



ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Perihan DİNÇ (ARTUT)

77170

SINIRLI SERBEST LİE SÜPERCEBİRLERİNİN
ALTCEBİRLERİ VE İDEALLERİNİN YAPILARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 1998

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI SERBEST LİE SÜPERCEBİRLERİNİN
ALTCEBİRLERİ VE İDEALLERİNİN YAPILARI

Perihan DİNÇ (ARTUT)

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 17./11./1998 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

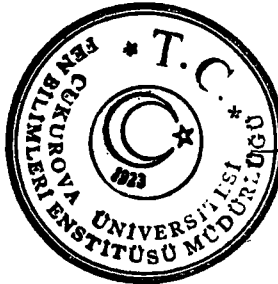
Prof.Dr. Melih BORAL
DANIŞMAN

Prof.Dr. Naime EKİCİ
ÜYE

Yrd.Doç.Dr. Hasan DALGIN
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 474



Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA</u>
ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
1. GİRİŞ	1
1.1 Lie Cebirleri ve İdealler	1
1.2 Serbest Lie Cebirleri	4
1.3 Hall Bazı	6
1.4 Alt Merkezi Seriler ve Nilpotent Lie Cebirleri	9
1.5 Bir Serbest Lie Cebirinin Alt Merkezi Serisinin Terimleri için Serbest Doğurucular	11
1.6 Lie Süpercebirleri	13
2. 5. DERECEDEN SONLU DOĞURAYLI SERBEST NİLPOTENT LİE SÜPERCEBİRLERİ	15
2.1 Serbest Nilpotent Lie Süpercebirleri	15
2.2 Dercesi <5 Olan Serbest Lie Süpercebirleri	16
2.3 Dercesi 5 Olan Serbest Nilpotent Lie Süpercebirleri	22
2.4 $Y=\emptyset, Z =s>1$ Özel Durumu	26
3. SERBEST NİLPOTENT LİE SÜPERCEBİRLERİNİN İDEALLERİ	29
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SINIRLI SERBEST LİE SÜPERCEBİRLERİNİN
ALTCEBİRLERİ VE İDEALLERİNİN YAPILARI

Perihan DİNÇ (ARTUT)

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Melih BORAL

Yıl: 1998, **Sayfa:** 35

Jüri : Prof. Dr. Melih BORAL

: Prof.Dr. Naime EKİCİ

: Yrd.Doç.Dr. Hasan DALGIN

$L = L_0 \oplus L_1$, $Y \cap Z = \emptyset$ olmak üzere sonlu $X = Y \cup Z$ kümesi tarafından doğrulan bir Lie süpercebiri olsun. L_n , L nin alt merkezi serisinin n -inci terimi olmak üzere $B_n = L / L_{n+1}$ X kümesi üzerinde n -inci dereceden serbest nilpotent Lie süpercebiri. Bu çalışmada 5-inci dereceden bir serbest nilpotent Lie süpercebirinin bazıları ve boyutları belirlenmiştir. Ayrıca, $Y = \emptyset$ ve $|Z| > 1$ özel durumu incelenmiş ve serbest nilpotent Lie süpercebiri için bazı genel sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmanın son bölümünde, bir serbest nilpotent Lie süpercebirinin alt cebir olarak serbest nilpotent olan ideallerinin ya abelyen veya cebirin kendisi olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler : Nilpotent Cebir, Alt Cebir, Serbest Lie Cebiri, İdeal, Lie Süpercebiri

ABSTRACT

Ph. D. THESIS

THE STRUCTURES OF IDEALS AND SUBALGEBRAS OF FREE BOUNDARY LIE SUPERALGEBRAS

Perihan DİNÇ (ARTUT)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Melih BORAL

Year: 1998, **Pages:** 35

Jury : Prof. Dr. Melih BORAL
: Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Assist.Prof.Dr. Hasan DALGIN

Let $L = L_0 \oplus L_1$ be a free Lie superalgebra on a finite set $X = Y \cup Z$ where Y and Z are disjoint. If L_n denotes the n -th term of the lower central series of L then $B_n = L / L_{n+1}$ is the free nilpotent Lie superalgebra of class n on the generating set X . In this thesis, bases and dimensions of free nilpotent Lie superalgebra of class 5 are determined. In addition, some general results are obtained for free nilpotent Lie superalgebra for the special case $Y = \emptyset$ and $|Z| > 1$. In the last chapter, it is proved that the only ideals which are free nilpotent subalgebras in a free nilpotent Lie superalgebra are free abelian or the whole algebra.

Key Words : Nilpotent Algebra, Subalgebra, Ideal, Free Lie Algebra, Lie Superalgebra

TEŞEKKÜR

Bu konuyu tez çalışması olarak veren, her aşamada yol gösteren, yakın ilgisini ve değerli yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof.Dr. Melih BORAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım sırasında beni yakından destekleyen aileme ve özellikle eşim Kazım ARTUT'a teşekkürü borç bilirim.



1. GİRİŞ

Sonlu doğuraylı serbest nilpotent Lie cebirlerinin baz ve boyutları belirlenmiştir. F , $\mathbb{k}$ cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri, F_n , F nin alt merkezi serisinin n -inci terimi olsun. Bu durumda, $B_n = F/F_{n+1}$, X doğurucu kümesi üzerinde n -inci dereceden bir serbest nilpotent Lie cebiridir. X kümesi sonlu ise B_n , $\mathbb{k}$ cismi üzerinde vektör uzayı olarak sonlu boyutludur. B_n nin boyutu sadece n ve X kümesinin kardinalitesine bağlıdır.

Eğer $|X| = a < \infty$ ise $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ Möbiüs fonksiyonu olmak üzere (Bourbaki, 1968) de

$$\dim F_i / F_{i+1} = (1/i) \sum_{\substack{d \\ d \text{ böler } i}} \mu(d) a^{i/d}$$

şeklindedir.

Serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin baz ve boyutlarının kolaylıkla elde edilebileceği bir formül yoktur. Boral (1995) tarafından $n \leq 4$ dereceden serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin baz ve boyutları belirlenmiştir.

Serbest nilpotent Lie cebirlerinin ideallerini Boral (1985) incelemiş ve bir serbest nilpotent Lie cebirde, serbest nilpotent alt cebir olan ideallerin, serbest abelyen ya da cebirin kendisi olduğu sonucunu elde etmiştir.

Tezin birinci bölümünde temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, 5-inci dereceden serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin baz ve boyutları elde edilmiştir. $X=Y \cup Z$ süpercebirin serbest doğuraylar kümesi olmak üzere $Y=\emptyset$, $|Z| > 1$ özel durumu incelenerek bazı genel sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin idealleri incelenmiş ve bir L serbest nilpotent Lie süpercebirinin, altcebir olarak serbest nilpotent olan bir S idealinin ya serbest abelyen ya da süpercebire eşit olduğu gösterilmiştir.

1.1 Lie Cebirleri ve İdealler

Tanım 1.1.1: L , $\mathbb{k}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her $x, y \in L$ için, (x, y) ikilisine $[x, y]$ elemanına karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir

çarpım tanımlanmış olsun:

$$i) \quad \text{Her } x \in L \text{ için } [x, x] = 0 \quad (\text{Antisimetri özelliği})$$

$$ii) \quad \text{Her } x, y, z \in L \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{k} \text{ için}$$

$$\left. \begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= \alpha [x, z] + \beta [y, z] \\ [x, \alpha y + \beta z] &= \alpha [x, y] + \beta [x, z] \end{aligned} \right\} \quad (\text{Bilineerlik aksiyomu})$$

$$iii) \quad \text{Her } x, y, z \in L \text{ için}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\text{Jacobi özdeşliği})$$

Bu koşulları sağlayan $[x, y]$ çarpımına bir Lie çarpımı (komutatörü), L ye de bu çarpımla birlikte bir Lie cebiri denir.

L nin boyutu, L nin $\mathbb{k}$ cismi üzerinde vektör uzayı olarak boyutudur. Boyutu 1 olan Lie cebirleri abelyendirler. 1-boyutlu bir tane Lie cebiri, 2-boyutlu sadece 2 tane izomorfik olmayan Lie cebiri vardır. Ayrıca, Jacobi özdeşliğinden dolayı, Lie cebirleri birleşmeli değildir.

L Lie cebiri, $\mathbb{k}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olup B , L nin boş olmayan bir alt kümesi ise B nin elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarını içeren küme, B nin lineer geren kümesi olup bu kümeyi $\text{Sp}(B)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.2: L bir Lie cebiri ve B , L nin alt uzayı olsun. Eğer B , L deki Lie çarpımı altında kapalı ise B ye L nin altcebbiri denir ve $B \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3: L bir Lie cebiri ve I da L nin bir alt cebiri olsun. Eğer $[I, L] \subseteq I$ koşulu sağlanıyorsa I ya L nin bir ideali denir ve $I \triangleleft L$ gösterimi kullanılır.

Tanım 1.1.1 in i. kısmından, $x, y \in L$ ise

$$[x+y, x+y] = 0 \quad (*)$$

ve bilineerlik aksiyomundan da

$$[xy] = -[yx]$$

elde edilir. M , L nin bir ideali ise $[M, L] \subseteq L$ dir ve $(*)$ dan $[L, M] \subseteq M$ elde

edilir. Böylece sağ ve sol idealler arasında fark yoktur.

Tanım 1.1.4 : L , $\underline{k}$ cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $M \triangleleft L$ olsun. L / M bölüm cebiri

$$L / M = \{ M+x : x \in L \}$$

şeklinde tanımlanır. L de toplama değişmeli olduğundan $M + x = x + M$ dir. L / M de toplama ve çarpma aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$x+M$ ve $y+M \in L / M$ olmak üzere

$$(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$$

$$[x+M, y+M] = [xy]+M$$

dir. Bu işlemler yalnız, $M \triangleleft L$ olduğu zaman iyi tanımlıdır. Açıkça, L / M her iki işleme göre de kapalıdır ve M , L / M de bir sıfır elemanı olmak üzere

$$(x+M)(x+M) = M$$

dir. L / M de Jacobi özdeşliğinin elde edilebileceği açıktır. Böylece L/M bir Lie cebiridir.

Tanım 1.1.5 : L , M aynı $\underline{k}$ cismi üzerinde iki Lie cebiri olsunlar.

