quad (19)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat. Teorem 2.2.2’de $A_1 = I$, $A_2 = B$, $B_1 = AB$ ve $B_2 = \pm A$ olarak alınırsa

$$r(AB \pm BA) \leq \|AB\| + \sqrt{\|A\|\|AB^2\|} \quad (20)$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 2.2.2’de $A_1 = AB$, $A_2 = B$, $B_1 = I$ ve $B_2 = \pm A$ olarak alınırsa

$$r(AB \pm BA) \leq \|AB\| + \sqrt{\|B\|\|A^2B\|} \quad (21)$$

elde edilir. (18) eşitsizliği, (19) ve (20) eşitsizliklerinden elde edilir. Eşitsizlik (19) ise simetrik olarak (18)’den elde edilir.

Sonuç 2.2.4 veya Sonuç 2.2.5 kullanılarak olağan operatör normunun üniter değişmezliği ve alt-çarpımsallığı göz önüne alındığında, spektral yarıçap için sıkıştırma eşitsizliklerini türetmek amaçlı kullanılacak aşağıdaki spektral yarıçap eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.2.6.

$A, U \in B(H)$ ve U üniter ise,

$$r(AU \pm UA) \leq \|A\| + \|A^2\|^{1/2} \quad (22)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer $A, B, C, D \in B(H)$ ise, olağan operatör normu için sıkıştırma eşitsizlikleri

$$\left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\| \quad (23)$$

ve

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\| \quad (24)$$

şeklindedir.

Burada (23) ve (24) eşitsizliklerindeki olağan operatör normunun spektral yarıçap ile değiştirilemeyeceği belirtilmelidir. Bunu görmek için $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ operatörünün dikkate alınması yeterlidir.

(22) eşitsizliği, spektral yarıçap için sıkıştırma eşitsizliklerini elde etmemizi sağlar.

Teorem 2.2.7.

$A, B, C, D \in B(H)$ ve $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ise,

$$\max(r(A), r(D)) \leq \frac{1}{2} (\|T\| + \|T^2\|^{1/2}) \quad (25)$$

ve

$$\sqrt{r(BC)} \leq \frac{1}{2} (\|T\| + \|T^2\|^{1/2}). \quad (26)$$

bağıntıları sağlanır.

İspat. $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ olsun. Bu halde $U, H \oplus H$ üzerinde bir üniter operatör olup

$$2 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} = TU + UT,$$

ve

$$2 \begin{bmatrix} 0 & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = TU - UT$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} 2 \max(r(A), r(D)) &= 2r \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right) \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2D \end{bmatrix} \right) \\ &= r(TU + UT) \\ &\leq \|T\| + \|T^2\|^{1/2} \text{ (Sonuç 2.2.6'dan)} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\max(r(A), r(D)) \leq \frac{1}{2} (\|T\| + \|T^2\|^{1/2})$$

bağıntıları elde edilir. Bu, (25) eşitsizliğini ispatlar.

(26) eşitsizliğini ispatlamak için önce $r \left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = \sqrt{r(BC)}$ olduğu söylenilmelidir.

Gerçekten de, (8) ve (9) özelliklerine göre,

$$\left(r \left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) \right)^2 = r \left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^2 \right) = r \left(\begin{bmatrix} BC & 0 \\ 0 & CB \end{bmatrix} \right) = r(BC)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$2\sqrt{r(BC)} = 2r \left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= r \left(\begin{bmatrix} 0 & -2B \\ 2C & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= r(TU - UT) \\
&\leq \|T\| + \|T^2\|^{1/2} \text{ (Sonuç 2.2.6'dan)}
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik bulunur

$$\sqrt{r(BC)} \leq \frac{1}{2} (\|T\| + \|T^2\|^{1/2}).$$

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Operatörlerin çarpımları için spektral yarıçap eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.2.8.

$A, B \in B(H)$ ise,

$$r(AB) \leq \frac{1}{4} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| - \|BA\|)^2 + 4\min(\|A\|\|BAB\|, \|B\|\|ABA\|)} \right) \quad (27)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $A, B \in B(H)$ için

$$\begin{aligned}
2r(AB) &= r \left(\begin{bmatrix} 2AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ (bkz. Problem 71, (Halmos, 1982))} \\
&= r \left(\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= r \left(\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \text{ (özellik (9)'den)} \\
&= r \left(\begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq r \left(\begin{bmatrix} \|AB\| & \|ABA\| \\ \|B\| & \|BA\| \end{bmatrix} \right) \text{ (Lemma 2.2.1'den)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| - \|BA\|)^2 + 4\|B\|\|ABA\|} \right),
\end{aligned}$$

ve böylece

$$r(AB) \leq \frac{1}{4} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| - \|BA\|)^2 + 4\|B\|\|ABA\|} \right) \quad (28)$$

eşitsizliği elde edilir.

Simetriklik ve (9) özelliği aracılığı ile (28) eşitsizliğinden

$$r(AB) \leq \frac{1}{4} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| - \|BA\|)^2 + 4\|A\|\|BAB\|} \right) \quad (29)$$

bağıntısı elde edilir.

(27) eşitsizliği (28) ve (29) eşitsizliklerinden elde edilir.

Son olarak, bu kısımda sunulan spektral yarıçap eşitsizliklerinin çeşitli uygulamaları olduğu belirtilmelidir. Örneğin, bu spektral yarıçap eşitsizliklerinden bazıları monik polinomların Frobenius eşlik matrislerine uygulanarak bu polinomların sıfırları için yeni sınırlar elde etmek mümkündür. İlgili analiz için (Kittaneh, 2003; Kittaneh, 2003) eserlerine ve buradaki referanslara bakılabilir.

2.3. Pozitif Komütatörler İçin Spektral Yarıçap Eşitsizlikleri

Bu bölümde iki pozitif komütatif operatörün spektral yarıçapının özellikleri incelenecektir. Özellikle, komütatörün yarı-nilpotentini ima eden koşulları oluşturmakla ilgilenilecektir. Bu kısım (Zima, 2014) çalışması göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

İki değişmeli sınırlı lineer operatörün spektral yarıçapının alt-toplamsal ve alt-çarpımsal olduğu iyi bilinmektedir, yani $A, B \in B(H)$ ve $AB - BA = 0$ ise

$$r(A + B) \leq r(A) + r(A) \quad (30)$$

ve

$$r(AB) \leq r(A)r(B) \quad (31)$$

eşitsizlikleri sağlanır (bkz. örneğin (Riesz, vd., 1995)).

(Zima, 1999) eserinde komütatörleri $AB - BA$ 'nın bir Banach uzayının normal ve üretici konisinde pozitif olan A ve B pozitif operatörleri için de aynı sonuçların geçerli olduğu kanıtlanmıştır (ayrıca bkz. (Esajan, 1966; Zima, 2005)).

Şimdi (Zima, 1999) eserinden bir sonuç verilsin.

Teorem 2.3.1. (Zima, 1999)

K, E Banach uzayında normal ve üreten bir koni olsun. Eğer A, B ve $AB - BA$ pozitifse, (30) ve (31) eşitsizlikleri geçerlidir.

