

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIRLI VE SINIRSIZ FİYAT STOKASTİK SÜREÇLERİ İÇİN VARYANSIN
DÜŞÜRÜLMESİYLE DİNAMİK OPSİYON FİYATLAMASI**

DOKTORA TEZİ

Semih YÖN

Endüstri Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Endüstri Mühendisliği Programı

EKİM 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIRLI VE SINIRSIZ FİYAT STOKASTİK SÜREÇLERİ İÇİN VARYANSIN
DÜŞÜRÜLMESİYLE DİNAMİK OPSİYON FİYATLAMASI**

DOKTORA TEZİ

**Semih YÖN
(507072107)**

Endüstri Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Endüstri Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. C. Erhan BOZDAĞ

EKİM 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 507072107 numaralı Doktora Öğrencisi **Semih YÖN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**SINIRLI VE SINIRSIZ FİYAT STOKASTİK SÜREÇLERİ İÇİN VARYANSIN DÜŞÜRÜLMESİYLE DİNAMİK OPSİYON FİYATLAMASI**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yard. Doç. Dr. Cafer Erhan BOZDAĞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Cengiz KAHRAMAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ziya ULUKAN
Galatasaray Üniversitesi

Doç. Dr. Nihan ÇETİN DEMİREL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Sezi ÇEVİK ONAR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **11 Eylül 2015**
Savunma Tarihi : **05 Ekim 2015**

Aileme...

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana her konuda katkı sağlayan ve beni her zaman yüreklendiren tez danışmanım Yard.Doç.Dr. C. Erhan BOZDAĞ'a sonsuz teşekkür ederim.

Önerileriyle tezin kolaylaşmasını sağlayan Prof. Dr. Cengiz KAHRAMAN ve Prof. Dr. Ziya ULUKAN'a çok teşekkür ederim. Doktora süresi boyunca sağlamış oldukları destek dolayısıyla TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Bu tezi hazırlama sürecinde teze doğrudan ve dolaylı olarak katkıda bulunan ve beni destekleyen diğer hocalarım ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Tezin teslim ve dağıtımını sağlayan dostum Doç. Dr. Emre ÇEVİKCAN'a teşekkür ederim. Bu tezin bitmesini sabırla bekleyen en büyük destekçim Ayşegül EĞİLMEZ ile üstümde çok büyük emek sahibi olan annem Selmin YÖN ve babam Hasan YÖN'e sonsuz teşekkür ederim.

Eylül 2015

Semih YÖN
Endüstri Yük. Müh.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xxi
ÖZET.....	xxiii
SUMMARY	xxv
1. GİRİŞ	1
2. FİNANSAL PİYASALAR VE OPSİYONLAR.....	7
2.1 Finansal Piyasalardaki Fiyat Dinamikleri	9
2.2 Finansal Piyasalarda Getiri.....	15
2.3 Finansal Veri İncelemesi.....	17
2.4 Finansal Opsiyonlar.....	23
2.4.1 Opsiyon piyasaları.....	24
2.4.2 Opsiyon sözleşmeleri	27
2.4.3 Opsiyon çeşitleri	31
2.4.3.1 Standart opsiyonlar (Vanilla options)	33
2.4.3.2 Egzotik opsiyonlar (Exotic options)	34
2.4.4 Opsiyonların geometrisi	35
2.4.5 Alım-satım bağıntısı.....	47
2.4.6 Opsiyonların kullanım alanları.....	48
3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	51
4. OPSİYON FİYATLAMASI	61
4.1 Gerekli Finansal Matematik	62
4.1.1 Etkin piyasa hipotezi	62
4.1.2 Brown hareketi	64
4.1.3 Stokastik diferansiyel denklemler	69
4.1.4 Opsiyon fiyatının beklenen değeri	71
4.1.4.1 İntegral hesabı ve Monte Carlo integrali.....	73
4.1.4.2 Stokastik integraller	74
4.1.4.3 İtô integrali	75
4.1.5 Lognormal proses.....	81
4.2 Opsiyon Fiyatlama Yöntemleri	82
4.2.1 Black-Scholes modeli	82
4.2.1.1. Black-Scholes formülü.....	85
4.2.1.2. Black-Scholes modelinin avantaj ve dezavantajları.....	86
4.2.1.3. Black-Scholes sonuçları	88
4.2.2 Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile opsiyon fiyatının hesaplanması.....	90
4.2.3 Binom yöntemi ile opsiyon fiyatının hesaplanması	94

4.3 Varyans Azaltma Teknikleri.....	96
4.3.1 Önem örnekleme (importance sampling)	97
4.3.1.1. Hedef dağılımın özellikleri.....	101
4.3.2 Zıt rassal sayılar (antithetic varieties)	102
5. SINIRLI VE SINIRSIZ PİYASALARDA UÇ BENZETİMİ İLE DÜŞÜK	
VARYANSLI FİYAT MODELİ.....	105
5.1 Sınırsız Fiyat Stokastik Süreçleri için Opsiyon Fiyatlaması	107
5.1.1. Önem örnekleme uygulaması	107
5.1.2. Zıt rassal sayılar varyans azaltma uygulaması	129
5.1.3. Önem örnekleme ve zıt rassal sayıların birlikte uygulanması	134
5.2 Sınırlı Fiyat Stokastik Süreçleri için Opsiyon Fiyatlaması	139
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	149
KAYNAKLAR.....	153
EKLER.....	157
ÖZGEÇMİŞ.....	187

KISALTMALAR

BİST	: Borsa İstanbul
BİST-100	: Borsa İstanbul Endeks-100
BİST A.Ş.	: Borsa İstanbul Anonim Şirketi
DİBS	: Devlet İç Borçlanma Senedi
ECB	: Avrupa Merkez Bankası (European Central Bank)
Enb	: En büyük değer
FED	: Amerikan Merkez Bankası (Federal Reserve)
HHHHH	: Borsa'da işlem gören bir hisse senedi kısaltması kabul edildi
İMKB	: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
KAP	: Kamuyu Aydınlatma Platformu
LG	: Logaritmik Getiri
log	: Doğal Logaritma
SERPAM	: Sermaye Piyasaları Araştırma ve Uygulama Merkezi
SPK	: Sermaye Piyasası Kurulu
SPK	: Sermaye Piyasası Kurumu
SV	: Stokastik Volatilité
TSPB	: Türkiye Sermaye Piyasası Birliği
WFE	: Dünya Bankası (World Federation of Exchanges)

SEMBOLLER

μ	: Dayanak varlık yıllık getirisi
σ	: Dayanak varlık fiyatına ait yıllık oynaklık
δt	: Zaman adımı
Ω	: Tüm çözüm uzayı
$\mathbb{Q}^+$	: Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif gerçel sayılar kümesi
γ	: Brown hareketi başlangıç noktası
K	: Opsiyonun kullanım fiyatı
S	: Dayanak varlık fiyatı
S_t	: Bir t zamanındaki dayanak varlık fiyatı
$\tilde{S}_p$	: Bir p periyoduna ait dayanak varlık fiyatı ortalaması
u_t	: Rassal değişken
T	: Opsiyonun vade sonu
ϑ	: Rassal değişken

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 :	Uluslararası Borsaların 2014 yılı işlem hacimleri (milyar dolar).	25
Çizelge 2.2 :	Tezgahüstü türev ürünlerin yıllık işlem miktarları (milyar dolar).	26
Çizelge 2.3 :	Parametre listesi.	27
Çizelge 2.4 :	Opsiyon değeri (moneyness).....	33
Çizelge 3.1 :	Öncü makaleler ve getirdikleri yenilikler.....	52
Çizelge 4.1 :	Opsiyon fiyatı için seçilen parametre değerleri.....	88
Çizelge 4.2 :	Alım opsiyonu için düşük oynaklık Black-Scholes sonuçları.....	89
Çizelge 4.3 :	Alım opsiyonu için yüksek oynaklık Black-Scholes sonuçları.....	89
Çizelge 4.4 :	Satım opsiyonu için düşük oynaklık Black-Scholes sonuçları.....	90
Çizelge 4.5 :	Satım opsiyonu için yüksek oynaklık Black-Scholes sonuçları.....	90
Çizelge 4.6 :	Alım opsiyonu için düşük oynaklık Monte Carlo sonuçları.	92
Çizelge 4.7 :	Alım opsiyonu için yüksek oynaklık Monte Carlo sonuçları.....	92
Çizelge 4.8 :	Satım opsiyonu için düşük oynaklık Monte Carlo sonuçları.	93
Çizelge 4.9 :	Satım opsiyonu için yüksek oynaklık Monte Carlo sonuçları.....	93
Çizelge 4.8 :	Alım opsiyonu için düşük oynaklık Binom sonuçları.....	95
Çizelge 4.9 :	Satım opsiyonu için düşük oynaklık Binom sonuçları.....	93
Çizelge 4.12 :	$q(x)$ fonksiyonu için Monte Carlo ve Önem Örnekleme sonuçları..	100
Çizelge 5.1 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örnekleme yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	109
Çizelge 5.2 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	109
Çizelge 5.3 :	Borsa İstanbul'da uygulanan fiyat adımı kuralı.....	110
Çizelge 5.4 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve orta vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örnekleme yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	115
Çizelge 5.5 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve orta vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	115
Çizelge 5.6 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve kısa vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örnekleme yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	116
Çizelge 5.7 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve kısa vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	116

Çizelge 5.8 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	119
Çizelge 5.9 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	119
Çizelge 5.10 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve orta vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	120
Çizelge 5.11 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve orta vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	120
Çizelge 5.12 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve kısa vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	121
Çizelge 5.13 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve kısa vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	121
Çizelge 5.14 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	123
Çizelge 5.15 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	123
Çizelge 5.16 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve orta vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	124
Çizelge 5.17 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve orta vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	124
Çizelge 5.18 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve kısa vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	125
Çizelge 5.19 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve kısa vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	125
Çizelge 5.20 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	126
Çizelge 5.21 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	126

Çizelge 5.22 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve orta vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	127
Çizelge 5.23 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve orta vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	127
Çizelge 5.24 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve kısa vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	128
Çizelge 5.25 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve kısa vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	128
Çizelge 5.26 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	130
Çizelge 5.27 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	130
Çizelge 5.28 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	131
Çizelge 5.29 :	Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	131
Çizelge 5.30 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	132
Çizelge 5.31 :	Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	132
Çizelge 5.32 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	133
Çizelge 5.33 :	Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	133
Çizelge 5.34 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi -Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	135
Çizelge 5.35 :	Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	135

- Çizelge 5.36 :** Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir..... 136
- Çizelge 5.37 :** Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 136
- Çizelge 5.38 :** Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir..... 137
- Çizelge 5.39 :** Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 137
- Çizelge 5.40 :** Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir..... 138
- Çizelge 5.41 :** Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 138
- Çizelge 5.42 :** Sınırlı fiyat süreci alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve sınırlı fiyat süreci tahmin aralıkları verilmiştir. 143
- Çizelge 5.43 :** Sınırlı fiyat süreci alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 143
- Çizelge 5.44 :** Sınırlı fiyat süreci Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir. 144
- Çizelge 5.45 :** Sınırlı fiyat süreci Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 144
- Çizelge 5.46 :** Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir..... 145
- Çizelge 5.47 :** Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır. 145

Çizelge 5.48 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ yıl sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	147
Çizelge 5.49 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ yıl ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	147
Çizelge D.1 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	175
Çizelge D.2 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	175
Çizelge D.3 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	176
Çizelge D.4 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	176
Çizelge D.5 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	177
Çizelge D.6 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.....	177
Çizelge D.7 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	178
Çizelge D.8 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	178
Çizelge D.9 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	179
Çizelge D.10 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	179
Çizelge D.11 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	180
Çizelge D.12 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 3$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir.	

Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	180
Çizelge D.13 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	181
Çizelge D.14 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	181
Çizelge D.15 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık $\sigma = 0.8$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	182
Çizelge D.16 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ ve uzun vadede $T = 1$ ay sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	182
Çizelge D.17 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	183
Çizelge D.18 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 3$ ay ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	183
Çizelge D.19 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 3$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	184
Çizelge D.20 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 3$ ay ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	184
Çizelge D.21 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	185
Çizelge D.22 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ ay ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	185
Çizelge D.23 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık $\sigma = 0.2$ ve uzun vade $T = 1$ ay sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.	186
Çizelge D.24 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ ve uzun vadede $T = 1$ ay ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.	186

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 :	N adet aralık için $t \in 0, N$ zamanlarındaki logaritmik getiriler.	18
Şekil 2.2 :	BİST-100 Endeksi 05.2010-04.2015 tarihleri arası günlük puan grafiği.	19
Şekil 2.3 :	BİST-100 Endeksi 05.2010-04.2015 tarihleri arası logaritmik getiri grafiği.	20
Şekil 2.4 :	BİST-100 Endeksi empirik logaritmik getiri dağılımı (histogram grafik) ve parameterleri uyarlanmış normal dağılım kıyaslaması.	21
Şekil 2.5 :	BİST-100 Endeksi için küçükten büyüğe sıralanmış empirik logaritmik getiri ve normal dağılımdan alınmış logartimik getirilerin kıyaslama.	22
Şekil 2.6 :	Alım opsiyonu ödünleşme fonksiyonu ve ödenti – S grafiği.	36
Şekil 2.7 :	Satım opsiyonu ödünleşme fonksiyonu ve ödenti –S grafiği.	36
Şekil 2.8 :	Alım opsiyonu fiyatının volatilité (Vol) ve vade süresine (T) bağılı değişimi, ($S = K = 50$) ve ($r = \%10$) olarak alınmıştır.	39
Şekil 2.9 :	Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat (S) ve oynaklığa (Vol) bağılı değişimi ($K = 50$), ($T = 1$) ve ($r = \%10$) olarak alınmıştır.	40
Şekil 2.10 :	Alım opsiyonu fiyatının faiz oranı r ve vade süresine T bağılı değişimi $S = K = 50$ ve $Vol = \%20$ olarak alınmıştır.	41
Şekil 2.11 :	Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat S ve faiz oranına r bağılı değişimi $K = 50$, $T = 1$ ve $Vol = \%20$ olarak alınmıştır.	42
Şekil 2.12 :	Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat S ve vade süresine T bağılı değişimi $K = 50$, $r = \%10$ ve $Vol = \%20$ olarak alınmıştır.	43
Şekil 2.13 :	Alım opsiyonu fiyatının faiz oranı r ve volatilitéye Vol bağılı değişimi $K = S = 50$, ve $T = 1$ olarak alınmıştır.	44
Şekil 2.14 :	Satım opsiyonu fiyatının faiz oranı r ve spot fiyata S bağılı değişimi $K = 50$, ve $T = 1$ ve $Vol = \%20$ için verilmiştir.	46
Şekil 3.1 :	Yıllara göre opsiyon fiyatlaması için yayın adetleri.	51
Şekil 4.1 :	Standart Wiener süreci gösterimi.	66
Şekil 4.2 :	Çok boyutlu bir Wiener süreci gösterimi.	66
Şekil 4.3 :	Brown hareketi için dört örnek rassal yürüyüş grafikleri.	68
Şekil 4.4 :	$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki integrali.	73
Şekil 4.5 :	Binom yöntemi uygulama şeması.	94
Şekil 5.1 :	360 günlük sınırsız fiyat stokastik süreç grafiği.	106
Şekil 5.2 :	360 günlük $\%10$ marj dahilinde sınırlı fiyat stokastik süreç grafiği.	106
Şekil 5.3 :	Monte Carlo yöntemi spot fiyata bağılı varyasyon katsayısı grafiği $T = 1$ yıl.	111
Şekil 5.4 :	Önem Örneklemesi yöntemi spot fiyata bağılı varyasyon katsayısı grafiği $T = 1$ yıl.	111
Şekil 5.5 :	Varyans Azalma Faktörü grafiği $\sigma = 0.2$ ve $T = 1$ yıl.	112
Şekil 5.6 :	Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü grafiği $\sigma = 0.2$ ve $T = 1$ yıl.	113
Şekil 5.7 :	Düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ alım opsiyonu grafiği.	140

Şekil 5.8 : Düşük oynaklıkta $\sigma = 0.2$ satım opsiyonu grafiği.	140
Şekil 5.9 : Yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ alım opsiyonu grafiği.	141
Şekil 5.10 : Yüksek oynaklıkta $\sigma = 0.8$ satım opsiyonu grafiği.	142

SINIRLI VE SINIRSIZ FİYAT STOKASTİK SÜREÇLERİ İÇİN VARYANSIN DÜŞÜRÜLMESİYLE DİNAMİK OPSİYON FİYATLAMASI

ÖZET

Her alanda yaşanan değişim ve gelişim süreci finansal piyasaları da kapsamaktadır. Finansal piyasaların yeniliğe en açık ürünü olan opsiyonlar piyasanın büyümesine ve derinlik kazanmasına yardımcı olurken yatırımcısına da piyasa riskinden korunma olanağı tanımaktadır. Piyasa riski alınan yatırım kararına bağlı olarak yatırımın değer yitirmesine neden olabilecek fiyat hareketlerini kapsar. Opsiyonlar varlık fiyatlarının önceden sabitlenmesi yoluyla piyasa riskinden korunma sağlamaktadır. Aynı zamanda opsiyonlar, yatırımcı beklentisinin gerçekleşmesi halinde yatırımcısına diğer ürünlerden daha yüksek getiri elde etme şansı yaratmaktadır.

Birden çok amaca yönelik olarak opsiyon işlemleri yapılması opsiyon piyasalarında çok hızlı mesafe katedilmesini sağlamıştır. Dünya genelinde opsiyon piyasaları büyük işlem hacimlerine ulaşarak global hisse senedi ve döviz piyasalarının işlem hacimlerini geride bırakmıştır.

Opsiyon sözleşmesi iki taraf arasında yapılan ve gelecekte bir kıymetin alım ya da satımını öngören kontrattır. Bu sözleşme kapsamında opsiyonu satın alan taraf opsiyonu yazan tarafa opsiyon fiyatı (prim) kadar bir bedel öder. Sözleşme tarihinde opsiyon primi opsiyon yazıcısı için bir kazanç, yatırımcı içinse bir maliyettir. İleri tarihte piyasa koşullarının yatırımcının beklediği yönde gelişmesi halinde, yatırımcı elinde bulunan opsiyonu kullanarak bu işlemde bir miktar getiri (ödenti) elde eder. Vade sonuna kadar opsiyon kullanılmaz ise sadece opsiyon yazıcısı getiri elde etmiş olur. Opsiyon sözleşmesindeki iki tarafın da farklı zamanlarda olmak üzere getiri elde edebilecek olması bakımından opsiyon primi ve olası ödenti, piyasa seyri ile ilgili tüm olasılıkların hesaplamalara yansıtıldığı bir düzlemde ele alınmalı ve adil opsiyon fiyatının belirlenmesi sağlanmalıdır. Adil fiyat, piyasada arbitraj imkanının sürekli bulunmadığı kabulüne dayanılarak matematiksel yöntemlerle risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde hesaplanmaktadır. Opsiyonun piyasa fiyatı ile hesaplanan adil fiyatı zaman zaman birbirinden farklı olabilmektedir. Bu şekilde opsiyonun yüksek ya da düşük fiyatlanmış olduğu anlaşılmakta ve yatırım kararları bu kıyaslamaya göre verilmektedir.

Opsiyon fiyatlaması oldukça yoğun matematiksel ve istatistiksel hesaplama içermektedir. Hesaplamalarda Black-Scholes modeli gibi kapalı formda çözüm sunan formüller, sonlu farklar yöntemleri ve Binom metodu gibi bazı nümerik yöntemler veya Monte Carlo İntegrasyon tekniği kullanılabilir. Kapalı formdaki çözümler yalnızca standart nitelikteki opsiyonlar için geçerli olup Monte Carlo İntegrasyon yöntemi her durumda çözüm sunan tek yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Bariyer opsiyonları gibi aktiflik koşulu içeren veya Quanto opsiyonları gibi başka para birimi cinsinden ödeme gerektiren egzotik opsiyon çeşitleri ancak Monte Carlo integrasyon

tekniki ile fiyatlanmakta olup piyasalarda en çok egzotik opsiyonlar işlem görmektedir.

Çok yüksek hacimli işlemlere konu olan opsiyon fiyatının hesaplanmasında Monte Carlo benzetim tekniği kullanıldığında ortaya çıkan hata payının azaltılarak daha dar güven aralığında sonuç alınması gerekmektedir. Varyans ile ölçümlenen hata payının düşürülmesi için varyans azaltma tekniklerinden Önem Örneklemesi (Importance Sampling) yöntemi finansal uygulamalarda sıkça yararlanılan bir yöntem olarak opsiyon fiyatının belirlenmesinde kullanılabilir. Önem Örneklemesi yöntemi zıt rassal sayılar (antithetic varieties) gibi diğer bazı varyans azaltma teknikleri ile birlikte uygulanabilmektedir.

Küresel piyasalarda yapılan işlemlerden daha yüksek pay alabilmek amacıyla son yıllarda büyük bir yarış söz konusudur. Aralıksız süren araştırma-geliştirme faaliyetleri sonucunda yeni nesil birçok türev ürün tasarlanarak piyasaya sürülmekte ya da global finans borsalarında farklı uygulamalara yer verilmektedir. Bu uygulamalardan biri fiyat marjı uygulamasıdır. Buna göre bir menkul kıymet fiyatı için günlük işlemlerde bir tavan fiyat ve bir taban fiyat söz konusu olup menkul kıymet fiyatı en çok bu aralıkta değişim gösterebilmektedir. Böylece büyük miktartlı kayıpların ortadan kaldırılmasıyla yatırımcı sayısının ve işlem hacminin artırılması hedeflenmektedir. Aynı zamanda piyasada sebepsiz yüksek artışların önüne geçilerek piyasa manipülasyonu yapılması olasılığı azaltılmış olurken finans piyasasının neden-sonuç ilişkisi içinde haber ve verilere bağlı bilanço analizi esaslı işleyişi de sağlanmış olmaktadır.

Bu doktora tezinde sınırlı fiyat stokastik süreçlerinin opsiyon fiyatlama modeline dahil edilmesiyle fiyat marjı uygulanan piyasalara yönelik opsiyon fiyatının hesaplanması sağlanmıştır. Önce Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile adil opsiyon fiyatı hesaplanmış, sonra varyans azaltma tekniklerinden önem örneklemesi ve zıt rassal sayılar yöntemleri ile hesaplanan opsiyon fiyatının güven aralığının daraltılması sağlanmıştır. Ayrıca fiyat marjı uygulanan ve uygulanmayan her iki durum için birçok parametre değerinde sonuçlar alınarak kıyaslama yapılmıştır. Sınırlı fiyat stokastik süreci ile sınırsız fiyat stokastik sürecinin ayrıldığı noktalar ortaya çıkarılmıştır. Piyasadaki düşük oynaklık ve yüksek oynaklık ortamlarında sonuçlar incelenmiştir. Buna göre fiyat marjı uygulamasının düşük oynaklık ortamında bir fark yaratmadığı ancak piyasada sıkça görülen fiyat dalgalanmalarına bağlı yüksek oynaklık ortamında belirgin şekilde fiyat farkına neden olacağı bulgulanmıştır. Finansal opsiyonların gün geçtikçe önem kazanmaya devam etmesi üzerine bu çalışmayla ülkemizdeki opsiyon işlemlerine katkı sağlanması amaçlanmıştır.

DYNAMIC OPTIONS PRICING WITH VARIANCE REDUCTION FOR LIMITED AND UNLIMITED PRICE STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

Innovation is in the heart of business. An improvement and development process is rapidly evolving on every area which includes financial markets. The most innovative product among a number of different assets in financial markets is options. Options are fully featured derivative products which can serve as a tool for many targets. First of all options make financial markets deeper. Investors would be convinced to come and make investments on risky assets by existence of a related option. This helps to enlarge daily trade amount in financial markets.

Secondly options are dedicated to a wide scope of investors attitude. Options allow the holder to have protection against market risk while offering higher profit. Market risk refers to a lower investment value on behalf of unstationary price movements. Options could be exercised immediately in case of any unexpected market condition to refresh the present value of portfolios. Mainly options are purchased in order to fix the underlying price for a reasonable time period which gives a safeguard to the owner of the option. Options provide to control the risk level of investment portfolios when traded for risk aversion purposes.

Moreover option portfolios may result in superior returns when expectations are realized. Leverage property of options allow to have higher profit. These aspects make options one of the most traded assets in financial markets. Trade volume of options accelerated in global markets and passed the stock exchange and forex market volumes one by one.

An option is simply a contract between two sides about trading another asset at a future time. One side is the writer that fixes the terms of the option contract and sells the option. The other side is the holder who purchases the option for the market price namely option premium. At the beginning option premium is a kind of cost for the holder and it is a kind of profit for the writer. Whereas final score could be seen at the exercise date or at the expiry date. If market conditions grow up in accordance with the holder's expectations, the holder can exercise the option and get some payoff. At the exercise date writer has to pay the payoff to the holder. Whilst there is no obligation for the holder to exercise the option and holder does not need to pay any more to the writer at the exercise date. Consequently the balance may change at the exercise date.

Only one side of option contract can get profit. That's why all possible scenarios should be taken into consideration while determining the fair value of option premium. Fair value of the option price can be calculated by some mathematical and numerical methods.

It is impossible to specify the probability distribution of risky asset returns. Options pricing is based on a different probability space that calculations are done with

respect to arbitrage free principle and risk neutral pricing. In this probability space asset price is simply an expectation of the discounted measure of its terminal value. The expectation is taken under an equivalent (semi) martingale measure which is a mapping of original probability distribution of the asset returns. Arbitrage free principle provides existence of an equivalent martingale measure which is not unique if the market is incomplete.

The market price and the fair value of the option may be different. This is an indicator for investors about the market price is whether cheap or expensive. Trade decisions are considered in this respect. Therefore fair value should be calculated accurately to have a correct decision. Options pricing includes highly complicated mathematical and statistical calculations.

Black-Scholes model gives a closed form solution for standard options. It is assumed that logarithmic returns have an equivalent normal distribution in Black-Scholes model. Hence, distribution of the asset price becomes log-normal. Other options pricing methods are Binomial lattices, finite difference methods and Monte Carlo Integration technique. Especially Monte Carlo Integration technique appears to be the unique way to price some exotic options like Barrier options and Quanto options. Barrier options may be in somehow unlimited number of different kinds like up and knock in, up and knock out or down and knock in etc. It is possible to have two or three or more barriers. Quanto options allow to pay in a different currency at the exercise date. Monte Carlo Integration technique is a common way used to price exotic options. Nevertheless most of the options traded in global markets are exotic styles.

Options are traded in huge amounts. Little differences in options premium may result in bigger transactions. The error term in Monte Carlo calculations should be reduced in order to have more accurate results. The error term is measured with the Variance or Mean Squared Error. Any variance reduction achieved in Monte Carlo applications constitutes smaller confidence intervals. Importance Sampling technique can be occupied in an attempt to reduce variance in financial applications. Moreover Importance Sampling method can be applied together with any other variance reduction techniques like Antithetic Variates.

In developed financial markets firms and individuals seek new methods to minimize the risk arises from their transactions. At the same time there is a challenging competition to increase their market share. Research and Development facilities goes on continuously to generate any kinds of competitive assets like derivatives. As a result whether new generation derivatives are frequently introduced to the markets or some regular rules are implemented in financial markets to feed the competitive environment.

One of the regulations is price margins which is used to improve investors interest. Price margin is seen in some markets that asset prices are allowed to have some limited values during one day regular sessions. Namely asset price can increase up to a maximum level in a session and fall to a minimum level. Ceil and floor prices are calculated according to a base price architecture. The base price is simply weighted average value of the previous session. Margins are generally in ten percent intervals of the base price. It is expected that the market gets charming to the risk aversion investors.

Although there are more than one reasons to apply such a rule in a market, mainly increase in the trade amount is desired. It is possible to prevent huge losses in the

market with the floor price. Nevertheless unreasonable price movements are reduced to minimal with the ceil price. Those two prevent big manipulative attacks to the market which shows some regulations are needed. Price margin enables regular market processing and casualty in the market. Price movements should be caused by daily data and news from the market according to Efficient Market Hypothesis. Moreover trade decisions should be given after balance sheet analyses.

Options allow investors to control the risk level when included to the portfolios. Huge amount of transactions in the options market makes options pricing one of the most important topics. Price margins should be implemented to the existing options pricing models with bounded stochastic price processes. Very famous Black-Scholes model lightened options pricing process. Their assumptions have been analyzed enormously.

By this PhD thesis it is provided to calculate option prices for the markets which have price margins. To the literature bounded stochastic price process is included into options pricing model. There are a number of options pricing models. First selected options price is calculated with Monte Carlo integration. Confidence interval for the price is reduced with the Importance Sampling technique. The results are collected for the two cases of price margin is in use and not in use. The different points of bounded and unbounded stochastic price processes are visualized. Specially bounded log-normal process is examined in terms of variance reduction capability.

Last but not the least volatility is taken into consideration. Low and high volatility situations are tested in order to see how the option price is effected with the stochastic price processes. As a result there is no sensible difference in unbounded and bounded stochastic price processes for low volatility. However it is observed that high volatility makes options prices clearly different for unbounded and bounded stochastic price processes. High volatility makes call option prices lower for bounded stochastic price processes whereas it makes put option prices higher. Financial options gain more importance day by day as high volatility is seen more frequently in financial markets. With this study it is aimed to contribute the options market which is developing level.

1. GİRİŞ

Son çeyrek yüzyıllık zaman dilimi boyunca hayatı tümünden değiştiren bir gelişme ve küreselleşme süreci yaşanmaktadır. Her teknolojik buluş bir başka yeniliğe kaynak oluşturmaktadır. Aralıksız gelişme süreci, kontrol edilmesi güç fakat elzem olan koşulları doğurmuştur. Küreselleşmenin getirdiği rekabet ortamı firma ve yatırımcılarla birlikte diğer tüm piyasa katılımcılarının öncelikle teknolojik gelişmeleri yakından takip etmesini ve olası gelişmeleri erkenden öngörmesini, daha sonra beklenmedik gelişmelere çok hızlı uyum sağlamasını ve buna uygun eylem almasını zorunlu kılmaktadır. Uluslararası piyasalarda faaliyet gösteren aktörler için bu gereklilik en yüksek seviyeye ulaşmıştır. Teknolojik gelişmelere bağlı olarak piyasalar arasında direk etkileşim kanalları açılmış ve hızlı bir şekilde para ve mal transferi yapılması sağlanmıştır. Böylece dünyanın bir köşesinde yaşanan herhangi bir gelişmeden dolayı anında diğer tüm piyasalarda fiyat hareketleri görülebilir hale gelmiştir.

Piyasaları doğrudan etkileyen ekonomik, politik, yasal ve teknolojik gelişmelerle birlikte yaşanan sosyokültürel olaylar neticesinde hızlı fiyat artışı ya da azalışı şeklinde finansal dalgalanmalar yaşanabilmektedir. Piyasa seyri içerisinde gerçekleşen fiyat hareketleri birçok dinamik nedene bağlıdır. Bu fiyat hareketlerinden öngörü sayesinde yararlanılabilecek fırsatların olduğu gözlemlenmektedir. Fırsatların değerlendirilmesini sağlayacak yatırım kararları piyasadaki mevcut finansal ürünler arasından doğru zamanda doğru olanın tercih edilmiş olmasına bağlıdır.

Yatırım kararı, hangi kıymetin seçileceği ve bu kıymetin ne zaman satın alınıp ne zaman satılacağı belirlenmesidir. Yeni nesil birçok ürünün tasarlanarak piyasaya dahil olmasıyla finansal piyasalardaki ürün çeşitliliği son derece artmıştır. Piyasadaki alternatif ürünlerin çoğalması katılımcılar arasında riskin dağıtımı ve yatırım kararlarının alınması noktasında bir eniyileme sürecini zorunlu hale getirmiş bulunmaktadır.

Yatırım kararları alınırken piyasa katılımcılarının eğilimleri ve niyetleri ön plana çıkmaktadır. Piyasa katılımcıları piyasa riskinden korunmak isteyen yatırımcılar (hedgers), yüksek getiri elde etme amacındaki yatırımcılar (spekûlatörler) ve aracılık faaliyeti yürüten finansal kurumlar olmak üzere başlıca üç grupta toplanabilir.

Katılımcılar arasında sürekli olarak yapılan alım-satım işlemleri sonucunda dönemsel getiri ya da zarar ortaya çıkmaktadır. Beklenen getiri miktarı en çoklanmaya çalışılırken aynı zamanda olası zarar miktarının belirli bir düzeyde kalmasını garanti edecek yatırım seçenekleri araştırılmaktadır. Sonuçta hedeflenen getiri düzeyine erişmek için üstlenilmesi gereken risk miktarının kontrol altında tutulmasını sağlayan ürünlere yüksek talep oluşmuştur. Bu iki amacı aynı anda gerçekleştirmeye yönelik ürün ise finansal opsiyonlardır.

Gelecekte oluşacak koşulları önceden doğru tahmin etme yeteneği rekabetçi ortamda fark yaratmayı sağlayan en önemli unsur olarak ortaya çıkmaktadır. Bu koşullara uygun eylem alınarak yatırım kararlarının önceden şekillenmesi mümkün olabilir. Ön tahmin noktasındaki eksikliği opsiyonlar gidermektedir. Özellikle belirsizliğin yüksek olduğu dönemlerde olası kayıplara sınır getirmesi açısından opsiyonlar büyük talep görmekte ve işlem hacimleri çok yüksek seviyelere ulaşmaktadır. Opsiyonlar hem organize borsalarda hem de tezgahüstü piyasalarda işlem görebilen türev ürünlerdir.

Yüksek ticaret rakamlarına ulaşılması dolayısıyla opsiyon fiyatı (prim) önem kazanmıştır. Tezgah üstü sayılan uluslar arası işlemlerde birçok farklı fiyatın ortaya çıkması opsiyon priminin hassas bir şekilde hesaplanmasını gerekli kılmıştır. Farklı niyetteki piyasa katılımcıları arasındaki işlemler söz konusu olduğunda yine farklılık gösteren fiyatların talep edildiği görülebilmektedir. Bu sebeplerden adil opsiyon fiyatının belirlenmesi için ince hesaplamalar yapılmalı ve bir takım yöntemlerden yararlanılmalıdır.

Opsiyon primi vade sonundaki beklenen getirinin (ödenti) sürekli iskonto yapılarak bugüne çekilmesiyle hesaplanmaktadır. En çok kullanılan opsiyon fiyatlamaya yöntemleri Black-Scholes formülü, Monte Carlo İntegrasyon tekniği, sonlu farklar yöntemi ve Binom olasılık modelidir.

Opsiyon fiyatlamaya ışık tutan Black-Scholes modeli, yüksek matematik işlemlerine ve birtakım istatistiksel yöntemlere başvurulması yoluyla opsiyon fiyatının

hesaplanmasını sağlar. Ancak Black-Scholes formülü gibi kapalı çözüm öneren yöntemler kullanılarak tüm opsiyon çeşitlerinin fiyatı hesaplanamamakta sadece vade sonunda kullanılabilen Avrupa tipi opsiyon fiyatları bulunabilmektedir. Sonlu farklar yöntemi ile Binom modeli ise uzun vadelerde ağaç büyüklüğünün artmasına bağlı olarak etkinliklerini kaybederken kısa vadelerde yaklaşık çözüm verebilmektedir.

Bu yüzden Monte Carlo İntegrasyon yöntemi hem tüm opsiyon çeşitleri için sonuç vermesi hem de esnek yapısı dolayısıyla daha fazla tercih edilmektedir. Monte Carlo İntegrasyon yöntemi her türlü model gereksiniminde istenen durumlara yanıt verebilmesi açısından ön plana çıkmaktadır. Özellikle finansal uygulamalarda varyans azaltma teknikleri ile birlikte kullanıldığında daha etkili sonuç vermektedir.

Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile birlikte varyansın belirli sayıdaki koşum adedi üzerinden düşürülebilmesi için Önem Örneklemesi, eş rassal sayılar, zıt rassal sayılar veya kontrol değişkeni gibi varyans azaltma tekniklerinden biri kullanılabilir. Böylece benzetim sonucunda elde edilen istatistiki değişkenin güven aralığının daraltılması sağlanmış olmaktadır.

Opsiyon ticareti çok hızlı bir şekilde gelişim göstermiş ve opsiyon işlem hacimleri artmıştır. Tezgahüstü piyasalarda birçok talebi karşılayan çeşitli opsiyonların yazılabilmesi sayesinde opsiyon piyasalarının işlem hacimleri dayanak varlık piyasalarının işlem hacimleriyle yakın seviyelere gelmiş hatta geride bırakmıştır.