$\alpha : L \rightarrow M$ ve $x, y \in L$ olmak üzere

$$\alpha ([x, y]) = [\alpha(x) \alpha(y)]$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm ise α ya bir Lie cebir homomorfizmi denir.

Eğer bu dönüşüm bire-bir ve örten ise o zaman izomorfizm ve eğer $\alpha : L \rightarrow L$ ye bir izomorfizm ise o zaman da α ya bir otomorfizm adı verilir.

Genel homomorfizm teoremleri, Lie cebir homomorfizleri için de geçerlidir. Aşağıdaki teoremin ispatı (Stewart,1970) de verilmiştir.

Teorem 1.1.1 : L ve M aynı $\underline{k}$ cismi üzerinde iki Lie cebiri, $\alpha : L \rightarrow M$ bir homomorfizm ve $\text{Kernel}(\alpha)$, α nın çekirdeği olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$i) \alpha(L) \leq M ; \text{Kernel}(\alpha) \triangleleft L \text{ ve } L / \text{Kernel}(\alpha) \cong \alpha(L)$$

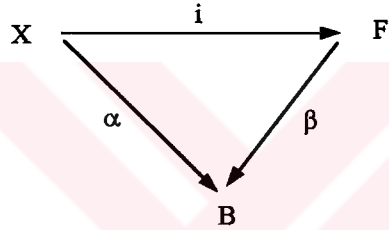
$$ii) \text{Eğer } H, K \triangleleft L \text{ ve } K \triangleleft H \text{ ise } (L/K) / (H/K) \cong L / H$$

iii) $H \triangleleft K$, $K \triangleleft L$ ise $H \triangleleft (H+K)$, $H \cap K \triangleleft K$ ve $(H+K) / K \cong H / H \cap K$

iv) $\phi : L \rightarrow L / H$ doğal dönüşüm , $H \triangleleft L$ olmak üzere L nin H ve L arasındaki idealleri ile L / H nın idealleri arasında bir bire-bir eşleme sağlar.

1.2 Serbest Lie Cebirleri

Tanım 1.2.1 : X boş olmayan bir küme , F bir Lie cebiri , $i : X \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir B Lie cebiri ve her $\alpha : X \rightarrow B$ dönüşümü için $\alpha = \beta i$ olacak şekilde bir $\beta : F \rightarrow B$ Lie homomorfizmi varsa (F, i) ikilisine X üzerinde bir serbest Lie cebiri denir ve



$\alpha = \beta i$ olup diyagram değişmelidir.

Bir X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebirini aşağıdaki gibi kurarız: Her n pozitif tamsayısı için X_n kümesini

$$X_1 = X$$

$$X_2 = X \times X$$

.

.

.

$$X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p})$$

şeklinde tanımlayalım. $M(X) = \bigcup X_n$ olsun. Her $a, b \in M(X)$ için $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a, b) \in (X_p \times X_q)$ olacak şekilde p ile q sayıları vardır. $n = p + q$ olsun.

O zaman $(a,b) \in (X_p \times X_{n-p})$ olur. (a,b) nin $X_p \times X_{n-p} \rightarrow X_n$ kanonik injeksiyonu altındaki görüntüsünü ab ile gösterelim. Böylece her $a, b \in M(X)$ için (ab) çarpımını tanımlayabiliriz. $a \in X_p$ olacak şekildeki p pozitif tamsayısına a nın uzunluğu denir ve $u(a)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre uzunluğu 1 olan elemanlar X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar a ve b nin uzunluğu c den küçük olmak üzere, $c = ab$ şeklindedir. Şimdi $\underline{k}$ cismi üzerinde $M(X)$ bazı ile bir vektör uzayı kuralım. $M(X)$ deki çarpımı bu vektör uzayının tümüne lineer olarak genişletelim. Böylece $\underline{k}$ üzerinde birleşmeli olmayan bir serbest cebir elde etmiş oluruz. Bu cebire $N(X)$ diyelim. $N(X)$ cebiri, $M(X)$ bazı ile birleşmeli olmayan çarpma işlemiyle birlikte bir $\underline{k}$ - modül olur. $N(X)$ içinde ,

$$Q(a)=(aa) \text{ ve } J(a,b,c)=((ab)c)+((ca)b)+((bc)a)$$

şeklindeki elemanlar tarafından doğrulan ideal A olsun. Bu durumda

$$N(X) / A = F(X) = \langle X \rangle$$

bölüm cebiri X üzerindeki serbest Lie cebiridir.

Teorem 1.2.1 : $\eta : N(X) \rightarrow F(X)$ kanonik dönüşümü ve η nin X e

kısıtlanışına ϕ diyelim. L bir Lie cebiri olmak üzere her $f : X \rightarrow L$ dönüşümü için

$f = g\phi$ olacak şekilde $g : F(X) \rightarrow L$ bir tek Lie homomorfizmi vardır.

Bu teoremin ispatı (Bourbaki,1972) te verilmiştir.

Tanım 1.2.2 : L bir Lie cebiri , $A = \{ a_i : i \in I \}$ kümesi L nin elemanlarının bir ailesi olsun. $F(I)$ da I üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer $\sigma : i \rightarrow a_i$ olacak şekilde $F(I)$ dan L içine bir σ - Lie homomorfizmi varsa ve σ örten ise A kümesine L nin doğurucu kümesi denir. Eğer σ bire-bir ve örten ise A ya L nin serbest doğuraylar kümesi denir. A kümesi sonlu ise , L ye sonlu doğrulmuştur

denir. F nin doğurucu kümesinin eleman sayısına F nin rankı denir.

Tanım 1.2.3 : Y , F nin sonlu bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakilere elementer Lie transformasyonları denir.

- i) Singüler olmayan bir lineer transformasyonu Y nin elemanlarına uygulamak
 - ii) Bir $y \in Y$ elemanını $y + f(y_1 \dots y_m)$ ile değiştirmek.
- (Burada f ifadesi Y nin , y den farklı elemanlarından oluşan ifade)

Teorem 1.2.2 : F , sonlu bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. O zaman F nin her otomorfizmini X e ard arda elementer Lie dönüşümlerinin uygulanması ile elde edilir.

Bu teoremin ispatı (Cohn, 1969) te verilmiştir.

Daha önce tanımlanan $M(X)$ kümesi , birleşmeli olmayan $N(X)$ cebirinin vektör uzayı olarak bazıdır. Fakat $F(X) = N(X) / A$ olup $F(X)$ içinde $M(X)$ lineer bağımsız değildir. Çünkü $a, b \in M(X)$ için (ab) ve (ba) şeklindeki elemanlar $N(X)$ içinde lineer bağımsız olmalarına rağmen , $F(X)$ içinde lineer bağımlıdırlar. O halde $M(X)$ kümesi , $F(X)$ içinde bir baz olamaz.

Şimdi serbest Lie cebirlerinde önemli bir yeri olan Hall bazı inşasını inceleyelim.

1.3. Hall bazı

Şimdi $F(X)$ kümesini vektör uzayı olarak düşünüp bir baz kümesi kuracağız. $M^n(X)$, $M(X)$ de n -uzunluklu elemanların meydana getirdiği küme olsun Burada $M^1(X) = X$ dir.

Tanım 1.3.1 : Bir $H \subseteq M(X)$ Hall kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

- i) $H_1 = X \subseteq H$ ve H ya keyfi bir sıralama verilmiştir.
- ii) $H_2 = H \cap M^2(X)$, $x, y \in X$ ve $x < y$ olacak şekilde (xy) elemanlarını içerir.
- iii) $H_1 , \dots , H_{n-1}$ tanımlanmış ve uzunlukları koruyan bir sıralama verilmiş olsun. O zaman

$$H \cap M^n(X) = \{ a(bc) : a,b,c,ab \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (H \cap M^k(X)), 1 \leq k \leq n-1, a \geq b < c, a < bc \}$$

ve

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H \cap M^n(X))$$

olsun. Kısa olması bakımından $H_n = H \cap M^n(X)$ yazarsak,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

kümesine X üzerinde bir Hall kümesi denir.

İspatını (Bourbaki, 1975) te bulabileceğimiz aşağıdaki teorem serbest Lie cebirlerinin bir bazını belirler.

Teorem 1.3.1 : F bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. X üzerinde kurulan Hall kümesi F nin bir bazıdır.

Bundan böyle , Hall kümesindeki sıralama aşağıdaki gibi olacaktır:

- i) X , keyfi olarak sıralanmış olsun.
- ii) $u, v \in H$ ve $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$ şeklinde iki eleman olsun. Eğer, $\text{uzunluk}(u) < \text{uzunluk}(v)$ ise $u < v$ dir. $\text{Uzunluk}(u) = \text{uzunluk}(v)$ ise $u < v \Leftrightarrow u_2 < v_2$ veya $u_2 = v_2$ iken $u_1 < v_1$ olmalıdır.

Örnek 1.3.1 : $X = \{a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde bir Hall kümesinin uzunluğu ≤ 4 olan elemanlarını belirleyelim :

$H_1 = X$ ve sıralamamız $a < b < c$ olsun.

$H_2 = \{ab, ac, bc\}$ ve sıralamamız $ab < ac < bc$ olsun.

$H_3 = \{a(ab), b(ab), c(ab), a(ac), b(ac), c(ac), b(bc), c(bc)\}$ Bunlarda

sıralı yazılmıştır.

$$H_4 = \{a(a(ab)), b(a(ab)), c(a(ab)), b(b(ab)), c(b(ab)), c(c(ab)), a(a(ac)), b(a(ac)), c(a(ac)), b(b(ac)), c(b(ac)), c(c(ac)), b(b(bc)), c(b(bc)), c(c(bc)), (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)(bc)\}$$

Sonlu bir X kümesi verildiği zaman H_n deki eleman sayısı X deki eleman sayısı cinsinden belirlenmiştir.

Tanım 1.3.2 : $\mathbb{N}$, pozitif tamsayılar kümesi olsun. $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ olan Möbius fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ ise} \\ (-1)^k, & n, \text{ bir asal sayının karesine bölünemiyorsa ve } n = p_1 \dots p_k \text{ n'nin asal çarpanları ise} \\ 0, & n \text{ sayısı bir asal sayının karesi ile bölünebiliyorsa} \end{cases}$$

Örnek 1.3.2 : $\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \mu(6) = 1, \dots$

Teorem 1.3.2 : X herhangi bir küme ve $|X|=r$ olsun. H , X kümesi üzerinde inşa edilen Hall kümesi ise H_n deki elemanların sayısı, μ Möbius fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki formül ile bulunur:

$$|H_n| = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \\ d \text{ bölür } n}} \mu(d) r^{n/d}$$

dir. İspatı (Bourbaki, 1972) de verilmiştir.