Bu kısımda, (Bračić, vd., 2010) eserinde ortaya konan açık bir problemi tartışmak için Teorem 2.3.1 uygulanacaktır. (Bračić, vd., 2010) eserinde yazarlar Banach kafeslerin pozitif operatörlerin bir pozitif komütatörünün spektrumunun boyutunu incelediler. Özellikle, $AB - BA$ 'nın yarı-nilpotent olduğu, yani $r(AB - BA) = 0$ olduğu durumla ilgilendiler. (Bračić, vd., 2010) eserinin ana sonucu aşağıdaki teoremdir (bkz. (Bračić, vd., 2010), Teorem 2.5.10)).

Teorem 2.3.2. (Bračić, vd., 2010)

A ve B , bir E Dedekind tam Banach kafesi üzerinde $C = AB - BA$ komütatörleri pozitif olacak şekilde iki pozitif kompakt operatör olsun. O halde C , E 'nin kapalı sıralı ideallerinin üçgensel bir zincirine sahip yarı-nilpotent bir operatördür. Ayrıca, C , A ve B tarafından üretilen Banach cebirinin radikaline aittir. Ek olarak, A ve B operatörlerinden en az biri indirgenemez ise, bu durumda $C = 0$ ve dolayısıyla $AB = BA$ 'dır.

E Banach kafesindeki bir pozitif operatör, $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ konisini değişmez bırakır. Banach kafesleri hakkında daha fazla ayrıntı için (Schaefer, 1974) eserine bakılabilir. (Bračić, vd., 2010)'de belirtilen açık problemlerden biri, Teorem 2.3.2'deki kompaktlık varsayımının bırakılıp bırakılamayacağıdır. (Drnovšek, 2012) çalışmasında Drnovšek, A veya B operatörlerinden sadece birinin kompakt olduğunu varsaymanın yeterli olduğunu kanıtladı (bkz. (Drnovšek, 2012) ve (Gao, 2012)). Bu kısmın temel amacı, $AB - BA$ 'nın yarı-nilpotent olduğunu kanıtlamak için, söz konusu operatörlere herhangi bir kompaktlık koşulu getirilmesi gerekmediğini göstermektir. Ayrıca, literatürden bilinen bazı sonuçları genelleştiren ve iyileştiren pozitif operatörlerin komütatörlerinin spektral yarıçapı için birkaç eşitsizlik kanıtlanmıştır. Bu kısım, pozitif olması gerekmeyen keyfi bir komütatör ve genelleştirilmiş bir komütatör durumu tartışılarak tamamlanacaktır.

Aşağıda yerel spektral yarıçapın bazı özelliklerinden yararlanılacaktır.

$$r(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n} \quad (32)$$

sayısının, A 'nın x 'teki yerel spektral yarıçapı olarak adlandırılacağı hatırlansın. Genel olarak, E 'deki birçok vektör için $r(A, x)$, $r(A)$ 'ya eşittir, (bkz. (Daneš, 1987)). Pozitif operatörler için Förster ve Nagy (Förster, vd., 1988) aşağıdaki sonucu vermiştir.

Lemma 2.3.3. (Förster, 1988)

K , E 'de bir üretici koni ve $A \in B(E)$ pozitif ise

$$r(A) = \max\{r(A, x) : x \in K\}$$

şeklindedir.

Üreten bir koninin içi boş olabilir (bkz. (Guo, vd., 1988); (Zima, 2005)). Spektral yarıçapın aşağıdaki monotonluk özelliği (Krasnosel'skiĭ, vd., 1972) eserinde bulunabilir.

Lemma 2.3.4. (Krasnosel'skiĭ, 1972)

K, E' 'de normal ve üreten bir koni $A, B \in B(E)$, B pozitif ve her $x \in K$ için $-Bx \preceq Ax \preceq Bx$ ise $r(A) \leq r(B)$ bağıntısı sağlanır.

Lemma 2.3.4'ün doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.5.

K, E' 'de normal ve üreten bir koni $A, B \in B(E)$ pozitif operatörler ve her $x \in K$ için $Ax \preceq Bx$ ise $r(A) \leq r(B)$ bağıntısı sağlanır.

Yerel spektral yarıçapın, $r(A) = r(A, x)$ eşitliğini ima eden yeterli koşullar da dahil olmak üzere daha fazla özelliği için (Daneš, 1987; Förster, vd., 1988; Förster, vd., 1991; Laursen, vd., 2000; Schaefer, 1960; Zima, 1999; Zima, 2003; Zima, 2003) çalışmalarına bakılabilir.

Bu kısımda pozitif komütatörlerin spektral yarıçapı için bazı eşitsizlikler oluşturacaktır.

Teorem 2.3.6.

K , bir E Banach uzayında normal ve üreten bir koni olsun. Eğer A, B ve $AB - BA$ pozitifse,

$$r(AB - BA) \leq r(AB) \leq r(A)r(B) \quad (33)$$

ve

$$r(AB + BA) = 2r(AB) \quad (34)$$

bağıntıları sağlanır.

İspat. Her $x \in X$ için $0 \preceq (AB - BA)x \preceq ABx$ bağıntısı sağlanır. K normal ve üretici bir koni olduğundan, Sonuç 2.3.5 ve Teorem 2.3.1'den

$$r(AB - BA) \leq r(AB) \leq r(A)r(B)$$

elde edilir.

Ayrıca $x \in X$ için $0 \leq 2BAx \leq (AB + BA)x \leq 2ABx$ bağıntısı sağlanır. Sonuç 2.3.5'e ve iyi bilinen $r(AB) = r(BA)$ eşitliğine göre (34) elde edilir. ■

Açıklama 2.3.7.

Açıkça, eğer $r(AB) = 0$ veya $r(A) = 0$ veya $r(B) = 0$ ise, o zaman $AB - BA$ yarı-nilpotenttir. A veya B 'nin kompakt olması gerekmediğine dikkat edilsin. Bu, Teorem 2.3.6'nın Teorem 2.3.2'yi kısmen genelleştirdiği anlamına gelir. Gerçekten de, E bir Banach kafesi ise, o zaman E^+ , E^- 'de üreten ve normal bir konidir. Aslında, E^+ , sürekli $E \ni x \rightarrow x^- \in E^+$ dönüşümü altında $\{0\}$ 'ın ön görüntüsü olarak E 'nin kapalı bir alt kümesidir (bkz. (Schaefer, 1974), Önerme II. 5.2). Ayrıca, her $x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ ve $0 \leq x \leq y$ ise $|x| \leq |y|$ olur. Bu, bir kafes normunun tanımı gereği, $\|x\| \leq \|y\|$ demektir.

Açıklama 2.3.8.

(Drnovšek, vd., 2011) eserinde Drnovšek ve Kandić tarafından A , B ve $AB - BA$ bir Banach kafesinde pozitif operatörler ise,

$$r(AB - BA) \leq r(A)r(B)$$

eşitsizliğinin sağlandığı ispatlandı.

Açıklama 2.3.9.