Gelişmiş ülkelere ait türev ürün piyasalarıyla birlikte dayanak varlık ve menkul kıymet piyasalarının işlem hacimleri yüksek seviyelerde bulunmaktadır. Bu piyasalarda fiyat süreçlerine bir kısıtlama getirilmemiş olup bir menkul kıymetin fiyatı sınırsız aralıkta değişebilmektedir. Borsa İstanbul Anonim Şirketi (BİST AŞ) gibi yatırımcı sayısının artırılması hedeflenen bazı gelişmekte olan ülke borsalarında ise sınırlı fiyat süreçleri benimsenmiştir. Fiyat marjı uygulaması ile fiyat stokastik sürecine sınırlama getirilmiştir. Buna göre, BİST bünyesindeki hisse senetleri piyasasının bir seansında herbir menkul kıymetin fiyatı bir önceki seans ağırlıklı ortalama değerinin en çok yüzde on'u kadar artıp azalmaktadır. Bir menkul kıymetin bir seans boyunca alabileceği en yüksek fiyata tavan fiyat, en düşük fiyata taban fiyat ismi verilmektedir.

Fiyat marjlarıyla ilgili herhangi bir regülasyonun bulunmadığı gelişmiş ülke piyasaları için tasarlanmış olan opsiyon fiyatlama modellerine taban-tavan fiyat uygulamasının dahil edilerek bu modellerin sınırlı fiyat stokastik sürecine uyarlanması gerekmektedir. Ya da fiyat marjlarının göz önünde bulundurulduğu, sınırlı fiyat stokastik sürecini içeren yeni bir model kurularak opsiyon fiyatlaması daha geçekci hale getirilmelidir.

Bu doktora tez çalışmasının amacı; ülkemiz hisse senetleri borsasında olduğu gibi fiyat marjı uygulamasının yer aldığı piyasalarda işlem gören opsiyon fiyatlarının sınırlı fiyat stokastik süreçlerine uygun bir şekilde hesaplanmasının sağlanmasıdır. Çalışmamızda öncelikle Black-Scholes formülü gibi kapalı formüllerle ödentisi hesaplanabilen opsiyonlar incelenmiş olup buradan hareketle sınırlı ve sınırsız piyasalar için Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile Önem Örnekleme varyans azaltma teknikleri kullanılarak opsiyon fiyatının hesaplanması ve güven aralığının daraltılması sağlanmıştır. Sınırsız fiyat stokastik süreçlerine ait opsiyon fiyatlama modelleri literatürde oldukça fazla bulunmaktadır. Ancak bu modellerin, sınırlı fiyat stokastik süreçlerine uygun piyasalarda doğrudan uygulanması yanlış fiyatlamalara neden olabilecektir. Sınırlı fiyat stokastik süreci ile sınırsız fiyat stokastik süreçlerine sahip piyasalarda oluşan opsiyon fiyatlarının kıyaslanması sağlanmış ve hangi durumlarda farklılık olduğu incelenmiştir. Tez çalışması boyunca opsiyon fiyatını etkileyen tüm unsurlar detaylı bir şekilde ortaya konmuştur.

Çalışmanın sonraki bölümleri şu şekildedir; ikinci bölümde finansal piyasalardaki fiyat dinamikleriyle birlikte opsiyonların genel tanıtımı verilmiş ve temel kavramlar açıklanmıştır. Opsiyon piyasalarının işleyişi anlatılmış ve son yıllarda kazandığı önem üzerinde durulmuştur. Ayrıca opsiyonların geometrisine değinilerek opsiyon fiyatının hangi girdi değişkenlerinden nasıl etkilendiği açıklanmıştır. Böylece opsiyon fiyatını etkileyen unsurlar açık olarak belirtilmiş ve ileriki opsiyon fiyatlama bölümüne ışık tutulmuştur.

Çalışmanın üçüncü bölümünde opsiyon fiyatlaması ve varyans düşürme teknikleri konularının detaylı literatür araştırmasına yer verilmiştir. Mevcut yöntemlere göre çalışmalar sınıflandırılmış ve özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde opsiyon fiyatlamasının temelleri açıklanmıştır. Opsiyon fiyatlaması için gerekli olan matematiksel altyapı ve stokastik süreçler üzerinde

durulmuştur. Finans uygulamalarında yaygın olarak kullanılan log-normal proses ve integrasyon yöntemleri açıklanmıştır. Opsiyon fiyatı hesaplama yöntemleri avantaj ve dezavantajlarıyla birlikte ele alınmıştır. Piyasada görülebilecek tüm durumları yansıtmak üzere seçilen parametre seti için bulunan sonuçlara yer verilmiştir. Opsiyon fiyatlamasının temelinde yer alan Black-Scholes modelinin detayları ve temel varsayımlarına değinilmiştir. Daha sonra Monte Carlo integrasyon tekniği kullanılarak opsiyon fiyatı hesaplama uygulamasına yer verilmiştir. Ortaya çıkan varyansın azaltılarak tahmin istatistiğine ait güven aralıklarının daraltılması için finansal uygulamalarda sıkça kullanılan Önem Örneklemesi yöntemi ile Zıt Rassal sayılar yöntemleri ele alınmış ve detaylı olarak açıklanmıştır. Son olarak Önem Örneklemesi yönteminde kullanılan hedef dağılımının özelliklerine yer verilmiştir.

Beşinci bölümde sınırsız ve sınırlı fiyat stokastik süreçleri için uç benzetimi ile düşük varyanslı fiyat modeline yer verilmiştir. Önem örneklemesi yöntemi kullanılarak, log-normal prosesin getirdiği uç bölgelerden yeterli örnekleme yapılmaması dezavantajı giderilmeye çalışılmıştır. Bir önceki bölümde ele alınmış olan parametre seti kullanılarak önemli ölçüde varyans azalması sağlanmıştır. Sınırlı fiyat stokastik sürecine sahip piyasalarda işlem gören opsiyonların fiyatının hesaplanmasına yönelik bir model geliştirilmiştir. Monte Carlo integrasyon yöntemi kullanılarak yüzde onluk marj dahilinde bu modelin sonuçlarına yer verilmiştir. Sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçlerinin kıyaslanması sağlanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde yapılan çalışma genel olarak değerlendirilerek bulgulara yer verilmiştir. Son yıllarda hem akademisyenler hem de piyasa aktörleri arasında yoğun ilgi gören opsiyon fiyatlama konusu için gelecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

2. FİNANSAL PİYASALAR VE OPSİYONLAR

Finansal Piyasalarda başlıca üç grupta toplanabilen birçok farklı ürün vardır. İlk grubu risksiz varlıklar olarak isimlendirilen mevduat hesapları, Devlet Tahvili, Hazine Bonosu ve Eurobond gibi ürünler oluşturur. Değişken getirili ya da sabit getirili olarak çıkarılabilen bu ürünlerin vade sonunda anapara miktarında bir azalma söz konusu olmaz. Bu yüzden risksiz ürün olarak kabul edilirler. İkinci grupta hisse senedi, döviz, emtia gibi fiyatları anlık olarak değişen riskli varlıklar yer almaktadır. Riskli ürünler piyasada sürekli olarak işlem görür. Alım-satım fiyatları arasındaki farkın az olmasına bağlı olarak aynı gün içinde dahi birçok kereler alınıp satılabilirler. Üçüncü grupta ise başka bir ürüne bağlı olarak çıkarılan opsiyon, swap, vadeli işlem sözleşmesi ve forward gibi türev ürünler yer almaktadır. Finansal ürünlerin sınıflandırılması ve finansal ürün çeşitlerinin hangi yatırım ihtiyacına hitap ettiklerine dair detaylı bilgiye Bodie ve *diğ.* (2007)'den ulaşılabilir.

Risksiz ürünler vade sonunda belirli bir getiri sağlarken bir miktar belirsizlik de taşımaktadır. İki nedenden kaynaklanan belirsizlik oluşur. İlki mevcut enflasyon dolayısıyla vade sonundaki reel getirinin bilinmemesidir. İkincisi vade sonunda yeniden yatırım yapılacak olması durumunda faiz oranlarındaki olası değişimdir. Faiz oranlarının belirgin azalması ya da artması yatırım kararlarını değiştirebilmektedir.

Riskli ürünlerdeki belirsizlik ise oynaklık (volatilite) ile ölçümlenmektedir. Piyasada açıklanan ekonomik veri ve haberlere bağlı olarak finansal ürün fiyatının dalgalanması sonucu oynaklık oluşmaktadır. Piyasada gerçekleşen her işlemle birlikte oynaklık değişir. Bu yüzden piyasa fiyatı için birebir bir dağılıma uygunluktan söz etmek mümkün değildir (Brandimarte, 2006). Finansal hesaplamalarda riskli ürünlerin piyasa fiyatı bir stokastik sürece uygun olarak modellenir ve fiyatın bu dinamik modele göre değişim gösterdiği kabul edilir (Benth, 2002). Tez çalışmamız boyunca stokastik süreçlerle ilgili olarak Ek-A'de tanımları verilen bazı stokastik terimler kullanılacaktır.

Piyasadaki mevcut risk ortamında birtakım indikatörlere bakılarak piyasa yönü belirlenmeye çalışılır. Piyasa riskinden olumsuz boyutlarda etkilenilmemesi için piyasa yönü analiz edilmelidir. Öncelikle belirli zamanlarda piyasadaki bazı ürünlerin artış ya da azalış trendinde olup olmadığına bakılmaktadır. Örneğin Amerikan on yıllık tahvil faizinin düşüyor olması tüm dünya genelinde riskli ürünlerden kaçıldığı, yükselmesi ise borsalar başta olmak üzere riskli ürünlere yönelindiği anlamında değerlendirilmektedir.

Finans piyasasındaki yatırımcılar arasında piyasa içindeki belirsizlik ortamında bir denge kurulur. Özellikle riskten korunma amacındaki (risk aversion) yatırımcılarla yüksek kazanç peşindeki spekülative yatırımcıların konumları ön plana çıkar. Opsiyonlar korunma sağlama özellikleriyle birlikte kaldıraçlı işlemlere olanak tanınmasıyla dengenin kurulmasında çok önemli bir rol oynamaktadır. Alım hakkı tanınması ya da satım hakkı tanınmasına göre iki türü bulunan opsiyonların işlem hacimlerindeki değişimlere bakılarak piyasa yönü belirlenmeye çalışılmaktadır. Alım opsiyonu işlem hacmi, satım opsiyonu işlem hacmi, açık pozisyon adetleri veya alım opsiyonları ile satım opsiyonlarının toplam stok miktarları gibi göstergeler piyasa yönü açısından yorumlanmaktadır. Bu bakımdan piyasa içindeki diğer ürünlere göre opsiyonlar büyük önem kazanmıştır.

Piyasada günde fiyat hareketleri günlük gelişmelere bağlı olarak meydana gelmektedir. Piyasa fiyatının oluşmasında ve fiyatın değişmesinde birçok ekonomik faktör etkilidir. Piyasanın tümünü etkileyen gelişmeler yaşanabileceği gibi sektör bazında ya da her bir menkul kıymet özelinde fiyatı etkileyen gelişmeler yaşanabilir. Bu gelişmeler fiyata bir şekilde yansır ve fiyat hareketleri görülür. Bu bakımdan genel bir fiyat modeline tek tek tüm etkenlerin dahil edilmesi kullanışlı bir yöntem olmamaktadır. Genel model, tüm etkenlerin bir değişkende toplanmış olduğu varsayımı altında hesaplama yapılmasına dayanmaktadır. Ancak bir sektör endeksi ya da belirli bir menkul kıymet özelinde çok faktörlü regresyon modeli kurulması uygun olabilir.

Bu bölümde öncelikle finansal piyasalardaki fiyat dinamiklerine yer verilmiş ve fiyat mekanizmasının işleyişi açıklanmıştır. Ardından fiyat stokastik sürecine ait olasılık dağılımının karakteristiğinin belirlenmesinde kullanılan finansal getirinin özelliklerine ve hesaplama yöntemlerine yer verilmiştir. Daha sonra opsiyon piyasaları, opsiyon sözleşmeleri ve opsiyon çeşitleri hakkında kapsamlı bilgi

verilerek opsiyonların genel tanıtımı yapılmış ve kullanım alanları açıklanmıştır. Son olarak opsiyonların geometrisine değinilerek fiyatı etkileyen değişkenler açıklanmıştır.

2.1 Finansal Piyasalardaki Fiyat Dinamikleri

Finansal piyasalardaki fiyat hareketleri birçok nedene bağlı olabilir. Fiyat mekanizması öncelikle arz ve talep sıklığına bağlı olarak kurulmaktadır. Bir finansal ürünün belirli bir zamandaki arz-talep dengesine göre likidite seviyesi belirlenir. Yatırım yapılması noktasında en önemli karar değişkeni olarak likidite ortaya çıkmaktadır.

Likidite seviyesinin yanında global ekonominin genel gidişatı, Merkez Bankalarının politikaları ve diğer otoritelerin piyasaya dönük kararları fiyat hareketlerinde etkilidir. Piyasa katılımcıları ile hanehalkının tutum ve davranışları da fiyat değişiminde etkili olur. Ekonomik olmamasına rağmen tüm dünyada ses getiren doğal afet, büyük bir kaza ya da nükleer sızıntı gibi bazı olayların da fiyat hareketine neden olduğu görülmektedir. Birçok faktörün etkileşimi sonucunda finansal piyasalardaki fiyat hareketlerinin yönü ve miktarı belirlenir.

Makro bazdaki faktörlerle birlikte diğer tüm unsurların piyasa fiyatına olan etkisinin tek bir değişkende toplandığı kabul edilerek fiyat modellemesi yapılabilir. Bir kıymetin riskli ürün piyasalarında oluşan fiyatı çarpım formunda¹ zamana bağlı periyodik bir eşitlikle aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$S_{t+1} = S_t u_t \quad (2.1)$$

$S_t \in Q^+$ söz konusu kıymetin bir t zamanındaki fiyatını ifade eder. $u_t \in Q^+$ fiyatın değişmesini sağlayan bir rassal değişkeni temsil etmektedir. S_0 başlangıç fiyatı, $t = 0$ zamanındaki spot fiyat olarak piyasadan gözlemlenir. Tezgahüstü piyasalarda fiyat birçok farklı değer alabilirken organize borsalarda fiyat herbir menkul kıymet için belirlenmiş fiyat adımı kadar değişim gösterir. Dolayısıyla organize borsalar söz

¹ Menkul kıymet fiyatının pozitif kalmasını sağlamak amacıyla çarpım formu kullanılmıştır. $S_{t+1} = S_t + u_t$ şeklinde alınacak bir fiyat mekanizmasında $u_t < 0$ değerlerine bağlı olarak kıymet fiyatı için negatif değerler söz konusu olabilirdi. Belirli bir menkul kıymet özelinde fiyatı etkileyen tüm unsurlara ayrı birer değişken tanımlanarak fiyat mekanizması bir regresyon ifadesi şeklinde oluşturulabilir. Ancak bu konu tez çalışmamız kapsamında yer almadığından opsiyon fiyatlaması için genel bir model kullanılmıştır.

konusu olduğunda fiyat gerçekte kesikli bir sürece uymaktadır. Ancak işlemlerin anlık gerçekleşmesi göz önünde bulundurulduğunda yeterince uzun bir zaman dilimi için fiyat adımı ihmal edilerek fiyatın sürekli olduğu kabul edilmekte ve fiyat modellemesi sürekli zamanda yapılabilir, (Brandimarte, 2006).

Denklem (2.1)'de zaman biriminin kesikli ya da sürekli olmasına bağlı olarak fiyat mekanizması kesikli zamanlı veya sürekli zamanlı olacak şekilde modellenebilir. Fiyatı değiştiren rassal değişken (u_t)'ye bağlı olarak modelin genel karakteristiği belirlenmektedir.

Organize borsalardaki fiyat değişimleri alıcı ve satıcıların borsaya entegre olan kendi sistemleri üzerinden girmiş oldukları kotasyonlara (fiyat teklifi) bağlı olarak gerçekleşmektedir. Alıcı ve satıcılar anlık olarak ve birçok kereler fiyatlarını değiştirebilmektedir.

Gelişmiş ülke borsalarında genellikle fiyat üzerinde bir sınır bulunmaz. Gelişmekte olan bazı ülke borsalarında işlem güvenliğini ve yatırımcı katılımını arttırmak amacıyla fiyatın bir seans boyunca değişim miktarında sınırlamaya gidilmiştir. Buna göre bir önceki seans ağırlıklı ortalama fiyatı baz fiyat olarak alınmak üzere her bir kıymet fiyatının belirli bir yüzdelik dilim içinde değişmesine izin verilmektedir. Örneğin Türkiye'de BİST bünyesindeki Pay Senetleri (Hisse Senetleri) Piyasasında fiyat marjı uygulaması gereği bir seans içindeki fiyat hareketi %10 ile sınırlanmıştır².

Fiyat üzerinde sınırlamanın söz konusu olmadığı piyasalarda gerçekleşen işlemlere bağlı olarak fiyatın $0 < S < \infty$ aralığında değerler alabileceği kabul edilmektedir. Gerçekte sonsuza yakın derecede büyük menkul kıymet fiyatları söz konusu olmasa da ele alınacak uygun bir sürekli olasılık dağılımı altında bu değerlere çok çok küçük olasılıklar atanarak sürekli zamanlı modele tüm olası senaryoların dahil edilmesi sağlanmaktadır.

Dayanak varlıklar ve türev ürünler dahil olmak üzere tüm finansal kıymetlerin fiyatlanmasında fiyat sürecinin bir martingal süreci olduğu kabul edilmektedir. Martingal sürecinin tanımı ve özellikleri Ek-A'da verilmiştir. Bir martingal sürecinin en önemli özelliği ilgili istatistiğe ait geçmiş veri bilgisinin gelecek süreci etkilememesi kabulüdür. Buna göre fiyat stokastik süreci için geçmiş fiyat bilgisi

² Bir hissede tavan fiyata ulaşıldığında fiyat adımına bağlı olarak genellikle %10'luk değer çok az aşıldığı görülmektedir.

gelecek fiyat değişimini belirlememektedir. Fiyatta yaşanacak değişim miktarı fiyatın o anki seviyesinden bağımsız olmaktadır³. Bir martingal sürecinin ortalama parametresi sıfır olan eş bir martingal olasılık dağılımına uygun olarak değişim gösterdiği kabul edilmektedir. Bu yüzden geçmiş veri analizi gelecek fiyatına ilişkin doğrudan bir fikir vermemektedir. Ancak fiyat yerine fiyattaki değişim miktarları incelendiğinde daha anlamlı bir karakter sergilendiği görülmüştür. Bunun için fiyatın doğal logaritması alınarak logaritmik ölçekte modellemeye geçilebilir, (Brandimarte, 2006). Denklem (2.1)'de her iki tarafın doğal logaritması alınarak logaritmik fiyat şu şekilde ifade edilir

$$\log S_{t+1} = \log S_t + \log u_t. \quad (2.2)$$

Kesikli zaman modelinde $t = 0$ dönem başlangıcı ve T dönem sonu olmak üzere $[0, T]$ zaman aralığı zaman dilimlerine bölünür. Zaman dilimleri $t = 0, 1, 2, \dots, T$ şeklinde ifade edilir. Böylece $t = 0$ başlangıç zamanından bir t zamanına kadar, $\vartheta \in \mathbb{R}$ ve $\vartheta_t = \log u_t$ olmak üzere denklem (2.2) genelleştirilirse

$$\log S_t = \log S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \vartheta_k \quad (2.3)$$

ifadesi bulunur. ϑ_t rassal değişkeni⁴ zaman birimi (t) 'den $(t + 1)$ 'e geçerken logaritmik fiyattaki değişim miktarını göstermektedir. Opsiyon Fiyatlaması Bölümünde detaylarına değinileceği üzere risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde, dönem içinde beklenen getirinin piyasada kabul edilen risksiz faiz oranına eşit olması koşulu altında fiyatlama yapılmaktadır. Bu yüzden ϑ_t menkul kıymetin logaritmik fiyatında zamana bağlı beklenen artış miktarı olarak tanımlanabilir (Brandimarte, 2006). Bu rassal değişkenin olasılık dağılımının belirlenmesi fiyatlamanın da temelini oluşturmaktadır.

³ Martingal süreci rassal ve birbirinden bağımsız değişimleri içeren bir stokastik süreçtir. Örneğin bir deste iskambil kağıdından kağıt çekilmesi sürecinde çekilen kağıdın yerine koyulmasıyla ilerlenmesi bir martingal sürecidir. Ancak çekilen kağıdın yerine koyulmadan devam edilmesi bir martingal süreci değildir. Opsiyon fiyatlamasında sıkça kullanılan Wiener süreci bir martingaldır. Brown hareketi olarak da isimlendirilen Wiener sürecinin detaylarına 4. Bölümde değinilmiştir.

⁴ ϑ_t normal dağılım gibi, pozitif ve negatif bölgeden örnekleme yapan bir dağılımdan alınmalıdır. Bu sayede logaritmik fiyatın artması veya azalması sağlanır.

Herhangi bir finansal ürün özelinde, fiyatın rassal değişimine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu biliniyorsa buna bağlı olarak fiyatın standart sapması ve diğer performans değişkenleri tahmini olarak hesaplanabilir. Gelecek döneme ilişkin yapılacak bu hesaplamalarda en büyük olabilirlik kestirimi (maximum likelihood) kullanılarak ilgili parametreler bulunur.

Rassal artımın dağılımı menkul kıymet bazında farklılık gösterdiği gibi aynı menkul kıymet için dönemsel olarak da farklılık göstermektedir. Öncü hesaplamalar yapabilmek amacıyla yakın bir dağılım seçilerek hesaplamalara geçilebilir. Örneğin Black ve Scholes (1973) modelinin kabullerinden biri olduğu üzere ortalaması $E[\vartheta_t] = \mu$ ve varyansı $Var(\vartheta_t) = \sigma^2$ olan normal dağılım seçilebilir. Bu durumda beklenen değer ve varyans operatörlerinin özellikleri kullanılarak denklem (2.3) üzerinden logaritmik fiyata ait beklenen değer ve varyans ifadeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$E[\log S_t] = E\left[\log S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \vartheta_k\right] = \log S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} E[\vartheta_k] = \log S_0 + \mu t \quad (2.4)$$

$$Var(\log S_t) = Var\left(\log S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \vartheta_k\right) = \sum_{k=0}^{t-1} Var(\vartheta_k) = \sigma^2 t \quad (2.5)$$

Bu iki denklemle birlikte denklem (2.3) üzerinden bir analiz yapılabilir: Rassal artımın bir normal rasal değişken olarak seçilmiş olması durumunda denklem (2.3)'teki ϑ_t normal rassal sayılarının toplamalarının da normal dağılıma uyacağı görülür. Bir normal rassal değişkene sabit bir sayının ($\log S_0$) eklenmesi normal dağılım özelliğini değiştirmeyeceğinden, denklem (2.3)'teki logaritmik fiyat ifadesinin denklem (2.4) ve denklem (2.5) ile verilmiş olan parametrelere sahip bir normal dağılıma uyacağı görülür. Bu durumda menkul kıymet fiyatı (S_t) için lognormal dağılıma uygunluktan söz edilebilir⁵ (Seydel, 2006 ve Benth, 2002). Sürekli zamanlı modeller söz konusu olduğunda genellikle normal dağılımla birlikte rassal artım için gama dağılımı, beta dağılımı ya da kaydırılmış pareto dağılımları da kullanılmaktadır (Yön S., 2007).

⁵ Bir X normal rassal değişkeninin üssel ifadesi lognormal dağılıma uymaktadır, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise $e^X \sim LN(\mu', \sigma'^2)$ ifadesi geçerlidir.

Denklem (2.4)'te logaritmik fiyatın beklenen değerinin zamana bağlı doğrusal bir artış gösterdiği görülmektedir⁶. Bu durum risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde sağlanması gereken bir koşul olmakla birlikte fiyatı değiştirecek diğer tüm etkenlerin nütürlendiği varsayımı altında geçerlilik kazanmaktadır. Piyasalarda herhangi bir yönde beklenti oluşması durumunda bunlar da fiyatlara yansıtılır. Örneğin Merkez Bankaları tarafından yapılacak açıklamalar ve ileri tarihli uygulama duyuruları piyasaların belirli bir yönde seyretmesine neden olacaktır. Bu durumda, risksiz fiyatlama prensiplerine göre beklenen getiri düzeyi değişeceğinden buna uygun bir fiyatlama yapılması gerekli olacaktır. Aynı şekilde denklem (2.5)'e bakıldığında logaritmik fiyatın varyansı da zamana bağlı doğrusal bir artış göstermekte olup bu da piyasaya dönük uzun vade için beklenen bir durumdur.

Ele alınan bir menkul kıymet fiyatının zamana bağlı bir fonksiyon olarak $S(t)$ şeklinde tanımlanmış olduğu kabul edilmektedir, (Jäckel, 2002). Kesikli zamanlı model söz konusu olduğunda logaritmik fiyatta yaşanacak değişim, ∂t zaman zarfını göstermek üzere

$$\partial \log S(t) = \log S(t + \partial t) - \log S(t) = \mu \partial t \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Böyle bir fark denkleminde $\partial t \rightarrow 0$ için limit alınarak bir diferansiyel denkleme ve dolayısıyla da sürekli zamanlı modele geçilebilir. Denklem (2.6) üzerinden limit alınarak

$$\begin{aligned} \lim_{\partial t \rightarrow 0} \left(\frac{\log S(t + \partial t) - \log S(t)}{\partial t} \right) = \\ \lim_{\partial t \rightarrow 0} \left(\frac{\log S(0) + \mu(t + \partial t) - \log S(0) - \mu t}{\partial t} \right) = \mu, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ifadesi bulunur. Logaritmik fiyat yerine denklem (2.4)'teki beklenen değer ifadeleri yazılmıştır. Denklem (2.7)'nin sürekli zamandaki karşılığı olan diferansiyel denklem şu şekildedir:

⁶ Bu durum kar payı ödemesiz bir kıymet üzerine yazılmış Amerikan tipi bir alım opsiyonunun $\mu > 0$ olması durumunda vade sonundan önce kullanımının hiçbir zaman optimal olamayacağını da göstermektedir (Seydel, 2006). Risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde piyasa faizine bağlı olarak genellikle $\mu > 0$ alınır.

$$\frac{d \log S(t)}{dt} = \mu. \quad (2.8)$$

Sürekli zaman modelinde logaritmik fiyatın anlık değişim hızının μ olduğu görülmektedir. Sürekli zamanda logaritmik bir fonksiyonun diferansiyeli

$$d \log S(t) = \frac{dS(t)}{S(t)} \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir ancak denklem (2.8) ve denklem (2.9) fiyatın sürekli zamana bağlı deterministik bir fonksiyon olması durumunda geçerlidirler. Riskli ürünlerin fiyatı ise doğal olarak deterministik bir fonksiyon şeklinde ifade edilememektedir. Fiyatın bir olasılık dağılımına uygunluğundan da söz edilemez. Ancak riskli ürün fiyatı bir rassal değişkendir. Logaritmik fiyatın bir stokastik sürece bağlı olarak modellenmesi gerekmektedir. Bu yüzden denklem (2.8) ifadesi ortalaması 0 (sıfır) olan Wiener sürecinin σdW_t formunda eklenmesiyle aşağıdaki şekilde yazılmalıdır.

$$d \log S(t) = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.10)$$

Wiener süreci ortalaması sıfır varyansı t olan normal rassal artımlardan oluşan ve genellikle bir başka stokastik sürece yapı taşı olarak işlev gören bir martingal stokastik sürecidir (Benth, 2002). Stokastik diferansiyel denklemler bölümünde bu kısım daha ayrıntılı olarak açıklanmış olup σdW_t eklentisinin beklenen değerinin sıfır olması denklem (2.8)'i değiştirmezken denklem (2.10)'daki logaritmik fiyat ifadesini bir stokastik rassal değişkene dönüştürür, (Brandimarte, 2006).

Denklem (2.10)'daki gibi bir stokastik kısmi diferansiyel denklemin (stochastic partial differential equation – stochastic PDE) çözümü bir stokastik süreç olacaktır. Deterministik bir fonksiyona bağlı bir diferansiyel denklemin belirsiz integrali alındığında özel fonksiyonun kendisi bulunurken, belirli integrali alındığında ise bir reel sayı bulunur. Stokastik diferansiyel denklem içeren bir stokastik sürecin integrali alındığında ise bir rassal değişken elde edilmektedir, (Brandimarte, 2006). Denklem (2.9) ve denklem (2.10)'dan hareketle,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t \quad (2.11)$$

yazılabilir. Burada dW_t fiyat stokastik sürecinin bir $[t, t + dt]$ aralığındaki değişimini belirlemektedir. Black ve Scholes (1973) modelinde Wiener stokastik süreci kullanılarak normal rassal değişkenler elde edilmiş ve denklem (2.11)'deki değişim buna göre sağlanmıştır.

Fiyatı değiştirecek tüm etkenlerin denklem (2.1)'deki bir u_t rassal değişkeninde toplanmış olduğu kabul edilerek, riskli ürün piyasalarında oluşan fiyatın denklem (2.11) ile verilen stokastik diferansiyel denkleme bağlı olarak değişim gösterdiği belirtilebilir. Finans mühendisliği kapsamında, menkul kıymetler ile birlikte tüm riskli ürünlerin fiyatının $S(t)$, bu diferansiyel denklemi sağladığı kabul edilmektedir, (Seydel, 2006) ve (Benth, 2002). Türev ürün fiyatları $V(S, t)$ ile gösterilmek üzere yine bu denklemi sağlamak durumundadır. Denklem (2.11)'in türetilmesinin daha kısa bir gösterimi 4. Bölümde Brown hareketinin verilmesinden sonra stokastik diferansiyel denklemler kısmında açıklanmıştır.

Finansal piyasalarda oluşan fiyatın analizi yapılırken getiri üzerinden de fiyat süreci değerlendirmeye alınmalıdır. Yatırımın amacı getiri sağlamak olduğundan Bodie ve diğ. (2007)'de değinilen makro ve mikro analiz yöntemlerine ek olarak fiyat stokastik süreci getiri açısından incelenmelidir.

2.2 Finansal Piyasalarda Getiri

Finans piyasasındaki temel ürün grupları daha önce de belirtildiği üzere risksiz ürünler, riskli ürünler ve türev ürünler olmak üzere üç çeşittir. Hedeflenen getiri miktarına ulaşmak için yatırımcılar, öngörü ve beklentileri doğrultusunda alım satım işlemleri yaparken, alınan risk düzeyini de göz önünde bulundurmalıdır.

Yatırım kararları getiri-risk dengesi doğrultusunda alınır ve temel ürün gruplarından bir tanesi tercih edilir. Fiyat stokastik sürecinin analizi ile ürün grupları arasında geçiş yapmanın zamanlaması belirlenebilir. Piyasa şartlarına bağlı olarak, yapılan alım satımlar sonucu ürün grupları arasındaki belirgin geçişler doğrudan türev ürün fiyatlarına yansımaları bakımından önem taşımaktadır.

Yüksek risk almaktan kaçınan yatırımcılar (risk aversion) birinci grup finansal ürünlerden portföylerinde daha fazla bulundurlar. Riskten kaçınan yatırımcılar riskli ürünlerden portföylerine ekledikleri takdirde olası değer düşüklüğü karşısında

korunma sağlamak amacıyla aynı zamanda ilgili türev ürünlerden de portföylerine ekleyebilirler.

Tüm yatırımını örneğin mevduat hesaplarında değerlendiren bir yatırımcı risk almaktan kaçınan bir yatırımcıdır. Bu yatırımcının reel getirisi faiz oranları ve enflasyon oranına bağlı olarak belirlenir. Faiz oranlarının enflasyon oranından yüksek olması durumunda yatırımcının reel getirisi pozitif olacaktır. Aksi halde negatif reel getiri söz konusu olur. Bu yatırımcı daha yüksek getiri elde etmek amacıyla yatırımının bir kısmını ya da tamamını hisse senedi, altın, döviz vb. gibi ürünlerden birini satın alarak değerlendirebilir.

Bir finansal ürünün satın alınması, o üründe uzun pozisyona geçildiği (long position) şeklinde ifade edilir. Riskli ürünlerdeki olası fiyat artışları sayesinde daha yüksek getiri elde etme şansı doğar. Ancak riskli ürün fiyatındaki olası değer düşüklüğü halinde yatırım miktarından daha az bir miktarla pozisyonun kapatılması söz konusu olabilir. Bu durumu önlemek amacıyla yatırım portföyüne söz konusu riskli ürünü belirli bir fiyattan (kullanım fiyatı) satma hakkı tanıyan satım opsiyonu (put option) eklenebilir. Bu durumda yatırım portföyü, uzun pozisyona alınan riskli ürün ile birlikte bu ürünü kullanım fiyatından satma hakkı tanıyan satım opsiyonundan oluşur. Örnek olarak belirli miktarda altın satın alındığında, satın alma maliyetine eşit olacak şekilde aynı miktardaki altını satma hakkı tanıyan opsiyon portföye eklenebilir. Altın fiyatlarının düşmesi halinde opsiyon kullanılarak olası zararın önüne geçilmiş olur. Büyük miktarlarda işlemler söz konusu olduğunda yüksek tutarlı kaybın önüne geçilmesi daha fazla önem kazanmaktadır.

Piyasa içerisindeki bazı yatırımcılar (spekülatörler) riskten kaçınmak yerine daha fazla risk üstlenerek yüksek getiri elde etme amacıyla olabilir. Bu takdirde riskli ürün ve türev ürünün birlikte portföye eklenmesi yerine yalnızca türev ürün daha yüksek miktarda portföye alınır. Sayısal bir örnek üzerinden bu duruma bakılabilir:

Örnek 2.1 : Borsada işlem gören bir HHHHH⁷ hisse senedinin şu anki fiyatı 50 birim olsun. Toplamda 50 birim tutarında yatırım yapacak bir yatırımcı bu hisse senedini satın aldığı anda fiyatın bir ay sonra 55 birim olması halinde hisse senedi getirisi

⁷ BIST bünyesinde işlem gören hisse senetlerinin büyük harflerden oluşan beş harfli gösterimle simgelenmesi dolayısıyla bu şekilde bir kullanıma yer verilmiştir.

$$\frac{55 - 50}{50} = \%10 \quad (2.12)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu hisse senedini bir ay sonra 50 kullanım fiyatından satın alma hakkı tanıyan bir alım opsiyonun (call option) fiyatı 5 birim olsun. Toplamda 50 birim tutarında yatırım yapacak bir yatırımcı bir ay sonra hisse senedi fiyatının 55 birim olacağını düşünüyorsa bir adet hisse senedi satın almak yerine on adet opsiyon satın alabilir. Bir ay sonra hisse senedi fiyatının 55 birim olması halinde opsiyon portföyü için getiri

$$10 * \frac{55 - 50}{50} = \%100 \quad (2.13)$$

olacaktır. İlk durumda hisse senedi portföyünden elde edilecek getiri miktarı 5 birim olurken aritmetik getiri %10 olmaktadır. İkinci durumda bu yatırımcı elinde bulunan 10 adet opsiyonu kullanarak opsiyon yazıcısından 10 adet HHHHH hisse senedini herbiri 50 birimden satın alıp hemen piyasada 55 birimden satmak suretiyle %100'lük bir getiri elde edebilir.

Daha fazla risk alan yatırımcı beklentisinin gerçekleşmesiyle opsiyon yatırımı sayesinde yüksek kazanç sağlamış olur. Opsiyonlar portföye eklendiğinde getiri dağılımı üzerinde büyük etkiye sahip olmaktadır. Hem riskten korunma hem de daha yüksek getiri elde etme amaçlarıyla kullanılması dolayısıyla opsiyon ve diğer türev ürün piyasaları yüksek önem kazanmıştır. Son yıllarda özellikle opsiyon piyasalarında yeni ürünlerin tasarlanması ve bu ürünlerin çok amaçlı olması yatırımcı ilgisini opsiyon piyasalarına yöneltmiştir.

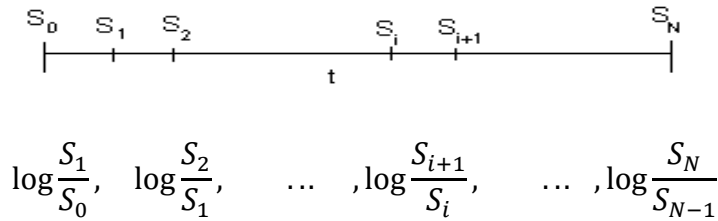
2.3 Finansal Veri İncelemesi

Örnek 2.1'de belirtildiği gibi farklı portföyler ele alınarak aritmetik getiriler incelendiğinde stokastik fiyat sürecinin modellenmesi için anlamlı bir veri tabanı ortaya konmadığı görülmüştür. Başlangıç zamanı ile dönem sonundaki riskli ürün fiyatları baz alınarak hesaplanan aritmetik getiri yerine logaritmik getirilerin (LG) incelenmesiyle riskli ürün fiyatının modellenmesi için daha elverişli bir yöntem elde edilmektedir (Geske, 1977).