Örnek 1.3.3 : $X = \{a, b, c\}$ ve $|X|=3$ tür. Bu durumda,

$$|H_1| = 3$$

$$|H_2| = 3$$

$$|H_3| = 8$$

$$|H_4| = 18$$

$$|H_5| = 48$$

ve H_n nin elemanlarının sayısı da

$$1/n \sum_{\substack{d \\ d \text{ böler } n}} \mu(d) 3^{n/d}$$

ile bulunur.

$X=\{a\}$, $|X|=1$ ise $(aa)=0$ olacağı için X bir baz kümesidir, yani X tarafından doğrulan cebir 1 boyutludur. Ancak bu durumda, bu tezdeki sonuçların çoğu aşıkâr olacaktır. Bu nedenle X doğurucu kümesi üzerinde bir serbest Lie cebirini incelerken $|X| \geq 2$ olarak düşüneceğiz.

F , serbest doğurucu kümesi X olan bir serbest Lie cebiri, H da X üzerinde bir Hall bazı olsun. Bu durumda F nin kendisine izomorfik olan öz alt cebirleri vardır.

Örnek 1.3.4 : $|X| = n$, $|X| \geq 2$ ve F, X üzerinde serbest Lie cebiri ve H da F nin Hall bazı olsun. Bu durumda her bir $i=1,2,3,\dots$ olan i ler için $|H_i| \geq n$ dir. H_2 de $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ ile gösterilen herhangi n tane elemanı alalım. Eğer $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise

$$\theta : x_i \rightarrow h_i$$

dönüşümü bir izomorfizme genişletilebilir.

Gerçekte verilen bir $m \geq 1$ pozitif tamsayısı için F nin m ranklı bir altcebiridir. Çünkü, her bir m için $|H_v| \geq m$ olacak şekilde bir v tamsayısı vardır. Daha sonra göreceğimiz gibi H_v nin elemanları serbest şekilde bir F bir serbest Lie cebiri doğurur.

1.4 Alt Merkezi Seriler ve Nilpotent Lie Cebirleri

Tanım 1.4.1 : $L, \mathbb{k}$ cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin $\{L_n\}$ alt merkezi

serisi aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$L_1 = L$$

$$L_{n+1} = (LL_n)$$

Eğer bir $q \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $L_{q-1} \neq \{0\}$ fakat $L_q = \{0\}$ oluyorsa L ye q -uncu dereceden nilpotent Lie cebiri denir.

Eğer $q=2$ ise L abelyendir. Yani $(LL)=0$ dır. L nin alt merkezi serisinin terimleri;

$$\dots L_n \triangleleft L_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft L_2 \triangleleft L_1 = L$$

olacak şekilde idealler zinciri meydana getirir. Bu durumda L_n / L_{n+1} ve L / L_n faktörlerinden bahsedebiliriz. Jacobi özdeşliğinden

$$(L_m L_n) \subseteq L_{m+n}$$

olur.

L bir nilpotent lie cebiri ise L nin her alt cebiri de nilpotenttir. Alt cebirin nilpotentlik derecesi orijinal cebirin (yani L nin) nilpotentlik derecesinden küçük veya eşittir. Lie cebirler için aşağıdaki teoremlerin ispatları (Ward,1964) te verilmiştir.

Teorem 1.4.1 : $F, \underline{k}$ cismi üzerinde bir Lie cebiri ve H da F için Hall bazı olsun. Bir $f \in F$ için

$$f = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i \quad (\text{mod } F_n)$$

şeklindedir, öyle ki $\alpha_i \in \underline{k}$, $h_i \in H_1 \cup H_2 \cup \dots H_{n-1}$ dir.

Tanım 1.4.2 : L, X üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer bir n pozitif tamsayısı için $L \cong F / F_{n+1}$ olacak şekilde X üzerinde bir F serbest Lie cebiri varsa L ye n -inci dereceden serbest nilpotent Lie cebiri denir.

Teorem 1.4.2 : $L, \underline{k}$ cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri , H de L nin bir Hall

bazı olsun. Bu durumda L_n / L_{n+1} serbest abelyen Lie cebirdir ve H de n -uzunluklu elemanlar bu cebirin bir bazını oluşturur.

Teorem 1.4.3: $L = F / F_n$ serbest nilpotent Lie cebiri ve H de F nin bir Hall bazı olsun. H nin uzunluğu n den daha küçük olan elemanları, L nin bir bazını meydana getirir, yani

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}$$

L nin bir bazıdır. Bir serbest Lie cebirinde $\geq n$ uzunluklu elemanlar tarafından doğrulan ideal R ise, F / R bir serbest nilpotent Lie cebirdir.

1.5 Bir Serbest Lie Cebirinin Alt Merkezi Serisinin Terimleri İçin Serbest

Doğurucular

F , bir k cismi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. F nin, F_m alt cebirleri vektör uzayı olarak sonlu boyutlu değildirler ($|X|=1$ durumu hariç).

Alt merkezi serinin terimleri için serbest doğuray bulma problemi Gruenberg (1957) tarafından gruplar teorisinde çözüldü. Sonra benzer bir sonuç Lie halkaları için elde edildi (Witt, 1956). F nin bir serbest Lie cebiri olması durumunda F_m nin bir serbest doğurucu kümesi A.L.Smel'kin (1963) tarafından belirlenmiştir. Gruplar ve halkalar için bu konudaki daha detaylı sonuçlar (Ward, 1973) te verilmiştir.

Şimdi, F_m nin bir serbest doğurucu kümesini inşa edeceğiz.

F , bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri, H , F için bir Hall bazı ve H_n de H de n uzunluklu elemanların kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuç (Smel'kin, 1963) de ispatlanmıştır.

Teorem 1.5.1 : $C_m = \{x = a_1 a_2 : a_1, a_2 \in H, \text{uzunluk}(x) \geq m ; x \in H, \text{uzunluk}(a_1) < m\}$ şeklinde tanımlanan küme, F_m için bir serbest doğurucu kümedir.

H nin tanımını kullanarak, C_m yi daha ayrıntılı olarak

$$C_m = \{x = x_1(x_2(\dots(x_{r-1}x_r))\dots) : \text{uzunluk}(x) \geq m; x_i \in (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{m-1})$$

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{r-1} < x_r ; r \geq 2 ; x_r = b_1 b_2 \text{ ise } x_{r-1} \geq b_1 \}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi , F_m Lie cebiri için , C_m serbest doğurucuları üzerinde H^{C_m} Hall bazı kuracağız. Bunu C_m nin elemanlarının çarpımı ile yapacağız.

C_m -uzunluk ile bir elemanın yazılışında C_m den gelen eleman sayısını, X -uzunluk ile de, bir eleman, X elemanlarının çarpımı olarak yazıldığında, X den gelen eleman sayısını gösterelim.

$C_m \subseteq H$ olduğundan H deki sıralamayı C_m için de alalım.

$$H_1^{C_m} = C_m$$

$$H_2^{C_m} = \{ a_1 a_2 : a_1, a_2 \in C_m; a_1 < a_2 \}$$

Şimdi , $H_2^{C_m}$ de aşağıdaki gibi bir sıralama vereceğiz:

$h, g \in H_2^{C_m}$ ise , $h = h_1 h_2$ ve $g = g_1 g_2$ olsun. O zaman $h_1, h_2, g_1, g_2 \in C_m$ dir. Şimdi de h ile g yi sıralayalım.

Eğer, $X\text{-uzunluk}(h) < X\text{-uzunluk}(g) \Rightarrow h < g$ dir.

Eğer, $X\text{-uzunluk}(h) = X\text{-uzunluk}(g) \Rightarrow h < g \Leftrightarrow h_2 < g_2$ ise veya $h_2 = g_2 \Rightarrow h_1 < g_1$ olmalıdır.

$H_1^{C_m}, \dots, H_{n-1}^{C_m}$ kümeleri tanımlanmış ve sıralanmış olsun.

$H_n^{C_m} = \{ x = a_1(a_2 a_3) : C_m\text{-uzunluk}(x) = n; a_2 < a_3, a_1 < a_2 a_3, a_1 \square a_2, a_1, a_2, a_3, a_2 a_3 \in H_1^{C_m} \cup \dots \cup H_{n-1}^{C_m} \}$ dir. Bu kümeyi de yukarıdaki gibi sıralayabiliriz. Buradan,

$$H^{C_m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^{C_m}$$

olarak yazar ve bu küme de $H_i^{C_m}$ deki sıralamalar ile lineer sıralı küme olup, F_m nin bir bazıdır.

$H_2^{C_m}$ de X - uzunluğu , $H_1^{C_m}$ deki elemanların X -uzunluğundan daha küçük olan elemanlar vardır.

1.6 Lie süpercebiri

Bu kısımda Lie süpercebiri ve serbest Lie süpercebiri ile ilgili tanım ve teoremleri inceleyeceğiz

Tanım 1.6.1: L bir Lie cebiri ve $\alpha \in Z$ tamsayısı için L_α , L nin bir alt uzayı olsun. $\{L_\alpha : \alpha \in Z\}$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise L ye Z tarafından derecelendirilmiş bir Lie cebiri denir.

- a) $L = \bigoplus \{L_\alpha : \alpha \in Z\}$ dir.
- b) Her $\alpha, \beta \in Z$ için $L_\alpha L_\beta \subseteq L_{\alpha+\beta}$ dir.

Eğer $\alpha, \beta \in Z_2 = \{0,1\}$ ise o zaman L ye Z_2 derecelendirilmiş Lie cebiri denir.

Tanım 1.6.2: $L = L_0 \oplus L_1$, k cismi üzerinde bir Z_2 - derecelendirilmiş cebir olsun. Eğer L deki çarpım her $\alpha, \beta, \gamma \in Z_2$ ve $a \in L_\alpha, b \in L_\beta, c \in L_\gamma$ için

$$[ab] = -(-1)^{\alpha\beta} [ba] \quad (1)$$

$$(-1)^{\alpha\gamma} [a[bc]] + (-1)^{\alpha\beta} [b[ca]] + (-1)^{\beta\gamma} [c[ab]] = 0 \quad (2)$$

eşitliklerini sağlıyorsa L ye k cismi üzerinde bir Lie süpercebiri denir. L_0 ve L_1 uzaylarının elemanlarına sırasıyla L nin çift ve tek elemanları denir. L_0 bir Lie cebiridir.