(Kittaneh, 2006) eserinde Kittaneh, A ve B bir Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörler ise

$$r(AB \pm BA) \leq \frac{1}{2} \left(\|AB\| + \|BA\| + \sqrt{(\|AB\| + \|BA\|)^2 + 4\|A^2\|\|B^2\|} \right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatladı.

Her $A \in B(E)$ için $r(A) \leq \|A\|$ olduğundan, Teorem 2.3.6, pozitif komütatörlü pozitif operatörler için daha kesin tahminlerin geçerli olduğunu gösterir.

Daha sonra, A ve B üzerine bazı ek varsayımlar altında daha kesin $r(AB - BA)$ tahminlerinin elde edilebileceği gösterilecektir.

Teorem 2.3.10.

Bir E Banach uzayında normal ve üreten bir K konisine göre A , B ve $AB - BA$, pozitif olsunlar. $A - D$ ve $BD - DB$ pozitif olacak şekilde bir D operatörü varsa,

$$r(AB - BA) \leq r((A - D)B) \leq r(A - D)r(B) \quad (35)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $x \in K$ için $0 \leq (AB - BA)x \leq [(A - D)B - B(A - D)]x \leq (A - D)Bx$ olduğu açıktır. Böylece Sonuç 2.3.5 ve Teorem 2.3.1'den (35) elde edilir. ■

Teorem 2.3.10'a ait bir örnek verilsin.

Örnek 2.3.11.

$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ normu ile $[0,1]$ aralığında tüm sürekli fonksiyonlar uzayı $C[0,1]$ olsun. Bu uzayda,

$$Ax(t) = (t + 1) \int_0^t x(s)ds + (1 - t)x(t) + x(0)$$

ve

$$Bx(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(s)ds + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)x(t)$$

operatörleri göz önünde bulundursun. Bu durumda,

$$(AB - BA)x(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \left((t - s) \int_0^s x(\tau)d\tau \right) ds + \int_0^t t(t - s)x(s)ds \right]$$

olduğu kolayca hesaplanabilir.

A , B ve $AB - BA$ 'nın $K = \{x \in C[0,1]: x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$ konisine göre pozitif olduğu incelensin. $Dx(t) = (1-t)x(t) + x(0)$ olsun. Buradan

$$(A - D)x(t) = (t + 1) \int_0^t x(s) ds$$

ve

$$(BD - DB)x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - s)x(s) ds$$

elde edilir.

D , $A - D$ ve $BD - DB$ pozitif olduğundan, Teorem 2.3.10'dan

$$r(AB - BA) \leq r(A - D)r(B)$$

elde edilir.

Açıkça, $r(A - D) = 0$ 'dır. Böylece $AB - BA$ yarı-nilpotenttir. Bu durumda, A ve B 'nin kompakt ve yarı-nilpotent olmaktan uzak olduğuna dikkat edilsin.

Teorem 2.3.12.

A , B ve $AB - BA$ operatörleri bir E Banach uzayında normal ve üreten bir koniye göre pozitif olsunlar. $A - \alpha B$ pozitif olacak şekilde bir $\alpha > 0$ varsa,

$$r(AB - BA) \leq \frac{1}{2\alpha} ((A - \alpha B)(A + \alpha B)) \leq \frac{1}{2\alpha} r(A - \alpha B)r(A + \alpha B) \quad (36)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. $AB - BA = \left[\frac{1}{2\alpha} (A - \alpha B)(A + \alpha B) - (A + \alpha B)(A - \alpha B) \right]$ olduğuna dikkat edilsin.

Bu, $(A - \alpha B)(A + \alpha B) - (A + \alpha B)(A - \alpha B)$ 'nin pozitif olduğu anlamına gelir. $A - \alpha B$ pozitif olduğundan, Sonuç 2.3.5 ve Teorem 2.3.1'den (36) elde edilir. ■

Açıklama 2.3.13.

Teorem 2.3.12’de $\alpha = 1$ alındığı durum (Kittaneh, 2008)’in bir modifikasyonu olarak kabul edilebilir. Yani, (Kittaneh, 2008)’de Kittaneh ispatladı ki A ve B bir H Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörler ve $A + B$, H ’deki iç çarpıma göre pozitifse, yani tüm $x \in H$ için $\langle (A + B)x, x \rangle \geq 0$ ise

$$\|AB - BA\| \leq \frac{1}{2} \|A + B\| \|A - B\|$$

eşitsizliği sağlanır.

(Kittaneh, 2008) eserinde kullanılan pozitiflik tanımının bizim kullandığımızdan farklı olduğuna dikkat edilsin. Genel olarak, bu iki pozitiflik kavramı birbiriyle ilişkili değildir. Bunu $H = \mathbb{R}^2$ ’de göstermek için standart $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ iç çarpım ve $K = \{(x_1, x_2) \in H : x_1, x_2 \geq 0\}$ konisi dikkate alınsın. Bu durumda $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_1)$ operatörü verilen iç çarpıma göre pozitifdir ve K ’ya göre pozitif değildir. Diğer taraftan $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$ operatörü K ’ya göre pozitifdir ve verilen iç çarpıma göre pozitif değildir. Bununla birlikte, $A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, $a, b, c, d \geq 0$ ve $(b + c)^2 - 4ad \leq 0$ operatörü ile yukarıda bahsedilen pozitiflik tanımlarının her ikisini de karşılamaktadır.

Teorem 2.3.14.

Eğer A , B ve $AB - BA$, bir E Banach uzayında normal ve üreten bir K konisine göre pozitifse ve $A - \alpha I$ ve $B - \beta I$ pozitif olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ sayıları varsa

$$r(AB - BA) \leq r((A - \alpha I)(B - \beta I)) \leq r(A - \alpha I)r(B - \beta I)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat. $AB - BA = (A - \alpha I)(B - \beta I) - (B - \beta I)(A - \alpha I)$ olduğunu gözlemlemek yeterlidir.

Örnek 2.3.15.

φ ve ψ , $[0,1]$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve φ azalan bir fonksiyon olsun. $C[0,1]$ uzayında $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds + \alpha x(t)$$

ve

$$Bx(t) = \varphi(t)x(t) + \psi(t)x(0) + \beta x(t),$$

operatörleri verilsin. Buradan,

$$(AB - BA)x(t) = \int_0^t (\varphi(s) - \varphi(t))x(s)ds + x(0) \int_0^t \psi(s)ds$$

elde edilir. Bu durumda $A, B, AB - BA, A - \alpha I$ ve $B - \beta I$ operatörleri

$$K = \{x \in C[0,1] : x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$$

konisine göre pozitiftir. Teorem 2.3.13'e göre, $r(AB - BA) \leq r(A - \alpha I)r(B - \beta I)$ 'dir. Açıkça $r(A - \alpha I) = 0$ ve bu nedenle $r(AB - BA) = 0$ elde edilir.

Bu kısımda, keyfi bir komütatörün spektral yarıçapı için, yani pozitif olması gerekmeyen ve genelleştirilmiş bir komütatör için, bazı eşitsizlikler tartışılacaktır. İlk önce $AB - BA$ 'nın keyfi bir komütatör olduğu durum ele alınsın. $AB - BA$ komütatörünün spektral yarıçapını tahmin etmek için Lemma 2.3.4 kullanılabilir. Lemma 2.3.4'den, eğer K normal ve üreten bir koni ve $AB - BA$ her $x \in K$ için

$$-Dx \preceq (AB - BA)x \preceq Dx$$

bağıntısını sağlayan pozitif bir $D \in B(E)$ operatörü var ise $r(AB - BA) \leq r(D)$ eşitsizliği sağlanır. Bu durum aşağıdaki örnekle açıklansın.