Fiyat stokastik sürecinin belirlenmesi için öncelikle geriye dönük empirik veri analizi yapılarak dönem içindeki logaritmik getiriler biriktirilir. Bu şekilde logaritmik getirilerin incelenmesiyle bir dağılım karakteristiği ortaya konulup konulmadığı araştırılır. Buradan hareketle gelecek fiyat seyrinin nasıl olacağı bulunmaya çalışılır ve ileriye dönük fiyat vektörü senaryoları hazırlanır. Logaritmik getiri bir $t \in [a, b]$ zaman aralığı için

$$LG = \log \frac{S_b}{S_a} \quad (2.14)$$

şeklinde hesaplanır. Örneğin günlük kapanış fiyatlarından oluşan bir fiyat vektörü $(S_0, S_1, \dots, S_i, S_{i+1}, \dots, S_N)$ olmak üzere, logaritmik getiriler şematik olarak Şekil 2.1'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.1 : N adet aralık için $t \in [0, N]$ zamanlarındaki logaritmik getiriler.

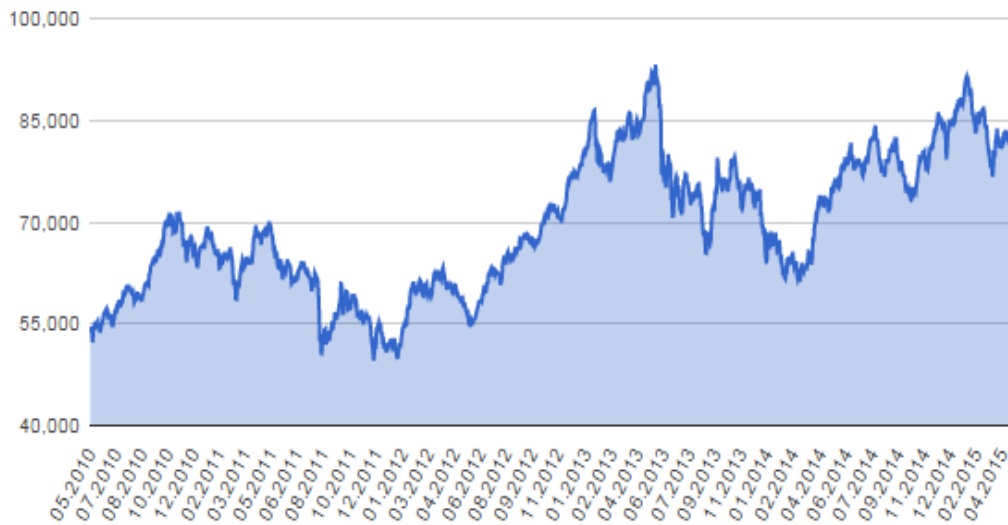
Fiyat değişiminin az olduğu günüçi kısa aralıklar için fiyata bakıldığında aritmetik getiri ile logaritmik getirinin çok yakın olduğu görülür. Oynaklığın düşük seyrettiği bir piyasada birbirlerinin yerine de kullanılabilirler. Ancak logaritmik getiri aşağıda gösterilen toplanabilirlik özelliğine sahip olmasından dolayı finansal hesaplamalarda daha fazla kullanılmaktadır. Aritmetik getiri ise genellikle dönem sonu performans kıyaslamalarında kullanılmaktadır.

$$\log \frac{S_1}{S_0} + \log \frac{S_2}{S_1} + \dots + \log \frac{S_N}{S_{N-1}} = \log \frac{S_N}{S_0} \quad (2.15)$$

Günlük kapanış fiyatlarından oluşan bir vektör için gözlem noktası gün olsa da opsiyon fiyatlaması hesaplarında zaman birimi olarak yıl kullanılır. Örneğin üç ay vadeye sahip bir opsiyon için vade $T = 0.25$ yıl olarak alınır. Bu yüzden ileriye dönük türetilcek bir fiyat vektöründe N gözlem noktası sayısını, T ise vade sonunu göstermektedir.

S_0 başlangıç fiyatı piyasadaki spot fiyat olarak alınır. Genellikle bir yılda 360 gün olduğu kabul edilmekte ve fiyatlamalar buna göre yapılmaktadır. Bunun yanında zaman zaman iş günü hesabı yapılması yoluna da gidilmektedir. Bu durumda bir yıl içinde 252 iş günü olduğu kabul edilir. Günlük kapanış fiyatlarından oluşan bir veri seti ile çalışıldığında bir günlük zaman periyodu $\Delta t = \frac{1}{252}$ olur. Ancak en geçerli yöntem hangi tarih aralığı için hesaplama yapılacaksa o yıl içindeki iş günü sayısının esas alınmasıdır. Stokastik bir süreçte zaman değeri fiyat değişimini doğrudan etkilemektedir. Fiyat sadece iş günleri değiştiğinden geçerli iş günü sayısının esas alınması daha doğru bir yaklaşım olacaktır. Son yöntem benimsendiği takdirde uzun vadeli bir opsiyon için günlük fiyat değişimleri gerçek piyasa fiyatına daha yakın modellenmiş olur.

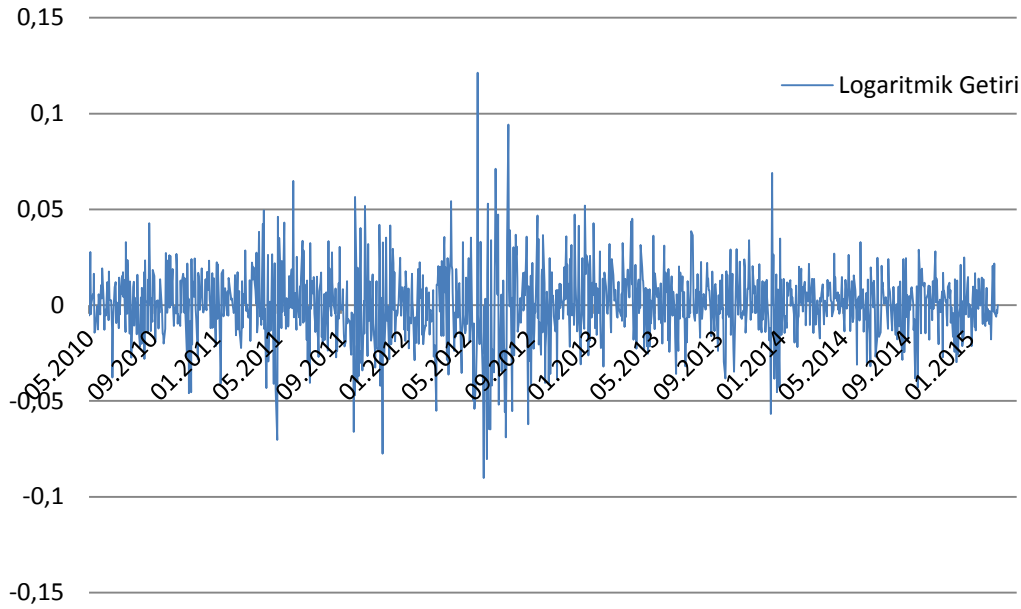
Opsiyon fiyatlama modellerinde genel olarak getirilerin normal dağılıma uyduğu kabulü yer aldığından bir dağılıma uygunluk açısından empirik veri incelemesine geçilebilir. Yatırımcıların günlük bazdaki fiyat hareketlerini daha çok takip ediyor olması nedeniyle günlük veriler ele alınarak günlük getiri dağılımının belirlenmesi üzerinde durulur. Sayısal veri olarak BİST-100 Endeksi ele alınmıştır. Borsa İstanbul'da işlem gören yüz adet hisse senedinin ağırlıklı ortalamasından oluşan ve puan ile ölçülen bir göstergedir. Endeksi oluşturan hisse senetleri birtakım kriterlere göre seçilmiştir. Şekil 2.2'de BİST-100 Endeksinin 05.2010-04.2015 tarihleri arasındaki beş yıllık günlük kapanış puan grafiği verilmiştir.



Şekil 2.2 : BİST-100 Endeksi 05.2010-04.2015 tarihleri arası günlük puan grafiği.

Global ve yerel ekonomik gelişmelere bağlı olarak, BİST-100 Endeksi'nde zaman zaman hızlı yükselişler ve düşüşler yaşandığı, zaman zaman da belirli bir trendin sürdürüldüğü görülmektedir. Ancak fiyat değişimlerinin belirli bir rejime göre olmadığı anlaşılmaktadır. Piyasada görülen fiyat değişimleri anlık veri ve haberlere bağlı olarak gerçekleşmektedir.

Şekil 2.3'te ise BİST-100 Endeksinin 05.2010-04.2015 tarihleri arasındaki logartimik getiri grafiği gösterilmiştir. Logaritmik getiri dağılımının daha belirgin gözlemlenebilmesi için fiyat ve getiri grafiklerine yer verilmiştir. Bu grafikte günlük bazdaki fiyat değişimlerinin genel olarak $[-0.05, 0.05]$ bandında değişim gösterdiği bu aralığın dışına bir kaç kez çıkılabildiği görülmektedir.



Şekil 2.3 : BİST-100 Endeksi 05.2010-04.2015 tarihleri arasındaki logaritmik getiri grafiği.

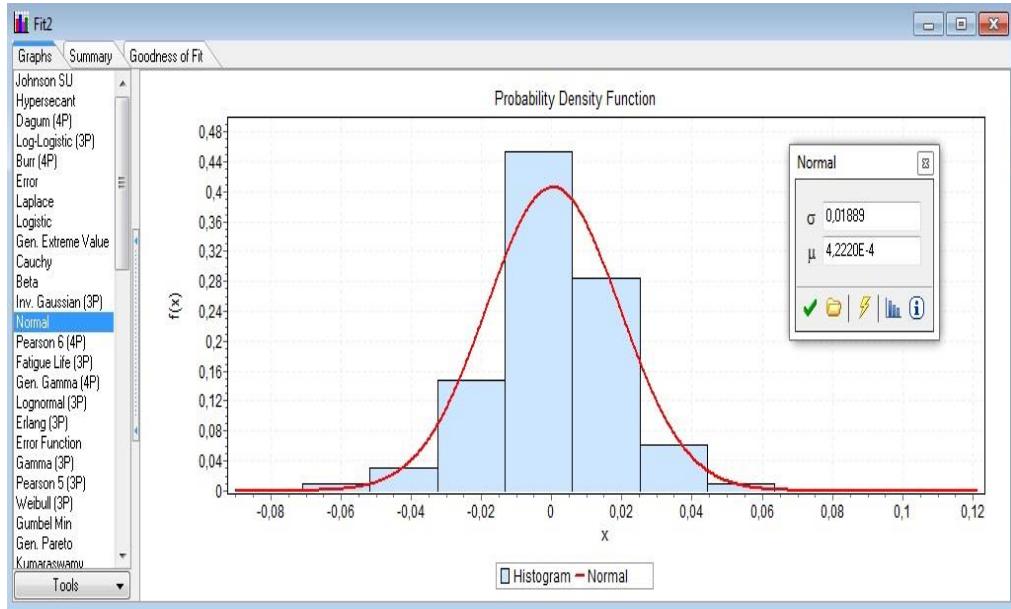
Her iki grafiğe bakıldığında fiyatın uzun süreli aynı karakteristikte bir seyir izlemediği görülmektedir. Riskli ürün fiyatının gelecek seyrinin modellenmesinde bir olasılık dağılımı yerine stokastik bir süreç daha uygun olmaktadır. Bir endeks için olduğu gibi bir menkul kıymet için ya da herhangi bir finansal varlık için aynı durum söz konusudur.

Endeks ya da hisse senedi gibi riskli ürün fiyatlarının bir stokastik sürece uygun olarak denklem (2.11)'de verilen stokastik diferansiyel denkleme bağlı değişim gösterdiğine daha önce değinilmişti. Bu şekilde stokastik süreç içeren problemlerin

çözümü için bir stokastik integral ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Buradan bulunacak sonuca göre ilgili beklenen değer ifadeleri yazılabilir (Seydel, 2006). Stokastik integrallere ve stokastik diferansiyel denkelemlere Opsiyon Fiyatlaması bölümünde detaylı olarak değinilmiştir.

Logaritmik getiri ölçeğinde bir veri analizi yapıldığında, logaritmik getirilerin bir dağılım ortaya koyma hususunda daha elverişli olduğu görülmektedir. Empirik veri incelendiğinde belirli dönemlerde logaritmik getirilerin mevcut dağılımlardan bazılarına yaklaşık olduğu bulgulanmıştır (Seydel, 2006).

Şekil 2.2’de grafiği verilmiş olan BİST-100 Endeksinin aynı dönem için günlük logartimik getiri vektörü hesaplanmış ve bu vektör StatFit paket programı ile istatistik açısından analiz edilmiştir. Buna göre logaritmik getirilerin ortalaması $\mu = 0.00042$ ve standart sapması $\sigma = 0.01889$ olan yaklaşık bir normal dağılıma uygun olduğu bulunmuştur. Bu parametreler StatFit programı tarafından en büyük olabilirlik kestirimi yöntemine göre hesaplanmıştır. Şekil 2.4’te BİST-100 Endeksinin empirik logaritmik getiri dağılımı ile StatFit tarafından bulunan en yakın bir normal dağılım eşleştirmesi görülmektedir. Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli de temel olarak, dayanak varlık logaritmik getirilerinin normal dağılıma uygun olduğu kabulüne dayanmaktadır.

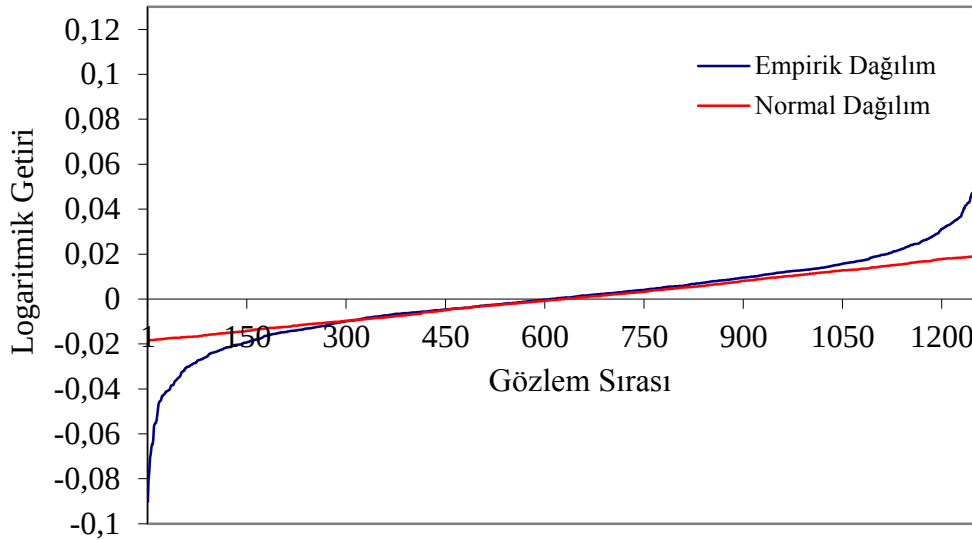


Şekil 2.4 : BİST-100 Endeksi empirik logaritmik getiri dağılımı (histogram grafik) ve parametreleri uyarlanmış normal dağılım kıyaslaması.

Empirik verinin normal dağılımın atadığından daha fazla ortalama civarına yığıldığı görülmektedir. Bununla birlikte ortalamadan biraz uzak noktalarda empirik veri daha az çıkarken, uç noktalarda empirik veriye normal dağılımın atadığından daha fazla rastlanmaktadır. Normal dağılımın BİST-100 endeksi için uç noktalara çok düşük olasılık atadığı görülmektedir. Genel olarak riskli ürünlerin çoğunluğu için de aynı durumdan söz edilebilir. Öncü Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin en büyük eksiklerinden bir tanesi normal dağılımın uç noktalara yeterli ağırlık vermemesidir.

Uç noktalardaki özel durumu daha açık gözlemleyebilmek amacıyla empirik logaritmik getiriler ve normal dağılım sonuçları küçükten büyüğe sıralanarak Şekil 2.6'da görülen grafik elde edilmiştir. Normal dağılıma uygun logaritmik getiriler $(-0.02, 0.02)$ aralığında değişirken, empirik logaritmik getirilerin $(-0.10, 0.12)$ aralığında değerler aldığı görülmektedir.

Bu şekilde empirik verinin normal dağılımdan sapma gösterdiği ve alternatif bir başka dağılımın daha fazla örtüşme sağlayacağı söylenebilir. Uç bölgelerden daha sık örnekleme yapan dağılım ailesi kullanmak ya da fiyat sapmalarını da içeren koşullu olasılık dağılımı kullanmak daha temsilci bir örnekleme yapılmasını sağlayabilir (Yön S. , 2007). Opsiyon fiyatlaması için benzetim uygulamalarında gama, pareto ve ya beta dağılımı gibi normal dağılımın dışındaki dağılımlara yer verilebilir (Charnes, 2000).



Şekil 2.5 : BİST-100 Endeksi için küçükten büyüğe sıralanmış empirik logaritmik getiri ve normal dağılımdan alınmış logartimik getirilerin kıyaslanması.

Burada empirik veri olarak beş yıllık süre içerisinde 1259 günlük kapanış puanları alınmıştır. Bu verilerden hareketle 1258 adet logaritmik getiri verisi hesaplanmıştır. Şekil 2.5'de ise getiriler küçükten büyüğe sıralanarak normal dağılım kıyaslamasına yer verilmiştir.

Günlük kapanış fiyatları esas alınarak yapılan logartimik getiri hesaplamaları finansal analiz ve modellerde en çok kullanılan verilerdir. Günlük veri kümesinin dışında haftalık ya da aylık fiyat vektörleri incelendiğinde normal dağılıma daha fazla uygunluk sağlandığı görülmektedir (Jäckel, 2002). Bu durum uzun vadeli tasarrufla bulunacak yatırımcıların getiri beklentilerini modellerken normal dağılımı daha güvenli şekilde kullanacakları anlamına gelmektedir. Logaritmik getiri dağılımına Bölüm 4'te tekrar değinmek üzere opsiyonların tanıtımına geçilebilir.

2.4 Finansal Opsiyonlar

Organize borsalarda türev ürünler üzerine işlem yapabilmek için başlangıçta türev işlem yetki sözleşmesi imzalanır. Sonraki işlemlerin sürdürülmesi bir kez alınan bu yetki sözleşmesi kapsamında yapılmaktadır. Tezgahüstü piyasalarda ise opsiyon işlemleri alıcı ile satıcı arasında düzenlenen kullanım sözleşmelerine bağlanmıştır. Bu kapsamda menkul kıymetlerin ileri bir tarihte belirli bir fiyattan alımı ya da satımı öngörülmekte olup sözleşme unsurları her seferinde belirlenmektedir.

Sözleşmede opsiyonu ihraç eden taraf yazıcı, opsiyonu piyasa fiyatından satın alan taraf opsiyon sahibi olarak geçmektedir. Yazıcı ileri bir tarihte opsiyon sahibinin talebi halinde işlemi gerçekleştirme yükümlülüğü altındadır. Buna karşın opsiyon sahibi için işlemi gerçekleştirme yükümlülüğü bulunmamaktadır. Opsiyon sahibi piyasa şartlarının lehine olması durumunda opsiyonu kullanır. Aksi halde opsiyon kullanılmaz ve vade sonundan itibaren geçersiz olur. Tek taraflı işlem yükümlülüğü getirmesi bakımından opsiyonlar piyasadaki benzeri olan "forward" ve "futures" gibi vadeli işlem sözleşmelerinden ayrılmaktadır.

Opsiyon sözleşmelerinde alımı ya da satımı konu edilen menkul kıymete "dayanak varlık" ismi verilir ve opsiyonlar bu dayanak varlığın üzerine yazılır. Opsiyonların büyük çoğunluğu faiz, hisse senedi, döviz veya çeşitli emtia üzerine yazılmıştır. Bununla birlikte tezgahüstü piyasalarda dayanak varlık konusunda bir kısıtlama söz

konusu değildir. Örneğin elektrik üretim veya tüketim miktarına bağlı opsiyonlar da bulunmaktadır.

Yatırımcı talebine bağlı olarak ticari bir kıymet üzerine ya da ticari olmayan herhangi bir varlık üzerine opsiyon yazılabilir. Ticari olmayan varlıklar böylece ticarileştirilmiş olmaktadır. Opsiyon sözleşmesinin geçerli olduğu son tarihe vade tarihi denir. Sözleşmenin yapıldığı tarihte geçerli olan dayanak varlık fiyatına spot fiyat, ileri tarihte geçerli olacak fiyata kullanım fiyatı denilmektedir. Kullanım fiyatı önceden belirlenir ve opsiyon sözleşmesinde yer alır. Opsiyonun bugünkü fiyatına prim ismi verilmektedir. Opsiyonun bugünkü fiyatı yukarıda belirtilen vade tarihi, spot fiyat ve kullanım fiyatı ile birlikte risksiz faiz oranı ve spot fiyata ait oynaklık (volatilite) olmak üzere beş adet değişkene bağlı olarak belirlenmektedir. Opsiyon fiyatı aynı zamanda opsiyon çeşidine bağlı olarak değişir. Sadece vade tarihinde kullanılabilen veya vade tarihinden önce kullanıma izin veren opsiyon çeşitleri bulunmaktadır.

Bu bölümde ilk olarak opsiyon piyasalarına değinilmiştir. Sonra opsiyon ürünü hakkında detaylı bilgi verilmiş olup opsiyon sözleşmeleri ve opsiyon çeşitlerine yer verilmiş, opsiyonların kullanım alanları açıklanmıştır. Son olarak opsiyonların geometrisine yer verilerek opsiyon fiyatının seyri gösterilmiştir.

2.4.1 Opsiyon piyasaları

Opsiyon piyasalarında fiyat hareketleri dayanak varlık menkul kıymet piyasalarından daha önce meydana gelmektedir. Açıklanan veri ve haberlere bağlı olarak piyasalarda fiyat hareketleri gerçekleşmektedir. Türev işlem piyasalarında ekonomik gelişmelere bağlı beklentilerin şekillenmesinin ve bir anlamda kayıt altına alınmış olmasının ardından dayanak varlık piyasalarında fiyat hareketleri başlamaktadır. Tüm dünyada Vadeli İşlem ve Opsiyon Piyasalarının⁸ Menkul Kıymet Piyasalarına göre daha erken saatlerde işleme açılmasının nedeni budur. Aynı zamanda bu durum, opsiyon piyasalarının son yıllarda yüksek önem kazanmasının nedenleri arasında sayılmaktadır.

Opsiyonlar üzerine yapılan akademik çalışmalar neticesinde opsiyon fiyatının daha şeffaf ve doğru şekilde hesaplanmaya başlanması opsiyon işlem hacimlerinde kısa

⁸ Piyasalar kullanımı ile organize borsalar tabir edilmekte ve opsiyon borsaları ile hisse senedi borsalarının seans başlangıç saatleri kıyaslanmaktadır.

sürede çok büyük artış görülmesini sağlamıştır. Böylece türev ürün piyasalarındaki işlem hacmi dayanak ürün piyasalarındaki işlem hacimlerini geride bırakmıştır, (SERPAM, 2012). Çizelge 2.1’de en çok kullanılan dayanak varlıklardan hisse senetlerinin (pay senetleri) dünya borsalarına ait 2014 yılına ilişkin işlem hacimleri listelenmiştir (TSPB, 2015).

Eski ismi İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB) olan ve 30 Aralık 2012 tarihinde yürürlüğe giren 6362 sayılı yeni Sermaye Piyasası Kanunu kapsamında Anonim Şirket haline dönüştürülerek ismi Borsa İstanbul A.Ş. (BİST) yapılan milli borsamız 370 milyar dolarlık işlem hacmi ile yirminci sırada yer almıştır. Bu listede WFE (World Federation of Exchanges) üyesi en büyük 52 borsanın toplam işlem hacminin 2014 yılında yaklaşık 89 trilyon dolar olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.1 : Uluslararası Borsaların 2014 yılı işlem hacimleri (milyar dolar).

Sıra	Borsa Adı	İşlem Hacmi	İşlem Hacmi Payı	Hacim/PiyasaDeğeri
1	NASDAQ OMX	31,044	% 35.0	% 444.8
2	NYSE Euronext	18,234	% 20.5	% 94.2
3	Shanghai SE	6,076	% 6.8	% 154.5
4	Shenzhen SE	5,912	% 6.7	% 285.2
5	Tokyo SE	5,365	% 6.0	% 122.5
6	Londra SE Grup	4,021	% 4.5	% 4.5
7	Euronext(Avrupa)	2,938	% 3.3	% 88.5
8	Hong Kong SE	1,630	% 1.8	% 50.4
9	Deutsche Börse	1,464	% 1.5	% 84.2
10	TMX Grup	1,349	% 1.5	% 64.4
20	BİST	370	% 0.4	% 168.3
TOPLAM *		88,757	%100	%130.9

* WFE'ye kayıtlı olan 52 ülke borsasının toplam işlem hacmidir.

Kaynak: TSPB (Türkiye Sermaye Piyasası Birliği) Finansal Piyasalar 2014 Yılı Raporu, sf. 11

Çizelge 2.2’de ise türev işleme konu işlem miktarlarının (notional amount) yıllık bazdaki detayları verilmiştir. Yıllık bazda toplam işlem miktarlarında büyük farklar yaşanmasa da 2012 yılındaki global ekonomik toparlanmaya bağlı olarak 2013 yılındaki türev işlem miktarlarında artış görülmektedir. Hisse senetleri piyasalarıyla kıyaslandığında türev işlem piyasalarının önemi daha net bir şekilde anlaşılabilir. 2014 yılı içinde yaklaşık 630 trilyon dolar seviyesinde toplam türev işlem gerçekleştirilmiştir.

Opsiyon fiyatı bir başka menkul kıymetin fiyatından türetilmektedir. Bu yüzden opsiyonlar türev ürün olarak nitelendirilmiştir. Opsiyonlar, Vadeli İşlem Sözleşmeleri (futures) ile birlikte hem organize borsalarda hem de tezgahüstü Vadeli İşlemler (forward) ve Para veya Faiz Takası (swap) gibi diğer türev ürünlerle birlikte tezgahüstü piyasalarda işlem görmektedir.

Çizelge 2.2 : Tezgahüstü türev ürünlerin yıllık işlem miktarları (milyar dolar).

Türev Ürün	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Döviz Söz.	50.042	49.181	57.796	63.349	67.358	70.553	75.879
Faiz Söz.	432.657	449.875	465.260	504.117	492.605	584.799	505.454
Hisse Senedi Söz.	6.471	5.937	5.635	5.982	6.251	6.560	7.940
Emtia Söz.	4.427	2.944	2.922	3.091	2.587	2.204	1.868
Kredi Tem. Takasları	41.883	32.693	29.898	28.626	25.068	21.020	16.399
Diğer Söz.	62.667	63.270	39.536	42.610	41.815	25.496	22.609
TOPLAM	598.147	603.900	601.047	647.775	635.685	710.663	630.149

Kaynak: BIS – Bank for International Settlements

Ülkemizde ise opsiyon piyasalarında ancak son yıllarda gelişme sağlanmıştır. Tezgah üstü piyasada opsiyon ticareti artmış ve Borsa İstanbul’da temel oniki adet hisse senedi üzerine yazılmış opsiyonlar 2013 yılında işlem görmeye başlamıştır. Önceleri işlem hacimlerinin düşük seviyelerde olması, bazen bir hatta bazen hiç işlem gerçekleşmemesi durumlarıyla karşılaşılmasına rağmen gelecek dönemlerden itibaren katılımcı sayısında ve işlem hacimlerinde artış beklenmektedir. Borsa İstanbul'daki opsiyon işlemlerinin detaylarına Borsa İstanbul internet sayfasından bakılabilir.

2.4.2 Opsiyon sözleşmeleri

Opsiyon sözleşmesi iki tarafı olan ve gelecekte bir kıymetin alım-satımını öngören kontrattır. Bu kontratla satın alma ya da satma hakkı kazanılır. Alma hakkı tanıyan opsiyona *alım opsiyonu (call option)*, satma hakkı tanıyan opsiyona *satım opsiyonu (put option)* denir. Opsiyon kontratının taraflarından bir tanesi kontratın unsurlarını belirleyerek piyasada satan *yazıcıdır (writer)*. Diğer tarafısa opsiyonu piyasa fiyatından satın alarak elinde bulunduran *opsiyon sahibidir (holder)*. Opsiyon yazıcısı bir yükümlülük altına girerken opsiyon sahibinin herhangi bir yükümlülüğü bulunmamaktadır. Bu nedenle opsiyon yazıcıları tezgah üstü piyasada genellikle bankalar ya da finans kuruluşları gibi yükümlülük altına girebilen ve bu yükümlülüğü yerine getireceğine güven duyulan kurumlardır.

Opsiyonlar belirli bir vade tarihine (*expiration date*) kadar geçerlidir. Vade tarihi T sembolüyle gösterilir. Dayanak varlığın piyasa fiyatı S ile gösterilmektedir. Opsiyon kontratında önceden belirlenen alım ya da satım fiyatına *kullanım fiyatı (strike price)* ya da *exercise price*) denir ve K sembolüyle gösterilir. Piyasada geçerli risksiz faiz oranı r ile gösterilir. Dayanak varlık getirilerine ait parametreler ise (μ, σ) ile gösterilmektedir. Opsiyon fiyatlama alanındaki farklı kullanımlar arasında yaygın olarak tercih edilen parametre gösterimi Çizelge 2.3'te verilmiş olup tez boyunca bu kısaltmalar kullanılmıştır.

Çizelge 2.3 : Parametre listesi.

t	opsiyon fiyatının hesaplanma zamanı, $0 \leq t \leq T$
T	vade sonu
r	risksiz faiz oranı
S_t	dayanak varlığın bir t zamanındaki piyasa fiyatı
μ	dayanak varlığın yıllık getirisi
σ	dayanak varlığın yıllık oynaklık düzeyi (volatilite)
K	kullanım fiyatı

Finansal opsiyonlar gelecekte sahibine opsiyonun üzerine yazılmış olduğu dayanak varlığı (underlying) belirli bir fiyat ve belirli bir miktarda satın alma ya da satma hakkı vermektedir. Opsiyonlar iki türde olabilir:

- Alım opsiyonları (call options) : Sahibine kontrata konu menkul değeri ya da risk unsurunu ileri bir tarihte kullanım fiyatından (K) satın alma hakkı verir.
- Satım opsiyonları (put options) : Sahibine kontrata konu menkul değeri ya da risk unsurunu ileri bir tarihte kullanım fiyatından (K) satma hakkı verir.

Vade tarihinde opsiyonun kullanım fiyatı ile dayanak varlığın piyasa fiyatı kıyaslanarak opsiyonun kullanılıp kullanılmayacağına karar verilir. Opsiyon sahibi, kontratta belirtilen vade sonunda opsiyon sözleşmesinde belirtilen şartların piyasa şartlarından daha avantajlı olması durumunda opsiyonu kullanır. Amerikan tipi bir opsiyon için vade sonundan önce bir tarihte kontrat şartlarının avantajlı olması halinde opsiyon kullanılabilir ya da daha avantajlı hale gelineceği düşüncesi ile beklemek tercih edilebilir.

Opsiyonların kullanım şekli iki türde gerçekleşebilir. Opsiyonların dayanak varlığı satın alma ya da satma hakkı tanınması dolayısıyla birinci olarak dayanak varlığın teslim edilmesi esasına göre opsiyon kullanılabilir. Bu takdirde alım opsiyonu sahibi yazıcıdan dayanak varlığı talep eder. Satım opsiyonu sahibi ise elinde bulunan dayanak varlığı yazıcıya teslim eder.

İkinci olarak bir teslimat olmaksızın opsiyon sahibinin talebi halinde yazıcı opsiyon sahibine opsiyonun sağladığı getiri tutarında ödeme yapar. Opsiyonun sağladığı getiri kullanım fiyatı ile dayanak varlığın spot fiyatı arasındaki fark kadardır.

Bir örnek üzerinden opsiyonların kullanım şartları açıklanabilir: Borsa İstanbul'da işlem görmekte olan bir HHHHHH hisse senedi üzerine yazılmış bir opsiyon ele alınsın.

Örnek 2.2 : Bu HHHHHH hisse senedinin bugünkü fiyatı $S_0 = 50$ TL, hisse senedi üzerine yazılmış altı ay vadeli opsiyonunun vade sonundaki kullanım fiyatı da $K = 52$ TL olsun. Vade sonunda hisse senedinin piyasa fiyatı,

- $S_{T=0.5} > 52$ TL olması durumunda bu opsiyon bir alım opsiyonu ise kullanılır. Satım opsiyonu ise kullanılmaz. Örneğin piyasa fiyatının $S_{T=0.5} = 55$ TL olduğu düşünülürse alım opsiyonu sahibi öncelikle hisse senedini yazıcıdan $K = 52$ TL'den satın alır. Opsiyon sahibi isterse hisse senedini piyasada hemen $S = 55$ TL'den satarak 3 TL getiri elde edebilir ya da beklemeyi tercih ederek daha yüksek getiri elde etme yoluna gidebilir. Ya da dayanak varlığı yazıcıdan satın almadan, yazıcıdan sadece 3 TL'lik farkı talep edebilir. Satım opsiyonu sahibi ise opsiyonu hiçbir şekilde kullanmaz. Opsiyonu kullanmak yerine elinde hisse senedi varsa bunu piyasada 55 TL'den satabilir.
- $S_{T=0.5} \leq 52$ TL olması durumunda alım opsiyonu hiç bir şekilde kullanılmaz. Çünkü hisse senedi piyasadan daha ucuza temin edilebilir. Satım opsiyonu ise kullanılır. Ya daha önceden elde bulundurulan HHHHH hisse senedi 52 TL'den yazıcıya satılır, ya da yazıcıdan opsiyon getirisi talep edilir.

Opsiyon kullanılmadan vade sonu geldiği takdirde opsiyon geçersiz olmaktadır. Bu bakımdan, futures ve forward gibi Vadeli İşlem Sözleşmelerinde her iki taraf için söz konusu olan takas zorunluluğu, opsiyon işlemlerinde opsiyon sahibi için bulunmamaktadır. Opsiyon sahibinin talep etmesi halinde sadece opsiyon yazıcısı için takas zorunluluğu bulunur. Opsiyonun vade süresi içinde opsiyon sahibinin talebi gerçekleşmezse, opsiyon yazıcısı opsiyonu satarken kontrat bedeli olarak aldığı prim (opsiyon fiyatı) kadar getiri elde etmiş olmaktadır.

Bir t tarihindeki opsiyon primi $V(S, t)$, dayanak varlık fiyatı ve zamana bağlı bir fonksiyon şeklinde gösterilir. Ancak vade sonuna $(T - t)$ zaman kalan bir opsiyonun piyasa fiyatı basitçe S ve $(T - t)$ 'ye bağlı bir fonksiyon olmayıp bir stokastik süreçte uygun olarak risksiz faiz oranı (r), kullanım fiyatı (K) ve oynaklık (σ) dahil olmak üzere beş adet parametreye bağlı değişim göstermektedir. Opsiyon fiyatının belirlenmesi için ileriki bölümlerde değinileceği üzere iki temel varsayım yapılmaktadır. Bunlar arbitraj imkanı (anlık kazanç imkanı) sürekli bulunmayan piyasa koşulları ve risksiz fiyatlandırma (risk-neutral pricing) ilkelerinin sağlanmış olduğu piyasa koşullarının geçerli olduğu kabulüdür (Seydel, 2006).

Arbitraj işlemi bir ürünü ucuz olduğu bir piyasadan satın alıp fiyatının yüksek olduğu bir başka piyasada hemen satma imkanındır. Arbitraj imkanının piyasada sürekli bulunmaması, sebepsiz yüksek miktartlı getiri elde edilerek fiyat mekanizmasının bozulmasının önüne geçmektedir. Böylece piyasa fiyatının modellenenebilir bir stokastik süreç dahilinde değişim göstermesi sağlanmıştır. Arbitraj imkanı olmayan piyasa Etkin Piyasa Hipotezi (Efficient Market Hypothesis) ile tanımlanmıştır (Bodie ve diğ. 2007). Buna göre piyasadaki tüm katılımcıların piyasadaki her türlü gelişmeden, bilgi ve haberden aynı anda ve eşit düzeyde haberdar olduğu kabul edilmektedir. Risksiz fiyatlama prensiplerine göre; empririk getiri dağılımına eş bir martingal olasılık dağılımı (equivalent martingale measure) altında yapılan hesaplamalardan bulunacak getirinin piyasadaki risksiz ürünlerden aynı vadede elde edilecek getiriye eşit olması gerektiği kabul edilmiştir. Risksiz fiyatlama ve arbitraj işlemlerinin sürekli bulunmaması konuları Bölüm 4'te daha detaylı olarak açıklanmıştır.