Tanım 1.6.3 : $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_s\}$ ayrık kümelerinin birleşimi ve $Y \subset L_0$, $Z \subset L_1$ olmak üzere $L = L_0 \oplus L_1$, k cismi üzerinde, X kümesi tarafından doğrulan bir Lie süpercebiri olsun. k cismi üzerinde, $Y' = \{y'_1, \dots, y'_r\}$ $Z' = \{z'_1, \dots, z'_s\}$ ayrık kümeler olmak üzere $X' = Y' \cup Z'$ kümesi tarafından doğrulan diğer bir süpercebiri, $y_i \rightarrow y'_i$ ve $z_j \rightarrow z'_j$ sağlayan dönüşüm altında L nin bir homomorfik görüntüsü ise o zaman L ye $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie

süpercebiri denir.

Serbest Lie cebirlerindeki Hall bazına benzer bir baz serbest Lie süpercebirleri için (Shtern, 1986) da inşa edilmiştir. Buna göre F , $X = Y \cup Z$ üzerindeki serbest Lie cebiri, H ise X kümesi üzerinde inşa edilmiş bir Hall bazı ise $X = Y \cup Z$ üzerindeki serbest Lie süpercebiri L nin vektör uzayı olarak bir bazı

$$M = \{h, v^2 : h, v \in H \text{ ve } v \in L_1\} \quad (3)$$

kümesidir, öyle ki $v^2 = [v, v]$ dir. Bu M bazına L nin süper bazı denir.

2. 5. DERECEDEEN SONLU DOĞURAYLI SERBEST NİLPOTENT LİE SÜPERCEBİRLERİ

Bu bölümde nilpotentlik derecesi 5 olan serbest nilpotent Lie süpercebirlere bazları ve boyutları belirlenmiştir.

2.1 Serbest Nilpotent Lie Süpercebirleri

Nilpotentlik derecesi ≤ 4 olan serbest nilpotent Lie süpercebirlere baz ve boyutları (Boral, 1995) de verilmiştir.

F , bir k cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri ve F_n , F nin alt merkezi serisinin n -inci terimi olsun. Bu durumda $B_n = F / F_{n+1}$, X doğurucu kümesi üzerinde n -inci dereceden bir serbest nilpotent Lie cebiridir. X kümesi sonlu ise o zaman B_n , k cismi üzerinde bir vektör uzayı olarak sonlu boyutludur. B_n nin boyutu sadece n ve X kümesinin kardinalitesine bağlıdır. Eğer $|X| = a < \infty$ ise $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ Möbius fonksiyonu olmak üzere (Bourbaki, 1968) de

$$\dim F_i / F_{i+1} = (1/i) \sum_{\substack{d \\ d \text{ bölür } i}} \mu(d) a^{i/d} \quad (4)$$

şeklinde verilmiştir. Bu durumda,

$$\dim B_n = \sum_{i=1, \dots, n} \dim F_i / F_{i+1}$$

olur.

Tanım 2.1.1 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri olsun. L_n , L nin alt merkezi serisinin n -inci terimi olsun. $N_n = L / L_{n+1}$ bölüm cebirine, n -inci dereceden bir serbest nilpotent Lie süpercebiri denir.

X te Y nin elemanları, Z nin elemanlarından önce gelecek şekilde bir sıralama verilsin ve H da bu sıralama ile tutarlı olacak şekilde, X üzerinde kurulan Hall bazı olsun.

$$M = \{h, v^2 : h, v \in H \text{ ve } v \in L_{-1}\}$$

kümesi de L serbest Lie süpercebirinin süper bazı olsun. Eğer M_i , M nin i uzunluklu

elemanlarını tanımlarsa o zaman $M_i, L_i/L_{i+1}$ in bir bazıdır. Buradan,

$$\dim L_i/L_{i+1} = |M_i| \text{ ve } \dim N_n = \sum_{i=1, \dots, n} \dim L_i/L_{i+1} \text{ olur. Buna bağlı olarak, } X \text{ üzerinde}$$

sonlu doğrulmuş serbest nilpotent B_n Lie cebirinin boyutu $|X|$ e bağlıdır. Sonlu doğrulmuş bir N_n serbest nilpotent Lie süpercebirinin boyutu ise yalnız $|X|$ tarafından belirlenmemiştir, ancak Y ve Z kümelerinin kardinaliteleri tarafından belirlenmiştir.

$Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ ve $Z = \{z_1, \dots, z_s\}$ olmak üzere $L = L_0 \oplus L_1$, $X = Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri olsun. F, F^Y, F^Z , sırasıyla X, Y , ve Z kümeleri üzerindeki serbest Lie cebirleri olsun. Burada, L nin bu cebirlerin izomorfik kopyalarını içerdiğine dikkat edelim. X te, Y nin elemanları, Z nin elemanlarından önce gelecek şekilde bir sıralama ve $i < j$ için $y_i < y_j$ ve $k < m$ için $z_k < z_m$ olduğunu kabul edelim. Bu sıralamaya uygun şekilde H, H^Y, H^Z ile X, Y ve Z kümeleri üzerindeki Hall bazlarını tanımlıyoruz. M_i (3) deki gibi L nin bir bazı ve M de i uzunluklu elemanları M_i ile gösterelim. $M_{i,0}$ ve $M_{i,1}$, sırasıyla M_i nin çift ve tek elemanları olmak üzere $M_i, M_i = M_{i,0} \cup M_{i,1}$ şeklindedir. Eğer i bir tek tamsayı ise $M_i = H_i$ ancak eğer i bir çift tamsayı ise (3) den dolayı $M_i = H_i \cup \{a^2; a \in M_{i/2,1}\}$ olduğuna dikkat edelim. M_i yi, H_i deki elemanlar $\{a^2; a \in M_{i/2,1}\}$ kümesinin elemanlarından önce gelecek şekilde sıralarız. Sonra, M yi, M_i nin elemanları, X - uzunluğu $< i$ olan M nin bütün elemanlarını takip edeceği kabulüyle sıralarız. Buradan;

Teorem 2.1.1 : F ve L , sonlu bir X kümesi üzerinde sırasıyla serbest bir Lie cebiri ve bir serbest Lie süpercebiri olsun. Eğer i bir tek tamsayı ise $\dim L_i/L_{i+1} = \dim F_i/F_{i+1}$ ve eğer i bir çift tamsayı ise $\dim L_i/L_{i+1} > \dim F_i/F_{i+1}$ dir.

Ancak, i nin çift olması durumunda L_i/L_{i+1} ve F_i/F_{i+1} in boyutları ile ilgili basit bir formül yoktur.

2.2 Derecesi < 5 olan Serbest Lie Süpercebirleri

Bu bölümde nilpotenlik derecesi < 5 olan serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin baz ve boyutlarını belirleyeceğiz.

Eğer $N_n = N_{n,0} \oplus N_{n,1}$, X üzerinde serbest nilpotent Lie süpercebiri ise o zaman, $n < 5$ için $N_{n,0}$, $N_{n,1}$ sırasıyla çift ve tek alt uzayları (Boral, 1995) de elde edilmiştir. $N_n = \bigoplus_{i=1,\dots,n} \text{Span } M_i$, $N_{n,0} = \bigoplus_{i=1,\dots,n} \text{Span } M_{i,0}$ ve $N_{n,1} = \bigoplus_{i=1,\dots,n} \text{Span } M_{i,1}$ olduğuna dikkat edelim. Önce H nin bir kısmını oluşturarak, M nin uygun bir kısmının oluşmasını, M_i nin tek ve çift elemanları belirleyecektir.

$A = \{a_1, \dots, a_t\}$, ve B kümeleri $|B| = q$, tüm $a \in A$ ve $b \in B$ için $a < b$ olacak şekilde M nin sonlu alt kümeleri olsun. A kümesinde $i = 1, \dots, t$ ve $i < j$ için $a_i < a_j$ şeklinde bir sıralama verilsin. $\hat{A}$, $\tilde{A}$ kümeleri ve $A \odot AB$ çarpımı (Boral ,1995) de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{A} = \{a_i a_j : i < j\}$$

ve

$$\tilde{A} = \{a_i^2 : a_i \in A\}.$$

Bu durumda $|\hat{A}| = (1/2)t(t-1)$ olur . $a \in L_0$ ise (1) den dolayı $a^2 = 0$ dır. Böylece , $A \subset L_0$ ise $|\tilde{A}| = 0$ ve eğer $A \subset L_1$ ise $|\tilde{A}| = |A|$ alınır. Şimdi, M nin ayrık iki alt kümesi olan U ve V için iki çarpım aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$UV = \{uv : u \in U \text{ ve } v \in V\}$$

ve

$$U \circ V = \{uv : u < v, u \in U \text{ ve } v \in V\} \cup \{vu : v < u, u \in U \text{ ve } v \in V\}$$

$UV \neq U \circ V$ ancak $|U \circ V| = |UV| = |U||V|$ olduğuna dikkat edelim. $U = \{a\}$ olduğu zaman UV için aV yazarız.

$A \odot AB$ çarpımı ise

$$A \odot AB = \bigcup_{j=1,\dots,t} \left(\bigcup_{i=1,\dots,j} a_i B \right)$$

şeklindedir.

Açıkça $|a_i B| = q$ ve $j=1, \dots, t$ için $\left| \bigcup_{i=1, \dots, j} a_i B \right| = jq$ dir. Böylece $|A \odot AB| = \sum_{j=1, \dots, t} jq = (1/2)qt(t+1)$ olur.

Teorem 2.2.1 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri , $|Y|=r$ $|Z|=s$ ve $L_2/L_3 = J_{2,0} \oplus J_{2,1}$ olsun. Bu durumda $J_{2,0}$ in bir bazı $(H^Y)_2 \cup (H^Z)_2 \cup \tilde{Z}$ ve $J_{2,1}$ in bir bazı da YZ olur. Böylece ; $\dim L_2/L_3 = (1/2)(r+s)(r+s-1)+s$, $\dim J_{2,0} = (1/2)[r(r-1)+s(s+1)]$ ve $\dim J_{2,1} = rs$ dir.