Örnek 2.3.16.

$C[0,1]$ uzayında

$$Ax(t) = tx(t)$$

operatörü ve bir

$$Bx(t) = \int_0^{\sqrt{t}} x(s)ds$$

Volterra kompozisyon operatörü düşünölsün. Bu durumda

$$(AB - BA)x(t) = \int_0^{\sqrt{t}} (t - s)x(s)ds$$

olup $AB - BA$ 'nın

$$K = \{x \in C[0,1] : x(t) \geq 0, t \in C[0,1]\}$$

konisine göre pozitif olmadığı açıktır. $Dx(t) = \sqrt{t} \int_0^{\sqrt{t}} x(s)ds$ olsun. Bu durumda D , K 'ya göre pozitifdir ve her $x \in K$ için

$$-Dx \leq (AB - BA)x \leq Dx$$

bağıntısı sağlanır. Bu nedenle $r(AB - BA) \leq r(D)$ 'dir. $r(D) = \frac{1}{3}$ olduğu gösterilsin.

$x_0(t) \equiv 1$ için $Dx_0(t) = t$, $D^2x_0(t) = \frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}$ ve $n \geq 2$ için tümevarım yoluyla

$$D^n x_0(t) = \frac{2^{(n-2)(n-1)/2}}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2^{n-2} + 2^{n-1} - 1)} t^{(2^n-1)/2^{n-1}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 2$ için

$$\|D^n x_0\| = \frac{2^{(n-2)(n-1)/2}}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2^{n-2} + 2^{n-1} - 1)}$$

elde edilir. Açıkça, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\|D^n x_0\| \geq 0$ bulunur.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|D^{n+1}x_0\|}{\|D^n x_0\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(n-1)n/2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2^{n-2} + 2^{n-1} - 1)}{2^{(n-2)(n-1)/2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2^{n-2} + 2^{n-1} - 1)(2^{n-1} + 2^n - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} + 2^n - 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Buradan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|D^n x_0\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|D^{n+1}x_0\|}{\|D^n x_0\|}$$

elde edilir. K , normal ve üretici bir koni olduğundan ve x_0 , K 'nın iç kısmına ait olduğundan,

$$r(D) = r(D, x_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|D^n x_0\|^{1/n}$$

elde edilir (bkz. örneğin (Krasnosel'skiĭ, vd., 1972; Schaefer, 1960)). Böylece $r(D) = \frac{1}{3}$ bulunur.

Bu bölüm, genelleştirilmiş bir komütör için, yani $A, B, \Gamma \in B(E)$ olmak üzere $A\Gamma - \Gamma B$ biçimindeki bir operatörün spektral yarıçapı ile ilgili bir sonuçla tamamlanacaktır.

Teorem 2.3.17.

K normal ve üreten bir koni ve $A, B, \Gamma \in B(E)$ olsun. Γ 'nin pozitif bir operatör olduğu ve her $x \in K$ için

$$\alpha_1 \preceq Ax \preceq \alpha_2 x \text{ ve } \beta_1 \preceq Bx \preceq \beta_2 x$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sayılarının mevcut olduğu varsayalım. Bu durumda $r(A\Gamma - \Gamma B) \leq \alpha r(\Gamma)$ 'dir. Burada $\alpha = \max \{\alpha_2 - \beta_1, \beta_2 - \alpha_1\}$. Özellikle, $A = B$ ise

$$r(A\Gamma - \Gamma A) \leq \alpha r(\Gamma) \tag{37}$$

elde edilir.

İspat. Her $x \in K$ için

$$-\alpha \Gamma x \leq (\alpha_1 - \beta_2) \Gamma x \leq (A\Gamma - \Gamma B)x \leq (\alpha_2 - \beta_1) \Gamma x \leq \alpha \Gamma x$$

olduğu açıktır. O halde Lemma 2.3.4'den (37) elde edilir. ■

$A\Gamma - \Gamma B$ 'nin üniter değişmez bir normu için benzer bir sonuç (Kittaneh, 2008)'de bulunabilir.

2.4. Kısmi Sıralı Banach Uzaylarının Yerel Spektral Yarıçapı Üzerine

X bir Banach uzayı ve $A: X \rightarrow X$ lineer sınırlı bir operatör olsun. $x \in X$ olmak üzere $r(A)$ ve $r(A, x)$ sırayla A operatörünün spektral yarıçapını ve x 'teki yerel spektral yarıçapını gösterebilir. Bilindiği gibi

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

ve

$$r(A, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n}$$

şeklinde tanımlıdır.

$r(A)$ ve $r(A, x)$ 'in özelliklerine ilişkin bazı teoremler, örneğin (Daneš, 1987; Förster, vd., 1991, Müller, 1988) makalelerinde bulunabilir. Özellikle, (Daneš, 1987) makalesinde eğer lineer sınırlı A ve B operatörleri komütatif ise her $x \in X$ için

$$r(A + B, x) \leq r(A, x) + r(B)$$

ve

$$r(AB, x) \leq r(A, x)r(B)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu ispatlandı.

Komütatiflik varsayımı karşılanmazsa, yukarıdaki eşitsizliklerin olması gerekmediği kolayca gösterilir. Doğal olarak ortaya bu koşulun zayıflatıp zayıflatılamayacağı sorusu çıkmalıdır. Spektral yarıçapla ilgili bu tür sonuçlar için (Esayan, 1966; Zima, 1993) eserine bakılabilir. Bu bölümde, komütatifliğin başka koşullarla değiştirildiği durumlarda $r(A + B, x)$ ve $r(AB, x)$ tahminleri üzerine birkaç lemma verilecektir. Bu kısım (Zima, 1999) çalışması göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

Lemma 2.4.1.

K Banach uzayında normal bir koni olsun, yani tüm $x, y \in X$ için $\theta < x < y$ ise $\|x\| \leq M\|y\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır, burada $<$, K tarafından verilen kısmi sıra ilişkisini gösterir (bkz. (Krośnoselski, 1972)). Ayrıca $A, B: X \rightarrow X$ lineer sınırlı ve pozitif iki operatör olsun. Her $x \in K$ için $ABx < BAx$ ise, her $x \in K$ için

1. $r(AB, x) \leq r(A, x)r(B, x)$,
2. $r(A + B, x) \leq r(A, x) + r(B, x)$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. 1. A ve B pozitif olduklarından artan olup $A(K), B(K) \subset K$ bağıntısı sağlanır. Dolayısıyla her $x \in K$ için

$$(AB)^2x = AB(ABx) < AB(BAx) < (BA)^2x < B^2A^2x$$

elde edilir. Yani, $(AB)^2x < B^2A^2x$. Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için

$$(AB)^nx < B^nA^nx$$

olduğu ispatlanabilir. Dolayısıyla;

$$\|(AB)^nx\| \leq M\|B^n\|\|A^nx\|$$

elde edilir ki bu da bize $r(AB, x) \leq r(A, x)r(B, x)$ eşitsizliğini verir.

2. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için;

$$(A + B)^n x < \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B^{n-i} A^i x$$

olduğunu göstermek kolaydır. Sonuç olarak,

$$\|(A + B)^n x\| \leq M \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \|B^{n-i}\| \|A^i x\|$$

elde edilir.

İspatın bir sonraki adımı, (Daneš, 1987) veya (Zima, 1993) çalışmalarında verilenlerin bir modifikasyonudur. ■

Hatırlatma 2.4.2.

K bir üretici koni, yani $X = K - K$ (bkz. (Krośnoselski, 1972)) ise, bu durumda (Daneš, 1987) çalışmasına (bkz. Lemma 2 (Daneš, 1987)) göre

$$r(AB) = \max\{r(AB, x) : x \in K\}$$

ve

$$r(A + B) = \max\{r(A + B, x) : x \in K\}$$

elde edilir.

Böylece spektral yarıçap için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.3.

Lemma 2.4.1'in hipotezleri sağlansın. K bir üretici koni ise, bu durumda

$$r(AB) \leq r(A)r(B) \text{ ve } r(A + B) \leq r(A) + r(B)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Benzer şekilde, uygulamalarda faydalı olabilecek aşağıdaki iki lemma verilebilir.

Lemma 2.4.4.

K bir normal koni, $A, B: X \rightarrow X$ operatörleri lineer sınırlı pozitif operatörler ve her $x \in X$ için $ABx < cBAx$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda,

$$r(AB, x) \leq cr(BA, x), x \in K$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.4.5.

K bir normal koni, $A, B: X \rightarrow X$ operatörleri lineer sınırlı pozitif ve her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için $A^n Bx < cBA^n x$ olacak şekilde $c > 1$ sayısı var olsun. Bu durumda,

$$r(AB, x) \leq cr(A, x)r(B) \text{ ve } r(A + B, x) \leq c[r(A, x) + r(B)], x \in K$$

eşitsizlikleri sağlanır.

2.5. Pozitif Operatörlerin Yerel Spektral Yarıçapı Üzerine

Bu bölümde, sınırlı lineer operatörlerin yerel spektral yarıçaplarının alt-toplanabilirliği ve alt-çarpılabilirliği için bazı yeter koşullar verilecektir. Bu kısım (Zima, 2003) çalışması göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.

Bu kısmın amacı, iki operatörün toplamı ve çarpımının yerel spektral yarıçapı hakkında bazı teoremler kurmaktır. Literatürden bilindiği gibi (bkz. (Krasnosel'skiĭ, 1972; Riesz, vd., 1955)) eğer A ve B sınırlı lineer değişmeli operatörler ise, $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ ve $r(AB) \leq r(A)r(B)$ bağıntıları gerçekleşir. (Daneš, 1987) eserinde Daneš yerel spektral yarıçap için benzer eşitsizlikleri kanıtladı. Kesin olarak, eğer A ve B değişmeli ise, her $x \in X$ için

$$r(A + B, x) \leq r(A, x) + r(B) \tag{38}$$

ve

$$r(AB, x) \leq r(A, x)r(B) \quad (39)$$

eşitsizliklerinin gerçekleştiğini gösterdi.

Komütatiflik varsayımının gerekli olduğunu göstermek kolaydır, ancak birkaç yolla zayıflatılabilir. Kısmi sıralı Banach uzaylarındaki operatörlerle ilgili bu türden bazı teoremler (Esayan, 1966; Zima, 1993; Zima, 1999) eserlerinde bulunabilir.

(38) ve (39)'de $r(B)$ 'nin $r(B, x)$ ile değiştirilip değiştirilmeyeceğini, yani,

$$r(A + B, x) \leq r(A, x) + r(B)$$

ve

$$r(AB, x) \leq r(A, x)r(B)$$

eşitsizliklerinin sağlanıp sağlanmadığını bilmek ilgi çekicidir.

Her $x \in X$ için $r(A, x) \leq r(A)$ ve $r(A) = \max\{r(A, x): x \in X\}$ bağıntılarının sağlandığı, X 'in yoğun bir alt kümesi üzerinde ise $r(A) = r(A, x)$ eşitliğinin geçerli olduğu hatırlansın (bkz. (Daneš, 1987; Laursen, vd., 2000; Müller, 1988)).

$r(A) = r(A, x)$ eşitliğini sağlayan koşullar için (Förster, vd., 1988; Förster, vd., 1991) eserine bakılabilir. Bu kısımda yukarıdaki eşitsizlikleri ima eden koşulların $r(A, x) < r(A)$ ve $r(B, x) < r(B)$ durumunda da bulunması amaçlanmaktadır. Herhangi bir A ve B için $r(AB) = r(BA)$ olduğu iyi bilinmektedir. $r(AB, x)$, $r(BA, x)$ 'den farklı olabileceğinden, her ikisi de değerlendirilecektir.

Daha sonraki değerlendirmelerde faydalı olacak yerel spektral yarıçapın

$$\text{her } x \in X \text{ ve } \lambda \neq 0 \text{ için } r(A, \lambda x) = r(A, x), \quad (40)$$

$$\text{her } x, y \in X \text{ için } r(A, x + y) \leq \max\{r(A, x), r(A, y)\}, \quad (41)$$

$$x \in X \text{ ve } k \in \mathbb{N} \text{ için } r(A, A^k x) = r(A, x). \quad (42)$$

özellikleri dikkate alınsın (bkz. (Daneš, 1987)).

Şimdi, pozitif operatörlerin yerel spektral yarıçapının alt-toplanabilirliği ve alt çarpılabilirliği üzerine birkaç teorem ifade edilip ispatlansın. K 'nin bir X Banach uzayında normal bir koni olduğu ve A ile B operatörlerinin sınırlı pozitif lineer operatörler olduğu varsayalım.

Teorem 2.5.1.

A operatörünün u_0 -üst sınırlı olduğu, $i = 1, 2, \dots$ ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$BA^iB^ju_0 < A^iB^{j+1}u_0 \quad (43)$$

bağıntısının sağlandığı kabul edilsin. Bu halde,

$$r(A + B, u_0) \leq r(A, u_0) + r(B, u_0), \quad (44)$$

$$r(AB, u_0) \leq r(A, u_0)r(B, u_0) \text{ ve } r(BA, u_0) \leq r(A, u_0)r(B, u_0) \quad (45)$$

bağıntıları doğrudur.