Opsiyon kontratına konu olan dayanak varlık hakkında bir sınırlama bulunmamaktadır. Dayanak varlık bir adet ya da birden çok menkul kıymet olabileceği gibi her türlü finansal varlık ya da gayri menkuller de opsiyon sözleşmelerine konu olabilir. Dayanak varlığın bir hisse senedi olması halinde hisse senedinin temettü ödemeli ya da temettü ödemesiz olması opsiyon fiyatı açısından önem arz etmektedir. Temettü ödemeli hisse senedi üzerine yazılı opsiyonların fiyatı hesaplanırken temettü oranı⁹ fiyata etki eden beş değişkenle birlikte ele alınır. Organize borsalardaki dayanak varlıklar genellikle hisse senedi, sektörel veya genel endeks ile döviz, tahvil, bono, faiz ve çeşitli emtia olmaktadır. Emtia grubu fiziki teslimatlı ya da fiziki teslimatsız olarak altın, petrol, buğday ve pamuk gibi ürünleri içermektedir. Ancak finansal kurumlar tarafından yatırımcı talebi doğrultusunda ticari ya da ticari olmayan herhangi bir varlık üzerine tezgah üstü piyasada opsiyon çıkarılabilir. Daha genel anlamda opsiyon sözleşmesine konu dayanak varlıklar sözleşme kapsamında risk transferi içeren herhangi bir unsur olarak tanımlanabilir.

İlk olarak tezgah üstü piyasada işlem görmeye başlayan bazı opsiyonlar daha sonra organize borsalarda da işlem görmeye başlamıştır. Örneğin hava durumuna bağlı

⁹ Temettü oranı opsiyon fiyatlama modeline basit bir işlemle dahil edilmektedir. Girdi değişkenlerinden olan risksiz faiz oranından temettü oranının düşülmesi yoluyla opsiyon fiyatlama modeli güncellenmiş olmaktadır.

opsiyon kontratları, elektrik üretimi veya tüketimine bağlı opsiyon kontratları gibi opsiyonlar gelişmiş ülke borsalarında işlem görmektedir. Ülkemizde 2013 yılında Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası'nın İzmir'den İstanbul'a taşınarak BİST bünyesine katılmasına karar verilmiştir. Vadeli İşlem Sözleşmeleri ve Opsiyonlar, BİST bünyesinde VİOP – Vadeli İşlem ve Opsiyon Piyasası Pazarları'nda işlem görmektedir. Ayrıca BİST bünyesindeki Elektrik Vadeli İşlem Ana Pazarında, Elektrik vadeli sözleşmeleri işlem görmektedir. Bu gibi türev ürünlerin fiyatlanması için sofistike yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Gelecek dönem için bu alan çok büyük gelişim göstermeye açıktır (Bastani ve diğ. 2013), (TSPB, 2015).

Kapalı formüllerle ödentisi hesaplanabilen opsiyonlar (Avrupa tipi opsiyonlar) ile birlikte günümüzün dinamik piyasa yapısı içinde çok daha karmaşık opsiyonların fiyatlanmasını sağlayan Monte Carlo yöntemiyle Amerikan opsiyonu türevlerinin fiyatlanması yapılabilir. Yatırımcı taleplerinin karşılanabilmesi için hali hazırda çok çeşitli türde opsiyonlar tasarlanmıştır. Bu karmaşık opsiyonların fiyatlanabilmesi için Monte Carlo İntegrasyon tekniği uygulanabilirlik ve esneklik bakımından en kullanışlı yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Ancak opsiyonlar çok yüksek hacimli işlemlere konu olduğundan Monte Carlo İntegrasyon tekniği kullanarak hesaplanan opsiyon fiyatının güven aralığının mümkün olduğunca daraltılması gerekmektedir. Bu konu hem akademisyenler için hem de piyasa mensupları için çok önemli bir çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı global pazarda işlem gören opsiyonlar ile birlikte ülkemiz hisse senetleri borsasında olduğu gibi fiyat marjı uygulamasının yer aldığı ve dolayısıyla sınırlı fiyat süreçlerine sahip piyasalarda işlem gören opsiyonların Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile fiyatlarının hesaplanması ve bu fiyatın hesaplanmasında ortaya çıkan varyansın mümkün olan en az düzeye indirilmesinin sağlanmasıdır. Opsiyon sözleşmeleri hakkında bilgi verildikten sonra opsiyonların çeşitleri ve opsiyonların özellikleri üzerinde durulabilir.

2.4.3 Opsiyon çeşitleri

Opsiyonlar farklı konulara sınıflandırmaya tabi tutulabilirler. Yapılacak işleme göre alım opsiyonu ve satım opsiyonu olmak üzere opsiyonlar iki türdedir. Opsiyon değerliliğine göre zararda opsiyon, başabaşta opsiyon ve karda opsiyon olmak üzere

üçe ayrılır. Opsiyon kontratında tarif edilmiş özelliklerine göre standart opsiyonlar ve egzotik opsiyonlar (yeni nesil birçok ürün) olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Tanım 2.1 : Opsiyonunun kullanıldığı tarihteki getirisini belirleyen fonksiyona ödünleşme fonksiyonu (payoff function) denir. Bir t tarihinde kullanılan opsiyonun ödünleşme fonksiyonu alım opsiyonları için $(S_t - K)^+$ ile ifade edilmektedir. Burada $(X)^+ = \max(X, 0)$ ifadesi bir X sayısı ya da sıfırdan büyük olanının alınması anlamında kullanılmıştır. Satım opsiyonu için ödünleşme fonksiyonu $(K - S_t)^+$ ile ifade edilir.

Tanım 2.2 : Ödünleşme fonksiyonu üzerinden hesaplanan opsiyon getirisine *ödenti* denir. Ödünleşme fonksiyonu ile bulunan ödentinin şimdiki zamana sürekli iskontolama yapılarak çekilmesi ile opsiyon primi hesaplanmaktadır. Örneğin dayanak varlık fiyatı S_t için eş martingal olasılık dağılımı $P(\cdot)$ olmak üzere alım opsiyonu ödentisi

$$\text{ödenti}_a = E_t^P[(S_T - K)^+] \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilirken bir t zamanındaki alım opsiyonu primi şu şekilde hesaplanır

$$V^a(S, t) = E_t^P[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+]. \quad (2.17)$$

Opsiyonların bir başka sınıflandırma şekli ise opsiyon değerliliğine (moneyness) göre yapılmaktadır.

Tanım 2.3 : Opsiyon değerliliği (moneyness) opsiyonun o anki getiri durumuyla ilgili bir göstergedir. Buna göre alım opsiyonları için dayanak varlık spot fiyatının kullanım fiyatına oranı hesaplanır. Bu oranın %90'dan az olması durumunda opsiyonlar zararda opsiyon (out-the-money options); %110'dan fazla olması durumunda karda opsiyon (in-the-money options); ve bu aralığın içinde kalanlara başabaşta opsiyon (at-the-money options) isimleri verilmektedir.

Satım opsiyonları içinse opsiyon değerliliği opsiyon kullanım fiyatının dayanak varlık fiyatına oranı olacak şekilde hesaplanır. Çizelge 2.4'te alım ve satım opsiyonları için opsiyon değerliliği verilmiştir. Detaylı bilgi için Bodie ve diğ. (2007) veya BİST internet sayfasına bakılabilir.

Çizelge 2.4 : Opsiyon değeri (moneyness).

Opsiyon tipi	Alım $\left(\frac{S}{K}\right)$	Satım $\left(\frac{K}{S}\right)$
Zararda opsiyon (out-the-money options)	$\left(\frac{S}{K}\right) < 0.9$	$\left(\frac{K}{S}\right) < 0.9$
Başabaşta Opsiyon (at-the-money options)	$\left(\frac{S}{K}\right) \in [0.9, 1.1]$	$\left(\frac{K}{S}\right) \in [0.9, 1.1]$
Karda opsiyon (in-the-money options)	$\left(\frac{S}{K}\right) > 1.1$	$\left(\frac{K}{S}\right) > 1.1$

Opsiyonlar yapılan işleme ve opsiyon değeriğine göre sınıflandırılmasının dışında esas olarak unsurlarına göre Standart Opsiyonlar ve Egzotik Opsiyonlar olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır.

2.4.3.1 Standart opsiyonlar (Vanilla options)

Opsiyon kontratındaki unsurları ve özellikleri önceden belirlenmiş olan standart nitelikteki opsiyonlardır. Organize borsalarda ya da tezgah üstünde işlem görürler. Bu opsiyonların kullanıma ilişkin parametreleri kesin olarak belirlenmiştir. Sonradan bu parametreler üzerinde herhangi bir değışikliğe gidilemez. Vade sonundan önceki bir zamanda kullanıma olanak tanıyıp tanımamasına göre Avrupa ve Amerikan tipi olarak iki gruba ayrılmaktadır.

- Avrupa tipi opsiyonlar (European options) : Sadece üzerinde yazılı vade tarihinde (T) kullanılabilen opsiyonlardır. Avrupa tipi opsiyonların fiyatı Nobel Ekonomi ödülü sahibi akademisyenler Fischer Black ve Myron Scholes'un 1973 yılında geliştirmiş oldukları (Black ve Scholes, 1973) modeliyle hesaplanabilmektedir. Bu model dayanak varlık fiyatının denklem (2.11)'de verilen kısmi diferansiyel denkleme bağlı olarak değışim gösterdiği kabulüne dayanır. Buradan hareketle ödenti için başka bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü olacak şekilde bir kapalı formül bulunmuştur. Bu modelin detaylarına ileriki bölümlerde değinilecektir.
- Amerikan tipi opsiyonlar (American Options) : Opsiyonun yazıldığı tarihten itibaren vade sonuna kadar istenen herhangi bir tarihte kullanılmasına olanak tanıyan opsiyonlardır. Amerikan opsiyonlarının kapalı formüllerle fiyatlanması için (Black ve Scholes, 1973) modelinin geliştirilmesinden itibaren birçok akademik çalışma

yapılmış ancak yaklaşık çözüm veren birkaç model dışında bir sonuç alınamamıştır. Amerikan tipi opsiyonların vade seçeneğine bağlı olarak değişken sayısının fazlalaşması ve her bir kontrol noktasında opsiyonunun kullanılma ya da potansiyel daha yüksek getiri için devam etme kararının verilecek olması gibi faktörlerden dolayı kapalı formda bir çözümü bulunamamıştır. Bu yüzden Monte Carlo integrasyon yöntemi Amerikan tipi opsiyonların fiyatlanması için en uygun yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Ödentisinin hesaplanması Avrupa tipi opsiyonlara göre daha zor ve karmaşık olmasına karşın en yaygın kullanım alanına sahip opsiyonlar Amerikan tipindedir.

2.4.3.2 Egzotik opsiyonlar (Exotic options)

Egzotik Opsiyonlar standart nitelikte olmayan ve genellikle yatırımcı talebine bağlı olarak bankalar ya da finans kuruluşları tarafından ihraç edilen opsiyonlardır. Ödünleşme fonksiyonunun karakteristiğine bağlı olarak veya opsiyonun geçerlilik kazanma şartına bağlı olarak tasarlanır ve buna uygun şekilde isimlendirilirler. Bu tipteki opsiyonların kendi içinde dahi çok çeşitli türde yazılması mümkün olmakla birlikte en çok rastlananları Asya tipi opsiyonlar (Asian options) ile Bariyer opsiyonlarıdır (Barrier options).

Asya tipi opsiyonların ödünleşme fonksiyonunda kullanım anındaki spot fiyat (S_t) yerine kullanım anından önceki belirli bir periyoda ait fiyatların ağırlıklı ortalaması ($\tilde{S}_p$) dikkate alınır. Periyot içindeki tüm fiyatlar dikkate alınabileceği gibi bu zaman dilimi içinden seçilmiş bir kaç noktadaki fiyat dikkate alınarak da ağırlıklı ortalama fiyat hesaplaması yapılabilir. Burada periyot uzunluğu opsiyon vadesi gözetilerek belirlenir. Bu dönemin uzunluğu-kısalığı ödenti üzerinde etkilidir.

Bariyer opsiyonlarının çok fazla türü bulunmaktadır. Bariyer opsiyonları temel olarak dayanak varlık fiyatının (S) opsiyon vadesi içinde izleyeceği seyrin gözetilmesine bağlı olarak tanımlanır. Bariyer opsiyonları dayanak varlık fiyatının önceden belirlenmiş seviyelere ulaşp ulaşmaması kıstasına bağlı olarak opsiyonun geçerlilik kazanması esasına dayanmaktadır. Örneğin üst bariyerli opsiyonlar (up-and-in barrier options) spot fiyatın opsiyon vadesi içinde herhangi bir zamanda belirli bir üst değere ulaşması halinde aktive olmaktadır. Bir Bariyer opsiyonu aktive olduktan sonra standart Avrupa ya da Amerikan tipindeki opsiyonlar gibi işlem görür

ve ödünleşme fonksiyonu yine spot fiyat ve kullanım fiyatı kıyaslamasına göre hesaplanır.

Üst bariyerli bir başka opsiyon çeşidi dayanak varlık fiyatının opsiyon ömrü süresince üst bariyere temas etmesi halinde geçersiz sayılan opsiyonlardır (up-and-out barrier options). Aynı şekilde alt bariyerli opsiyonlar, hem alt hem üst bariyerli opsiyonlar veya birden çok alt ve üst bariyerli opsiyonlar tasarlanabilir. Opsiyon aktive olduktan sonra kullanım tarihinde dayanak varlık spot fiyatının yine bu bariyer seviyesinin üzerinde ya da altında olmasına bağlı olarak ödünleşme fonksiyonu koşullu hesaplanan Bariyer opsiyonları da mevcuttur. Bariyer opsiyonları için geçerlilik kazanan ve kazanmayan olarak (knock-in) veya (knock-out) şeklinde tanımlamalar da yapılmıştır. Bariyer opsiyonu çeşitlerinde görüldüğü üzere bir sınır söz konusu değildir (Boyle ve Draviam, 2007).

Asya tipi opsiyonlar ile Bariyer opsiyonlarının dışında Egzotik opsiyonlar çok daha fazla çeşitte tasarlanabilir. Quanto tarzı opsiyonlar geri ödeme para biriminin farklı seçilmesini sağlar. Örneğin altın için dolar/ons fiyatı üzerine yazılmış bir opsiyonun geri ödemesinin Türk Lirası cinsinden yapılması istenirse opsiyon kontratına dolar/TL kuru da dahil edilir.

Görüldüğü üzere Egzotik opsiyonlar için sonsuz çeşitlilikte tasarım olanağı bulunmaktadır. Genel olarak bireysel ya da kurumsal yatırımcı talebine bağlı olarak talep üzerine düzenlenmiş kontratlar (any kinds of agreements) egzotik opsiyon sınıfına dahil edilir.

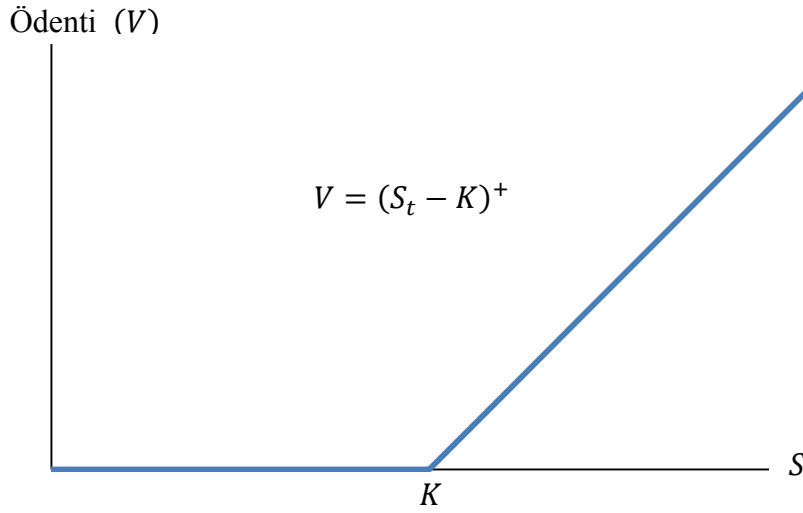
2.4.4 Opsiyonların geometrisi

Opsiyon fiyatlamasına başlamadan önce opsiyon fiyatının hangi dinamiklere bağlı olduğunu göstermek amacıyla opsiyon geometrisine değinmek gerekir. Avrupa tipindeki alım ve satım opsiyonlarının vade sonunda ortaya çıkan ödenti–dayanak varlık fiyatı grafikleri sırasıyla Şekil 2.6 ve Şekil 2.7’de görülmektedir.

Şekil 2.6’de alım opsiyonunun, vade sonunda (T) dayanak varlık fiyatının kullanım fiyatından küçük olması durumunda ($0 \leq S_T \leq K$) kullanılmayacağı görülmektedir. Bu durumda ödenti değeri sıfır olacaktır.

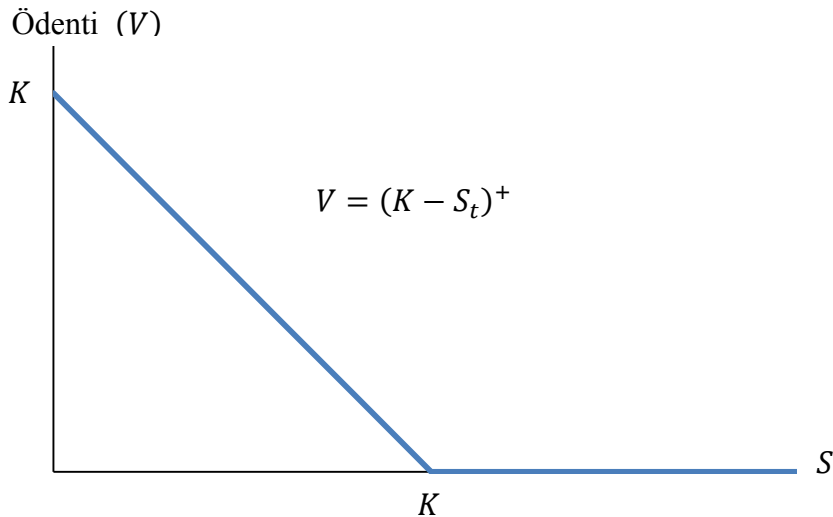
Dayanak varlık fiyatının kullanım fiyatından büyük olması halindeyse ($S_T > K$) alım opsiyonu kullanılacak ve ödünleşme fonksiyonu ile hesaplanan ödenti kadar getiri sağlanmış olacaktır. Opsiyon sahibi opsiyon yazıcısından K fiyatı üzerrinden alacağı

dayanak varlığı piyasada hemen S fiyatından satarak bu işlemten kazanç sağlamış olacaktır.



Şekil 2.6 : Alım opsiyonu ödünleşme fonksiyonu ve ödenti – S grafiği.

Şekil 2.7' de satım opsiyonu için alım opsiyonundaki durumun aksine bir seyir ortaya çıktığı görülmektedir. Opsiyon bu kez dayanak varlık fiyatının kullanım fiyatından küçük olması durumunda ($0 \leq S_T \leq K$) kullanılacak olup ödünleşme fonksiyonu ile hesaplanan ödenti kadar getiri sağlanacaktır. Vade sonundaki (T) spot fiyatın kullanım fiyatından büyük olması durumunda ise opsiyon kullanılmayacak ve geçersiz olacaktır.



Şekil 2.7 : Satım opsiyonu ödünleşme fonksiyonu ve ödenti –S grafiği.

İki grafik arasında alım opsiyonu için ödentinin sınırsız olabileceği buna karşın satım opsiyonu için ödentinin (K) ile sınırlanmış olduğu açık olarak

görülebilen bir farktır. Ayrıca vade sonuna ait ödenti - spot fiyat grafikleri oldukları unutulmamalıdır.

Böylece satım opsiyonu ödentisinin maksimum değeri ancak dayanak varlık fiyatının sıfıra düşmesi halinde gerçekleşecek olan (K) kullanım fiyatı kadar olacaktır¹⁰. Bu yüzden alım opsiyonu yazıcısı için risk satım opsiyonu yazıcısına göre daha fazladır. Olağan piyasa koşullarında tüm unsurları aynı olan alım ve satım opsiyonları arasında çoğunlukla alım opsiyonu fiyatının satım opsiyonu fiyatına göre daha yüksek olmasının bir nedeni de budur.

Alım opsiyonu fiyatının satım opsiyonu fiyatından yüksek olması durumunun birkaç istisnası olabileceği belirtilmelidir. Bu istisnaların kaynağı tez çalışmamızın kapsamı dışında olsa da buna neden olan etkenin piyasanın kuvvetle düşüş yönünde seyredeceği beklentisinin hakim olması gösterilebilir. Piyasada herhangi bir dayanak varlık fiyatı için genel olarak bir düşüş beklendiği durumda bu dayanak varlık üzerine yazılan bir satım opsiyonu fiyatının alım opsiyonu fiyatından daha yüksek olması beklenen bir fiyatlama olacaktır. Ancak bu şekildeki beklentilerin piyasadaki kalıcılığı çok uzun süreli olmaz ve buna uygun fiyat hareketi kısa sürede meydana gelir. Piyasa seyrine yönelik beklentiler devre dışı tutulduğunda Avrupa tipi alım ve satım opsiyonları arasında detayları bir sonraki kısımda verilen alım-satım bağıntısı (put-call parity) bulunmaktadır.

Opsiyonun yazıldığı andaki fiyatı (opsiyon primi) beş adet değişkene bağlı olarak belirlenir¹¹. Çizelge 2.3'teki listede verilen bu değişkenler opsiyon vadesi (T), risksiz faiz oranı (r), dayanak varlık fiyatının oynaklığı (σ), dayanak varlık spot fiyatı (S), ve opsiyonun kullanım fiyatı (K) olarak sıralanabilir. Opsiyon tasarlanıp piyasaya sürüldükten sonra bu beş parametredeki değişimlere bağlı olarak opsiyon priminde değişimler meydana gelir. Ancak bu parametrelerin etkisi alım ve satım opsiyonu için her zaman aynı yönde olmamaktadır.

¹⁰ Pratik uygulamada söz konusu olmayan bazı istisnai durumlarda dayanak varlık piyasa fiyatının sıfır olarak kabul edilebileceği burada belirtilmelidir. Örneğin özel bir şirkete ait hisse senedi fiyatı bu şirketin iflası, faaliyet sonlandırması ya da konkordato ilan etmesi gibi kararlarında gerçekte sıfır olmasa da bilanço hesaplarında sıfır olarak kabul edilebilir. Opsiyon fiyatı belirlenirken bu gibi istisnai durumlar çalışmamız kapsamı dışında tutulmuştur.

¹¹ Dayanak varlık bir hisse senedi ise temettü oranı da girdi değişkeni olarak alınır ve genellikle risksiz faiz oranından düşülerek modele yansıtılır.

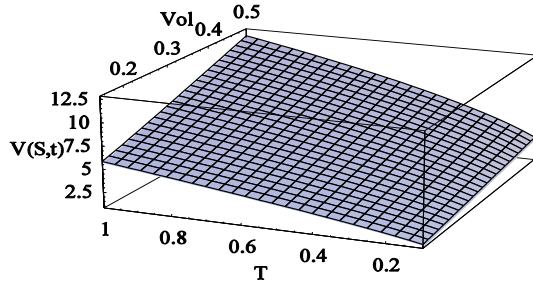
Örnek olarak, piyasada geçerli kabul edilen risksiz faiz oranının artması alım opsiyonu fiyatını arttıracak yönde etki yaparken satım opsiyonu fiyatının azalmasına neden olmaktadır. Bu bölümde opsiyon fiyatını etkileyen parametrelerin opsiyon fiyatı üzerindeki etki şekillerine grafikler üzerinden görsel olarak açıklama yapılması amaçlanmıştır.

Şekil 2.6 ve Şekil 2.7'de ortaya çıkan doğrusal bir ödünleşme fonksiyonu ancak vade sonunda (T) mümkün olmaktadır. Vade sonundan önce herhangi bir t zamanında opsiyon fiyatı, parametrelere ve rassal değişkenlere bağlı olarak çok boyutlu bir yüzey teşkil edecek şekilde değişim gösterir. Bu parametrelerden bazıları sabit bazıları değişken alınmak üzere opsiyon fiyatının grafiği üç boyutlu çizdirilerek, hem opsiyon fiyatının seyri hem de değişkenlerin opsiyon fiyatını etkileme şekilleri daha anlaşılır olarak ortaya konabilir.

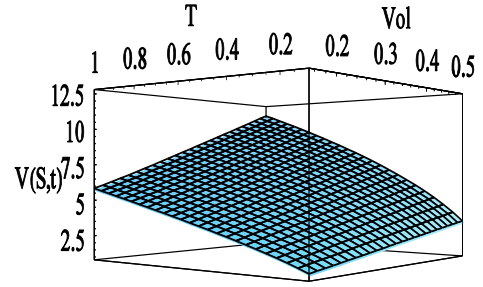
Detaylarına ileriki bölümlerde değinilecek olan opsiyon fiyatlama yöntemlerinden Monte Carlo İntegrasyon tekniğiyle hesaplanmış opsiyon fiyatlarının Mathematica 5.0 paket programı ile çizdirilen grafiklerine aşağıda yer verilmiştir. Her bir parametre seti için C programı ile bir milyon adet koşum yapılarak sonuçlar alınmış ve txt dosyasında Mathematica'ya aktarılmıştır. Parametre değerleri herbir değişken için şu şekilde alınmıştır: $S = \{30,40,50,60,70\}$, $Vol = \{\%20,\%30,\%40\}$, $r = \{\%10,\%20,\%30,\%40,\%50\}$, $T = \{0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$ ve $K = \{50\}$.

Burada opsiyon fiyatının parametrelere bağlı olarak nasıl bir değişim karakteristiği ortaya koyduğunun gözlemlenmesini sağlamak amacıyla grafiksel gösterim tercih edilmiştir. Buna göre bazı değişkenlerin opsiyon fiyatı üzerinde düzenli, bazılarının da düzensiz etki yarattığı görülmektedir.

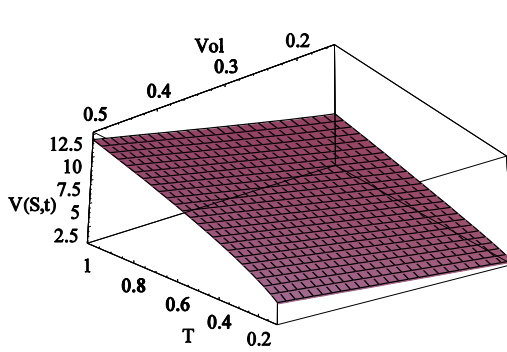
Şekil 2.8'de Avrupa tipi bir alım opsiyonu fiyatının $V^a(S,T)$, oynaklık (Vol) ile vade süresine (T) bağlı grafiklerine yer verilmiştir. Spot fiyat ($S = 50$), kullanım fiyatı ($K = 50$) ve risksiz faiz oranı ($r = \%10$) sabit olarak alınmıştır.



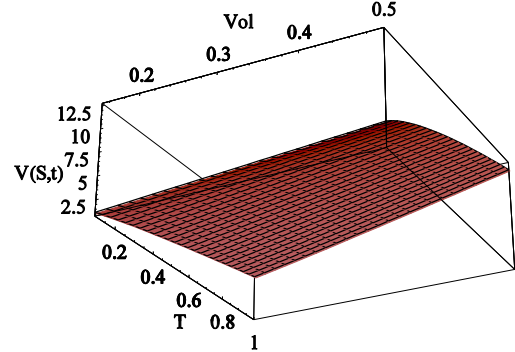
(a)



(b)



(c)



(d)

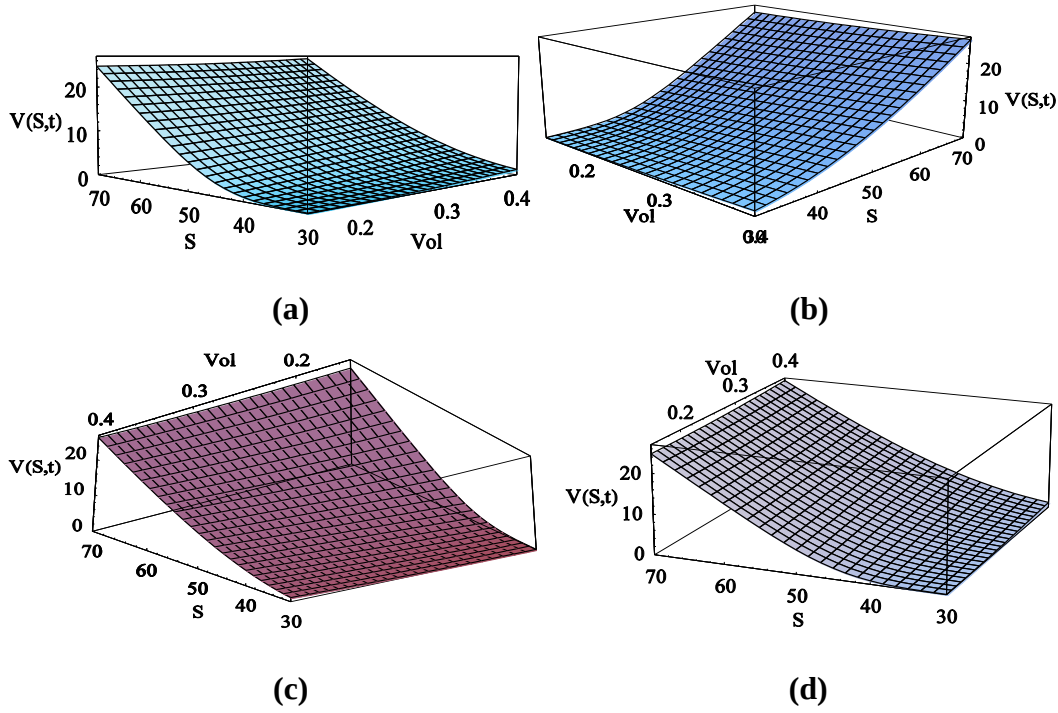
Şekil 2.8 : Alım opsiyonu fiyatının volatilité (Vol) ve vade süresine (T) bağlı değişimi, ($S = K = 50$) ve ($r = \%10$) olarak alınmıştır.

Şekil 2.8 ve diğer tüm üç boyutlu grafiklerde dört farklı noktadan (a,b,c,d) görünümlere yer verilmiştir. Fiyatın parabolik bir düzlemde hareket ettiği ve seçilen parametre aralığına bağlı olarak alım opsiyonu fiyatının $V^a(S,T) = [2.5, 12.5]$ arasında değerler aldığı görülmektedir.

Alım opsiyonu fiyatının her iki değişkenin artmasına bağlı olarak arttığı ancak oynaklığa daha duyarlı olduğu görülmektedir. Oynaklığa bağlı olarak görülen opsiyon fiyatı artışı vadeye bağlı artıştan daha fazla gerçekleşmiştir.

Şekil 2.9'da Avrupa tipi alım opsiyonu fiyatının $V^a(S,T)$, oynaklık (Vol) ile spot fiyata (S) bağlı grafiklerine yer verilmiştir. Opsiyon vadesi ($T = 1$) yıl, kullanım fiyatı ($K = 50$) ve risksiz faiz oranı ($r = \%10$) sabit olarak alınmıştır.

Fiyatın Şekil 2.8'e göre daha geniş bir aralık içeren parabolik bir yüzeyde değişim kaydettiği görülmektedir. Seçilen parametrelere bağlı olarak opsiyon fiyatı $V^a(S,T) = [0.05, 20]$ arasında değerler almaktadır. Alım opsiyonu fiyatının her iki değişkenin artmasına bağlı olarak arttığı görülmektedir.

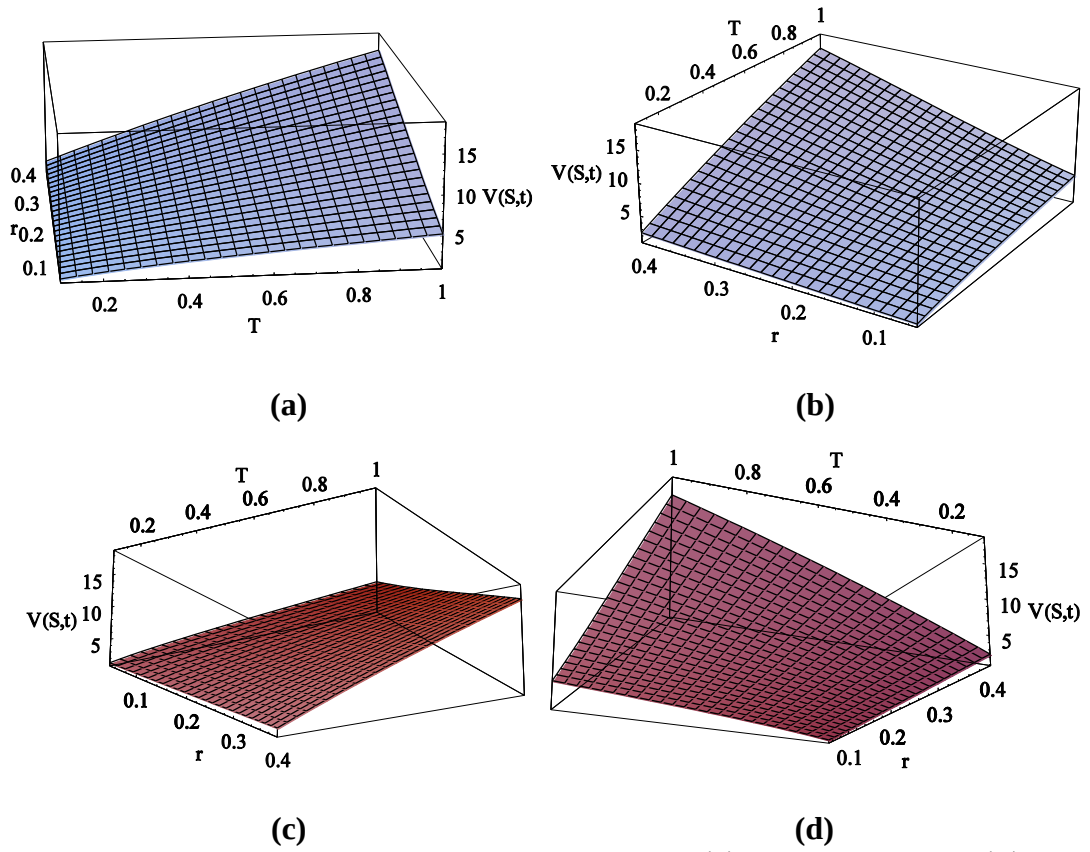


Şekil 2.9 : Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat (S) ve oynaklığa (Vol) bağlı değişimi ($K = 50$), ($T = 1$) ve ($r = \%10$) olarak alınmıştır.

Şekil 2.8 ve Şekil 2.9 birlikte değerlendirildiğinde alım opsiyonu fiyatının önce spot fiyat sonra oynaklık daha sonra vade süresine bağlı olarak değişim gösterdiği belirtilebilir.

Şekil 2.10'da Avrupa tipi alım opsiyonu fiyatının $V^a(S, T)$, faiz oranı (r) ile vade süresine (T) bağlı grafiklerine yer verilmiştir. Oynaklık ($Vol = \%20$), spot fiyat ($S = 50$) ve kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmıştır.

Alım opsiyonu fiyatının yine her iki değişkenin artmasına bağlı olarak arttığı ancak faiz oranına daha duyarlı olduğu görülmektedir. Seçilen parametre aralığına bağlı olarak opsiyon fiyatının $V^a(S, T) = [0.05, 18]$ arasında değerler aldığı görülmektedir. Farklı noktalardan grafiğe bakıldığında fiyatın faiz oranına bağlı olarak daha fazla değişim gösteren parabolik bir düzlemde hareket ettiği görülmektedir.