İspat : Hall bazı tanımından, ayrık kümelerin birleşimi olarak $H_2 = (H^Y)_2 \cup (H^Z)_2 \cup YZ$ alınır.(3) den $M_2 = H_2 \cup \tilde{Z}$ olur. Ama ,eğer $a \in M$ ise (1) den a , L nin bir tek elemanıdır. Bu ise $a \in L_1$ demektir. Bu durum , ancak ve ancak a nın Z -uzunluğunun bir tek tamsayı olması ile mümkündür. Aksi halde $a \in L_0$ dir. M_2 yi oluşturan kümelerden sadece YZ , $M_{2,0}$ a aittir. Böylece $(H^Y)_2 \cup (H^Z)_2 \cup \tilde{Z}$, $J_{2,0}$ için bir baz, YZ de $J_{2,1}$ için bir bazdır. Ancak $(H^Y)_2 = \hat{Y}$ ve $(H^Z)_2 = \hat{Z}$ dir. $|\hat{Y}| = (1/2)r(r-1)$, $|\hat{Z}| = (1/2)s(s-1)$ ve $|\tilde{Z}| = s$ olduğundan $\dim J_{2,0} = (1/2)[r(r-1)+s(s+1)]$ ve $\dim J_{2,1} = rs$ elde edilir. $J_{2,0}$ ve $J_{2,1}$ in boyutlarının toplanması ile $\dim L_2/L_3 = (1/2)(r+s)(r+s-1)+s$ bulunur.

Teorem 2.2.2 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri , $|Y|=r$ $|Z|=s$ ve $N_2 = L/L_3 = N_{2,0} \oplus N_{2,1}$ de , X üzerinde bir serbest nilpotent Lie süpercebiri olsun. O zaman $\dim N_{2,0} = (1/2)[r(r+1)+s(s+1)]$, $\dim N_{2,1} = s(r+1)$ ve $\dim N_2 = (1/2)[r(r+1)+s(s+3)]$ dir.

İspat : Teorem 2.2.1 den, $\dim L/L_3 = \dim L/L_2 + \dim L_2/L_3$, $\dim N_{2,0} = |M_{2,0}| + |Y|$

ve $\dim N_{2,1} = |M_{2,1}| + |Z|$ sonuçları elde edilir.

Teorem 2.2.3 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri , $|Y|=r$ $|Z|=s$ ve $L_3/L_4=J_{3,0} \oplus J_{3,1}$ olsun. Bu durumda $(H^Y)_3 \cup Z(YZ)$, $J_{3,0}$ için bir baz ve $(H^Z)_3 \cup Z(H^Y)_2 \cup (Y \odot YZ)$ ise $J_{3,1}$ için bir bazdır. Buradan, $\dim J_{3,0}=(1/3)r(r^2-1)+rs^2$, $\dim J_{3,1}=(1/3)s(s^2-1)+sr^2$ ve $\dim L_3/L_4=(1/3)(r+s)[(r+s)^2-1]$ dir.

İspat : Hall bazı tanımından $H_3=(H^Y)_3 \cup Z(YZ) \cup (H^Z)_3 \cup Z(H^Y)_2 \cup (Y \odot YZ)$ ve $M_3=H_3$ olur. $(H^Z)_3 \cup Z(H^Y)_2 \cup (Y \odot YZ)$ deki elemanların Z -dereceleleri tek olduğundan bu küme $J_{3,1}$ için bir baz , $(H^Y)_3 \cup Z(YZ)$ deki elemanların Z -dereceleleri ise çift olduğundan bu küme de $J_{3,0}$ için bir baz formundadır. $|(H^Z)_3|=(1/3)s(s^2-1)$ $|Z(H^Y)_2|=(1/2)rs(r-1)$ ve $|Y \odot YZ|=(1/2)rs(r+1)$ nin toplamı ise $\dim J_{3,1}=(1/3)s(s^2-1)+sr^2$ i verir. Aynı şekilde $|(H^Y)_3|=(1/3)r(r^2-1)$ ve $|Z(YZ)|=rs^2$ nin toplamı da, $\dim J_{3,0}=(1/3)r(r^2-1)+rs^2$ yi verir. Buradan,

$$\dim L_3/L_4=\dim J_{3,0}+\dim J_{3,1}=(1/3)(r+s)[(r+s)^2-1]$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri , $|Y|=r$ $|Z|=s$ ve $N_3=L/L_4=N_{3,0} \oplus N_{3,1}$, X kümesi üzerinde 3-üncü dereceden serbest nilpotent Lie süpercebiri olsun. Bu durumda ,

$$\dim N_{3,0}=(1/6)r(2r^2+3r+1)+(1/2)s(s+1)+rs^2$$

$$\dim N_{3,1}=(1/3)s(s^2+2)+rs(r+1)$$

$$\dim N_3=(1/6)(r+s)[1+(r+s)(2(r+s)+3)]+s$$

olur.

İspat : Teorem 2.2.1, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 ten $\dim N_3 = \sum_{i=1, \dots, 3} \dim L_i / L_{i+1}$, $\dim N_{3,0} = \sum_{i=1, \dots, 3} \dim N_{i,0}$ ve $\dim N_{3,1} = \sum_{i=1, \dots, 3} \dim N_{i,1}$ elde edilir.

Teorem 2.2.5 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri, $|Y|=r$, $|Z|=s$ ve $L_4/L_5=J_{4,0} \oplus J_{4,1}$ olsun. O zaman,

$(H^Y)_4 \cup (H^Z)_4 \cup (H^Y)_2 \cup (H^Z)_2 \cup \tilde{YZ} \cup Z(Y \odot YZ) \cup Z \odot Z(H^Y)_2 \cup \hat{YZ}$ kümesi $J_{4,0}$ için ve

$(H^Y)_2 YZ \cup ((YZ) \circ (H^Z)_2) \cup Z(H^Y)_3 \cup (Z \odot Z(YZ)) \cup (Y \odot (Y \odot (YZ)))$ kümesi ise $J_{4,1}$ için bir bazdır. Buradan, $\dim L_4/L_5 = (1/4)(r+s)^2[(r+s)^2-1]+rs$,

$\dim J_{4,0} = (1/4)[r^2(r^2-1)+s^2(s^2-1)]+(3/2)r^2s^2+(1/2)rs$ ve $\dim J_{4,1} = r^3s+s^3r$ dir.

İspat: $M_4 = H_4 \cup \tilde{M}_{2,1}$ alınır. Hall bazı tanımından $H_4 = (H^Y)_4 \cup (H^Z)_4 \cup (H^Y)_2 (H^Z)_2 \cup \hat{YZ} \cup Z(Y \odot YZ) \cup (Z \odot Z(H^Y)_2) \cup (H^Y)_2 YZ \cup ((YZ) \circ (H^Z)_2) \cup (H^Y)_3 \cup (Z \odot Z(YZ)) \cup (Y \odot (Y \odot (YZ)))$ ve $\tilde{M}_{2,1} = \tilde{YZ}$ dir. Elemanlarının Z -dereceleri çift olan $(H^Y)_4 \cup (H^Z)_4 \cup (H^Y)_2 (H^Z)_2 \cup \hat{YZ} \cup Z(Y \odot YZ) \cup (Z \odot Z(H^Y)_2) \cup \tilde{YZ}$ kümesi $J_{4,0}$ için bazdır. Elemanlarının Z -derecesi tek olan $(H^Y)_2 YZ \cup ((YZ) \circ (H^Z)_2) \cup Z(H^Y)_3 \cup (Z \odot Z(YZ)) \cup (Y \odot (Y \odot (YZ)))$ kümesi de $J_{4,1}$ için bazdır.

$$\left| (H^Y)_4 \right| = (1/4)r^2(r^2-1)$$

$$\left| (H^Z)_4 \right| = s^2(s^2-1)$$

$$\left| (H^Y)_2 (H^Z)_2 \right| = (1/4)rs(r-1)(s-1)$$

$$|\widetilde{YZ}| = (1/2)rs(rs-1) \quad |Z(Y \odot YZ)| = (1/2)s^2r(r+1)$$

$$|Z \odot Z \left(H^Y \right)_2| = (1/4)rs(r-1)(s+1)$$

$$|\widetilde{YZ}| = rs$$

$$\left| \left(H^Y \right)_2 YZ \right| = (1/2)r^2s(r-1)$$

$$\left| (YZ) \circ \left(H^Z \right)_2 \right| = (1/2)rs^2(s-1)$$

$$\left| Z \left(H^Y \right)_3 \right| = (1/3)rs(r^2-1) \quad |Z \odot Z(YZ)| = (1/2)rs^2(s+1)$$

ve

$$|Y \odot (Y \odot (YZ))| = (1/6)rs(r+1)(r+2)$$

dir. Karşılıklı gelen terimlerin toplanması ile $J_{4,0}$ ve $J_{4,1}$ 'in boyutları için formüller elde edilir. $\dim L_4/L_5$ için ise (4) den $|H_4| = (1/4)(r+s)^2[(r+s)^2-1]$ ve $|M_{2,1}| = rs$ elde edilir.

Teorem 2.2.6 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri $|Y|=r$ $|Z|=s$ ve $N_4=L/L_5=N_{4,0} \oplus N_{4,1}$, X üzerinde 4-üncü dereceden serbest nilpotent Lie süpercebiri olsun. Bu durumda ,

$$\dim N_{4,0} = (1/12)(3r^4 + 4r^3 + 3r^2 + 2r + 3s^4 + 3s^2 + 6s + 18r^2s^2 + 12rs^2 + 6rs)$$

$$\dim N_{4,1} = (1/3)[s^3 + 2s + 3rs(1 + r + r^2 + s^2)]$$

$$\dim N_4 = (1/6)12(r+s)[((r+s)^2-1)(7+r+s) + (2rs(r+s+1) + 2s^2 + s + r - 1) + 12]$$

olur.

İspat : Teorem 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 ten ve $\dim N_4 = \sum_{i=1,\dots,4} \dim L_i / L_{i+1}$, $\dim N_{4,0} = \sum_{i=1,\dots,4} \dim N_{i,0}$ ve $\dim N_{4,1} = \sum_{i=1,\dots,4} \dim N_{i,1}$ yukarıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.2.7 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri, $|Y|=r$, $|Z|=s$ olsun. Bu durumda $\dim L_6/L_7=(1/6)[(r+s)^6-(r+s)^3-(r+s)]$ ve $\dim L_8/L_9=(1/8)(r+s)^4[(r+s)^4-1]+r^3s+sr^2$ olur.