İspat. (Esayan, 1966) eserinde spektral yarıçap için kullanılan ispat yöntemi kullanılacaktır. A , u_0 -üst sınırlı ve pozitif olduğu için, her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta < A^n x < \alpha(x)A^{n-1}u_0$$

olacak biçimde $\alpha(x) \geq 0$ vardır. Dolayısıyla her $x \in K$ için

$$\|A^n\| \leq \gamma \alpha(x) \|A^{n-1}u_0\|$$

bağıntısından

$$r(A, x) \leq r(A, u_0) \quad (46)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\epsilon > 0$ ve $\delta_B = r(B, u_0) + \epsilon/2$ olsun. Bu halde

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_B^{-(i+1)} B^i u_0, \quad (47)$$

ifadesi iyi tanımlıdır. Görüldüğü gibi $u \in K$ ve $u = \delta_B^-(u_0 + Bu)$ 'dir. Buradan

$$Bu < \delta_B u \quad (48)$$

ve

$$u_0 = \delta_B u \quad (49)$$

bağıntıları elde edilir.

(49) bağıntısından $r(A, u_0) \leq r(A, u)$ eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik (46) bağıntısında dikkate alınırsa

$$r(A, u) = r(A, u_0) \quad (50)$$

eşitliği bulunur.

Şimdi $\delta_A = r(A, u_0) + \epsilon/2$ alınarak

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_A^{-(i+1)} A^i u \quad (51)$$

serisi tanımlansın. $v \in K$, $u < \delta_A v$, $Av < \delta_A v$ ve $u_0 < \delta_A \delta_B v$ olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca (43) ve (48) ifadelerinden

$$Bv = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_A^{-(i+1)} BA^i u < \sum_{i=0}^{\infty} \delta_A^{-(i+1)} A^i Bu < \sum_{i=0}^{\infty} \delta_A^{-(i+1)} \delta_B A^i u = \delta_B v$$

bağıntısı elde edilir. Böylece,

$$(A + B)u_0 < \delta_A \delta_B (A + B)v < \delta_A \delta_B (\delta_A + \delta_B)^2 v,$$

$$(A + B)^2 u_0 < \delta_A \delta_B (\delta_A + \delta_B)(A + B)v < \delta_A \delta_B (\delta_A + \delta_B)^2 v$$

bağıntıları bulunur. Sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(A + B)^n u_0 < \delta_A \delta_B (\delta_A + \delta_B)^n v$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\|(A + B)^n u_0\| \leq \gamma \delta_A \delta_B (\delta_A + \delta_B)^n \|v\|$$

olup

$$r(A + B, u_0) \leq \delta_A + \delta_B$$

bağıntısı bulunur.

$\epsilon > 0$ keyfi olduğundan (44) bağıntısı elde edilir. (45)'i kanıtlamak için $ABv < \delta_A \delta_B v$ ve $ABv_0 < \delta_A \delta_B v$ olduğu dikkate alınsın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(AB)^n u_0 < (\delta_A \delta_B)^n v$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|(AB)^n u_0\| \leq \gamma (\delta_A \delta_B)^n \|v\|$$

olur ki bu da $r(AB, u_0) \leq \delta_A \delta_B$ eşitsizliğini verir. Son eşitsizlik açıkça $r(AB, u_0) \leq r(A, u_0)r(B, u_0)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $(BA)^n u_0 < \gamma (\delta_A \delta_B)^n v$ bağıntısının ve sonuç olarak (45) eşitsizliğinin geçerli olduğu görülebilir. Böylece, Teorem 2.5.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Burada her $AB = BA$ veya $x \in K$ için $BAX < ABx$ ise (43) varsayımının yerine getirildiğini belirtmekte fayda var.

Örnek 2.5.2.

$X = c_0$ kümesi $\|x\| = \sup_i |x_i|$ supremum normu ile sifıra yakınsak tüm reel dizilerin Banach uzayı, $u_0 = \left\{\frac{1}{4^i}\right\}$ ve $K = \{x \in c_0 : x = tu_0, t \geq 0\}$ olsun. Bu durumda K , c_0 'da normal bir konidir. $x \in c_0$, $x = \{x_i\}$ için $Ax = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ ve $Bx = \frac{1}{2}(x_3, x_4, x_5, \dots)$ operatörleri dikkate alınsın. A ve B operatörlerinin Teorem 2.5.1'in hipotezlerini sağladığı görülür. Özellikle, $B = \frac{1}{2}A^2$ olduğundan (43) bağıntısı sağlanmaktadır. Ayrıca, eğer $x \in K$

ise, $t \geq 0$ olmak üzere $x = tu_0$ 'dır. Dolayısıyla $Ax = tAu_0 = \frac{1}{4}tu_0$ elde edilir ki bu A 'nın u_0 -üstten sınırlı olduğu anlamına gelir. $r(A, u_0) = \frac{1}{4}$ ve $r(B, u_0) = \frac{1}{32}$ olduğundan, Teorem 2.5.1 kullanılarak $r(A + B, u_0) \leq \frac{9}{32}$ ve $r(AB, u_0) \leq \frac{1}{128}$ elde edilir. Bu durumda, $r(A) = 1$ ve $r(B) = \frac{1}{2}$ olduğuna dikkat edilsin.

Teorem 2.5.3.

$Au_0 < r(A, u_0)u_0$, $i = 1, 2, \dots$ ve $j = 1, 2, \dots$ için

$$BA^iB^ju_0 = A^iB^{j+1}u_0 \quad (52)$$

olacak şekilde bir $u_0 \in K$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda (44) ve (45) eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. İlk önce, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $A^n u_0 < [r(A, u_0)]^n u_0$ olduğu ifade edilsin. (47) ile tanımlanan u elemanı için

$$A^n u = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_B^{-(i+1)} B^i A^n u_0 < [r(A, u_0)]^n u$$

bağıntısı elde edilir. Bu $r(A, u) \leq r(A, u_0)$ eşitsizliğini verir. Sonuç olarak, $r(A, u) = r(A, u_0)$ elde edilir. İspatın geri kalanı daha önce olduğu gibi yapılabilir.

Teorem 2.5.4.

$u_0 \in K$ için (43) bağıntısının sağlandığı ve

$$Bu_0 < r(B, u_0)u_0 \quad (53)$$

olduğu kabul edilsin. O halde (44) ve (45) eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat (53) bağıntısından her $i \in \mathbb{N}$ için

$$B^i u_0 < [r(B, u_0)]^i u_0$$

bağıntısı elde edilir. Böylece (47) ile tanımlanan u için

$$u < \sum_{i=0}^{\infty} \delta_B^{-(i+1)} [r(B, u_0)]^i u_0 = \frac{2}{\epsilon} u_0$$

bağıntısı bulunur. Bu ise $r(A, u) \leq r(A, u_0)$ eşitsizliğini verir. İspatın devamı Teorem 2.5.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 2.5.5.