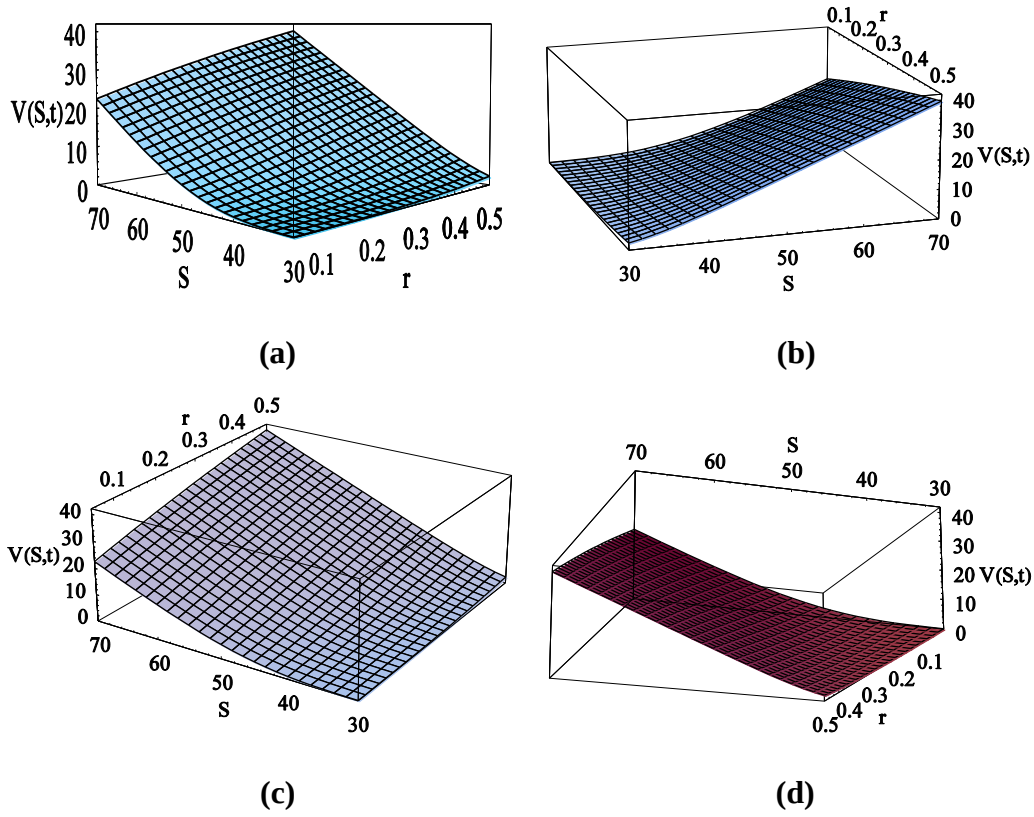


Şekil 2.10 : Alım opsiyonu fiyatının faiz oranı (r) ve vade süresine (T) bağlı değişimi ($S = K = 50$) ve ($Vol = \%20$) olarak alınmıştır.

Her üç grafik birlikte incelendiğinde Şekil 2.9'da spot fiyatın kullanım fiyatını aşmasına bağlı olarak alım opsiyonu fiyatının belirgin bir artış kaydettiği ve opsiyon fiyatının Şekil 2.8 ve Şekil 2.10'a göre daha büyük bir aralıkta değişim gösterdiği görülmektedir. Böylece opsiyon fiyatının daha çok spot fiyata bağlı olmak üzere sırasıyla oynaklık (volatilite), faiz oranı ve vade süresine bağlı olarak değişim gösterdiği anlaşılmaktadır.

Şekil 2.11'de verilen spot fiyat (S) – faiz oranı (r) grafiğine bakıldığında opsiyon fiyatının $V^a(S, T)$ ilk üç grafikten daha geniş bir aralıkta değişim gösterdiği görülmektedir. Seçilen parametre aralığına bağlı olarak opsiyon fiyatı $V^a(S, T) = [0.053, 40]$ arasında değerler almaktadır. Oynaklık ($Vol = \%20$), opsiyon vadesi ($T = 1$) yıl ve kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmıştır.

Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat ve faiz oranına son derece duyarlı olduğu burada da görülmektedir. Şekil 2.11(a)'da her iki değişkenin düşük değerleri için opsiyon fiyatının yatay düzlemde sıfıra yakın seyrettiği, spot fiyatın kullanım fiyatını geçmesine bağlı olarak hızlı bir şekilde yükseldiği görülmektedir.

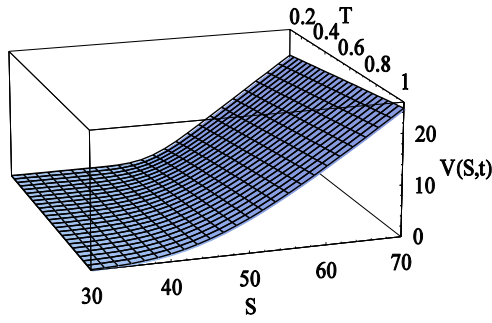


Şekil 2.11 : Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat (S) ve faiz oranına (r) bağlı değişimi ($K = 50$), ($T = 1$) ve ($Vol = \%20$) olarak alınmıştır.

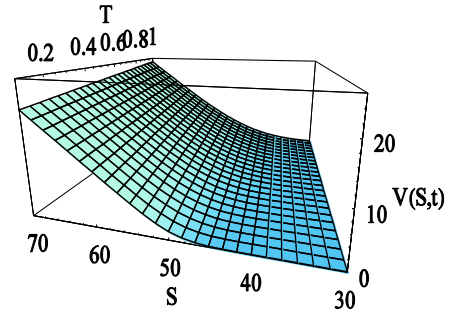
Şekil 2.11'de faiz oranlarının risksiz fiyatlaması prensipleri çerçevesinde türev ürünlerin fiyatlamasında etkili olduğu görülmektedir. Ayrıca iskontolamada kullanılması dolayısıyla risksiz faiz oranları opsiyon fiyatlamaya temel oluşturmaktadır.

Şekil 2.12'de Avrupa tipi alım opsiyonu fiyatının $V^a(S,T)$, spot fiyat (S) ile vade süresine (T) bağlı grafiklerine yer verilmiştir. Oynaklık ($Vol = \%20$), faiz oranı ($r = \%10$) ve kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmıştır. Seçilen parametre aralığına bağlı olarak opsiyon fiyatı $V^a(S,T) = [0.05, 28]$ arasında değerler almaktadır.

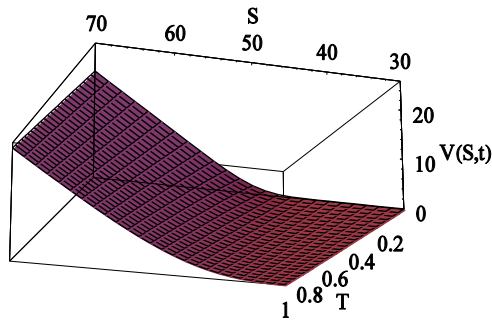
Alım opsiyonu fiyatının her iki değişkenin artmasına bağlı olarak arttığı görülmektedir. Farklı noktalardan grafiğe bakıldığında her iki değişkenin küçük parametre değerleri için opsiyon fiyatının yine yatay düzlemde sıfıra yakın seyrettiği, spot fiyatın kullanım fiyatını geçmesine bağlı olarak hızlı bir şekilde yükseldiği görülmektedir.



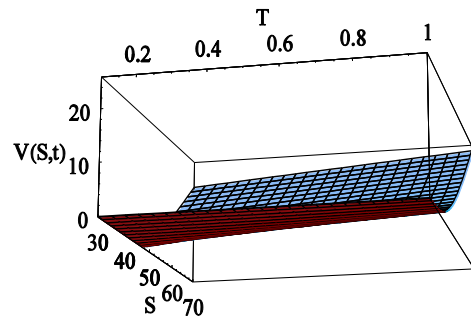
(a)



(b)



(c)

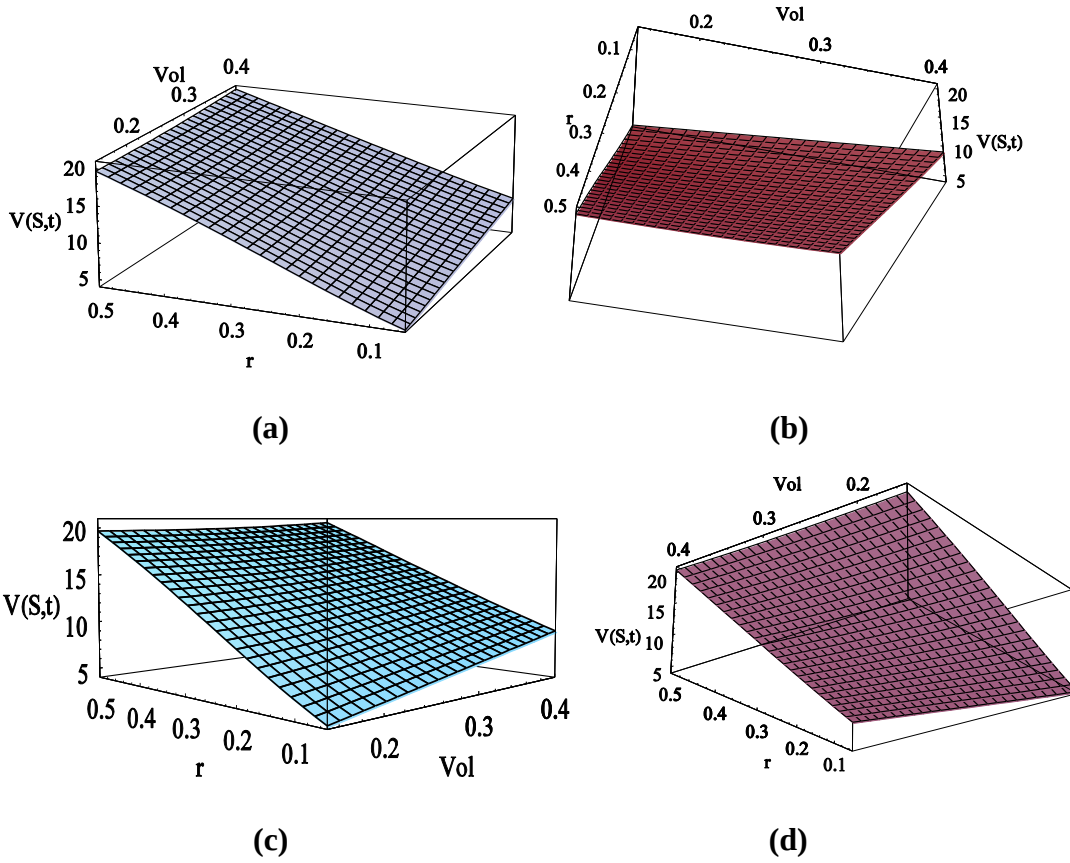


(d)

Şekil 2.12 : Alım opsiyonu fiyatının spot fiyat (S) ve vade süresine (T) bağlı değişimi ($K = 50$), ($r = \%10$) ve ($Vol = \%20$) olarak alınmıştır.

Şekil 2.12'de opsiyon fiyatındaki değişimin önceki grafiklerde olduğu şekilde artış trendi izlediği belirtilebilir. Opsiyon fiyatındaki değişim parabolik bir yüzey oluşturmaktadır. Şekil 2.13 (a)'da yüzeyin kenarlarındaki eğrilerin birbirine eş olmadıkları, vade süresine bağlı olarak farklı parabolik yapıya sahip oldukları görülmektedir.

Şekil 2.13'te Avrupa tipi alım opsiyonu fiyatının $V^a(S, T)$, faiz oranı (r) ile oynaklık (Vol) grafiklerine yer verilmiştir. Opsiyon vadesi ($T = 1$) yıl, spot fiyat ($S = 50$) ve kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmıştır. Seçilen parametre aralığına bağlı olarak opsiyon fiyatı $V^a(S, T) = [5, 20]$ arasında değerler almaktadır. Yeterince uzun vade ($T = 1$) yıl için alım opsiyonu fiyatının oynaklık ve faiz oranına son derece duyarlı olduğu anlaşılmaktadır. Alım opsiyonu fiyatının her iki değişkenin artmasına bağlı olarak arttığı görülmektedir. Şekil 2.13(c)'de opsiyon fiyatının birçok büküm noktası oluşturduğu görülmektedir.



Şekil 2.13 : Alım opsiyonu fiyatının faiz oranı (r) ve volatilité (Vol) bağılı değişimi ($K = S = 50$), ve ($T = 1$) olarak alınmıştır.

Şekil 2.13'te görüldüğü üzere opsiyon fiyatının piyasa faiz oranlarına doğrudan bağı olduğu görülmektedir. Piyasa faizi üzerinde otoritelerin almış olduğu kararlar opsiyon fiyatlarıyla birlikte piyasalarda yapılan diğer tüm fiyatlamaları doğrudan etkilemektedir. Ancak piyasadaki faiz oranlarının kısa sürede çok yüksek değişim göstermesi, bir kaç misline gelmesi ya da bu kadar azalması olağan bir durum değildir. Bununla birlikte piyasalarda yaşanan olağan üstü durumlara bağı olarak Merkez Bankaları tarafından faizlerin yüksek miktarda değiştirildiği de gözlemlenmektedir.

Şekil 2.13'te faiz oranı $r = [0.10, 0.50]$ aralığında alınmıştır. Merkez Bankalarının faiz kararları örneğin politika faizini %20 seviyesinden %40 seviyesine birdenbire yükseltmesi yönünde olmamaktadır. Bunun yerine artış ya da azalış yönünde kademeli şekilde daha ölçülü faiz kararları alınmaktadır. Ancak piyasalarda kısa fiyatlama dönemi içinde oynaklığın %20 seviyelerinden %40 seviyelerine ve hatta çok daha yüksek seviyelere yükseldiği görülmektedir. Bu yüzden opsiyon fiyatlarında yaşanan büyük fiyat hareketlerinin daha çok oynaklıktan kaynaklandığı

söylenbilir. Dayanak varlık fiyatlarındaki oynaklığın yükselmesinde piyasa haberleri ve açıklanan ekonomik veriler etkili olmaktadır. Oynaklık için (Vol) veya (σ) gösterimlerinden her ikisi de kullanılmaktadır.

Beş parametreden sırayla seçilen iki parametredeki değişime bağlı olarak opsiyon fiyatının sürekli zamandaki seyri üç boyutlu grafiklerde gösterilmiştir. Opsiyon fiyatını etkileyen diğer parametre değerleri belirtilmiş olan değerlerinde sabit olarak alınmıştır. Daha önce de değinilmiş olduğu üzere organize borsalarda ve ortak elektronik ortam içeren piyasalarda gerçekleşen işlemler fiyat adımına bağlı olarak kesikli bir fiyat süreci izlemektedir. Ancak bir aydan uzun süre söz konusu olduğunda fiyat adımı ihmal edilerek sürekli fiyat süreci esas alınmaktadır.

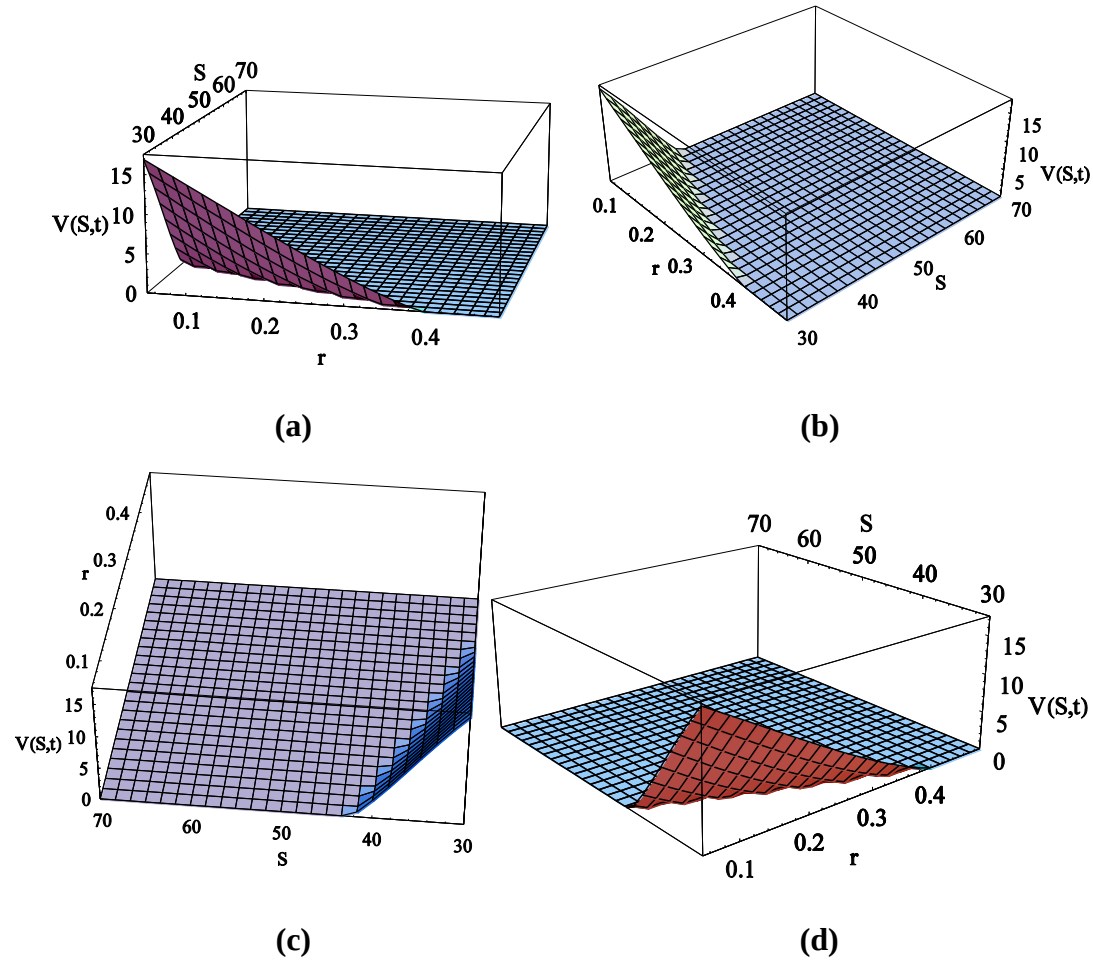
Şekil 2.8'den Şekil 2.13'e kadar tüm grafikler incelendiğinde alım opsiyonu fiyatının, fiyatı belirleyen beş adet değişkenden spot fiyat, oynaklık, faiz oranı ve vade tarihi olmak üzere dört tanesi için sürekli artan şekilde bir fonksiyon karakteristiği taşıdığı anlaşılmaktadır. Kullanım fiyatı (K) içinse alım opsiyonu fiyatının azalan bir seyir izleyeceği açık bir durum olduğundan burada kullanım fiyatına bağlı grafiklere yer verilmemiştir. Sadece kullanım fiyatının arttırılması halinde bir alım opsiyonu fiyatının düşeceği kesin bir yargıdır.

Satım opsiyonu için opsiyon fiyatının seyri incelendiği takdirde alım opsiyonundakinden farklı durumlarla karşılaşılmaktadır. Satım opsiyonu fiyatının faiz oranı (r) ve spot fiyata (S) göre değişimine bakıldığında, satım opsiyonu fiyatının sürekli azalan bir eğriye bağlı bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Bunun dışındaki diğer durumlarda ise alım opsiyonu ve satım opsiyonu fiyatlarının benzer bir karakteristik ortaya koyduğu görülmektedir. Oynaklığın artması satım opsiyonu fiyatını arttırmaktadır.

Şekil 2.14'te Avrupa tipi bir satım opsiyonu fiyatının $V^s(S, T)$, faiz oranı (r) ve spot fiyata (S) bağlı grafiklerine yer verilmiştir. Opsiyon vadesi ($T = 1$) yıl, oynaklık ($Vol = \%20$) ve kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmıştır.

Seçilen parametre aralığına bağlı olarak opsiyon fiyatı $V^s(S, T) = [0.05, 18]$ arasında değerler almaktadır. Grafiğin büyük bir bölümünde faiz oranının yüksek kalmasına bağlı olarak satım opsiyonu fiyatının $V^s(S, T) = [0.05, 5]$ arasında değerler almış olduğu görülmektedir. Buradan yeterince uzun sayılabilecek vade için

($T = 1 \text{ yıl}$) satım opsiyonu fiyatının spot fiyat ile birlikte faiz oranına son derece duyarlı olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 2.14 : Satım opsiyonu fiyatının faiz oranı (r) ve spot fiyata (S) bağlı değişimi ($K = 50$), ($T = 1 \text{ yıl}$) ve ($Vol = \%20$) için verilmiştir.

Satım opsiyonu fiyatı her iki değişkenin artmasına bağlı olarak da azalmaktadır. Spot fiyat artışına bağlı olarak satım opsiyonu fiyatının azalması bilinen bir durumdur. Düşük spot fiyat değerleri ve yüksek faiz oranı bölgesinde satım opsiyonu fiyatının düşük seviyelerde kaldığı faiz düşüşüne bağlı olarak satım opsiyonu fiyatının arttığı görülmektedir.

Şekil 2.14'deki grafiklere bakıldığında opsiyon fiyatının $V^S(S,T)$, spot fiyat ve faiz oranının $(S(30), r(0.4))$ noktasından başlayıp $(S(45), r(0.1))$ noktasına gelinceye kadar yataya yakın seyreden bir hat oluşturduğu görülmektedir. Bu değerlerden sonraki parametre değerleri için satım opsiyonu fiyatında belirgin değişim

görülmektedir. Bu hattan sonra opsiyon fiyatının faiz oranının azalmasına bağlı olarak çok yüksek artış kaydettiği görülmektedir.

Şekil 2.14'teki grafiklerin farklı noktalardan görünümüne bakıldığında belirtilen hattın dışında çok fazla büküm noktası olmadığı, çoğunlukla yataya yakın seyir izlendiği veya küçük bir bölge için fiyatta hızlı artış kaydedildiği görülmektedir. Diğer parametrelere göre satım opsiyonu fiyatının değişimi ise sürekli bir yapı ortaya koymamakta ve parametrelerin değerlerine bağlı kalmaktadır. Bu yüzden satım opsiyonu fiyatının seyri bir sonraki bölümde verilen alım-satım bağıntısı üzerinden izlenebilmektedir.

Bu bölümde opsiyon fiyatının üç boyutlu grafiklerine yer verilerek opsiyon fiyatının sergilediği parabolik değişim gösterilmiştir. Opsiyon fiyatlama detaylarına geçmeden önce opsiyon fiyatının nasıl bir değişim gösterdiği ortaya konmaya çalışılmıştır. Opsiyon fiyatını etkileyen ikiden çok parametre olması dolayısıyla bunlardan ikisinin değişimine karşın diğerleri belirli değerlerde sabit tutulmuştur.

2.4.5 Alım-satım bağıntısı

Avrupa tipi opsiyonların fiyatları arasında alım-satım bağıntısı (put-call parity) ile verilen bir bağıntı bulunmaktadır. Bu bağıntı basit bir maliyet hesabı ile açıklanabilir. Alım opsiyonu ve satım opsiyonundan yalnızca bir tanesini içerecek şekilde iki farklı portföy oluşturulduğu düşünülerek bu portföylerin maliyetleri hesaplanır.

Etkin piyasa hipotezinin geçerli olmasından hareketle arbitraj imkanı olmayan piyasada iki portföyün vade sonundaki getirisinin eşit olması gerektiği kabul edilir. İlk portföye dayanak varlık ve satım opsiyonu alınır. Bu durumda $(S_0 + V^s)$ gibi bir maliyet ortaya çıkar.

İkinci portföy başlangıçta sadece alım opsiyonundan oluşmaktadır. Ancak portföy maliyetine vade sonunda dayanak varlığı satın alma bedelinin şimdiki değeri eklendiğinde toplam maliyet $(V^a + Ke^{-rt})$ şeklinde bulunur (vade tarihindeki kullanım fiyatı K sürekli iskontolamada r faiz oranı kullanılarak şimdiki zamana iskontolanmıştır). Etkin bir piyasada risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde bu iki portföyün getirilerinin eşit olabilmesi için maliyetlerinin de eşit olması gerekeceğinden hareketle

$$S_0 + V^s = V^a + Ke^{-rt} \quad (2.18)$$

eşitliği yazılabilir. Denklem (2.18) alım-satım bağıntısı olarak isimlendirilir ve sadece Avrupa tipi opsiyonlar için geçerlidir.

Avrupa tipi opsiyonlardan bir alım (yada satım) opsiyonun fiyatı bilindiği takdirde aynı parametre değerlerine sahip satım (yada alım) opsiyonu fiyatı bu bağıntı kullanılarak ek bir işlem yapılmadan hesaplanabilmektedir. Vade sonuna kadar herhangi bir zamanda kullanıma izin veren Amerikan tipi opsiyonlar için, opsiyonun zaman değerinin alım ve satım opsiyonlarına farklı yansıyor olmasından dolayı alım-satım bağıntısı kullanılamamaktadır.

2.4.6 Opsiyonların kullanım alanları

Finansal piyasalarda piyasa beklentilerinin somut kanıtlara dayandırılması gerekmektedir. Bunu sağlamak için piyasalarda günlük açıklanan veri ve haberler ile birlikte Merkez Bankalarının kararları ve Uluslararası Piyasa dinamikleri dikkatle takip edilir. Böylece neden-sonuç ilişkisi kurularak genel anlamda ve/veya ürün bazında piyasa yönü bulunmaya çalışılır.

Finansal piyasalardaki belirsizlik ortamında firmaların bilanço kalitesinin korunması esas amaç olarak ortaya çıkmaktadır. Bu ancak yüksek bir getiri elde edilirken aynı zamanda olası zarar miktarının en az seviyede kalacak olmasının sağlanması ile mümkün hale gelir. Bunun için bilançolara türev ürünlerin eklenmesi bir gereklilik olmaktadır.

Matematiksel modeller kurularak, beklenen kazanç düzeyi için alınacak risk miktarı ölçülmekte ve limitler dahilinde yatırım miktarları belirlenmektedir. Örneğin piyasada faizlerin düşeceğini öngören bir banka daha çok DİBS satın alarak yatırımını faize kaydırabilir. Bu banka faizlerin olası yükselişi karşısında Tahvil faizi üzerine yazılmış satım opsiyonu ile korunma sağlayabilir. DİBS yatırımına göre çok daha düşük bir maliyetle olası faiz yükselmesi karşısında banka bilançosu korunmuş olacaktır. Faizlerin beklentiler dahilinde seyretmesi halindeyse DİBS yatırımından hedeflenen getiri elde edilmiş olur.

Bir başka örnek olarak müşterilerine altın satışı yapan kuyum sektöründeki bir firma ele alınabilir. Bu firma yöneticisi, müşterilerine satmak üzere bir miktar altını stoklarında bulundurmak durumundadır. Ancak altın fiyatlarının değişken olmasına

bağlı olarak bir kerede yüksek miktarlı altın satın almak oldukça riskli görünmektedir. Altın fiyatlarının yükseleceği öngörülüyorsa alım opsiyonu ile maliyet sabitlenirken olası fiyat düşüşü durumunda elde yüksek miktarda ve yüksek maliyetli altın bulundurulmamış olacaktır. Müşteri talebinin devam etmesi üzerine opsiyon kullanılarak altın ihtiyacı karşılanmış olacaktır.

Reel sektör çevrelerince opsiyonların kullanım amacı daha çok riskten korunma ve nakit akışlarının kontrol edilmesi yönündedir. Reel kesim opsiyonları, girdi maliyetlerini sabitlemek ve borç yükümlülüklerine bir sınır getirmek amacıyla kullanır. Böylece bilanço güvenliği sağlanarak hedeflenen getiri düzeyine bağlı bir fiyat politikası öngörülebilir. Örneğin hammadde ithalatı yapan bir firma gelecek nakit ödemelerini ilgili döviz kuru üzerine yazılmış bir alım opsiyonu ile kendi para birimi cinsinden sabitleyebilir. Böylece ileri tarihteki döviz ödeme anında olası kur artışından zarara uğramanın önüne geçilmiş olur ve ileri döneme ilişkin maliyet hesaplarına kesinlik kazandırılır. Ya da bir ihracatçı firma gelecekte tahsil edeceği döviz miktarlarını satım opsiyonu olarak yerel para birimi cinsinden sabitleyebilir ve olası kur düşüşünden etkilenmemiş olur.

Finansal kesim içinse opsiyon ticareti iki anlam taşımaktadır. Finans kurumları opsiyonlar ile birlikte diğer türev ürünleri tasarlayıp piyasaya sürerek bunlardan bir portföy çerçevesinde getiri elde etmeye çalışmaktadır. Aynı zamanda finans kurumlarının kendisi için de borçlanma maliyetlerini sabitleme amacı söz konusudur ve böylece finans kurumları birbirlerinin müşterisi olurlar. Hatta türev ürünlerin yüksek işlem hacimlerini genellikle finans kurumlarının kendi arasında yaptığı işlemler oluşturmaktadır. Finans kesimi için opsiyonların esas kullanım amacı spekülatif opsiyon alım-satım işlemlerinde bulunarak yüksek getiri elde etme şansının yakalanmasıdır. Böylece finans kesimi kendi içerisinde müşteri olma özelliğinden dolayı çok hızlı büyüebilmektedir.

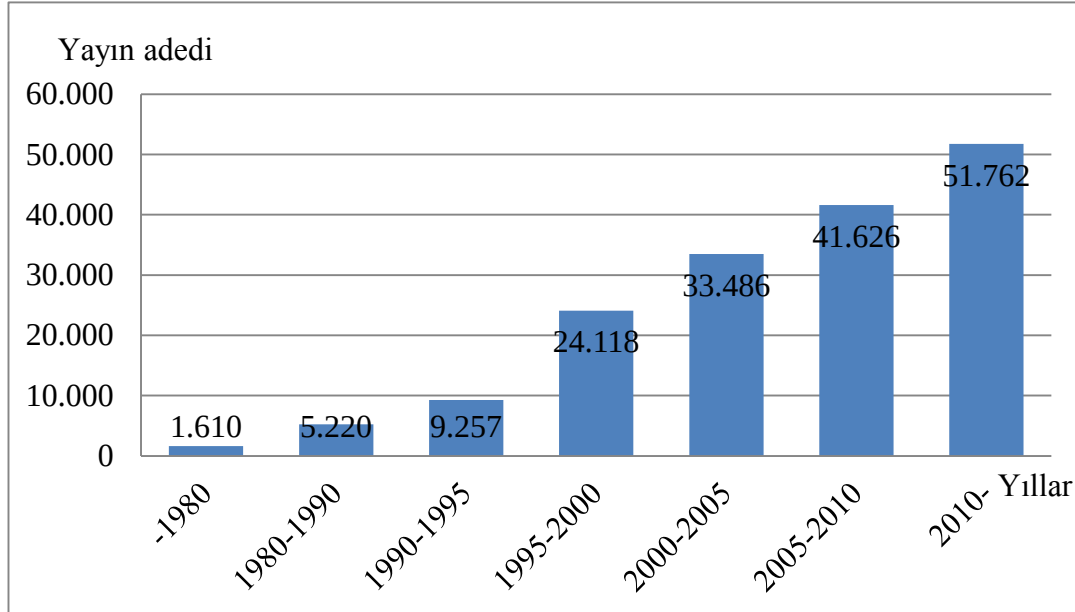
Spekülatif işlemler Sermaye Piyasası Kurumu (SPK) yönetmeliğine aykırı olmadığı sürece yasal bir işlem olarak piyasada sıkça görülür. Ancak içerden bilgi alınarak ya da manipüle etmeye yönelik yapılan işlemlerde Sermaye Piyasası Kurulu (SPK) tarafından ağır yaptırımlar uygulanması, para ve hapis cezalarının verilmesi söz konusu olabilmektedir.

Piyasa koşullarına bağı olarak opsiyon alım-satımı yoluyla *kaldıraç oranı (leverage)* sayesinde yüksek miktartlı kazanç sağlama imkanı mevcuttur. Kaldıraç oranının 1:10 olması eldeki bir birimlik para miktartıyla on birimlik para miktartı kadar işlem yapılabilmesi anlamına gelmektedir. Bu işlemlerde genellikle vade sonu beklenmezken günüçi fiyat dalgalanmalarına karşı yüksek miktarda teminata ihtiyaç duyulur.

3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Sınırsız fiyat stokastik süreçleri için opsiyon fiyatlamasına ilişkin kaynaklar oldukça fazladır. Finansal opsiyon fiyatlaması, varyans azaltma teknikleri ve stokastik fiyat süreçleri konularına yönelik olarak literatür araştırması yapılmıştır. Doktora tez çalışması kapsamında daha çok opsiyon fiyatlaması ve varyans azaltma teknikleri konularının birlikte ele alındığı yayınlar incelenmiş olmakla birlikte iki konunun ayrı ayrı kaynakları da araştırma kapsamına dahil edilmiştir.

Opsiyon fiyatlaması bir önceki bölümde detayları verilen, dünya genelindeki türev işlem miktarlarındaki artışa bağlı olarak giderek daha fazla önem kazanan bir çalışma alanı haline gelmiştir. İleri düzeyde matematiksel ve istatistiksel hesaplama içermesine rağmen sürekli genişleyen kullanım alanı dolayısıyla akademik çevreler ve finans çevreleri tarafından opsiyon fiyatlaması konusuna yüksek önem verilmeye başlanmıştır. Şekil 3.1'de yer alan yayın adetleri grafiğinden görüldüğü üzere yıllık yayın ortalaması son yıllarda onbin adet üzerine çıkmıştır.



Şekil 3.1. Yıllara göre opsiyon fiyatlaması için yayın adetleri.

Literatür araştırması İTÜ Kütüphanesi elektronik veritabanı üzerinden akademik makaleler seçilerek yapılmıştır. Buna göre konunun çoğunlukla İngilizce dilindeki

kaynaklarına erişmek için "options pricing" şeklindeki arama sonucu yıllara göre Şekil 3.1' de gösterilen dağılım elde edilmiştir. Konunun başlangıcı kabul edilen Black ve Scholes (1973)'den günümüze uzanan literatür taramasına yer verilmiştir.

Geniş literatürden alınan yaklaşık yüz adet makalenin incelenmesine bağlı olarak seçilen araştırma konusu şu şekildedir: Sınırlı fiyat stokastik süreçlerine göre işleyen piyasalara sahip ülkeler için detaylı bir opsiyon fiyatlama çalışmasının olmadığı belirlenmiş olup sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçleri için varyansın düşürülmesiyle opsiyon fiyatının hesaplanması tez çalışmasının konusu olarak belirlenmiştir. Literatürde opsiyon fiyatlama konusu üzerinde yapılan çalışmalar konusuna göre ilk olması özellikleriyle Çizelge 3.1'de sıralanmıştır.

Çizelge 3.1 : Öncü makaleler ve getirdikleri yenilikler.

Yayınlanan Makale ve tarihi	Getirilen yenilik konusu
Black ve Scholes (1973)	Black/Scholes formülü
Merton (1973), (1976)	Ani fiyat hareketleri-Poison süreci
Cox ve <i>diğ.</i> (1979)	Binom modeli ile opsiyon fiyatlaması
Boyle (1986)	Trinomial ağaçlar ile opsiyon fiyatlaması
Hull ve White (1987)	Stokastik volatilité modelleri (SV)
Heston (1993)	SV'ye genel çözüm
Longstaff (1995)	Hesaplanan (Implied) volatilité
Broadie ve Glasserman (1996),	Monte Carlo ve Önem Örnekleme
Broadie ve Glasserman (1997)	Varyans düşürme teknikleri
Boyle ve <i>diğ.</i> (1997)	Monte Carlo ile varlık fiyatlaması
Ait-Sahalia ve Kimmel (2006)	SV kapsamlı çözüm
Boyle ve Draviam (2007)	Stokastik rejim değiştirme
Junichi, (2014)	Çok boyutlu Lévy süreçleri MC uygulanması
Xiaoyu ve Jian (2015)	Belirsiz fiyat modeli için opsiyon fiyatlaması

Sınırlı fiyat stokastik süreçlerine sahip piyasalarda opsiyonlar yeni yeni kullanılmaya başlanmış olduğundan konunun mevcut literatürünün büyük çoğunluğu sınırsız fiyat stokastik süreçlerine uygundur. Bu yüzden opsiyon fiyatlama literatürü açıklanmaya başladığında aslında sınırsız stokastik süreçlerine uygun opsiyon fiyatları için açıklama yapılmaktadır.

Ekonomi dalında 1997 yılı Nobel ödülü sahibi akademisyenler Fischer Black ve Myron Scholes 1970'li yılların başlarında Avrupa tipi opsiyonların fiyatını hesaplamak amacıyla çalışmalarda bulunmuşlardır. Ardından 1973 yılının ortalarında yayımladıkları makale ile Black-Scholes modelini önermişlerdir, (Black ve Scholes 1973). Bu modelde öncelikle opsiyona dayanak varlık olan menkul kıymet fiyatı bir stokastik sürece uygun olarak zamana bağlı bir fonksiyon şeklinde tanımlanmış ve fiyatın değişiminin bir stokastik diferansiyel denkleme göre olduğu kabul edilmiştir. Opsiyon fiyatı ise dayanak varlık fiyatı ile zamana bağlı bir başka fonksiyon şeklinde tanımlanarak bu fonksiyonun zamana göre birinci dereceden, dayanak varlık fiyatına göre birinci ve ikinci dereceden türevlerini içeren yeni bir stokastik diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu denklemin risksiz fiyatlama ve arbitraj imkanı olmama kabullerine dayanılarak çözülmesiyle opsiyon fiyatına ait kapalı bir formül elde edilmiştir.