İspat : Bir i çift tamsayısı için $\dim L_i/L_{i+1} = |M_i| = |H_i| + |M_{i/2,1}|$ dir. Teorem 2.2.3 ve 2.2.5 den bu sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.2.8 : L , $Y \cup Z$ kümesi üzerinde sonlu şekilde doğurulmuş bir serbest Lie süpercebiri, $|Y|=|Z|$ ve $i=1,\dots,4$ için $L_i/L_{i+1}=J_{i,0} \oplus J_{i,1}$ ise o zaman $\dim J_{i,0}=\dim J_{i,1}$ ve $\dim N_{i,0}=\dim N_{i,1}$ dir.

İspat : Sonuç, doğrudan $i=2,3,4$ için $J_{i,0}$, $J_{i,1}$, $N_{i,0}$ ve $N_{i,1}$ in boyutlarını veren formüllerde $r=s$ düzenlemesi yapılarak Teorem 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 ve 2.2.6 den elde edilir.

2.3 Derecesi 5 olan Serbest Nilpotent Lie Süpercebirleri

Bu kısımda 5-inci dereceden serbest nilpotent Lie süpercebirlerinin bazlarını ve boyutlarını belirleyeceğiz.

Teorem 2.3.1 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri, $|Y|=r$, $|Z|=s$ ve $L_5/L_6=J_{5,0} \oplus J_{5,1}$ olsun. Bu durumda $\dim L_5/L_6=(1/5)[(r+s)^5-(r+s)]$, $\dim J_{5,0}=(1/5)(r^5-r)+2r^3s^2+rs^4$ ve $\dim J_{5,1}=(1/5)(s^5-s)+2r^2s^3+r^4s$ olur.

İspat : Bir i tek tamsayısı için Teorem 2.1.1 den $\dim L_5/L_6 = \dim F_5/F_6$ ve $M_5 = H_5$ dir. Hall bazı tanımından ,

$$H_5 = (H^Y)_5 \cup Z(Y \odot (Y \odot YZ)) \cup Z \odot (Z \odot Z(YZ)) \cup Z \odot (Z(H^Y)_3) \cup ((H^Y)_2(Z(YZ))) \cup ((H^Z)_2(H^Y)_3) \cup ((YZ)(Y \odot YZ)) \cup ((YZ)(Z(H^Y)_2)) \cup ((YZ)(H^Z)_3) \cup ((H^Z)_2 Z(YZ)) \cup (Y \odot (Y \odot (Y \odot YZ))) \cup Z \odot (Z(Y \odot YZ)) \cup (H^Z)_5 \cup (Z \odot (Z \odot Z(H^Y)_2)) \cup (H^Y)_2(Y \odot YZ) \cup (H^Y)_2 Z(H^Y)_2 \cup ((H^Y)_2(H^Z)_3) \cup ((H^Z)_2(Y \odot YZ)) \cup ((H^Z)_2(Z(H^Y)_2)) \cup ((YZ)(H^Y)_3) \cup ((YZ)Z(YZ)) \cup \left(Z(H^Y)_4 - \left(\hat{H^Y} \right)_2 \right)$$

olur. Burada Z -uzunluğu çift olan elemanların kümesi ;

$$(H^Y)_5 \cup Z(Y \odot (Y \odot YZ)) \cup Z \odot (Z \odot Z(YZ)) \cup Z \odot (Z(H^Y)_3) \cup ((H^Y)_2(Z(YZ))) \cup ((H^Z)_2(H^Y)_3) \cup ((YZ)(Y \odot YZ)) \cup ((YZ)(Z(H^Y)_2)) \cup ((YZ)(H^Z)_3) \cup ((H^Z)_2 Z(YZ))$$

olduğundan bu küme $M_{5,0}$ için bir bazdır. Z -uzunluğu tek olan elemanların kümesi ise

$$(Y \odot (Y \odot (Y \odot YZ))) \cup Z \odot (Z(Y \odot YZ)) \cup (H^Z)_5 \cup (Z \odot (Z \odot Z(H^Y)_2)) \cup (H^Y)_2(Y \odot YZ) \cup (H^Y)_2 Z(H^Y)_2 \cup ((H^Y)_2(H^Z)_3) \cup ((H^Z)_2(Y \odot YZ)) \cup ((H^Z)_2(Z(H^Y)_2)) \cup ((YZ)(H^Y)_3) \cup ((YZ)Z(YZ)) \cup \left(Z(H^Y)_4 - \left(\hat{H^Y} \right)_2 \right)$$

olduğundan bu küme de $M_{5,1}$ için bir bazdır. Ancak bu kümelerin tanımından

$$\left| (H^Y)_5 \right| = (1/5)(r^5 - r)$$

$$\left| Z(Y \odot (Y \odot YZ)) \right| = (1/6)(r^3 s_2 + 3r^2 s^2 + 2rs^2)$$

$$\left| Z \odot (Z \odot Z(YZ)) \right| = (1/6)(rs^4 + 3rs^3 + 2rs^2)$$

$$\left| Z \odot Z(H^Y)_3 \right| = (1/6)(r^3 s^3 + r^3 s - rs^2 - rs)$$

$$\left| (H^Z)_2 Z(YZ) \right| = (1/2)(r^3 s^2 - r^2 s^2)$$

$$\left| (H^Y)_2 (H^Y)_3 \right| = (1/6)(r^3 s^2 - r^3 s - rs^2 + rs)$$

$$\left| (YZ)Y \odot YZ \right| = (1/2)(r^3 s^2 + r^2 s^2)$$

$$\left| (YZ)Z (H^Y)_2 \right| = (1/2)(r^3 s^2 - r^2 s^2)$$

$$\left| (YZ)(H^Z)_3 \right| = (1/3)(rs^4 - rs^2)$$

$$\left| (H^Z)_2 Z(YZ) \right| = (1/2)(rs^4 - rs^3)$$

ve

$$\begin{aligned} |M_{5,0}| = & (1/5)(r^5 - r) + (1/6)(r^3 s^3 + 3r^2 s^2 + 2rs^2) + (1/6)(rs^4 + 3rs^3 + 2rs^2) + (1/6)(r^3 s^2 + r^3 s - rs^2 - \\ & rs) + (1/2)(r^3 s^2 - r^2 s^2) + (1/6)(r^3 s^2 - r^3 s - rs^2 + rs) + (1/2)(r^3 s^2 + r^2 s^2) + (1/2)(r^3 s^2 - r^2 s^2) + (1/3)(rs^4 - \\ & rs^2) + (1/2)(rs^4 - rs^3) \end{aligned}$$

ve hesaplandığında

$$|M_{5,0}| = (1/5)(r^5 - r) + 2r^3 s^2 + rs^4$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\left| Y \odot (Y \odot (Y \odot YZ)) \right| = (1/24)(r^4 s + 6r^3 s + 11r^2 s + 6rs)$$

$$\left| Z \odot Z(Y \odot YZ) \right| = (1/4)(r^2 s^3 + r^2 s^2 + rs^3 + rs^2)$$

$$\left| (H^Z)_5 \right| = (1/5)(s^5 - s)$$

$$\left| Z \odot (Z \odot Z(H^Y)_2) \right| = (1/12)(r^2 s^3 + 3r^2 s^2 + 2r^2 s - rs^3 - 3rs^2 - 2rs)$$

$$\left| (H^Y)_2 (Y \odot YZ) \right| = (1/4)(r^4 s - r^2 s)$$

$$\left| (H^Y)_2 Z(H^Y)_2 \right| = (1/4)(r^4 s - 2r^3 s + r^2 s)$$

$$\left| (H^Y)_2 (H^Z)_3 \right| = (1/6)(r^2 s^3 - r^2 s - rs^3 + rs)$$

$$\left| (H^Z)_2 (Y \odot YZ) \right| = (1/4)(r^2 s^3 - r^2 s^2 + rs^3 - rs^2)$$

$$\left| (H^Z)_2 Z(H^Y)_2 \right| = (1/4)(r^2 s^3 - r^2 s^2 - rs^3 + rs^2)$$

$$\left| (YZ)(H^Y)_3 \right| = (1/3)(r^4 s - r^2 s)$$

$$|(YZ)Z(YZ)|=r^2s^3$$

$$\left| Z \left(\begin{pmatrix} H^Y \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{H}^Y \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right| = (1/8)(r^4s - r^2s + 2r^3s - 2rs)$$

olur ve

$$|M_{5,1}| = (1/24)(r^4s + 6r^3s + 11r^2s + 6rs) + (1/4)(r^2s^3 + r^2s^2 + rs^3 + rs^2) + (1/5)(s^5 - s) \\ + (1/12)(r^2s^3 + 3r^2s^2 + 2r^2s - rs^3 - 3rs^2 - 3rs^2 - 2rs) + (1/4)(r^4s - r^2s) + (1/4)(r^4s - \\ 2r^3s + r^2s) + (1/6)(r^2s^3 - r^2s - rs^3 + rs) + (1/4)(r^2s^3 - r^2s^2 + rs^3 - rs^2) + (1/4)(r^2s^3 - r^2s^2 - \\ rs^3 + rs^2) + (1/3)(r^4s - r^2s) + r^2s^3 + (1/8)(r^4s - r^2s + 2r^3s - 2rs)$$

Buradan ise

$$|M_{5,1}| = (1/5)(s^5 - s) + 2r^2s^3 + r^4s$$

elde edilir. Böylece

$$|L_5 / L_6| = |M_{5,0}| + |M_{5,1}| = |M_5| = |H_5| = (1/5)[(r+s)^5 - (r+s)]$$

olur.