$X = c_0$ ve $K = \{x \in c_0 : x_i \geq 0, i \in \mathbb{N}\}$ olsun. Açıkça K, c_0 'da normal bir konidir. $Ax = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}$ ve $Bx = \{x_2 + x_3, 2x_3, 2x_4, \dots\}$ olarak tanımlansın. $u_0 = \{1/3^i\}$ için $r(A, u_0) = \frac{1}{9}$ ve $r(B, u_0) = \frac{2}{3}$ elde edilir. $Bu_0 < r(B, u_0)u_0$ olduğu açıktır. Ayrıca $i = 1, 2, \dots$ ve $j = 1, 2, \dots$ için

$$BA^i B^j u_0 = 2^j \left(\frac{1}{3^{j+2i+2}} + \frac{1}{3^{j+2i+3}}, \frac{2}{3^{j+2i+3}}, \frac{2}{3^{j+2i+4}}, \dots \right)$$

ve

$$A^i B^{j+1} u_0 = 2^{j+1} \left(\frac{1}{3^{j+2i+2}} + \frac{1}{3^{j+2i+3}}, \frac{1}{3^{j+2i+3}}, \dots \right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece (43)'nün doğru olduğu görülür. Teorem 2.5.4'den $r(A + B, u_0) \leq \frac{7}{9}$ ve $r(AB, u_0) \leq \frac{2}{27}$ elde edilir. Burada, $r(A) = 1$ ve $r(B) = 2$ olduğuna dikkat edilsin.

Teorem 2.5.6.

Eğer (52) sağlanıyor ve

$$B^{k+1} u_0 < r(B, u_0) B^k u_0 \tag{54}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, bu halde (44) ve (45) geçerlidir.

İspat. (47) ile tanımlanan u için (54) bağıntısından

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^k \delta_B^{-(i+1)} B^i u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta_B^{-(k+j+1)} B^{k+j} u_0 \\
&< \sum_{i=0}^k \delta_B^{-(i+1)} B^i u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta_B^{-(k+j+1)} [r(B, u_0)]^j B^k u_0 \\
&= \sum_{i=0}^k \delta_B^{-(i+1)} B^i u_0 + \frac{2}{\epsilon} \delta_B^{-(k+1)} r(B, u_0) B^k u_0
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$$v_0 = \sum_{i=0}^k \delta_B^{-(i+1)} B^i u_0 + \frac{2}{\epsilon} \delta_B^{-(k+1)} r(B, u_0) B^k u_0 \quad (55)$$

olsun. Her $i, n \in \mathbb{N}$ için $A^n B^i u_0 = B^i A^n u_0$ olduğundan,

$$r(A, B^i u_0) \leq r(A, u_0)$$

elde edilir.

Böylece (40) ve (41) bağıntılarından $r(A, v_0) \leq r(A, u_0)$ elde edilir. Ayrıca $u < v_0$ olması $r(A, u) \leq r(A, v_0)$ anlamına gelir. Bu nedenle $r(A, u) \leq r(A, u_0)$ olup ispatın geri kalanı benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 2.5.7.

(43), (54) bağıntıları ve $Bu_0 < Au_0$ bağıntısı sağlanıyorsa (44) ve (45) eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. (43) ve (54)'ye göre $u < v_0$ olduğunu gözlemlemek yeterlidir, burada u ve v_0 sırasıyla (47) ve (55) ile tanımlanır. $Bu_0 < Au_0$ olduğundan, (43)'den her $i \in \mathbb{N}$ için $B^i u_0 < A^i u_0$ elde edilir. Böylece,

$$v_0 < \sum_{i=0}^k \delta_B^{-(i+1)} A^i u_0 + \frac{2}{\epsilon} \delta_B^{-(k+1)} r(B, u_0) A^k u_0$$

bulunur.

(40)-(42) bağıntılarından $r(A, v_0) \leq r(A, u_0)$ elde edilir. Teorem 2.5.6'nın ispatında olduğu gibi, bu $r(A, u) \leq r(A, u_0)$ eşitsizliğini verir. Teorem 2.5.1'in ispatındakiyle aynı tip analiz sonucu belirler.

Örnek 2.5.8.

c_0 uzayında $K = \{x \in c_0 : x_i \geq 0, i \in \mathbb{N}\}$ konisini, $Ax = \{x_2 + x_3, x_3, x_4, \dots\}$ ve $Bx = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}$ operatörleri ve $u_0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ elemanı göz önüne alınsın. (43) bağıntısını sağlayan her $x \in K$ için $BAx = \{x_4, x_5, x_6, \dots\}$ ve $ABx = \{x_4 + x_5, x_5, x_6, \dots\}$ olup $BAx < ABx$ bağıntısı bulunur. Ayrıca, $r(A, u_0) = \frac{1}{2}$, $r(B, u_0) = \frac{1}{4}$, $B^2u_0 < r(B, u_0)Bu_0$ ve $Bu_0 < Au_0$ olduğu görülür. Teorem 2.5.7'den $r(A + B, u_0) \leq \frac{3}{4}$ ve $r(AB, u_0) \leq \frac{1}{8}$ eşitsizlikleri elde edilir.

Son olarak, u_0 'ın (44)'de $r(A + B, u_0) = r(A + B, x)$, $r(A, u_0) = r(A, x)$ ve $r(B, u_0) = r(B, x)$ olacak biçimde herhangi bir $x \in X$ ile değiştirilebileceği görülür. Benzer bir sonuç (45) için de geçerlidir. Özellikle, (40)'den $x = \lambda u_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için (44) ve (45) eşitsizlikleri sağlanır.

Sonuç 2.5.9.

Teorem 2.5.1'in hipotezleri altında, sırasıyla (44) ve (45) ile tanımlanan u ve v için (47) ve (51) geçerlidir.

İspat. (49)'den, A 'nın u -üst sınırlı olduğu ortaya çıkar. (43)'de u_0 yerine u yazılsın. Böylece, Teorem 2.5.1'e göre, (44) ve (45) eşitsizlikleri u için geçerlidir. Benzer şekilde v için de (44) ve (45) eşitsizliklerinin doğru olduğu görülür.

Açıklama 2.5.10.

(44) ve (45) eşitsizlikleri (47) ve (51)'in herhangi bir kısmi toplam serileri için de sağlanır. Benzer sonuçların Teorem 2.5.3-2.5.7'de türetilebileceği açıktır. Ayrıca, eğer (43) bağıntısı sağlanırsa

$$r(A + B, u_0) \leq r(A) + r(B, u_0),$$

$$r(AB, u_0) \leq r(A)r(B, u_0) ,$$

ve

$$r(BA, u_0) \leq r(A)r(B, u_0)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.



3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Banach uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin toplamalarının spektral yarıçapı üzerine bir teoremden bahsedilmiştir.
2. Hilbert uzay operatörlerinin toplamaları, çarpımları ve komütatörleri için spektral yarıçap eşitsizlikleri verilmiştir.
3. Banach uzaylarında tanımlı iki pozitif komütatif operatörün komütatörünün yarı-nilpotentliğini imâ eden koşullardan bahsedilmiştir.
4. Banach uzayında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin toplamalarının ve çarpımlarının yerel spektral yarıçapı ile ilgili eşitsizlikler verilmiştir.
5. Banach uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin yerel spektral yarıçaplarının alt-toplanabilirliği ve alt-çarpılabilirliği için bazı yeter koşullar verilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Sınırlı lineer operatörlerin direk toplamalarının ve tensör çarpımlarının spektral yarıçapları ile ilgili eşitsizlikler incelenebilir.
2. p-spektral yarıçap ile ilgili eşitsizlikler inceleme konusu olabilir.
3. Graftların spektral yarıçapı ile ilgili eşitsizlikler incelenebilir.
4. Nümerik yarıçap ile ilgili eşitsizlikler incelenebilir.