Black ve Scholes (1973)'ün tanıttığı ve sonradan büyük kabul gören bulgulardan biri dayanak varlık fiyatının izlediği stokastik sürecin yapı taşının geometrik Brown hareketi olduğu kabulü olmuştur.

Yine 1973 yılı içinde Robert Merton, Black ve Scholes (1973) modeline benzer bir modeli (Merton, 1973) makalesinde önermiştir. Merton (1976)'da kendisine ait model ile (Black ve Scholes, 1973) modeline ani fiyat hareketlerini (price jumps) ekleyerek opsiyon fiyatlama modelini geliştirmiştir. Robert Merton ani fiyat hareketlerini kesikli bir Poisson süreci olarak modele eklemiştir.

Bu öncü modeller yayınlandığı tarihlerde tüm dünyada ses getirmiş ve yayıncıları ilk andan itibaren birçok itirazla karşılaşmıştır. Sonraları modelleri test etmeye yönelik yapılan birçok çalışmada modellerin önsavları ve bulguları çürütülememiştir. Günümüzde halen geçerliliğini koruyan modellerin bu süre zarfındaki çalışmalara bağlı olarak avantajları ve dezavantajları ortaya çıkarılmıştır.

1979 yılında Black ve Scholes (1973) modeline alternatif olarak Cox ve *diğ.* (1979) tarafından Binom modeli önerilmiştir. Bu modelde opsiyona dayanak varlık olan menkul kıymet fiyatının bir sonraki iş gününde ya artacağı ya da düşeceği varsayımından hareket edilerek ağaç diyagramı şeklinde bir yapı oluşturulmuş ve vade sonuna kadar iteratif hesaplama yapılması ile vade sonu dayanak varlık fiyatının beklenen değeri hesaplanmaya çalışılmıştır. Bu aşamadan sonra yine Black

ve Scholes (1973) modelinde olduğu gibi ödünleşme fonksiyonuna bağlı olarak opsiyon ödentisi hesaplanmaktadır. Sonraları bu model de geliştirilerek ikili çoğalma yerine üçlü çoğalma içeren yapılar (trinomial lattices) kullanılmıştır (Boyle, 1986; Brandimarte, 2006).

Black ve Scholes (1973) modelinin üzerinde en çok araştırma yapılan konusu dayanak varlık fiyatına ait oynaklık konusudur. Oynaklık (volatilite) her ne kadar varyans tabiri yerine kullanılsa da aslında tam olarak aynı kavramı ifade etmezler. Varyans bir dağılıma uyan verinin hesaplanabilen bir değişkenlik ölçüsü iken oynaklık stokastik olarak değişen ve hesaplanması mümkün olmayan ancak varyans veya ortalama mutlak sapma gibi tahmin ediciler ile yaklaşık olarak gözlemlenebilen bir değişkenlik ölçüsüdür.

Bu konuda yapılmış onbinlerce çalışma bulunmakta olup Black ve Scholes (1973) modelinin ilk haliyle kıyaslandığında çok önemli ölçüde ilerleme kaydedilmiş olduğu görülmektedir. Black ve Scholes (1973) modelinde dayanak varlık fiyatına bağlı oynaklık değeri (volatilite) yıllık değer olarak alınmış ve bir fiyatlama periyodu içerisinde sabit olarak kabul edilmiştir. Gerçekte oynaklık piyasada gerçekleşen her işlemle birlikte değişmektedir ve sabit kalması mümkün değildir. Çünkü her işlem farklı arz-talep frekansında oluşmaktadır.

Daha sonra Black ve Scholes (1973) modelindeki sabit oynaklık yerine getirilebilecek daha temsilci yapılar üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Sonuçta 1987 yılında zamana bağlı olarak değişen oynaklık parametresini içeren modeller (Stochastic Volatility Models - SV) önerilmiştir. Bunlardan bazıları Scott (1987), Hull ve White (1987) ve Chesney ve Scott (1989) olarak sıralanabilir. Ayrıca daha yakın tarihli çalışmalar arasında Gallant ve *diğ.* (1997) ile Raggie ve Bordignon (2006) yer almaktadır. Bu modeller genel olarak sürekli zamanlı fiyat süreçlerini (continuous time price models) ve zamanla değişim gösteren oynaklık ifadesini içermektedir. Ayrıca Black-Scholes modelini test etmeye yönelik yapılan çalışmalardan (Levy, 1985) ve (Schepper ve Heijnen, 2007)'de piyasada arbitraj imkanının oluşmaması için opsiyon fiyatı üzerinde bulunması gereken sınırlara yer verilmiştir.

Stokastik volatilite (SV) modelleri arasında Hull ve White (1987) ön plana çıkmaktadır. Ancak Hull ve White (1987) de dahil olmak üzere ilk stokastik volatilite

modellerinde dayanak varlık fiyatı ile oynaklık arasındaki korelasyon ihmal edilmiş, daha doğrusu hesaplamalara hiç dahil edilmemiştir.

İlk stokastik volatilité modellerine Heston (1993) çözüm önermiştir. Burada dayanak varlık fiyatı için tanımlanmış olan fiyat stokastik sürecinden bağımsız olarak dayanak varlık fiyatının oynaklığı için bir başka stokastik süreç tanımlanmıştır. Burdan bulunan oynaklık değeri fiyat stokastik sürecinde kullanılarak dayanak varlık fiyat stokastik sürecinin daha gerçekçi modellenmesinin sağlanmasına çalışılmıştır. Ancak fiyat ve fiyata ait oynaklık değerinin birbirinden bağımsız kabul edilmiş olması dolayısıyla tam olarak başarı sağlanmamıştır.

Bu açığı gidermek üzere yapılan çalışmalarda dayanak varlık fiyatı ile stokastik oynaklık arasındaki korelasyon, oynaklığa ait stokastik diferansiyel denklem ifadesine yansıtılarak çözüm bulunmaya çalışılmıştır , (Ait-Sahalia ve Kimmel, 2006; Rindell, 1995; Kawakatsu, 2007). Dayanak varlık fiyatı ile fiyatın oynaklık parametresi arasındaki korelasyonun modele dahil edilmesiyle nihai modelin değişken sayısının çok artması dolayısıyla bu modellere Black ve Scholes (1973) ve Merton (1973) asıl modellerinde olduğu gibi kapalı formda bir çözüm bulunması mümkün olmamıştır. Ancak birtakım kabullere yer verilerek bu modellerin esas çözüm yerine yaklaşık çözüm sunduğu belirtilmiş olmakla beraber opsiyon fiyatlama modeline eklenen stokastik oynaklık ifadesiyle piyasa fiyatına daha yakın sonuçlar bulunduğu gözlemlenmiştir.

Longstaff (1995) log-normal dağılıma göre hesaplanan opsiyon fiyatlarının bazı durumlarda yatırımcı kararlarını yansıtmadığı ve piyasa fiyatı ile belirgin fark oluştuğunu bulgulamıştır. Yeterince uzun bir periyot incelemeye alındığında empirik verinin log-normal sürecini doğruladığı ancak bazı durumlarda örtüşme olmadığı belirlenmiştir¹². Yatırımcı kararları, yatırımcıların gelecek döneme yönelik beklentilerinden hareketle aslında piyasanın genel seyri (ya da spesifik bir ürünün fiyatının ne olacağı) ile ilgili olarak bir olasılık dağılımı belirlemesi sonucunda uygulanır. Kısaca piyasada yapılan tüm işlemlere bağlı olarak bir olasılık dağılımı belirlenmiş ve ortaya çıkmış olur. Piyasa katılımcılarının farklı bilgi ve beceri seviyesinde olmasından dolayı bu dağılımın çıktıları çok çeşitlidir.

¹² Yeterince uzun periyot günlük kapanış fiyatları dikkate alındığında en az 30 iş günü olacak şekilde seçilmelidir.

Bu yüzden bu olasılık dağılımına uygun şekilde piyasada oluşan fiyatların, log-normal dağılım kullanılarak hesaplanan fiyatlarla zaman zaman uyuşmadığı görülmüştür. Longstaff (1995) bu durumları incelediğinde log-normal dağılımın uç noktalardan daha az olasılık ile örnekleme yaptırmasından kaynaklandığı sonucunu bulmuştur. Ayrıca piyasa oynaklığının yüksek olduğu dönemlerde opsiyon fiyatında önemli ölçüde fark yarattığını ortaya koymuştur. Log-normal dağılımın uç nokta düzeltmesi yapılmaksızın kullanılması sonucunda piyasa fiyatından oldukça farklı fiyatlama yapılması söz konusu olabilmektedir. Empirik veri dağılımı incelendiğinde yüksek oynaklık dönemlerinde logaritmik getirilerin simetrik normal dağılımdan sapma gösterdiği görülmüştür (Longstaff, 1995).

Empirik veri analizine yönelik çalışmalarda dikkat edilmesi gereken en önemli konulardan biri ele alınan dönem itibarıyla vadesini tamamlayan opsiyonların yerine aynı/benzer şekil şartlarını taşıyan yeni opsiyonların çıkarılmasıdır. Bu durum ele alınan veri havuzunu doğrudan etkilemektedir (Longstaff, 1995).

Longstaff (1995) piyasada işlem gören opsiyon fiyatlarından yola çıkarak geriye dönük hesapladığı oynaklık değerlerinin farklı vade ve farklı kullanım fiyatlarına bağlı olarak değişkenlik gösterdiğini bulgulanmıştır. Empirik opsiyon fiyatlarından (empirical data) yola çıkılarak hesaplanan oynaklık değerinin (implied volatility), aynı dayanak varlığa bağlı olmak üzere farklı vade veya kullanım fiyatı seçeneklerinde aynı değerde olmadığı görülmüştür. Buna neden olarak Longstaff (1995)'de Black-Scholes formulünde aracılık komisyonu ve maliyetlerinin ihmal edilmiş olması gösterilmiştir. Hesaplanan oynaklık değerlerindeki farkın fiyata sonradan yansıtılan komisyonlar ile alım ve satım fiyatları arasındaki farktan (spread) kaynaklandığı düşünülmüştür. Daha sonradan ilgili farkın sadece komisyonların ihmal edilmesinden kaynaklanmadığı, fiyatın modellenmesinde yapı taşı olarak kullanılan log-normal prosesin uç noktalardan yeterli örnekleme yapmamasına bağlı olarak tüm olasılıksal durumların fiyatlamaya yansıtılmamasından da kaynaklanmış olduğu bulgulanmıştır (Broadie ve Glasserman, 1996). Log-normal dağılımın gerçek piyasa durumunu tam yansıtmaması üzerine alternatif olabilecek dağılım ve stokastik süreçler üzerine araştırmalar yapılmaya başlanmıştır.

Rindell (1995) iki modeli test etmiştir. Black ve Scholes (1973) ile Amin ve Jarrow (1992) modelini test etmiş ve ikinci modelin istatistiksel olarak daha doğru olduğu

sonucuna ulaşmıştır. Ancak, Amin ve Jarrow, (1992)'nin geliştirdikleri modelde stokastik faiz oranı kullanması dolayısıyla menkul kıymet fiyatı ile faiz oranları arasındaki korelasyonun da modele dahil olmasıyla model daha karmaşık hale gelmiş ve pratik uygulanabilirliğini yitirmiştir. Uç bölgelerden daha fazla örnekleme yapılmasını sağlamak için bir başka dağılım ailesinin kullanılması yoluyla daha esnek opsiyon fiyatlama yöntemleri araştırılmıştır.

Ayrıca Black ve Scholes (1973) modeline yapılan eklemeler sonucunda matematiksel çözümün imkansız hale gelmesi nedeniyle 1995 yılından itibaren yeni bir çözüm yolu elde etmek amacıyla Monte Carlo yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır. Monte Carlo İntegrasyon tekniği ile opsiyon fiyatının hesaplanması için Black-Scholes modelinin temel varsayımlarından bir tanesi olan dayanak varlık fiyatının geometrik Brown hareketine uygun şekilde log-normal dağılımdan örneklenmesi yapılmıştır. Log-normal dağılım ve normal dağılım arasındaki bağıntıdan ilgili örnekleme işleminin parametreleri hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalarda arbitraj imkanı olmayan ve risksiz fiyatlama prensiplerine uyan piyasa koşulları altında dayanak varlık beklenen getirisinin piyasada o dönem için geçerli risksiz faiz oranına eşit olacağı kabulü yer almaktadır Black ve Scholes (1973). Bu sayede standart bir Avrupa opsiyonunun fiyatı, uygun bir olasılık dağılımı altında (equivalent martingale-measure) dayanak varlığın vade sonundaki beklenen getirisinin şimdiki zamana sürekli iskontolama yapılmasıyla bulunur¹³.

Ancak bu durumda rassal sayı tabanlı yönteme bağlı olarak özellikle finansal uygulamalar için varyans azaltma tekniği eklenmesi, bulunan sonucun hata payının düşürülmesi gerekmektedir. Önem Örnekleme varyans azaltma tekniği (Importance Sampling Method) opsiyon fiyatının hesaplanmasında kullanılmıştır. Bu yöntemin uygulandığı çalışmalardan bazıları (Broadie ve Glasserman, 1996; Broadie ve Glasserman, 1997; Charnes, 2000; Dupuis, 2005).

Önem Örnekleme yöntemine opsiyon fiyatlama konusu dışında yer verilen çalışmalardan Hesterberg (1995) öne çıkmaktadır. Hedef dağılım için ikiden çok dağılımın birleşiminden oluşan korunaklı karışık dağılımları (defensive mixture distributions) önermiştir. Buna göre orjinal olasılık dağılımı (opsiyon fiyatlamada kabul edilen log-normal dağılım) korunaklı karışık dağılıma belirli bir yüzdede

¹³ Türev ürünlerin fiyatı aynı iskontolama yöntemi ile hesaplanmaktadır.

katılırken diğer dağılımlar serbest olarak seçilebilir. Böylece istenen sayıda farklı dağılımın optimize edilmiş ağırlıklara sahip olduğu yeni bir dağılım kullanılmış olmaktadır. Orjinal dağılımın yeni dağılımın bir parçası olması nedeniyle ismi korunaklı dağılım olarak seçilmiştir.

Monte Carlo İntegrasyon tekniğini en başarılı olarak kullanan ilk Boyle, (1995) olmuştur. Piyasa fiyatına en yakın diğer çözümler Broadie ve Glasserman (1996), Boyle ve diğ. (1997) ve Broadie ve Glasserman (1997) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmalar kapsamında ortaya çıkan çözümler Black ve Scholes (1973) modelinden başlanarak diğer tüm stokastik volatilité modelleri için test edilerek, kıyaslama yapılması sağlanmıştır, (Raggie ve Bordignon, 2006; Scott, 2009). Buna göre Monte Carlo integrasyon uygulamalarının temel Black ve Scholes (1973) modeline en yakın şekilde çözüm sunduğu ortaya konmuştur. Finansal hesaplamalarda Monte Carlo yöntemlerinin kullanılmasıyla ilgili olarak Jäckel (2002) faydalı bir kaynaktır.

Neumann (1998) iki farklı parametrelili log-normal dağılımın ağırlıklı ortalamasını alarak birleşik dağılım (mixture distributions) kullanmıştır. Bu uygulamanın iki türde etkisi olmuştur. İlk olarak dağılımın uç noktalarından daha fazla örnekleme yapılması sağlanarak empirik veriye daha uygun dağılım kullanılmış olmaktadır. İkinci olarak dayanak varlık fiyatına ilişkin oynaklığın değişmesini sağlayan bir dağılım kullanılmış olmaktadır. Burada bir normal dağılım grafiğı düşünöldüğünde bu grafiğın uç noktasında daha küçük bir normal dağılım grafiğının de örtöştüröldüğü şeklinde iki dağılımın birlikte kullanıldığı düşünölmöştür. Birleşik dağılımın parametreleri, modelden bulunan teorik opsiyon fiyatı ile empirik veri arasındaki fark en küçük kareler yöntemine göre (least squares method) en az olacak şekilde belirlenmektedir¹⁴. Ancak birleşik dağılım iki log-normal dağılımın lineer birleşimi şeklinde alınmış olduğundan gerçek fiyat dağılımını tam olarak yansıtmamaktadır. Neumann (1998) önerdiği birleşik dağılım modelinin sonuçları ile Black-Scholes modelinin sonuçlarına empirik veriye yakınlık açısından yer vermiştir.

Amerikan opsiyonlarının fiyatlanmasında kullanılan Monte Carlo yöntemleri sonucunda ya varyansın yüksek çıkması ya da opsiyon fiyatında belirgin aşığı yönlü sapma görölmesi ile karşılaşılmıştır. Avramidis ve Hyden (1999) opsiyon fiyatındaki

¹⁴ Neumann (1998) çalışmasında empirik veri olarak Almanya'nın DAX borsasında işlem gören 1994 yılının ilk altı aylık dönemine ait tüm opsiyon fiyatlarını almıştır.

sapmaları azaltan stokastik mesh yöntemini önermişlerdir. Buna göre opsiyon fiyatı bir yüksek tahminci ve bir düşük tahminci olacak şekilde iki ayrı tahmine dayalı olarak hesaplanmakta ve bunların ortalaması alınmaktadır. Her durumda daha sonraki örneklemeye dayalı tahmin edicinin yüksek olması için ortalaması standart normal dağılımdan büyük olan dağılım kullanılmış ve iteratif hesaplama yapılmıştır. Düşük tahminci içinse daha önceki yöntemlerde kullanılan örnekleme yöntemi iteratif olarak uygulanmıştır. Ayrıca her durum için birikimli olarak olasılık yoğunluklarının çarpımı hesaplanmış ve kümülatif ağırlık fonksiyonu tanımlanmıştır. Böylece örnekleme yapılan noktada bu iki tahmin edicinin ağırlıklı ortalaması alınarak daha kesin bir tahmin edici hesaplanmıştır.

Seçilen konu ile ilgili diğer çalışmalarda zamanla değişen oynaklık modelleri ile GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modelinin kıyaslanmasına yer verilmiştir Gerlach ve Tuyl (2006). Burada birleşik dağılım yönteminde olduğu gibi farklı dağılımların bir regresyon modeli altında toplanmasıyla empirik veriye en yakın dağılım ailesinin bulunması yoluna gidilmiştir.

Log-normal dağılımın dezavantajlarını ortadan kaldırmak için Mauler ve McDonald (2014) logaritmik getiriler için Weibull, geneleştirilmiş Gama ve ters hiperbolik sinüs fonksiyonu gibi dağılımları normal dağılım yerine kullanmışlar ve anlamlı sonuçlar bulmuşlardır.

Monte Carlo İntegrasyon tekniğinin esnek olması, tüm durumlarda çözüm bulması gibi özelliklerinden dolayı son yıllarda kullanım alanında genişlemesine neden olmuştur. Sun ve Timofeyev (2014) kinetik Monte Carlo tabirini kullanarak da yöntemin bu özelliklerine vurgu yapmıştır. Monte Carlo uygulamalarının kullanılmasıyla birlikte diğer varyans düşürme tekniklerinden zıt rassal sayılar (antithetic varieties) ve kontrol değişkeni (control varieties) yöntemleri de opsiyon fiyatı hesaplamasında kullanılmıştır (Mehrdoust, 2015).

Xiaoyu ve Jian (2015) finans piyasasında yaşanan ani fiyat hareketlerini belirsizlik tanımlaması içinde Avrupa tipi opsiyon fiyatlama modeline dahil ederek yeni bir model önermiş ancak sonuçların kontrol edilmesini ve diğer opsiyon çeşitleri için de model geçerliliğini sonraki çalışmalara bırakmıştır.

Stokastik fiyat süreçleri ile ilgili olarak ise temel düzeyde Haugh (2010) veya Olson (2008) yeterli olmaktadır. Daha detaylı ve kapsamlı bir stokastik analiz incelemesi için Seydel (2006), Brandimarte (2006) veya Bodie ve diğ. (2007)'ye bakılabilir.

Fiyat stokastik sürecinin tek bir rejime bağlı kalmayıp sürekli değişebilen ve birçok farklı fiyat sürecini de içine alan stokastik bir yapıda olması kabul görmeye başlamıştır. Junichi (2014) çok boyutlu Lévy süreçlerinden oluşan alternatif dağılım ailesini Monte Carlo İntegrasyon tekniği ile uygulamıştır. David ve James (2014) genelleştirilmiş Beta dağılımı, hiperbolik sinüs ve Burr-3 ile Burr-12 dağılımlarını kullanarak opsiyon fiyatlamada dağılım karakteristiklerini araştırmışlardır. Ayrıca sınırlı fiyat stokastik süreçlerine olan ihtiyaç BİST gibi gelişmekte olan borsalarda uygulanan fiyat marjı kuralı kapsamında gerçekleşmiştir. Bir menkul kıymet fiyatına marj uygulanması fiyat stokastik sürecine etki etmekte olup sınırlı bir fiyat stokastik sürecine göre fiyatın modellenmesi gerekli hale gelmektedir. Xiaoyu ve Jian (2015) belirsiz fiyat modelleri için opsiyon fiyatlama modeli önermiştir. Bu doktora tez çalışmasında sınırlı fiyat stokastik sürecinin opsiyon fiyatlarına etkisi araştırılmıştır.

4. OPSİYON FİYATLAMASI

Opsiyonlar bir başka menkul kıymet üzerine yazılır. Opsiyon fiyatının başka bir menkul kıymet fiyatından türetilmesinden dolayı opsiyonlar türev ürün olarak nitelendirilmektedir. Bir piyasada opsiyon fiyatının oluşması ve piyasa katılımcıları tarafından opsiyon alım-satım işlemlerinin gerçekleştirilebilmesi için öncelikle birtakım şartların yerine gelmesi gerekir. İlk olarak piyasadaki işlemlerin şeffaf bir ortamda gerçekleşmesi ve tüm piyasa katılımcıları tarafından paylaşılan bir düzlemde izlenebilmesi gerekmektedir. Daha sonra detayları alt bölümlerde açıklanmak üzere Etkin Piyasa Hipotezi çerçevesinde piyasa içerisinde sürekli arbitraj işleminin bulunmaması ve piyasa işleyişinin risksiz fiyatlama prensiplerine uygun olması gerekmektedir. Bu şekilde bir piyasa işleyişinin sağlanmış olması sonucunda finansal hesaplamaların güvenilirliği ve uygulanabilirliği artmış olmaktadır.

Uygun piyasa ortamında bir opsiyonun yazıldığı andaki fiyatı daha önce açıklanan beş adet parametreye bağlı olarak değişim gösterir. Dayanak varlık spot fiyatındaki değişim ise log-normal proses ya da geometrik Brown hareketi olarak isimlendirilen stokastik süreç sayesinde gerçekleşmektedir.

Opsiyon fiyatı temel olarak iki ünlü akademisyen Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilen Black ve Scholes (1973) modeli kullanılarak hesaplanır. Black ve Scholes (1973) log-normal prosesi kullanarak opsiyon fiyatı için konuya ışık tutan dinamik bir stokastik model geliştirmiştir. Avrupa tipi temel opsiyonların fiyatlanmasını sağlayan bu modelle birlikte Binom yöntemi, sonlu farklar yöntemi ve tüm opsiyon çeşitlerinin fiyatlanmasını sağlayan Monte Carlo İntegrasyon tekniği kullanılarak opsiyon fiyatları hesaplanabilir.

Bu bölümde önce opsiyon fiyatının oluşması için piyasanın sahip olması gereken şartlar belirtilmiş, daha sonra opsiyon fiyatlamasının esasları açıklanmıştır. Opsiyon fiyatlamasının temelindeki Black ve Scholes (1973) modelinin varsayımları ve hesaplama detaylarıyla birlikte opsiyon fiyatını etkileyen dinamikler belirtilmiştir. Ayrıca alternatif portföy yaratma yoluyla opsiyon fiyatının bağlı olduğu olasılıksal durumlar ortaya konmuştur. Daha sonra Egzotik opsiyonların fiyatlanmasında tek

yöntem olarak ortaya çıkan Monte Carlo integrasyon tekniğinin kullanımına yer verilmiştir. Opsiyon fiyatı çok katlı integral formunda bir beklenen değer ifadesi olarak gösterilmiş ve bu integralin çözümü için Monte Carlo integrasyon tekniğinin nasıl kullanılabileceği açıklanmıştır. Bölümün sonunda Monte Carlo integrasyon tekniğinin kullanılmasına bağlı olarak oluşan varyansın düşürülmesine yönelik varyans azaltma tekniklerinden önem örnekleme ve zıt rassal sayılar yöntemlerine değinilmiştir.

4.1 Gerekli Finansal Matematik

Opsiyon fiyatlama konusu yüksek düzeyde matematiksel ve istatistiksel hesaplamalar içermektedir. Opsiyon fiyatının hesaplanması yöntemlerine geçmeden önce matematiksel altyapı ile ilgili bilgilere değinmek yerinde olacaktır.

4.1.1 Etkin piyasa hipotezi

Finansal piyasaların gelişmişliği öncelikle yeterli likiditeye sahip olması ile ölçülür. Likidite piyasadaki bir menkul kıymetin herhangi bir zamanda piyasa fiyatından istenen miktarda alınıp satılabilmesini ifade etmektedir. Bir başka gelişmişlik göstergesi piyasanın şeffaf olmasıdır ki bu aynı zamanda piyasanın Etkin Piyasa Hipotezi (Efficient Market Hypothesis) kavramına göre işliyor olması anlamına gelmektedir. Bu kavrama göre piyasa katılımcılarının tümünün piyasada gerçekleşen işlemlerden, açıklanan veri ve haberlerden aynı anda ve tam olarak haberdar olduğu ve yatırım kararlarını bu dağıtılmış bilgi ortamında verdikleri kabul edilir (Bodie ve diğ, 2007).

Reuters ve Bloomberg gibi uluslararası yaygınlığı bulunan haber ajansları sayesinde bilgi dağıtımı son derece hızlı olmaktadır. Her bir piyasa katılımcısı sürekli olarak ajans ekranlarını açık tutarak her türlü gelişmeyi, açıklanan veri ve haberleri takip etmek ve bunların yaratmış oldukları fiyat hareketlerine tepki vermek durumundadır. Anadolu Ajansı Türkiye özelinde önemli bir bilgi dağıtım kanalıdır. Bununla birlikte internet ortamı bilgi dağıtımı konusunda son derece önemli hale gelmiştir. Yasal düzenlemeler yapılarak belirli kritere uyan firmaların internet sayfası yayımlama zorunluluğu getirilmiştir. Ayrıca organize borsalara kote olan halka açık şirketler gelir-gider durumları, büyük yatırım kararları veya üst yönetimleri ile ilgili değişiklikler gibi şirket durumunu etkileyecek her türlü gelişmeyi Kamuyu

Aydınlatma Platformu (KAP)¹⁵ internet sayfası aracılığıyla tüm kamuoyuna bildirmek zorundadır. Bu durum yatırımcılar açısından yatırım kararının verilmesinden önce seçilecek şirkete ait bilgi ve haberlerin resmi kanaldan elde edilmesini sağlar. Aynı zamanda mali tablolarla standartlaşma ve kıyaslama kolaylığı sağlanmış olur. Sonuçta veri standardizasyonu sağlanarak piyasa seyrini tahmin etmeye yönelik modelleme ve analiz yapma olanağının önü açılmış olmaktadır.

Etkin bir piyasada arbitraj imkanı uzun süreli olarak bulunmaz. Arbitraj işlemi bir menkul kıymetin, fiyatının düşük olduğu bir piyasadan satın alınarak, fiyatının yüksek olduğu başka bir piyasada hemen satılmasını ifade eder (Black ve Scholes, 1973). Anlık olarak doğabilecek arbitraj imkanı çok kısa sürede kapatılarak arz-talebe bağlı fiyat dengesi yeniden kurulur. Bu iki piyasa arasındaki fiyat farkı alım-satım fiyat mekanizması ile kısa sürede dengelenir. Arbitraj yapan taraf bu işlemde anlık kazanç sağlamış olur (Bodie ve diğ., 2007).

Etkin piyasanın bir başka özelliği de risksiz fiyatlandırma prensibi (risk-neutral pricing) olarak kabul edilir. Menkul kıymetlerin vade sonu beklenen getirisinin piyasada geçerli olan risksiz faiz oranına eşit olması esasına bağlı olarak bu prensip menkul kıymetin bugünkü fiyatının olması gerektiği seviyenin belirlenmesini ifade etmektedir (Jäckel, 2002). Bu hesaplamada kullanılan faiz oranına risksiz faiz oranı denir ve sabit getirili ürünlerden gösterge tahvilin¹⁶ faizi olarak belirlenir. Risksiz faiz oranı tüm finansal ürünler için beklenen getirinin hesaplanmasında kullanılır. Arbitraj imkanı olmayan bir piyasada bir menkul kıymetin piyasa fiyatı vade sonu beklenen fiyatın bugüne iskontolanması ile bulunan değere eşit olmalıdır (Seydel, 2006). Bu eşitliği sağlayacak faiz oranının risksiz faiz oranı olması beklenir. Ancak farklı bir faiz oranı ile bu eşitlik sağlanıyorsa bu menkul kıymetin olması gereken fiyattan pahalı ya da ucuz olduğu anlamına gelmektedir. Bu durumun piyasada uzun süreli olarak görülmemesi beklenmektedir.

¹⁵ Kamuyu Aydınlatma Platformuna gönderilen bilgi ve haberler resmi internet sayfası olan www.kap.gov.tr adresinde yayınlanır. Halka açık ve hisseleri Borsa İstanbul'da işlem gören şirketler üç aylık dönemlerde mali tablo açıklama zorunluluklarını resmi kanal olan KAP üzerinden yaparlar. Ayrıca şirket gelişmeleri ile ilgili her türlü duyuru da bu kanalda yer alır.

¹⁶ Gösterge tahvil piyasada en çok işlem gören tahvillerden biri olarak Hazine Müsteşarlığı tarafından belirlenir. Türkiye'de 2 yıl vadeli DİBS gösterge tahvil olarak kabul edilmiştir ve faiz oranı da risksiz faiz oranı olarak alınır. Üç aylık periyotlarla yenisi çıkarıldığından gösterge tahvil üç ayda bir değişmektedir.

Risksiz fiyatlama sürecini açıklamak ve logaritmik getiri modelinin oluşturulması için şu tanımlamalar yapılmalıdır: Gelecek getiri değerlerine ilişkin tüm çözüm uzayı Ω , empirik getiri dağılımı $F(\cdot)$ ve eş martingal olasılık dağılımı $P(\cdot)$ olmak üzere, (Ω, F, P) olasılık uzayı içinde fiyat hareketleri ve logaritmik getiriler gerçekleşmektedir. Burada, $F(\cdot)$ orjinal olasılık dağılımının bilinmemesi nedeniyle logaritmik getirilerin karakteristiği bilinen eşdeğer martingal (equivalent martingale measure) bir $P(\cdot)$ olasılık dağılımı altında türdeş ve birbirinden bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Burada riskli bir menkul kıymetin beklenen getirisi risksiz menkul kıymet getirisine (faiz oranına) eşit olacak şekilde $P(\cdot)$ olasılık dağılımı altında rassal fiyat vektörleri oluşturulmaktadır.

$$S_t = E_t^P[S_T e^{-r(T-t)}] \quad (4.1)$$

Bulunan fiyat vektörleri kullanılarak $P(\cdot)$ olasılık dağılımına göre beklenen değer hesabı yapılır (Dupuis, 2005). Hesaplanan sonuç piyasadaki spot fiyat ile kıyaslanabilir Empirik olasılık dağılımı $F(\cdot)$ ile eşdeğer martingal olasılık dağılımı $P(\cdot)$ birebir aynı olmamakla birlikte $F(\cdot)$ 'nin sıfır olduğu bölgede $P(\cdot)$ de sıfır olmalıdır. Böylece dağılımların genel özelliği mutlak süreklilik (absolute continuity) sağlanmış olur. Burada süreklilik, pozitiflik ve lineerlik özelliklerinin korunması şartıyla paralel bir olasılık uzayına geçiş yapılmıştır (Seydel, 2006). Pozitiflik özelliği dayanak varlık fiyatının yeni $P(\cdot)$ olasılık dağılımı altında pozitif değerler alabileceği anlamındadır. Lineerlik özelliği risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde dayanak varlık beklenen getirisinin zamana bağlı artan fonksiyon olmasını ifade etmektedir. Menkul kıymetin yeni olasılık uzayına göre bulunan vade sonu değerinin bugüne iskontolanmasıyla şu an piyasada işlem gören dayanak varlık fiyatı bulunmalıdır¹⁷. Aksi bir durum piyasada fiyatlamaların başka nedenlere dayandığını gösterir (Benth, 2002).

4.1.2 Brown hareketi

Brown hareketi genel olarak “bağımsız bir şekilde hızı ve yönü sürekli değişen hareket” şeklinde tanımlanmaktadır. İlk olarak İskoç bilimadamı Robert Brown (1773-1858) çeşitli bitkiler ve su üzerine yaptığı incelemelerinde mikroskop sayesinde bu rasgele hareketin farkına varmıştır. Ancak canlı ve cansız ortamlarda

¹⁷ Komisyonlar ve alım-satım fiyat farkı (spread) göz ardı edilmiştir.

gözlemlediği bu hareketin matematiksel ifadesini bir teori ile ortaya koymamıştır. Daha sonra Amerikalı matematikçi Norbert Wiener (1894-1964), Brown hareketi üzerine yaptığı çalışmasında şu tanımlamayı önermiştir:

Tanım 4.1 : Brown hareketi $B(t)$ aşağıdaki üç şartın hepsini sağlayan sürekli zamanlı bir stokastik süreçtir.

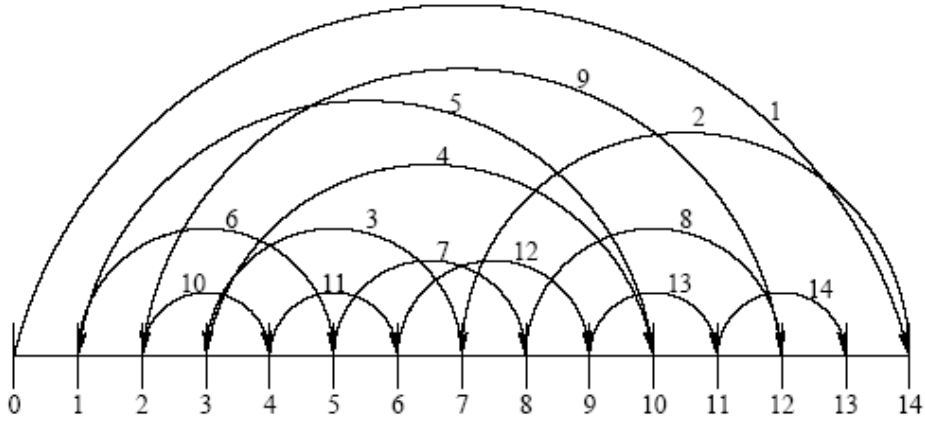
i) $B(t)$ bağımsız değişim gösterir, öyle ki farklı $t > s \geq u > v \geq 0$ noktaları için $B(t) - B(s)$ ile $B(u) - B(v)$ değerleri birbirinden bağımsızdır.

ii) $B(t)$ türdeş değişim gösterir, $B(t) - B(s)$ rassal değişkeni t ve s değerlerine bağlı olmayıp sadece $t - s$ değerine bağlıdır, $t > s \geq 0$. Bir başka ifade ile Brown hareketi zaman aralığının nerede olduğuna göre değil zaman aralığının genişliğine bağlı olarak değişim gösterir.

iii) $B(t)$ normal dağılıma uygun değişim gösterir, $B(t) - B(s)$ değerleri ortalaması $\mu = 0$ ve varyansı $\sigma^2 = t - s$ olan normal dağılıma $N(0, t - s)$ uymaktadır, $t > s \geq 0$.