Teorem 2.3.2 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri , $|Y|=r$, $|Z|=s$ ve X üzerinde 5.ci dereceden serbest nilpotent Lie süpercebiri ,

$$N_5 = L/L_6 = N_{5,0} \oplus N_{5,1}$$

olsun. Bu durumda

$$\dim N_{5,0} = (1/12)(3r^4 + 4r^3 + 3r^2 + 2r + 3s^4 + 3s^2 + 6s + 18r^2s^2 + 12rs^2 + 6rs) + (1/5)(r^5 - r) + 2r^3s^2 + rs^4 \\ \dim N_{5,1} = (1/3)(s^3 + 2s + 3rs(1 + r + r^2 + s^2)) + (1/5)(s^5 - s) + 2r^2s^3 + r^4s$$

ve

$$\dim N_5 = (1/12)(3r^4 + 4r^3 + 3r^2 + 2r + 3s^4 + 3s^2 + 6s + 18r^2s^2 + 12rs^2 + 6rs) + (1/5)(r^5 - r) \\ + 2r^3s^2 + rs^4 + (1/3)[s^3 + 2s + 3rs(1 + r + r^2 + s^2)] + (1/5)(s^5 - s) + 2r^2s^3 + r^4s$$

olur.

$$\textbf{İspat} : \quad \dim N_5 = \sum_{i=1, \dots, 5} \dim L_i / L_{i+1}, \quad \dim N_{5,0} = \sum_{i=1, \dots, 5} \dim N_{i,0},$$

$\dim N_{5,1} = \sum_{i=1, \dots, 5} \dim N_{i,1}$ alındığında Teorem 2.2.1, 2.2.2., 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6 ve

2.3.1, den yukarıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.3.3 : L , $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde bir serbest Lie süpercebiri $|Y|=r$, $|Z|=s$ olsun. Bu durumda

$$\dim L_{10}/L_{11}=(1/10)[(r+s)-(r+s)^5-(r+s)^2+(r+s)]+(1/5)(s^5-s)+2r^2s_3+r^4s \text{ olur.}$$

İspat : $i=10$ ve çift tamsayısı için $\dim L_i/L_{i+1}=|M_i|=|H_i|+|M_{2,1}|$ ve Teorem 2.3.1 den yukarıdaki sonuç elde edilir.

2.4 $Y=\emptyset$, $|Z|=s>1$ Özel Durumu

Şimdi de $L=L_0 \oplus L_1$, $X=Y \cup Z$ kümesi üzerinde serbest Lie süpercebiri , $Y=\emptyset$, $|Z|=s>1$ ve $Z \subset L_1$ özel durumunda $\dim L_n/L_{n+1}$ inceleyeceğiz.

Önce $\dim L_1/L_2$ hesaplayalım. $n=1$ için $M_1=M_{1,0} \cup M_{1,1}$ dir. $M_{1,0}=Y=\emptyset$ olduğundan $M_1=M_{1,1}=Z$ elde edilir. Buradan $\dim L_1/L_2=|Z|=|H_1^Z|=s$ olur.

$n=2$ için $M_2=M_{2,0} \cup M_{2,1}$ ve $M_{2,1}=YZ=\emptyset$ ($Y=\emptyset$ olduğundan), $M_{2,0}=(H^Y)_2 \cup (H^Z)_2 \cup \tilde{Z}$ (Teorem 2.2.1 den) olur. Ancak $(H^Y)_2=\emptyset$ olduğundan $M_{2,0}=(H^Z)_2 \cup \tilde{Z}$ elde edilir. Böylece $|\tilde{Z}|=|Z|=|M_{1,1}|=|H_1^Z|=|H_{2/2}^Z|$ ($\tilde{Z}$ nin tanımından)

ve buradan $|M_2|=|M_{2,0}|=|H_2^Z|+|H_1^Z|=s$ olur. M_2 nin elemanlarının hepsi çifttir.

$n=3$ için $M_3=M_{3,0} \cup M_{3,1}$ ve $M_{3,0}=(H^Y)_3 \cup (YZ)$, $M_{3,1}=(H^Z)_3 \cup Z(H^Y)_2 \cup (Y \odot YZ)$ (Teorem 2.2.3 den) olur. Ancak $Y=\emptyset$ olduğundan $M_{3,0}=(H^Y)_3 \cup (YZ)=\emptyset$, $Z(H^Y)_2=\emptyset$, $(Y \odot YZ)=\emptyset$ ve buradan $M_{3,1}=(H^Z)_3$ olur. Böylece , $M_3=M_{3,1}$ ve $\dim L_3/L_4=|H_3^Z|=(1/3)(s^3-s)$ elde edilir. M_3 ün elemanlarının hepsi tektir.

$n=4$ için ise $M_4=M_{4,0} \cup M_{4,1}$ ve

$$M_{4,1}=(H^Y)_2 YZ \cup \left((YZ) \circ (H^Z)_2 \right) \cup Z(H^Y)_3 \cup (Z \odot Z(YZ)) \cup (Y \odot (Y \odot (YZ)))$$

ve

$$M_{4,0}=(H^Y)_4 \cup (H^Z)^4 \cup (H^Y)_2 (H^Z)_2 \cup \tilde{YZ} \cup Z(Y \odot YZ) \cup Z \odot Z(H^Y)_2 \cup \hat{YZ}$$

(Teorem 2.2.5 ten) olur. $Y=\emptyset$ olduğundan $M_{4,1}=\emptyset$, $(H^Y)_4=\emptyset$, $(H^Y)_2(H^Z)_2=\emptyset$, $\widetilde{YZ}=\emptyset$, $Z(Y\odot YZ)=\emptyset$, $Z\odot Z(H^Y)_2=\emptyset$ ve $\widehat{YZ}=\emptyset$ olduğundan $M_{4,0}=(H^Z)_4$ elde edilir. Buradan ise $M_4=M_{4,0}$ ve $\dim L_4/L_5 = |(H^Z)_4| = (1/4)(s^4-s^2)$ olur. M_4 ün elemanlarının hepsi çifttir.

Böylece, $Y=\emptyset$ ve serbest Lie süpercebiri tanımından, n bir tek tamsayı olduğu zaman $M_{n,0}=\emptyset$, n bir çift tamsayı olduğu zaman ise $M_{n,1}=\emptyset$ ve $n/2$ bir çift tamsayı olduğu zaman da $M_{n/2,1}=\emptyset$ sonucu elde edilir.

L , $Z\subset L_1^-$ üzerinde serbest Lie süpercebiri ve $|Z|>1$ olsun. O zaman, yukarıdaki gözlemlerden

- i) $n=1$ için $\dim L_1/L_2 = |(H^Z)_1| = |Z|$
- ii) $n=2$ için $\dim L_2/L_3 = |(H^Z)_2| + |(H^Z)_1|$
- iii) $n=3$ için $\dim L_3/L_4 = |(H^Z)_3|$
- iv) $n=4$ için $\dim L_4/L_5 = |(H^Z)_4|$

olduğu açıktır.

Teorem 2.4.1 : L , $Z\subset L_1^-$ üzerinde serbest Lie süpercebiri ve $|Z|>1$ olsun. O zaman

- i) n bir tek tamsayı ise $\dim L_n/L_{n+1} = |(H^Z)_n|$
- ii) $n=2,6,10,14,\dots$ ise, $\dim L_n/L_{n+1} = |(H^Z)_n| + |(H^Z)_{n/2}|$
- iii) $n=4,8,12,16,\dots$ ise, $\dim L_n/L_{n+1} = |(H^Z)_n|$ dir.

İspat: İspat iki durumda ele alınacaktır.

1.Durum: n bir çift tamsayı olsun.

a) $n/2$ bir tek tamsayı olsun.

Bu durumda M_n bazının elemanları çifttir. Aynı zamanda $M_{n/2} \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla

$$M_n = (H^Z)_n \cup \{a^2 : a \in M_{n/2,1}\} \quad \text{ve} \quad \left| \{a^2 : a \in M_{n/2,1}\} \right| = |M_{n/2,1}| \quad \text{dir. Yani } \{a^2 : a \in$$

$$M_{n/2,1}\} = \tilde{M}_{n/2,1} = (H^Z)_{n/2} \quad \text{dir. Buradan ,}$$

$$\dim L_n / L_{n+1} = |(H^Z)_n| + |(H^Z)_{n/2}|$$

elde edilir. Böylece (ii) deki iddia doğrulanır.

b) $n/2$ bir çift tamsayı olsun.

Yani n ve $n/2$ bir çift tamsayı olsun. Bu durumda da M_n bazının elemanları çifttir. Ancak , $M_{n/2} = \emptyset$ dir ve M_n bazında $\tilde{M}_{n/2,1}$ kümesinin elemanları yoktur.

Buradan $M_n = M_{n,0}$ ve

$$\dim L_n / L_{n+1} = |(H^Z)_n|$$

elde edilir. Böylece (iii) deki iddia doğrulanır.

2.Durum : n bir tek tamsayı olsun. Bu ise M_n bazının elemanlarının tek olduğunu gösterir. Buradan $M_n = M_{n,1}$ ve

$$\dim L_n / L_{n+1} = |(H^Z)_n|$$

elde edilir. Böylece (i) deki iddia doğrulanır.

3. SERBEST NİLPOTENT LİE SÜPERCEBİRLERİNİN İDEALLERİ

Bu bölümde bir serbest nilpotent Lie süpercebiri, serbest nilpotent altcebi olan idealleri incelenmiştir.

Bir serbest Lie cebirinin her alt cebirinin de serbest olduğu (Širšov, 1953) ve (Ward, 1972) te ispatlanmıştır. Benzer şekilde bir serbest Lie süpercebiri de her alt cebirinin de serbest olduğu (Scheunert, 1979) da ispatlanmıştır.

Bir serbest nilpotent Lie cebirinin her abelyen ideali serbest abelyendir. Bununla birlikte abelyen olmayan bir idealin altcebi olarak serbest nilpotent olması gerekli değildir. Aşağıdaki teorem Boral (1985) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1 : Bir serbest nilpotent Lie cebirinin alt cebiri olarak serbest nilpotent olan idealleri cebirin kendisidir veya abelyendir.

Tanım 3.1 : L , $\underline{k}$ cismi üzerinde bir Lie süpercebiri olsun. $a, b \in L$ olmak üzere Lie çarpımı

$$\underbrace{a(a(a \dots (ab) \dots))}_{r\text{-kez}} = a^r \cdot b$$

ile ifade edilir.

Tanım 3.2 : $L = F/F_{n+1}$ bir $\underline{k}$ cismi üzerinde n -inci dereceden serbest nilpotent bir Lie süpercebiri, M de L nin bir süper Hall bazı ve $0 \neq \alpha_i \in \underline{k}$, $m_i \in M$ olmak üzere

$$b = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r$$

olacak şekilde bir $b \in L = F/F_{n+1}$ elemanı olsun. $\{m_1, \dots, m_r\}$ kümesinde M deki sıralamaya göre m_1 in bir minimal eleman olduğunu kabul edelim. Bu durumda m_1 e b nin ön terimi denir ve $\text{ld}(b)$ ile gösterilir.