5. KAYNAKLAR

- Akhizer, N. I. ve Glazman, I. M. (1994). Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover Publications.
- Bartle, R. G. (1966). The Elements of Integration. John Wiley & Sons.
- Birkhoff, G. (1948). Lattice Theory. New York City: AMS Colloquium Publication 25.
- Bračič, J., Drnovšek, R., Farforovskaya, Y. B., Rabkin, E. L. ve Zemánek, J. (2010). On positive commutators. *Positivity* 14, 431–439.
- Daneš, J. (1987). On local spectral radius. *Čas. pěst. mat.* 112, 177-187.
- Deimling, K. (1985). Nonlinear functional analysis (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New. Berlin, Heidelberg, New: Springer-Verlag.
- Domanov, I. (2007). Perspectives in Operator Theory. Warsaw: Banach Center Publications.
- Domanov, I. (2008). On the spectrum of the operator which is a composition of integration and substitution. *Studia Mathematica*, 185, 49-65.
- Drnovšek, R. (2012). Once more on positive commutators. *Stud. Math.* 211, 241–245.
- Drnovšek, R. ve Kandić, M. (2011). More on positive commutators. *J. Math. Anal. Appl.* 373, 580–584.
- Esayan, A. R. (1966). On the estimation of the spectral radius of the sum of positive semicommutative. *Sibirsk. Math. Zh.* 7, 460-464.
- Förster, K. H. ve Nagy, B. (1988). On the local spectral theory of positive operators, *Operator Theory:Advances and Applications*, vol. 28. Basel: Birkhäuser.
- Förster, K. H. ve Nagy, B. (1991). On the local spectral radius of a nonnegative element with respect to an irreducible operator. *Acta Sci. Math.* 55, 155–166.
- Gao, N. (2012). On commuting and semi-commuting positive operators. To appear in Proc. Am. Math. Soc.
- Gelfand, I. (1941). Normierte Ringe. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 9(51), 3–24.
- Gohberg, I., Goldberg, S. ve Kaashoek, M. A. (2003). Basic Classes of Linear Operators. Berlin: Birkhauser.
- Guo, D. ve Lakshmikantham, V. (1988). Nonlinear Problems in Abstract Cones. *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering* 5.
- Gürdal, M., Garayev, M. T. ve Saltan, S. (2015). Some concrete operators and their properties. Turkish Journal of Mathematics, 39, 970-989.
- Halmos, P. R. (1982). A Hilbert Space Problem Book. New York: Springer Verlag.
- Hirsh, F. ve Lacombe, G. (1999). Elements of Functional Analysis. Verlag, New York.

- Hou, J. C. ve Du, H. K. (1995). Norm inequalities of positive operator matrices. *Integral Equations Operator Theory* 22, 281–294. MR1337376 (96e:47007).
- Karakaya, V. ve Altun, M. (2010). Fine spectra of upper triangular double-band matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1387-1394.
- Kershaw, D. (1999). Operator norms of powers of the Volterra operator. *Journal of Integral Equations and Applications*, 11(3), 351-362.
- Kittaneh, F. (2002). Norm inequalities for sums of positive operators. *J. Operator Theory* 48, 95–103. MR1926046 (2003g:47016).
- Kittaneh, F. (2003). A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix. *Studia Math.* 158, 11–17. MR2014548 (2004i:15022).
- Kittaneh, F. (2003). Bounds for the zeros of polynomials from matrix inequalities. *Arch. Math. (Basel)* 81, 601–608. MR2029723 (2004j:15035).
- Kittaneh, F. (2005). Spectral radius inequalities for Hilbert space operators. *Proceedings of the American Mathematical Society* 134(02), 385-390.
- Kittaneh, F. (2006). Spectral radius inequalities for Hilbert space operators. *Proc. Am. Math. Soc.* (electronic) 134 , 385-390.
- Kittaneh, F. (2008). Norm inequalities for commutators of positive operators and applications. *Math. Z.* 258, 845–849.
- Kittaneh, F. (2008). Norm inequalities for commutators of self-adjoint operators. *Integral Equations Oper. Theory* 62, 129–135.
- Krasnosel'skiĭ, M. A., Vaĭnikko, G. M., Zebreĭko, G. M., Rutitskii, Y. B. ve Stetsenko, V. Y. (1972). Approximate solution of operator equations. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Laursen, K. B. ve Neumann, M. M. (2000). *Introduction to local spectral theory*. *Lond. Math. Soc. Monographs, Oxford Univ. Press*, MR 2001k:47002.
- Little, G. ve Reade, J. (1998). Estimates for the norm of the n th indefinite integral. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 30(5), 539-542.
- Montes-Rodriguez, A., Rodriguez-Martinez, A. ve Shkarin, S. (2009). Spectral theory of Volterra-composition operators. *Mathematische Zeitschrift*, 261, 431-472.
- Müller, V. (1988). Local spectral radius formula for operators in Banach spaces. *Czechoslovak Math. J.* 38, MR 89g:47005.
- Narici, L. ve Bachman, G. (1972). *Functional Analysis* Academic Press. Inc. London: Academic Press.
- Riesz, F. ve Sz.-Nagy, B. (1955). *Functional analysis*. (Ungar, New York).
- Rynne, B. P. ve Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Springer.

- Schaefer, H. (1960). Some spectral properties of positive linear operators. *Pac. J. Math.* 10, 1009–1019.
- Schaefer, H. (1974). *Banach Lattices and Positive Operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.
- Tong, Y. (1989). Quasinilpotent integral operators. *Acta Mathematica Sinica*, 32(6), 727-735.
- Withley, R. (1987). The spectrum of a Volterra composition operator. *Integral Equations and Operator Theory*, 10, 146-149.
- Zima, M. (1992). A certain fixed point theorem and its applications to integral-functional equations. *Bull. Austral. Mat. Soc.* 46, 179-186.
- Zima, M. (1993). A theorem on the spectral radius of the sum of two operators and its application. *Bull. Austral. Math. Soc.* vol. 48, 427 - 434.
- Zima, M. (1997). ON THE LOCAL SPECTRAL RADIUS IN PARTIALLY ORDERED. Czechoslovak Mathematical Journal, 49 (124) , 835-841.
- Zima, M. (1999). On the local spectral radius in partially ordered Banach spaces. Czechoslovak Mathematical Journal 49, (124), 835–841.
- Zima, M. (2002). On the local spectral radius of positive operators. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 131, 845-850.
- Zima, M. (2003). On the local spectral radius of positive operators. Proc. Am. Math. Soc. (electronic) 131, 845–850.
- Zima, M. (2005). *Positive Operators in Banach Spaces and Their Applications*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Zima, M. (2014). Spectral radius inequalities for positive commutators. Czechoslovak Mathematical Journal volume 64 (139), 1–10.

ÖZGEÇMİŞ

Salih KAYA, İlköğrenimini Mareşal Fevzi Çakmak İlköğretim Okulu'nda lise öğrenimini ise Yunus Emre Lisesi'nde tamamladı. 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü programında lisans eğitime başladı. 2017 yılında lisans eğitiminden matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Yabancı dili ingilizcedir.