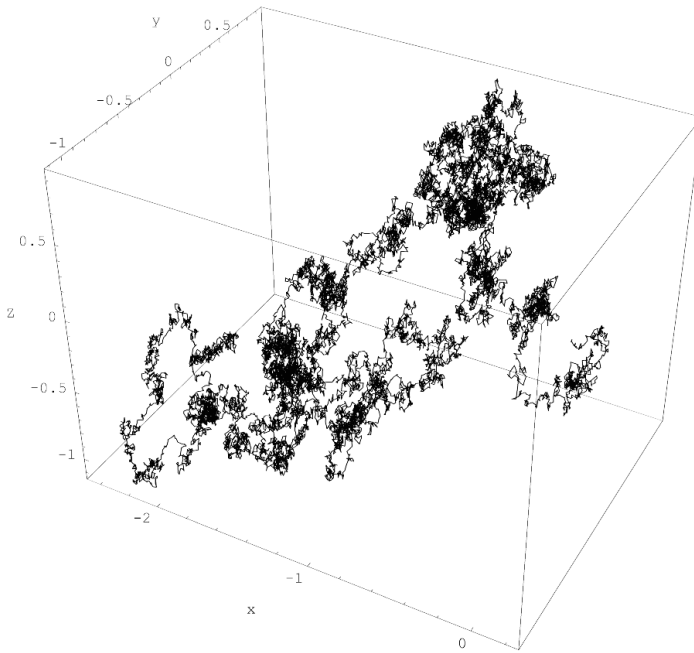
Bu tanımlamadan sonra bir $B(0) = A$ noktasında başlayan $A \neq 0$, ve Tanım 4.1'deki üç şartı da sağlayan stokastik süreçler Brown hareketi olarak kabul edilmiş ve $B(0) = 0$ noktasında başlayan bir Brown hareketi için standart Brown hareketi veya standart Wiener süreci tabirleri birlikte kullanılmıştır.

Standart Wiener süreci finansal uygulamalarda sıkça kullanılan bir araç olarak başlangıç noktası $W(0) = 0$ olan tek katlı ve sürekli normal rassal değişimlerden oluşan bir stokastik süreç olarak tanımlanmıştır (Brandimarte, 2006). Tek boyut için örnek bir standart Wiener süreci gösterimi Şekil 4.1'de görülmektedir. Bu örnekte Wiener sürecinin $W(0) = 0$ noktasında başlayıp daha sonraki zamanlarda sırayla $W(1) = 14$, $W(2) = 7$ şeklinde rassal olarak değişim kaydettiği görülmektedir.



Şekil 4.1 : Standart Wiener süreci gösterimi.

Difüzyon veya akışkan prosesleri gibi çok değişkenli süreçler için çok boyutlu Wiener süreçleri tanımlanmıştır. Çok boyutlu bir Wiener sürecinin sembolik gösterimi Şekil 4.2’de verilmiştir.



Şekil 4.2 : Çok boyutlu bir Wiener süreci gösterimi.

Wiener süreci ve Brown hareketi aynı anlamda kullanılırken Brown hareketi kullanımı daha yaygın olmasından dolayı bundan sonra Brown hareketi ifadesi tercih edilerek matematiksel incelemelere yer verilecektir.

Tanım 4.1’deki üçüncü şart gereğince, bir z_i standart normal rassal değişkeni Brown hareketi kapsamında şu şekilde yazılabilir:

$$z_i = \frac{(B(t_i) - B(t_0)) - 0}{\sqrt{t_i - t_0}} = \frac{B(t_i)}{\sqrt{t_i}}, \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow B(t_i) = z_i \sqrt{t_i}$$

Burada $t_0 = 0$ ve $B(0) = 0$ olarak alındığından gerekli sadeleştirme yapıp, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için bir vektör oluşturulabilir. Brown hareketi oluşturmak üzere örnek bir C programına Ek-C1’de yer verilmiştir.

Tanım 4.2 : Brown hareketi tanımında (Tanım 3.1) yer alan şartlardan ilk ikisini sağlayan stokastik süreçler *Lévy süreci* ($L(t)$) olarak adlandırılır.

Brown hareketi sürekli olan tek Lévy prosesidir. Ancak sürekli olmasına rağmen doğrudan türevlenebilir bir stokastik süreç değildir. Bu yüzden literatürde Brown hareketinin türev ifadesi $\frac{dB(t)}{dt}$ yerine diferansiyel ifadesinin $dB(t)$ ya da $dW(t)$ şeklindeki gösterimi kullanılmaktadır.

Brown hareketinin doğrudan türevlenebilir olmaması şu şekilde gösterilebilir: Öncelikle Brown hareketinin türevlenebilir olduğu düşünülerek genel türev ifadesi şu şekilde yazılabilir

$$\frac{\delta W(t)}{\delta t} = \frac{W(t + \delta t) - W(t)}{\delta t}. \quad (4.3)$$

Burada fark denklemi elde edilmiştir. Daha sonra Brown hareketinin sürekli olması dolayısıyla $\delta t \rightarrow 0$ için türev ifadesinin varyansı üzerinden limit alınırsa

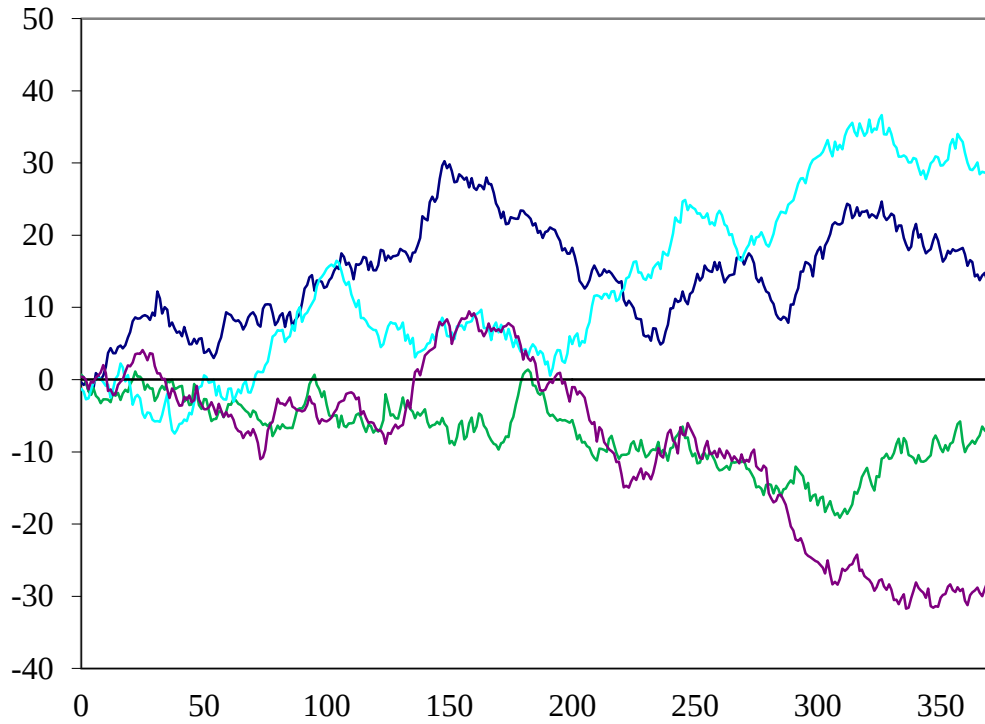
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} Var\left(\frac{\delta W(t)}{\delta t}\right) = \frac{Var(W(t + \delta t) - W(t))}{(\delta t)^2} = \frac{1}{\delta t} \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

sonsuz giden bir varyans bulunur (Brandimarte, 2006). Martingal sürecine uyan bir stokastik süreç sonlu bir zaman dilimi içinde sonsuza gidemeyeceğinden dolayı başlangıç kabulünün doğru olmadığı sonucuna ulaşılır (Brandimarte, 2006). Bu nedenle Brown hareketi doğrudan türevlenebilir olmasa da sürekli bir stokastik süreç olması dolayısıyla diferansiyeli vardır denir. Böylece $dW(t)$ Brown hareketinin zamanla artış miktarı (değişim miktarı) olarak tanımlanabilir. Bir martingal süreci olması dolayısıyla ortalama parametresi 0 (sıfır) değerini alacaktır. Artış miktarı

Tanım 4.1'in üçüncü maddesinden hareketle $N(0, dt)$ ile normal dağılmış bir rassal değişken olarak kabul edilir. Bu kabule dayanarak artış miktarının integral ifadesi, süreç içindeki farklı iki zaman noktası $u, v \in \mathbb{R}^+$ ve $u < v$ olmak üzere şu şekilde yazılır:

$$\int_u^v dW(t) = W(v) - W(u). \quad (4.5)$$

$dW(t)$ rassal değişkeni için $t = 0$ ve $B(0) = 0$ noktasında başlamak üzere dört adet örnek vektör Şekil 4.3'te görülmektedir.



Şekil 4.3 : Brown hareketi için dört örnek rassal yürüyüş grafikleri.

Zaman ifadesi $t = s$ ile değiştirilip, $X(s)$ standart Wiener süreci $W(s)$ üzerine kurulan bir stokastik süreç olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alınarak

$$dX(s) = \alpha ds + \beta dW(s) \quad (4.6)$$

şeklindeki bir başka stokastik süreç elde edilebilir. Bu ifade aynı zamanda genelleştirilmiş Wiener süreci olarak nitelenir. Burada $[0, t]$ zaman aralığı için stokastik integral alınırsa

$$\int_0^t dX(s) = X(t) - X(0) = \alpha t + \beta(W(t) - W(0)) \quad (4.7)$$

ifadesi bulunur.

4.1.3 Stokastik diferansiyel denklemler

Stokastik diferansiyel denklemler günlük hayatta karşılaşılan birçok fiziksel olayın matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılmaktadır. Yapılan deneylerle bu ifadelerin doğruluğu kontrol edilir. İnsanlık tarihinin gelişim sürecinde stokastik diferansiyel denklemlerin çok önemli bir yeri bulunmaktadır.

Kullanım alanları arasında metallerin genleşme süreçlerinin modellenmesi, inşaat sektörü, uçak kanatlarının dizayn edilmesi gibi farklı alanlardan birçok konu bulunmaktadır. Stokastik fiyat süreçlerinin modellenmesiyle de finansal hesaplamalarda oldukça sık kullanılmaktadır.

Daha önce belirtildiği üzere menkul kıymet fiyatı $S(t)$, denklem (2.11)'de verilen stokastik diferansiyel denkleme bağlı değişim göstermektedir. Denklem (2.11)'de olduğu gibi diferansiyel denklemler türev ya da diferansiyel ifadesi içermektedir.

Brown hareketinin açıklanmasından sonra denklem (2.11)'in elde edilişi aşağıdaki adımlar takip edilerek daha kolay ve kısa bir yoldan gösterilebilir, (Yön ve Bozdağ, 2014).

i) S_0 başlangıç fiyatı, S_t bir t zamanındaki menkul fiyatı olmak üzere denklem (2.3)'ten hareketle logaritmik getiri $LG(t)$ aşağıdaki şekilde ifade edilen bir stokastik rassal değişken olarak alınır.

$$LG(t) = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \sum_{k=0}^{t-1} \vartheta_k \quad (4.8)$$

ii) Denklem (4.8)'deki ϑ_k rassal değişkenleri normal dağılımdan $N(\mu, \sigma^2)$ alınırsa, normal rassal sayıların toplamı da bir normal rassal sayı olacağından $LG(t)$ logaritmik getiri değişkeni normal dağılıma sahip bir rassal değişken olur. Böylece $LG(t)$ rassal değişkeninin ortalaması denklem (2.4), standart sapması denklem (2.5) kullanılarak hesaplanabilir.

iii) $LG(t)$ rassal değişkeni için standart normal değişken

$$z = \frac{LG(t) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. $LG(t)$ yerine logaritmik getiri ifadesi yazılır ve denklem (4.9) düzenlenirse

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \mu t + \sigma\sqrt{t}z \quad (4.10)$$

ifadesi bulunur.

iv) Burada $\sqrt{t}z$ ifadesi, denklem (4.2)'den hareketle $(\sqrt{t}z = B(t) - B(0))$ ile değiştirilebilir. Brown hareketi tanımı madde üçten yararlanılarak normal dağılım özelliği kullanılmıştır¹⁸. Böylece denklem (4.10)'daki logaritmik getiri ifadesi $\Delta t = t - 0$ alınmak üzere

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \mu\Delta t + \sigma(B(t) - B(0)) \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir.

v) Denklem (4.11) düzenlenir ve daha sonra iki tarafın diferansiyeli alınırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$d \log S_t - 0 = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4.12)$$

Burada sabit bir sayının diferansiyeli sıfır olacağından $(d \log S_0 = 0)$ yazılmış ve denklem (4.5)'ten hareketle $dW(t) = d(B(t) - B(0))$ ile değiştirilmiştir. Bu ifadeyle ayrıca denklem (2.10)'da belirtilen $\sigma dW(t)$ eklentisinin nasıl getirildiği de açıklanmış olmaktadır.

vi) Denklem (4.12)'deki logaritmik fiyat ifadesinde $d \log S_t = \frac{dS_t}{S}$ ile değiştirilirse son olarak $dS_t = \mu S dt + \sigma S dW(t)$ şeklindeki denklem (2.11)'de verilen fiyat stokastik diferansiyel denklemi elde edilmektedir.

¹⁸ Brown hareketi tanımı gereği iki zaman noktası arasındaki değişim, $(i = 1, 2, \dots, N)$ ve $(t_N = T)$ olmak üzere $(B(t_i) - B(t_{i-1})) \sim N(0, (t_i - t_{i-1}))$ ile normal dağılıma uyar.

Bu stokastik diferansiyel denklem elde edilirken, piyasada fiyatı etkileyen tüm unsurların bir u_t rassal değişkeninde toplanmış olduğu kabul edilmiştir. Bu u_t rassal değişkenleri μ, σ ve t parametrelerine bağlı olarak türetilmektedir. Parametrelerin birer sabit değer alınması yerine piyasada gerçekleşen her bir işleme bağlı olarak değişmekte olan dinamik bir yapı iöerisinde alınması, gerçek piyasa şartlarına daha uygun sonuçlar sağlayacaktır. Piyasada gerçekleşen fiyat hareketleri sürekli aynı karakteristiği göstermediğinden parametrelerin zamanla değişmesi gerektiği açıktır. Yükselen piyasa şartları ile düşüş trendindeki piyasa şartlarının farklı olması dinamik modelleme ihtiyacını göstermektedir. Uzun bir periyot için fiyatlama yapılması söz konusu olduğunda kısa aralıklarla güncellenen parametreler kullanılabilir.

4.1.4 Opsiyon fiyatının beklenen değeri

Dayanak varlık fiyatı stokastik sürecinin tanımlanmasıyla birlikte fiyatın vade sonu beklenen değeri uygun eş martingal olasılık dağılımı altında belirlenebilir. Dayanak varlık fiyatının vade sonu değerleri için eş martingal olasılık dağılımı tarafından belirli olasılıklar atanır. Böylece opsiyonun kullanılıp kullanılmadığına bakılmaksızın ödünleşme fonksiyonu üzerinden beklenen getiri ve opsiyon fiyatı hesaplanır.

Ancak opsiyon fiyatı bir dayanak varlık fiyatı üzerinden türetildiğinden, opsiyonun ömrü boyunca opsiyon fiyatının bazı sınır değerleri içinde kalması gerekmektedir, (Schepper ve Heijnen, 2007). Bir alım opsiyonu fiyatı için aşağıdaki sınırlar sağlanmalıdır:

- i) Dayanak varlık fiyatı sıfıra yaklaşırken alım opsiyonu fiyatı da sıfıra yaklaşır. Her $t \in [0, T]$ için $V_a(t, S(t) = 0) = 0$.
- ii) Dayanak varlık fiyatı sonsuza yaklaşırken alım opsiyonu fiyatı dayanak varlık fiyatına yaklaşır. Her $t \in [0, T]$ için $V_a(t, S(t) \rightarrow \infty) \rightarrow S$.
- iii) Vade sonu ($t = T$) için opsiyon fiyatı iskontosuz ödünleşme fonksiyonu¹⁹ ile bulunur. Opsiyon vadesinin son günü için $V_a(T, S(T)) = (S - K)^+$.

¹⁹ Hesaplama gün farkı olmadığından $(T - t = 0)$ alınarak $e^{-r(T-t)}$ düzeltilmesi uygulanmaz. Vade sonuna kalan gün sayısı $(T - t)$ ile bulunur. Ayrıca komisyonlar ve alım-satım fiyat farkının göz ardı edildiği bir kez daha hatırlanmalıdır.

iv) İlk üç maddeden hareketle alım opsiyonu fiyatı için $0 \leq (S - K)^+ \leq V_a \leq S$ ifadesi yazılabilir.

Benzer şekilde bir satım opsiyonu fiyatı içinse şu sınırlar sağlanmalıdır:

i) Dayanak varlık fiyatı sıfıra yaklaşırken satım opsiyonu fiyatı daha önce verilmiş olan alım-satım bağıntısı gereğince her $t \in [0, T]$ için $V_s(t, S(t) = 0) = Ke^{-r(T-t)}$ ile sınırlıdır.

ii) Dayanak varlık fiyatı sonsuza yaklaşırken satım opsiyonu fiyatı sıfıra yaklaşır. Her $t \in [0, T]$ için $V_s(t, S(t) \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

iii) Vade sonu ($t = T$) için opsiyon fiyatı iskontosuz ödünleşme fonksiyonu ile bulunur. Opsiyon vadesinin son günü için $V(T, S(T)) = (K - S)^+$.

iv) Satım opsiyonu fiyatı için $0 \leq V_s \leq Ke^{-r(T-t)}$ ifadesi yazılabilir.

Opsiyon fiyatı üzerindeki sınırların belirlenmesinden sonra beklenen getirinin bugünkü değeri üzerinden opsiyon fiyatı hesaplanabilir. Opsiyon fiyatı opsiyon ömrü boyunca beklenen getiri düzeyine bağlı olarak bu sınırlar arasında hareket etmektedir. Etkin Piyasa Hipotezi kısmında açıklanan risksiz fiyatlama prensiplerinin sağlandığı ve arbitraj imkanının sürekli bulunmadığı piyasa koşullarında bir alım opsiyonu fiyatı şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$V_a(S(t), t) = E[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+]. \quad (4.13)$$

Denklem (4.13) formundaki beklenen değer ifadeleri genel olarak, bir ya da birden çok rassal değişkenin uygun olasılık dağılımı altında tek katlı ya da çok katlı integral ifadesinin hesaplanmasıyla bulunur. Örneğin bir X rassal değişkeni için $f_X(\cdot)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun, $g(x)$ fonksiyonu x 'e bağlı deterministik bir fonksiyon olmak üzere; $g(x)$ fonksiyonunun beklenen değer ifadesi

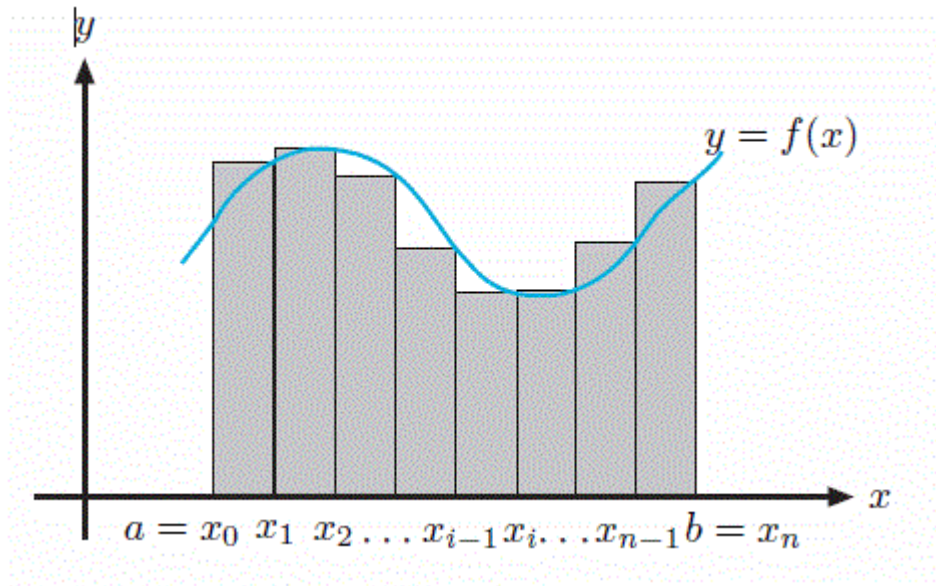
$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx = m \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $m \in \mathbb{R}$ değeri matematiksel yöntemlerle hesaplanabiliyorsa denklem (4.14) ifadesi bir standart integraldir. Ancak bazı beklenen değer ifadeleri çok katlı integralleri içerir ve bunların matematiksel çözümü

her zaman olmayabilir. Bu durumlarda nümerik yöntemler kullanılarak ilgili integral ifadesi hesaplanır ve beklenen değer bulunabilir. Bir sonraki kısımda bu yöntemlerin nasıl uygulanacağına değinilmektedir.

4.1.4.1 İntegral hesabı ve Monte Carlo integrali

Matematiksel kapalı çözüm bulunamaması durumlarında Newton metodu, Bisection metodu veya Gaussian quadrature gibi nümerik yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerin hepsinde integral alanı küçük bölgelere ayrılır. Bu bölgelerin alt ve üst sınır noktalarında $g(x)$ fonksiyonu değerleri ve $g(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin hesaplanması suretiyle integral ifadesi yaklaşık olarak hesaplanır. Örneğin bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki integrali Şekil 4.4'te görüldüğü gibi integral alanının dikdörtgen alanlara bölünmesi yoluyla yaklaşık olarak hesaplanabilir. Nümerik yöntemlerle integral hesaplanması ile ilgili daha detaylı bilgiye (Yaşar, 2003), (Şamilov, 2007) ve Brandimarte (2006)'dan ulaşılabilir.



Şekil 4.4 : $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki integrali.

Nümerik yöntemlerin uygulanabilirliği seçilecek nokta adedi ile sınırlıdır. Çok fazla sayıda nokta seçilmesini gerektirecek durumlarda hesaplama adımları üssel olarak artacağından çok uzun sürede cevap alınması durumu ortaya çıkabilir. Bu yüzden hem matematiksel yollarla hem de nümerik yöntemlerle hesaplanamayan integraller Monte Carlo integral yöntemi ile hesaplanabilmektedir. Monte Carlo integral yöntemi ile ilgili daha detaylı bilgiye Seydel (2006)'dan ulaşılabilir.

Monte Carlo integral yöntemi şu şekilde uygulanmaktadır: $a(x)$ gerçek değerli bir fonksiyon; $\mathbf{x}$ vektörü $f_X(\cdot)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu sağlayan d boyutlu rassal bir vektör; B ise $a(\mathbf{x})$ fonksiyonunun beklenen değeri olmak üzere

$$B = E_f[a(\mathbf{x})] = \iiint_{R^d} a(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

ifadesinin matematiksel ya da nümerik yöntemlerle hesaplanamaması durumunda uygun $f_X(\cdot)$ olasılık dağılımı altında yeter sayıda N adet $\mathbf{x}$ vektörü rassal olarak türetilerek denklem (4.15)'teki B değeri

$$\hat{B}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a(\mathbf{x}_i) f_X(\mathbf{x}_i) \quad (4.16)$$

formülü ile yaklaşık olarak hesaplanabilir. Büyük sayılar kanunu dolayısıyla, (Rindell, 1995)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{B}_N = B \quad (4.17)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir. Böylece denklem (4.15) yerine denklem (4.16) kullanılarak beklenen değer ifadesi hesaplanabilir. Ortaya çıkacak hata payı Mean Squared Error (MSE) ile ölçümlenmektedir.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^N (B_i - \hat{B}_N)^2}{N - 1} \quad (4.18)$$

Denklem (4.14)'te tek katlı X rassal değişkeni yerine sabit bir x vektörü için çokkatlı integral hesaplandığında beklenen değer ifadesi yine bir reel sayıya eşit olur, ancak x vektörünün bir rassal değişken olması durumunda beklenen değer ifadesi de bir rassal değişken olacaktır. Bu takdirde integral ifadesi matematiksel ve nümerik yöntemlerle hesaplanamaz ve ancak bir stokastik integral ifadesinin çözümü olacak şekilde hesaplanabilir. Deterministik bir fonksiyonun integrali bir reel sayıya eşit olurken bir stokastik sürecin integrali de bir rassal değişkene eşit olmaktadır.

4.1.4.2 Stokastik integraller

Klasik integral yöntemleri ile opsiyon fiyatının beklenen değer ifadesi hesaplanamaz. Riskli ürün fiyatının stokastik süreç izlemesi dolayısıyla stokastik integral ifadesinin

hesaplanması gerekir. Stokastik integraller stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Günlük hayatta karşılaşılan birçok fiziksel olayın matematiksel modellerine çözüm sunması açısından önemlidir. Tek katlı veya çok katlı deterministik bir fonksiyonun belirli intagrالی alındığında sonuç olarak bir reel sayı elde edilirken bir stokastik sürecin zamana bağılı stokastik integrali alındığında ise bir rassal değışken elde edilmektedir. Bu bakımdan stokastik integraller geleceğı dönük süreçlerin modellenmesinde rassal değışkenlerin beklenen değışğinin hesaplanması amacıyla kullanılmaktadır. Stokastik integraller belirli integrallerle aynı yöntemler kullanılarak hesaplanamaz. Stokastik integral tanımını aşığıdaki şekildedir.

Tanım 4.3 : $X(s)$ ve $W(s)$ denklem (4.7)'de verilen formda birer stokastik süreç ve s zaman birimi olmak üzere

$$\Theta = \int_0^T X(s)dW(s) \quad (4.19)$$

ifadesi bir stokastik integraldir. Finansal hesaplamalarda ve opsiyon fiyatı hesaplamalarında genel olarak İtô integrali kullanılmaktadır.

4.1.4.3 İtô integrali

İtô integrali stokastik analiz içinde çok önemli bir yer tutar. Stokastik integral ile standart integral arasındaki farkı ortaya koyan ve birçok matematiksel modele çözüm sunan bir yöntemdir. Ayrıca İtô integralinin çözümü bir rassal değışkeni vereceğinden İtô integralinin kendisi de bir rassal değışken olmaktadır. İtô integralinin tanımından önce stokastik integrallerin özelliklerini ortaya koymak amacıyla denklem (4.19)

$$I = \int_0^t g(s)df(s) \quad (4.20)$$

şeklinde düzenlenerek bir irdeleme yapılmalıdır. Burada $g(s)$ temel $f(s)$ stokastik süreci üzerine kurulu bir başka stokastik süreç olarak alınmıştır. Öncelikle $g(s)$ ve $f(s)$ ifadeleri birer deterministik fonksiyon olarak kabul edilerek I değışğinin hesaplanması yoluna gidilir. Bunun için $f(s)$ fonksiyonun türevi

$$f'(s) = \frac{df(s)}{ds} \quad (4.21)$$

kullanılarak denklem (4.20) üzerinden

$$I = \int_0^t g(s)f'(s)ds \quad (4.22)$$

şeklindeki Reiman integrali yazılabilir. Standart integral tanımı gereği Şekil 4.4'te gösterildiği biçimde denklem (4.22)'deki integral alanı $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ olacak şekilde n adet parçaya bölünüp toplam ifadesine geçilerek

$$\int_0^t g(s)f'(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(s_i)f'(s_i)(s_{i+1} - s_i) \quad (4.23)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $s_0 = 0$ noktasından hesaplamaya başlandığından ve $s_n = t$ alınarak n adet noktada hesaplama yapılacağından denklem (4.23)'ün sağ tarafındaki toplam işlemi $n - 1$ 'e kadar götürülür. Ele alınan $f(s)$ fonksiyonunun varyansı $Var(f(s)) < \infty$ olmak üzere değişkenliğin düşük olduğu kabul edilerek

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)) \quad (4.24)$$

ifadesine geçiş yapılabilir. Bu limit ifadesi içindeki $g(s_i)$ fonksiyonu da sınırlı varyansa sahip olması halinde denklem (4.24)'teki limit değeri vardır ve integral ifadesi hesaplanmış olur. Böylece $f(s)$ stokastik sürecinin temel Brown hareketi²⁰ $B(s)$ seçilmesi halinde, $\omega \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bir $X(s, \omega)$ stokastik süreci için

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)) \quad (4.25)$$

²⁰ Finansal uygulamalarda genellikle stokastik modelin dinamik değişim kaynağı olarak Brown hareketi kullanılır. Bu yüzden özel durum olarak $f(s)$ prosesi Brown hareketi olarak seçilmiştir. Brown hareketi, her martingal sürecinde olduğu gibi, sıfır beklenen ortalama değerine sahip olması dolayısıyla stokastik integral hesaplamalarında kolaylık (sadeleşme) sağlayacaktır.

ifadesi yazılabilir. Bu ifade aynı zamanda Itô İntegrali olarak da isimlendirilir., $X(s, \omega)$ stokastik sürecinin tek bir $\omega = 1$ koşumu için limit alınması deterministik durumu simgelerken sınırlı sayıdaki ω değişkenleri için limit alındığında limitin var olması stokastik sürece geçilmesini sağlar. Ancak her ω için limit değeri var olmayabilir (limit tanımsız olabilir) ya da bazı ω değerleri için limit $\pm\infty$ olabilir. Her sınırlı ω için limit değerinin var olması için $X(s, \omega)$ stokastik sürecinin aşağıda yer alan iki şartı sağlaması gerekir:

- i. $X(s, \omega)$ stokastik süreci Brown hareketinden bağımsız olmalıdır. Böylece fiyat stokastik sürecinin bir martingal süreci²¹ olması dolayısıyla fiyatın gelecekteki değişimi mevcut değerinden bağımsız olur.
- ii. $X(s, \omega)$ stokastik sürecininin sınırlı varyansa sahip olması gerekir.

Birinci şartın sağlandığı kabulünden hareketle $X(s)$ ve $B(s)$ bağımsız olmak üzere denklem (4.25)'deki eşitliğin sağ tarafındaki rassal değişken için ikinci moment ifadesi

$$\begin{aligned} E \left[\left(X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] &= E[X^2(s_i)] E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] \\ &= E[X^2(s_i)] (s_{i+1} - s_i) \end{aligned} \quad (4.26)$$

düzenlenerek denklem (4.26) elde edilir. Burada Tanım 4.1'de verilmiş olan Brown hareketinin $(B(s) - B(0)) \sim N(0, s)$ özelliği ve varyans²² ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] &= \text{Var}(B(s_{i+1}) - B(s_i)) + (E[B(s_{i+1}) - B(s_i)])^2 \\ &= (s_{i+1} - s_i) \end{aligned} \quad (4.27)$$

sadeleştirilmesi yapılmıştır. Denklem (4.23)'te olduğu şekilde integral alanı belirli $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ noktalarını içerecek şekilde bölgelere ayrılır ve denklem (4.26) üzerinden $i = 0, 1, \dots, n - 1$ için kümülatif toplam alınırsa

²¹ Martingal süreci tanımı Ek-A'da verilmiştir.

²² Bir X rassal değişkenin varyans ifadesinden faydalanılmıştır, $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

$$E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} E[X^2(s_i)] (s_{i+1} - s_i) \quad (4.28)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin sol tarafındaki kare açılımında çarpım durumunda bulunan ara terimlerin beklenen değeri sıfır olacağından toplam sembolü kare ifadesinin içerisine alınmıştır. Brown hareketi artımlarının beklenen değeri sıfır olduğundan çarpım durumundaki ara terimlerinin hepsinin toplamı sıfır olarak kabul edilmiştir. Denklem (4.28) ifadesinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa eşitliğin sağ tarafı, denklem (4.25) kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[X^2(s)] ds \quad (4.29)$$

şeklindeki integral ifadesine eşit olur. Bu integral ifadesinin hesaplanabilmesiyle denklem (4.25)'in sağ tarafının varyansı bulunmuş olur ve bu sınırlı varyans ile başlangıçtaki iki şartın sağlanmış olduğu görülür. Denklem (4.29)'da eşitliğin sol tarafındaki beklenen değer operatörü limit ifadesinin önüne alınabilir. Böylece denklem (4.25)'deki limit ifadesinin ve dolayısıyla da stokastik integral ifadesinin hesaplanabileceği gösterilmiş olur.

Stokastik integraller ile ilgili açıklamalardan sonra Itô integralinin tanımı şu şekilde yapılabilir:

Tanım 4.4 : Bir $X(s)$ stokastik sürecinin $[0, t]$ aralığında

- i). $\forall s \in [0, t]$ için F_s – sigma cebriinin mevcut olması,
- ii). $\int_0^t E[X^2(s)] ds < \infty$ ifadesinin sınırlı olması halinde Itô integrali

$$\int_0^t X(s) dB(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $B(s_i)$ Brown hareketi olarak alınmış olmakla birlikte Itô integrali içinde genel bir stokastik süreci ifade etmektedir.

Itô integralinin hesaplanabilmesi için Itô önsavı (Itô's lemma) kullanılır. Itô önsavına göre denklem (4.30)'un sağ tarafındaki toplam ifadesinin bulunması için seri

açılımlarından faydalanılır. Buradan Itô integralinin hesaplanması için bir formül türetilir (Itô formülü). Buna göre denklem (4.30)'daki Itô integrali, başlangıç noktası $\gamma = B(0)$ olan Brown hareketi üzerine ikinci dereceden Taylor seri açılımı kullanılarak hesaplanabilir. Taylor seri açılımına Ek B'de yer verilmiştir. Böylece denklem (4.30)'daki stokastik süreç için $f(\gamma; t, X)$ gösterimi kullanılarak stokastik sürecin denklem (4.7)'de verilen ve katsayıları $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olan genel Wiener sürecine bağlı $dX = \alpha dt + \beta dW_t$ kısmi diferansiyel denklemini sağladığı kabul edilerek $[0, t]$ aralığındaki Itô formülü

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \alpha \frac{\delta f}{\delta X} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\delta^2 f}{\delta X^2} \right) dt + \beta \frac{\delta f}{\delta X} dW_t \quad (4.31)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade Ek C'de yer alan formüllere denklem (4.7)'nin uygulanması ile yazılabilmektedir. Ancak ikinci dereceden Taylor açılımındaki bazı terimler şu şekillerde ihmal edilmiştir:

- $\frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta t^2} (\delta t)^2$ ifadesi $(\delta t)^2 = 0$ olacağından ihmal edilmiştir.
- $\frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta X^2} (\delta X)^2$ ifadesi yerine ise $(\alpha \delta t)^2 = 0$ olacağından yalnızca $(\beta dW_t)^2$ için $\beta^2 dt$ ifadesi alınmıştır.

Daha önce Brown hareketi kısmında açıklandığı üzere varyans ifadesi üzerinden $(dW_t)^2 = dt$ eşitliği yazılabilir. $f(\gamma; t, X)$ iki kez türevlenebilir olmak üzere genel stokastik süreç ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$f(\gamma; t, X) = f(X(\gamma)) + \int_0^t f'(X(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s)) ds \quad (4.32)$$

Örneğin Itô formülü için bir uygulama Geometrik Brown hareketinin türetilmesi üzerinden gösterilebilir. Bunun için denklem (2.11)'de verilen fiyat stokastik süreci üzerinden denklem (4.31)'deki α ve β katsayıları $\alpha = \mu S(t)$ ve $\beta = \sigma S(t)$ olarak alınır ve denklem (4.31)

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \mu S \frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta f}{\delta S} dW_t \quad (4.33)$$

şeklinde yazılır (rassal değişken olan $S(t)$ ifadesi yerine S kısaltması kullanılmıştır).

Ardından denklem (2.11) ifadesi $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW_t$ şeklinde düzenlenerek genel stokastik süreç ifadesi

$$f(t, S(t)) = \log S(t) \quad (4.34)$$

olarak seçilir. Bu ifade üzerinden denklem (4.33)'deki kısmi türev ifadeleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta t} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta S} = \frac{1}{S} \\ \frac{\delta f}{\delta S} = -\frac{1}{S^2} \end{cases} \quad (4.35)$$

Daha sonra bulunan katsayılar denklem (4.33)'de yerlerine yazılarak denklem (4.34)'ün diferansiyel ifadesi alındığında

$$\begin{aligned} df &= \left(0 + \mu S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{-1}{S^2}\right) dt + \sigma S \frac{1}{S} dW_t \\ \Rightarrow d \log S(t) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \quad (4.36)$$

ifadesi bulunur. Denklem (4.36) ifadesindeki diferansiyel yerine fiyat değişimi için başlangıç ve bitiş zamanı olarak sırasıyla $t = 0$ ve t zamanı alınarak ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \log S(t) - \log S(0) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - 0) + \sigma(W(t) - W(0)) \\ \Rightarrow S(t) &= S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}z} \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklindeki geometrik Brown hareketi türetilmiş olur ($\sqrt{t}z \in B(t)$ ve $z \sim N(0,1)$). Brown hareketinin üssel kısımda yer alması nedeniyle denklem (4.37)'deki stokastik sürece geometrik Brown hareketi ismi verilir. Böylece denklem (2.11)'de verilmiş olan kısmi diferansiyel denkleme bağlı olarak değişim gösteren bir fiyat stokastik süreci için denklem (4.31)'deki Itô formülü kullanılarak sırasıyla yukarıdaki adımların takip edilmesiyle fiyat stokastik süreç ifadesi bulunmuş olmaktadır.