Serbest nilpotent Lie süpercebirleri için ise aşağıdaki teoremi ispatladık.

Teorem 3.2 : L , bir serbest nilpotent Lie süpercebiri ve S de L nin altcebi olarak serbest nilpotent olan bir ideali olsun. Bu durumda S abelyendir ya da L ye

eşittir.

İspat : F , $X = Y \cup Z$ kümesi üzerinde serbest Lie süpercebiri ve $L=F/F_{n+1}$ olsun. Eğer $Z=\emptyset$ ise F , Y üzerinde serbest Lie cebiridir.

$Z \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Eğer L abelyen ise ispatlanacak bir şey yoktur. L nin abelyen olmadığını varsayalım. $Y = \emptyset$ ve $|Z|=1$ ise L , 2 boyutludur. $Z=\{z\}$ olmak üzere $\{z, z^2\}$ kümesi L için bir bazdır. $L_3 = \{0\}$ ve onun özaltcebirleri 1-boyutlu ve abelyendir. L abelyen olmayan 2. dereceden serbest nilpotent bir Lie süpercebiri.

Şimdi , $Z \neq \emptyset$ ve $|X|>1$ olduğunu varsayıyoruz. H , H^Y , H^Z sırasıyla X , Y ve Z üzerindeki Hall bazları olsunlar. S , L nin abelyen olmayan bir öz ideali ve $1 < r \leq n$ olmak üzere , S altcebir olarak r -inci dereceden serbest nilpotent olsun. Bunu iki ayrı durumda inceleyeceğiz.

1.Durum : $r < n$ olsun.

q , $S \subseteq L_q$ ve $S \not\subseteq L_{q+1}$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. S için bir V doğuray kümesi seçelim ve V kümesi ön terim uzunluğu q olan bir v elemanını içerecek şekilde olsun. V , modulo L_2 de lineer bağımsız olan iki eleman içeriyor ise o zaman (Shtern, 1986) S_n nin L de sıfır olmayan bir elemanını elde edebiliriz. Bu ise $r > n$ kabulümüz ile çelişir. V nin , modulo L_2 de sıfır olmayan ve $V - \{v\} \subseteq L_2$ olan yalnız bir v elemanına sahip olduğunu varsayalım. v nin ön teriminin bir skaler katına eşit olmayacak şekilde $x \in X$ elemanını seçelim ($x \in Z$ veya $x \notin Z$ olmak üzere). Buradan,

$$x^{n-1}.v \in S \cup L_n \text{ ancak } x^{n-1}.v \notin S_2$$

olur. Böylece,

$$v(x^{n-1}.v) \in S_2, v(x^{n-1}.v) \notin S_3$$

tür. Ancak , $v(x^{n-1}.v) \in L_{n+1} = \{0\}$ ve buradan ise $v(x^{n-1}.v)$, L de sıfır olur. Bu ise $r > 1$ olması durumu ile çelişir.

Şimdi $q > 1$ olduğunu kabul edelim. Herhangi $x \in X = Y \cup Z$ için $x.v \in S$ ve

xv nin ön terim uzunluğu $q+1$ dir. $S_2 \subseteq L_{2q}$ olduğundan $xv \notin S_2$ dir. Bu durumda ön terim uzunluğu $qr+(q+1)$ olan $t = v^r(xv)$ elemanı S_{r+1} e aittir. Yani ,

$$t = v^r(xv) \in S_{r+1}$$

dir. $S_{r+1} \subseteq L_{n+1} = \{0\}$ dir ve bu da

$$qr+(q+1) \geq n+1$$

olmasını sağlar. Böylece ,

$$(r+1)q \geq n \quad (1)$$

elde edilir.

Şimdi $|X| \geq 2$ olduğundan, $x' \neq x$ olmak üzere bir $x' \in X$ elemanını seçebiliriz (x' , Y yada Z ye ait olabilir.) ve

$$f = x^{q-2} \cdot (xv)$$

$$g = x'^{q-2} \cdot (xv)$$

biçiminde olan, $f, g \in S$ elemanlarını alırız. Bu elemanlarının her ikisinin de ön terim uzunluğu

$$(q-2)+(q+1)=2q-1$$

dir. $S_2 \subseteq L_{2q}$ olduğundan f ve $g \notin S_2$ alırız. Bu durumda ön terim uzunluğu

$$r(2q-1) < n+1$$

olan eleman, $w = f^{r-1} \cdot g$ dir. Burada

$$r(2q-1)=(r+1)q+(rq-q-r)<n+1$$

alabiliriz. $(r+1)q+(rq-q-r)<n+1$ ile (1) eşitsizliğini karşılaştırdığımızda

$$rq-q-r\leq 0$$

elde ederiz. Böylece,

$$(r-1)q\leq r$$

olur . $q>1$ olduğundan , $S\subseteq L_2$, $S\subseteq L_3$ ve $S_3\subseteq L_{n+1}$ olması durumunda , q ve r üzerindeki sınırlamalarla yukarıdaki eşitsizliğin tek çözümü $q=2$ ve $r=2$ dir. Bu durumda V , ön terimi ab , $a, b\in X$ olan

$$v=\beta(ab)+\dots \quad \text{ve } 0\neq\beta\in\mathbb{K} \text{ (k cisim)}$$

elemanını içerir. $m, p\in S$ ve $m, p\notin S_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} m &= av = \beta a(ab) + \dots \\ p &= a(av) = \beta a(a(ab)) + \dots \end{aligned}$$

olsun. Böylece , mp nin ön terim uzunluğu $=7<n+1$ ve $mp\notin S_3$ olur. Fakat $v(vm)\in S_3$ tür ve $v(vm)$ nin ön terim uzunluğu $=7\geq n+1$ dir. Buradan

$$7<n+1\leq 7$$

elde edilir ve bu ise bir çelişkidir.

2.Durum : $r=n$ olsun.

$V=\{v_1, v_2, \dots\}$ kümesi , S için bir doğuray kümesi olsun. $r=n$ olduğundan V , modulo L_2 de lineer bağımsızdır. (Shtern, 1986) $x\in L-S$, $x\notin L_2$ ve T ; x ve S tarafından

doğrulan L nin bir altceberi , M^v kümesi de , V üzerinde inşa edilen , S için bir baz olsun. $M^v \cup \{x\}$ kümesi L de lineer bağımsızdır ,aksi halde $x \notin S$ çelişkisini elde ederiz. Bundan başka , T nin herhangi bir elemanı $M^v \cup \{x\}$ kümesindeki elemanların lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ise $M^v \cup \{x\}$ in , T için bir baz olduğunu gösterir ve $T, V \cup \{x\}$ tarafından doğrulur. $V \cup \{x\}$ kümesinin modulo L_2 de lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda , $\alpha_i \in \underline{k}$ ve $f \in L_2$, $a = \sum_i \alpha_i v_i \in L_2$ olmak üzere

$$x = a + f \quad (2)$$

dir. (2) eşitliğini $(n-1)$ kez x ile çarparsak

$$x^{n-1}.a = -x^{n-1}.f \in L_{n+1}$$

elde ederiz. Fakat $x^{n-1}.a \notin L_{n+1}$; L nin sıfır olmayan bir elemanıdır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece, $\{x\} \cup V$ kümesi modulo L_2 de lineer bağımsızdır. Dolayısıyla bu küme T yi serbest şekilde doğurur. $x < v_1 < v_2 < \dots$, $\{x\} \cup V$ üzerinde bir sıralama, M' , $M' \supseteq M^v$ olacak şekilde $\{x\} \cup V$ üzerinde inşa edilen bir baz olsun. Bu durumda M' nün xv_1 elemanı S ye aittir ve $S, r=n$. dereceden serbest nilpotent olduğundan $xv_1 \in S_2$ dir. Böylece , $\gamma_{ij} \in \underline{k}$ (hepsi sıfır olmayan) , $f \in S_3$ ve

$$xv_1 = \sum_{i < j} \gamma_{ij} v_i v_j + f \quad (3)$$

olur. Ama (3) eşitliği M' nün elemanlarının modulo T_3 de lineer bağımsız olması ile çelişir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

- BORAL, M., 1985. On ideal of free nilpotent Lie algebras, Proc.Amer.Math.Soc., 94(1):23-28.
- , 1995. On finitely generated free nilpotent Lie superalgebras of class <5 , Algebras, Groups and Geometries, 12(3):247-254
- BOURBAKİ, N., 1972. Groups et algèbres de Lie, Chapitre II, Hermann, Paris.
- , 1975. Lie groups and Lie algebras, Part2, Addison-Wesley.
- COHN, P.M., 1969. Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc., 14:618-632.
- GRUNBERG, K.W., 1957. Residual properties of infinite soluble, Proc. London Math. Soc., 7:23-62.
- SCHEUNERT, M., 1979. The theory of the superalgebras, Springer-Verlag, Berlin.
- SHTERN, A.S., 1986. Free Lie superalgebras, Siberian Math. J. 27(1):136-140.
- ŠIRŠOV, A.I., 1953. On subalgebras of free Lie algebras, Math. Sbornik (Russian), 33:441-453.
- SMEL'KIN, A.L., 1963. Free polynilpotent groups, Three parts, I. Soviet Math. Dokl. (Engl. Trans.), 4:950-953.
- WARD, M., 1964. Basic commutators, Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser A, 264:343-412.
- , 1973. The third term of the lower central series of a free group as a subgroup at the second, J. Austr. Math Soc., 16:18-23.
- WITT, E., 1956. Die unterringe der freien lieschen ringe, Math. Zeitschrift, 64:195-216

ÖZGEÇMİŞ

29.9.1961 tarihinde Yozgat ili, Sarıkaya ilçesinde doğdum. İlk ve ortaokul öğrenimimi burada, orta öğrenimimin geri kalan kısmını Yozgat'ta tamamladım. 1982-1983 akademik yılında Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünden mezun oldum. 1987 yılında Ç.Ü. Adana Eğitim Yüksekokulu'nda göreve başladım. 1992 yılında Ç.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde Yüksek Lisans programını tamamladım. Aynı yıl, aynı bölümde doktora programına başladım. Halen, Ç.Ü. Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Sınıf Öğretmenliği Anabilim dalında öğretim görevlisi olarak görevime devam etmekteyim.