4.1.5 Lognormal proses

Lognormal proses finans mühendisliği kapsamında geometrik Brown hareketine verilen diğer isimdir. Brown hareketi kullanılarak t zamanlarındaki rassal değişkenlerden oluşan $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ rassal yürüyüşü (random walk) yaratılır. Bu vektörde menkul kıymetin gelecek fiyat senaryoları biriktirilerek vade sonu menkul kıymet fiyatı tahmin edilmeye çalışılır. Denklem (4.33)'deki kısmi diferansiyel denklem üzerinden hareket edilerek bulunan denklem (4.37)'nin düzenlenmesiyle lognormal proses şu şekilde ifade edilir:

$$\log \frac{S(t)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} z. \quad (4.38)$$

Logaritmik getiri ifadesi bir $X(t)$ ile gösterilirse daha önce de belirtildiği üzere $X(t) = \log \frac{S(t)}{S(0)}$ olacak şekilde hesaplanır ve normal dağıldığı kabul edilir. Fiyattaki değişimin $X(t)$ yerine özellikleri bilinen ve ifadesi genel şekilde $Y(t)$ ile gösterilen bir başka stokastik süreç ile sağlanması durumunda

$$S_i(t) = S(0)e^{Y_i(t)} \quad (4.39)$$

şeklinde verilen bir $Y_i(t)$ fiyat stokastik süreci tanımlanabilir.

Bölüm 2.3.5'te opsiyonların geometrisi kısmında opsiyon fiyatının dayanak varlık fiyatı, dayanak varlık oynaklığı, kısa dönemli faiz oranı ve opsiyon vadesiyle birlikte kullanım fiyatına bağlı değişim gösterdiği belirtilmişti. Lognormal proses ile birlikte diğer opsiyon fiyatı dinamiklerinin açıklanmasından sonra bir alım opsiyonu fiyatı şu şekilde hesaplanabilir:

$$V_a(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty (S_T - K)^+ f_\Omega(S(t)) dS(t). \quad (4.40)$$

Burada denklem (4.13)'ün sağ tarafındaki beklenen değer ifadesi yerine bu ifadenin matematiksel karşılığına yer verilerek alım opsiyonu fiyatı, ödünleşme fonksiyonu ve uygun $f_\Omega(\cdot)$ olasılık dağılımı altında fiyat stokastik sürecine bağlı bir stokastik integral ifadesi olarak gösterilmektedir.

4.2 Opsiyon Fiyatlama Yöntemleri

Uluslararası büyük borsalarda ve gelişmiş ülke piyasalarında işlem gören finansal ürün fiyatları sınırsız fiyat stokastik süreçlerine uygun olarak değişim göstermektedir. Burada bir menkul kıymet fiyatının bir işlem günü içerisinde $0 < S < \infty$ şeklinde sınırsız değerler alması mümkün kabul edilmekte ve fiyatın modellenmesi buna göre yapılmaktadır.

4.2.1 Black-Scholes modeli

Opsiyon fiyatlamasının temelinde (Black ve Scholes, 1973) modeli vardır. İlk olarak Avrupa tipindeki bir opsiyon fiyatının matematiksel yolla hesaplanabileceği gösterilmiştir. Öncü (Black ve Scholes, 1973) makalesinin yayımlanmasından sonra bu model esas alınarak günümüze kadar opsiyon fiyatlama konusu üzerine birçok çalışma yapılmış olup birtakım ilave parametrelerin modele dahil edilmesiyle birlikte (Black ve Scholes, 1973) halen geçerliliğini korumaktadır. Birçok opsiyonun fiyatı bu model referans alınarak hesaplanmaktadır. (Black ve Scholes, 1973) modelinde riskli ürün fiyatının, denklem (2.11)'de verilen stokastik diferansiyel denkleme bağlı değişim gösterdiği kabul edilmiş ve opsiyon fiyatının lognormal proses üzerinden kapalı formda çözümüne yer verilmiştir.

Black ve Scholes (1973) denklem (4.40)'ta verilen integral ifadesinin çözümü için doğru sonuç veren bir formül geliştirmiştir. Black ve Scholes, (1973)'ün önerdikleri formül ile hesaplanan opsiyon fiyatı ile opsiyonun piyasa fiyatı karşılaştırıldığında çok yaklaşık oldukları belirlenmiştir. Opsiyon fiyatlamasının birdiğer öncü modeli (Black ve Scholes, 1973)'e benzer olan (Merton, 1973) olmuştur.

Black-Scholes modelinin geçerli olması ve güvenilir hesaplamalara konu olması için piyasanın öncelikle Bölüm 4.1'de açıklanan etkin piyasa şartlarını sağlaması gerekmektedir. Ancak bu çerçevede arbitraj imkanı olmayan ve risksiz fiyatlama prensiplerinin geçerli olduğu bir ekonomik ortamda hesaplamalara geçilebilecektir. (Black ve Scholes, 1973) makalesinde ideal durumlar (ideal conditions) olarak tanımlanan şu kabullere yer verilmiştir:

- i. Kısa dönemli faiz oranları opsiyon ömrü boyunca sabittir.
- ii. Dayanak varlık hisse senedi olarak alınmıştır. Dayanak varlığın fiyatı sürekli zamanlı bir rassal yürüyüşe uymaktadır. Belirli bir periyot için fiyat süreci

lognormal proses olarak alınmıştır. Dayanak varlık getirilerinin varyansı bu periyot içinde sabittir.

- iii. Dayanak varlık (hisse senedi) herhangi bir kar payı (dividends) ödemesi yapmamaktadır.
- iv. Opsiyon Avrupa tipi olarak seçilmiştir, sadece vade sonunda kullanılabilir.
- v. Alım-satım fiyat farkı (spread) ve alım-satım komisyonları ihmal edilmiştir. Piyasadaki alım-satım fiyatlarının eşit olduğu kabul edilerek hesaplamalar yapılmıştır.
- vi. Piyasada kısa dönemli faiz oranları üzerinden istenildiği kadar borç alınıp borç verilebildiği kabul edilmiştir.
- vii. Açığa satışın herhangi bir maliyetinin olmadığı kabul edilmiştir.

Bu varsayımlara dayanarak Black ve Scholes (1973), etkin piyasa koşullarında korunaklı dinamik bir portföy (Π) oluşturulabileceğini göstermiştir. Bu portföy başlangıçta

- $N \in \mathbb{Z}^+$ adet hisse senedinde uzun pozisyon,
- bir adet Avrupa tipi opsiyonda ise kısa pozisyondan oluşmaktadır.

Zaman ilerledikçe portföydeki hisse senedi miktarında değişikliğe gidilerek risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde portföyün toplam değerinin korunması sağlanır. Bu yüzden dinamik korunaklı portföy isimlendirmesi kullanılır. Opsiyon fiyatı $V(S(t), t)$ şeklinde sürekli bir fonksiyon ve S Spot fiyat olmak üzere bir t zamanında portföyün değeri

$$\Pi = NS - V(S, t) \quad (4.41)$$

ile bulunur. Bu portföyün toplam değerinin kısa vadeli faiz oranları gözetilerek korunması için portföy değerindeki anlık değişim

$$d\Pi = NdS - dV(S, t) \quad (4.42)$$

ifadesiyle verilir. Bu ifade içinde yer alan dayanak varlık fiyatı ve opsiyon fiyatının zaman içindeki değişimlerinin (dS, dV) açık ifadeleriyle ele alınarak denklem (4.42)'deki tüm stokastik terimlerin bulunması gerekmektedir.

Dayanak varlık fiyatına (S) ait stokastik sürecin geometrik Brown hareketi üzerine kurulu olarak denklem (2.11)'de verilen stokastik diferansiyel denkleme bağlı değişim gösterdiği kabul edilmiştir.

Opsiyon fiyatı $V(S, t)$ ise dayanak varlığa ait fiyat stokastik süreci ($S(t)$) üzerine kurulu bir başka stokastik sürece uygun seyir izleyeceğinden dolayı Itô önsavı kullanılarak

$$dV = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dW_t \quad (4.43)$$

stokastik diferansiyel denklemi yazılabilir. Denklem (4.42)'deki (dS ve dV) yerine sırasıyla denklem (2.11) ve denklem (4.43)'ün yazılmasıyla

$$\begin{aligned} d\Pi = N(\mu S dt + \sigma S dW_t) - \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt \\ - \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dW_t \end{aligned} \quad (4.44)$$

ifadesi bulunur. Burada korunaklı portföyden söz edebilmek için stokastik terimlerin katsayı toplamalarının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Denklem (4.44)'teki dW_t teriminin katsayıları için

$$N\sigma S dW_t - \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dW_t = 0 \quad (4.45)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan başlangıçta portföyde bulunması gereken hisse senedi miktarının

$$N = \frac{\delta V}{\delta S} \quad (4.46)$$

olması gerektiği bulunur. Zaman içinde spot fiyat ve opsiyon fiyatındaki değişimlere bağlı olarak korunaklı portföyde bulunması gereken hisse senedi miktarında (N) değişime gidilmelidir. Böylece opsiyon fiyatı V yerine stokastik süreç ifadesi $V(S, t)$

alınarak²³ (N) değerinin denklem (4.44)'te yerine yazılmasıyla portföydeki anlık değişim ifadesi

$$d\Pi = -\left(\frac{\delta V(S, t)}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V(S, t)}{\delta S^2}\right) dt \quad (4.47)$$

şeklinde sadeleşmiş olur. Denklem (4.47) ve riskiz fiyatlama prensipleri kullanılarak bir sonraki kısımda opsiyon fiyatı için kapalı formül bulunmaktadır.

4.2.1.1. Black-Scholes formülü

Black ve Scholes (1973)'ün getirdiği yenilik yukarıda oluşturulan portföyün getirisinin risksiz fiyatlama prensipleri çerçevesinde elde edilecek kısa dönemli faiz oranı (r) getirisine eşit olması gerektiğidir. Etkin piyasa hipotezine uygun şekilde arbitraj imkanının bulunmadığı bir piyasada bir portföyün anlık getirisi

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (4.48)$$

şeklinde yazılabilir. Öncelikle denklem (4.41)'den portföy değeri Π ifadesi alınarak denklem (4.48)'de yerine yazılırsa

$$d\Pi = r\left(\frac{\delta V(S, t)}{\delta S} S - V(S, t)\right) dt \quad (4.49)$$

bulunur. Denklem (4.47) ve denklem (4.49)'un sol taraf eşitliğinden hareketle

$$-\left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2}\right) dt = r\left(\frac{\delta V}{\delta S} S - V\right) dt \quad (4.50)$$

eşitliği yazılarak düzenlenirse aşağıdaki Black-Scholes stokastik diferansiyel denklemi bulunur.

$$\left(\frac{\delta V}{\delta t} + rS \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2}\right) - rV = 0 \quad (4.51)$$

²³ Çoğunlukla $V(S, t)$ şeklindeki stokastik süreç ifadesi yerine kısaltılmış V ifadesi kullanılır. Spot fiyat için $S(t)$ yerine S kullanılmasında olduğu gibi. Özellikle Itô integralindeki katsayılar dışındaki ifadeler birer stokastik süreci temsil etmektedir. Kullanım yerine bağlı olarak stokastik süreç ya da değer olduğu anlaşılabilir.

Bu parabolik kısmi diferansiyel denklem opsiyonun vade sonundaki değeri üzerinde bir sınır teşkil eder. Daha önce Bölüm 4.1.4'te belirtilen opsiyon fiyatı üzerindeki sınırlar ile birlikte denklem (4.51)'in birlikte çözülmesiyle alım ve satım opsiyonu fiyatları hesaplanır. Bunun için değişken dönüşümleri yapılmak suretiyle ısı denklemi olarak bilinen genel formda ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem elde edilerek opsiyonun vade sonu zamanı T ve vade sonu kullanım fiyatı K için bu denklemin çözülmesiyle alım ve satım opsiyonları için sırasıyla aşağıdaki formüller bulunur:

$$V_a(S_t, T - t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.52)$$

$$V_p(S_t, T - t) = -S_t N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2) \quad (4.53)$$

Burada $N(.)$ normal dağılım fonksiyonunu ifade etmekte olup aşağıdaki d_1

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (4.54)$$

ve d_2 değerleri için normal dağılım tablosundan okunur.

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (4.55)$$

Böylece Black-Scholes formülü kullanılarak Avrupa tipi bir opsiyonun teorik fiyatı hesaplanmış olur.

4.2.1.2. Black-Scholes modelinin avantaj ve dezavantajları

Black-Scholes modelinin avantajlarından en önemlisi opsiyon fiyatları konusunda bir referans olmasıdır. Birçok farklı hesaplama yöntemi ile yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçların kıyaslanmasında Black/Scholes fiyatı bir baz olarak kullanılmaktadır. Böylece piyasa katılımcılarının kendi yöntemleriyle hesapladıkları opsiyon fiyatları karşılaştırılabilirken aynı zamanda piyasa içinde bir arz talep dengesinin kurulması ve daha fazla sayıda işlem gerçekleşmesinde Black-Scholes formülü baş rol oynamış olur.

Black-Scholes modelinin bir başka önemli avantajı her türlü dayanak varlık üzerine yazılmış olan opsiyonların fiyatının hesaplanmasını sağlamasıdır. Dayanak varlık

üzerinde hesaplanan logaritmik getirilerin normal dağılıma uyduğu kabulü hem hesaplamaları standartlaştırmakta hem de her türlü dayanak varlık için opsiyon fiyatı hesaplanmasını mümkün kılmaktadır.

Diğer birçok modele göre daha basit ve anlaşılır olması Black-Scholes modelinin kullanımını yaygınlaştırmaktadır. Black-Scholes modelinin tanıtılmasından sonra birçok opsiyon fiyatlama modeli önerilmiş ancak yüksek matematik gerektiren karmaşık bu modeller Black-Scholes modelinin önüne geçememiştir.

Black-Scholes modelinde komisyonların ve alım-satım fiyatları arasındaki farkın (spread) ihmal edilmiş olması ise en önemli eksiklik olarak ortaya çıkmaktadır. Bunun sonucunda hesaplanan opsiyon fiyatları ile borsalarda işlem görmekte olan opsiyon fiyatları arasında bir miktar sapma olduğu bulgulanmıştır.

Fiyat sapmalarının opsiyon vadesine bağlı olarak artıp azalması opsiyon fiyatı üzerinde uzun dönemli belirsizliği arttırmış ve opsiyon vadelerinin genellikle bir yıl ile sınırlanmasına yol açmıştır. Bununla birlikte en çok işlem gören opsiyonlar bir ay ve üç ay vadeli olan opsiyonlardır.

Opsiyonların piyasa fiyatı alınarak Black-Scholes modeli üzerinden geriye dönük hesaplama yapıldığında dayanak varlık fiyat ve oynaklığının spot piyasadaki değerlerine göre daha yüksek seviyelerde olduğu görülmüştür. Yine bu durum işlem komisyonlarının ihmal edilmiş olmasından kaynaklanmakta olup bu komisyonların modele dahil edilmesiyle alım ve satım fiyatları ayrı olarak hesaplanmış ve piyasadaki alım-satım fiyatları arasındaki farktan daha yüksek bir fiyat farkı olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum opsiyon piyasalarındaki alım-satım komisyonlarının dayanak varlık piyasalarından daha yüksek olmasından kaynaklanmaktadır.

Black ve Scholes (1973) modellerine dayanak varlığa ait alım-satım fiyat farkı ile ücret ve komisyonları dahil etmemiş olsalarda empirik incelemelerinde bu maliyetlerin opsiyon alıcısı tarafından üstlenildiği sonucunu vurgulamışlardır. Böylece Black-Scholes modelinin opsiyon yazıcısı için o dönemki piyasa koşullarına göre doğru fiyat verdiği belirtilmiş olmaktadır. Opsiyon alıcılarının ise bu fiyatın üstünde bir bedel ödemeye razı olarak piyasada opsiyonları satın aldıkları belirtilmiştir.

4.2.1.3. Black-Scholes sonuçları

Model detaylarının verilmesinden sonra istenen parametrelere bağlı olarak alım ve satım opsiyonu fiyatları hesaplanmaktadır. Opsiyon parametreleri tüm farklı durumları ortaya koyabilmek açısından birden çok değerde aşağıdaki şekilde alınmıştır.

Çizelge 4.1 : Opsiyon fiyatı için seçilen parametre değerleri.

Parametre	Değer
T	1 ay, 3 ay, 1 yıl
r	%10
σ	%20, %80
S	{30,40,50,60,70}
K	50

Kullanım fiyatı ($K = 50$) sabit olarak alınmak üzere dayanak varlığın piyasa fiyatı ($S = \{30,40,50,60,70\}$) değerleri seçilmiş ve opsiyonun Karda ve Zararda opsiyon olmasına bağlı olarak opsiyon fiyatının tüm karakteristiği ortaya konulmuştur. Uzun ve kısa dönemli Avrupa opsiyonları için genelleştirilecek sonuçlara ulaşılması açısından üç farklı vade seçeneği alınmıştır. Fiyat hareketinin yüksek olmadığı durgun piyasa koşullarında oynaklık ($\sigma = 0.2$) olarak alınırken hareketli piyasa için ($\sigma = 0.8$) değeri seçilmiştir. Kullanım fiyatı ($K = 50$) ile birlikte faiz oranı uzun süreli piyasa ortalaması olan yıllık ($r = 0.1$) değerinde sabit alınmıştır. Black-Scholes modelinin yukarıdaki parametrelerle çözümü için bir C programı Ek-E de verilmiştir.

Black-Scholes formülü ile hesaplanan alım opsiyonu fiyatları Çizelge 4.2'de ($\sigma = 0.2$) için vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir. Black-Scholes formülünün opsiyon vadesi kısaltıkça bazı parametre değerleri için hesaplama yapamadığı görülmektedir. Bu durum Black-Scholes formülünün temel dayanağı olan normal dağılımın ortalamadan uzak noktalarda iyi çalışmamasından kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.2 : Alım opsiyonu için düşük oynaklık Black-Scholes sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	H*	H	0.05384
40	H	0.039370	1.39496
50	1.367373	2.647681	6.63484
60	H	11.27213	15.12924
70	H	H	24.81572

* H ifadesi hesaplanamamakta anlamında kullanılmıştır.

Black-Scholes formülünün 1 aylık vade için Çizelge 4.2'deki parametre değerleri aynı kalmak üzere ($S = [42,59]$) aralığında, 3 aylık vade içinse ($S = [36,66]$) aralığında sonuç verdiği görülmektedir. Dayanak varlık fiyatındaki (S) oynaklığın ($\sigma = 0.2$) düşük seviyede olmasından dolayı kullanım fiyatına (K) uzak olan dayanak varlık fiyatları için Black-Scholes formülü hesaplama yapmamaktadır.

Çizelge 4.3'te $\sigma = 0.8$ için Black-Scholes formülü ile hesaplanan alım opsiyonu fiyatları $r = 0.1$ ve $K = 50$ değerleri sabit olmak üzere vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir.

Çizelge 4.3 : Alım opsiyonu için yüksek oynaklık Black-Scholes sonuçları.

$(\sigma = 0.8)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	0.047049	0.821825	5.478816
40	0.973737	3.484136	10.77419
50	4.784977	8.458528	17.28933
60	11.85728	15.35067	24.81572
70	20.81855	23.53739	32.70806

Black-Scholes formülünün ($\sigma = 0.8$) değeri için tüm parametre değerlerinde sonuç verdiği görülmektedir. Ayrıca dayanak varlık fiyatındaki oynaklığın artmasına bağlı olarak opsiyon fiyatında belirgin bir artış olduğu görülmektedir.

Black-Scholes formülü ile hesaplanan satım opsiyonu fiyatları Çizelge 4.4'te ($\sigma = 0.2$) için diğer parametre değerleri ($r = 0.1$ ve $K = 50$) aynı kalmak üzere vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir. Satım opsiyonu için birkaç farklı sonuç söz konusu olsa da düşük oynaklık durumu için hesaplama aralığı normal dağılım özelliğinden dolayı alım opsiyonu ile aynı şekilde ortaya çıkmaktadır.

Çizelge 4.4 : Satım opsiyonu için düşük oynaklık Black-Scholes sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	H	H	15.29570
40	H	8.80486	6.63683
50	0.95243	1.41317	1.87671
60	H	0.03762	0.37110
70	H	H	0.05759

Satım opsiyonu için spot fiyatın yükselmesine bağlı olarak opsiyon fiyatının azaldığı görülmektedir. Kullanım fiyatının spot fiyattan yüksek olması durumunda satım opsiyonu Karda, düşük olması durumunda ise satım opsiyonu Zararda opsiyondur. Dikkat çekici bir diğer sonuç Karda satım opsiyonlarının vade süresi uzadıkça düşük oynaklık durumu için ($\sigma = 0.2$) opsiyon fiyatının azalmasıdır. Çizelge 4.5'te alım opsiyonu fiyatları ($\sigma = 0.8$) seçilerek ($r = 0.1$ ve $K = 50$) değerleri için vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir.

Çizelge 4.5 : Satım opsiyonu için yüksek oynaklık Black-Scholes sonuçları.

$(\sigma = 0.8)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	19.63151	19.58732	20.72068
40	10.55880	12.24963	16.01606
50	4.37003	7.22402	12.53120
60	1.44234	4.11617	9.92363
70	0.40361	2.30288	7.94993

Yüksek oynaklık ortamında satım opsiyonu fiyatının arttığı gözlemlenmektedir. Ancak yüksek oynaklık durumu için Karda satım opsiyonu fiyatının vade süresine bağlı olarak daha da arttığı görülmektedir. Bu durum Karda satım opsiyonlarının düşük oynaklık durumu için söz konusu olan fiyat hareketinin aksine bir sonuçtur ve opsiyon fiyatının asıl belirleyicisinin oynaklık olduğunu göstermektedir.

4.2.2 Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile opsiyon fiyatının hesaplanması

Avrupa tipi opsiyonlar ile birlikte Amerikan opsiyonlarının ve diğer birçok Egzotik opsiyonun fiyatı Monte Carlo İntegrasyon Yöntemiyle hesaplanabilir. Egzotik opsiyonlarından bariyer opsiyonları, basket opsiyonları veya quanto opsiyonları gibi karmaşık bazı opsiyonların fiyatlanmasında Monte Carlo İntegrasyon Yöntemi tek çözüm yolu olarak ortaya çıkmaktadır.

Black-Scholes modeli ile sadece Avrupa opsiyonu fiyatlarının hesaplanması ve bu modelin avantajlarının yanında bazı dezavantajlarının da bulunması üzerine Monte Carlo İntegrasyon Yöntemi ile opsiyon fiyatı hesaplaması yoluna gidilmiştir.

Finans alanında Monte Carlo tekniği daha çok türev ürünlerin fiyatlarının hesaplanmasında kullanılmaktadır (Boyle ve *diğ.* 1997; Broadie ve Glasserman, 1997). Bununla birlikte beklenen kayıp miktarı (value at risk) hesaplamalarını içeren risk yönetimi alanında da sıkça kullanılmaktadır (Glasserman ve *diğ.* 1999). Ayrıca gelecek fiyat senaryoları ve olası faiz değişimlerinin bilançolara etkisinin araştırılmasında Monte Carlo tekniğinden yararlanılır.

Daha önce verilen denklem (4.15) formundaki bir beklenen değer hesaplaması Monte Carlo İntegrasyon Yöntemi kullanılarak denklem (4.16) formunda daha kolay ve kısa zamanlı bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Finansal uygulamalarda Monte Carlo yöntemlerinin tercih edilmesinin bir nedeni de hızlı sonuç alınmasıdır. Monte Carlo tekniği ile en az birmilyon koşum adedinde yapılan benzetim uygulamaları genellikle iyi sonuç vermektedir (Law ve Kelton, 2000).

Black-Scholes formülü ile hesaplanan opsiyon fiyatlarının Monte Carlo İntegrasyon yöntemi ile hesaplananlarla kıyaslanması için bir önceki Bölümde bulunan tüm sonuçlar Monte Carlo tekniği ile hesaplanarak aşağıda verilmiştir. Monte Carlo Benzetim yöntemi ile opsiyon fiyatı hesaplayan bir C programı Ek-C'de yer almaktadır.

Alım opsiyonu fiyatının Monte Carlo sonuçları ilk parametre seti olan düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve sabit ($r = 0.1$ ve $K = 50$) değerleri için Çizelge 4.6'da verilmiştir. Daha sonra alım ve satım opsiyonları için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) sonuçlarına da yer verilecektir.

Bazı parametre aralıkları için Black-Scholes modeli ile hesaplanamayan opsiyon fiyatlarının Monte Carlo tekniği ile birmilyon koşum yapılarak hesaplanabildiği görülmektedir. Ayrıca ($S = 30$) için kısa vadelerde opsiyon fiyatının sıfır bulunduğu görülmekte olup piyasa şartları çerçevesinde ($S = 30$) ve ($K = 50$) vb. gibi parametre değerlerine sahip opsiyonlar halihazırda piyasada bulunmamaktadır. Alım opsiyonu için bu (0.6) gibi bir opsiyon değerliliğine denk gelmektedir. Bu parametre değerleri çalışma kapsamını geniş tutmak amacıyla ele alınmıştır.

Çizelge 4.6 : Alım opsiyonu için düşük oynaklık Monte Carlo sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	0.0	0.0	0.053583
40	0.000057	0.039242	1.399174
50	1.367834	2.650801	6.641603
60	10.41676	11.27516	15.13739
70	20.41654	21.23749	24.82370

Herbir parametre değeri için bu sonuçların Çizelge 4.2'deki düşük oynaklık Black-Scholes sonuçları ile kıyaslaması yapıldığında her iki yöntem sonuçlarının çok yakın olduğu gözlenmektedir. Çizelge 4.7'de alım opsiyonu fiyatları yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve sabit ($r = 0.1$ ve $K = 50$) değerleri için vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir. Düşük oynaklık durumunda olduğu gibi yüksek oynaklık durumu için de Black-Scholes ve Monte Carlo sonuçlarının çok yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.7 : Alım opsiyonu için yüksek oynaklık Monte Carlo sonuçları.

$(\sigma = 0.8)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	0.047028	0.823784	5.491999
40	0.975931	3.494171	10.80141
50	4.795980	8.476463	17.32573
60	11.86618	15.36916	24.82370
70	20.82849	23.55946	32.75703

Satım opsiyonu için de benzer sonuçların söz konusu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.8'de satım opsiyonu fiyatları düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve sabit ($r = 0.1$ ve $K = 50$) değerleri için vade sonu (T) ve spot fiyata (S) bağlı olarak verilmiştir. Çizelge 4.4'teki Black-Scholes sonuçları ile kıyaslandığında belirgin bir şekilde sonuçların çok yakın oldukları görülmektedir.

Çizelge 4.8 : Satım opsiyonu için düşük oynaklık Monte Carlo sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	19.58487	18.76416	15.29215
40	9.584170	8.802997	6.636676
50	0.951797	1.414160	1.878218
60	0.000438	0.038266	0.373221
70	0.0	0.000247	0.058625

Ayrıca düşük oynaklık durumunda karda satım opsiyonlarının fiyatı vadenin uzamasına bağlı olarak azalırken zararda satım opsiyonlarının fiyatı vadenin uzamasına bağlı olarak artmaktadır. Ancak bu durumdan yüksek oynaklık koşullarında söz edilememektedir. Çizelge 4.9'daki satım opsiyonu için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) Monte Carlo sonuçlarında görüldüğü üzere opsiyon vadesinin uzaması genel olarak opsiyon fiyatında belirgin bir artışla sonuçlanmaktadır.

Çizelge 4.9 : Satım opsiyonu için yüksek oynaklık Monte Carlo sonuçları.

$(\sigma = 0.8)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	19.62743	19.58044	20.71277
40	10.55540	12.24833	16.01567
50	4.374457	7.227822	12.53289
60	1.443906	4.118067	9.926712
70	0.405613	2.306191	7.951232

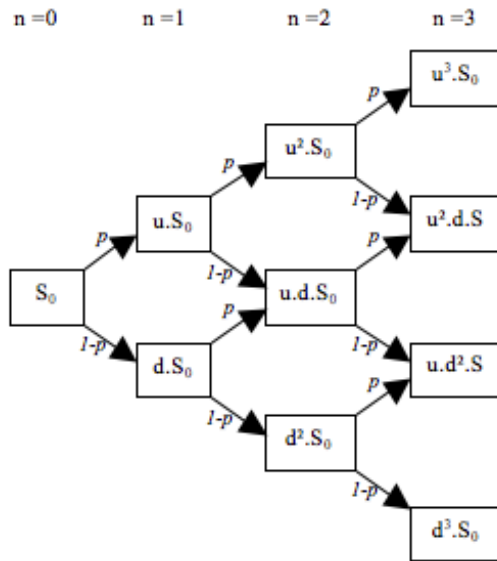
Monte Carlo İntegrasyon Yöntemi ile çözüm bulunduğunda ortaya çıkan hata payının (varyans) düşürülmesi gerekmektedir. Bunun için bir sonraki bölümde değinilen Varyans Azaltma tekniklerinden Önem Örneklemesi ve zıt rassal sayılar yöntemleri kullanılabilir.

Ayrıca Monte Carlo uygulamalarında örnekleme hacminin yeterli miktarda olmasına dikkat edilmesi gerekir. Bu durumda yeterli örnekleme hacmini sağlayacak kadar rassal sayı üretilmesine olanak tanıyan hızlı bilgisayar yazılımlarına ihtiyaç duyulmaktadır. C, C++ veya Java gibi bilgisayar programları ile hazırlanacak yazılımlar yeterli işlem hızını sağlayabilmektedir. Bu tez çalışmasında ihtiyaç duyulan tüm yazılımlar C programı ile hazırlanmıştır.

4.2.3 Binom yöntemi ile opsiyon fiyatının hesaplanması

Binom metodu Cox ve diğ. (1979) tarafından önerilmiştir. Black-Scholes formülü ve Monte Carlo İntegrasyon yöntemleri kadar kullanım alanı geniş olmasada standart opsiyonlar için pratik çözüm sunabilmektedir. Avrupa tipi ve Amerikan tipi opsiyonların fiyatlanmasında kullanılabilir. Temelde ağaç diagramının oluşturularak fiyatın kesikli zaman dilimlerinde belirli bir faktör kadar artması ya da azalması esasına dayanmaktadır. Black ve Scholes (1973) ve Monte Carlo İntegrasyon yöntemlerinin aksine kesikli zaman süreçlerine uygun bir opsiyon fiyatlama yöntemidir.

Şekil 4.5'te görüldüğü üzere bir (S_0) noktasında başlayıp yukarıya faktör (u) kadar ya da aşağıya faktör (d) kadar olmak üzere bir sonraki zaman diliminde fiyatın iki yönde değişebileceği kabulüne dayanmaktadır. ($n = 2$) adımından itibaren durakların birleştiği görülse de çok uzun dönemi içeren hesaplamalarda Binom metodunun etkinliği hesaplama zamanının artmasına bağlı olarak azalmaktadır.



$$p = \frac{e^{rt/n} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma \sqrt{t/n}}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{t/n}}$$

Şekil 4.5 : Binom yöntemi uygulama şeması.

Binom yönteminin çalışması döngüsel bir yapı taşımaktadır. Önce bütün dallardaki fiyat değerleri hesaplanır. Sonra buna bağlı olarak ödenti değerleri alım ve satım opsiyonları için ödünleşme fonksiyonu üzerinden hesaplanır. Bütün dallardaki opsiyon fiyatı ise o dal en son dal olarak düşünülerek sondan başlayıp geriye dönük bir şekilde hesaplanır. Daha sonra ağaç içindeki herhangi bir noktadaki opsiyon fiyatı

$V(n, t)$ olmak üzere, bu noktadan sonraki yukarı ve aşağı opsiyon fiyatları alınarak aşağıdaki formüle göre hesaplanır.

$$V(n, t) = e^{-r(T-t)}(pV_{n+1,u} + (1 - p)V_{n+1,d}) \quad (4.56)$$

Çizelge 4.1'de verilen parametre seti için $n = 30$ adet gözlem noktası kullanılarak $T = 1$ yıl için bulunan sonuçlar aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Öncelikle $u = 1.03996$ ve $d = 0.96671$ değerleri hesaplanır. Bunlara bağlı olarak p değeri $p = 0.500002$ olarak hesaplanarak iteratif şekilde opsiyon fiyatları bulunur. Sonuçlar alım opsiyonu için Çizelge 4.10'da satım opsiyonu için Çizelge 4.11'de verilmiştir.

Çizelge 4.10 : Alım opsiyonu için düşük oynaklık Binom sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	0.0	0.0	0.0484
40	0.0001	0.0363	1.3740
50	1.3812	2.6246	6.6251
60	10.4233	11.2538	15.1377
70	20.4229	21.2180	24.8178

Sonuçlar incelendiğinde Black-Scholes modeli ve Monte Carlo integrasyon yöntemine yakınlık gösterdiği ancak zaman zaman daha düşük fiyatlama yapıldığı gözlenmektedir.

Çizelge 4.11 : Satım opsiyonu için düşük oynaklık Binom sonuçları.

$(\sigma = 0.2)$			
$\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}$	1 ay	3 ay	1 yıl
30	19.5850	18.7656	15.2929
40	9.5851	8.8040	6.6169
50	0.9579	1.4287	1.8664
60	0.0002	0.0369	0.3774
70	0.0	0.0001	0.0559

Gözlem noktasının artmasına bağlı olarak Binom metodunun etkinliğinin azalması dolayısıyla çalışmamızda Monte Carlo İntegrasyon yöntemi benimsenmiştir. Aynı zamanda Monte Carlo İntegrasyon yöntemi esnek bir şekilde sınırlı fiyat stokastik sürecinin uygulanmasını kolaylaştırmaktadır.

4.3 Varyans Azaltma Teknikleri

İleri düzeyde matematiksel ve istatistiksel hesaplama içeren bazı konularda Monte Carlo gibi rassal örneklemeye dayalı çözüm yöntemlerinin kullanılması halinde ortaya çıkan hata payının (varyans) azaltılması gerekmektedir. Bu uygulamalarda otyaya çıkan hata payı örnek büyüklüğüne (n) bağlı olarak (s^2/n) ile ölçülür. Örnek hacminin arttırılmasına bağlı olarak hata payının düşürülmesi ancak belirli bir noktaya kadar etkinlik sağlamaktadır. Bu yüzden hata payının daha da düşürülmesi için varyans azaltma tekniklerinden biri ya da birkaçının uygulanmasına ihtiyaç duyulur. Varyans azaltma teknikleri sabit büyüklükteki örnek hacmi için belirli prosedürlerin izlenmesiyle hata payının azaltılmasını sağlayan yöntemlerdir, (Law & Kelton, 2000). Monte Carlo uygulamalarının özellikle rassal örnekleme sürecinde birtakım seçme kriterlerine bağlı olarak işlemin yürütülmesi sonucunda ilk duruma göre hata payının azaltılmasını sağlarlar. Böylece örnek hacmi arttırılmadan daha güvenilir tahminci elde edilir.

Varyans azaltma tekniklerinin ilk uygulamaları düşük bilgisayar işlem hızına bağlı olarak bilgisayar depolama biriminde daha az yer tutacak şekilde olurken sonraları C ve JAVA gibi hızlı bilgisayar programları sayesinde yeni varyans azaltma teknikleri geliştirilmiştir. En yaygın olarak kullanılan varyans azaltma teknikleri kontrol değişkeni, eş rassal sayılar, zıt rassal sayılar, önem örnekleme ve koşullu olasılık yöntemleridir. Her bir yöntem belirli konulardaki benzetim uygulamalarında daha iyi sonuç verir. Yanlış bir yöntemin seçilmesi durumunda varyans azalması yerine varyansta artışla da karşılaşılabilir. Bu yüzden hangi yöntemin kullanılacağını belirlenmesi için bir ön çalışma yapılarak varyansta anlamlı azalma sağlanıp sağlanmadığı araştırılmalıdır.

Bu bölümde daha çok varyans azaltma tekniklerinden önem örnekleme (importance sampling) yöntemi üzerinde durulmakla birlikte ikinci bir yöntem olarak zıt rassal sayılar (antithetic varieties) yöntemi de ele alınmıştır. Önem örnekleme yöntemi düşük olasılıklı olayların modellenmesinde uygulanmaktadır ve opsiyon fiyatlama konusunda sıkça kullanılır. Zıt rassal sayılar yöntemi ise uygulama biçimi dolayısıyla hemen hemen tüm konularda kullanılabilir. Tez çalışmamızda bu iki yöntemin tek tek ve birlikte uygulanması sonucunda elde edilen varyans azalma

miktarlarına yer verilmiştir. İki yöntemin birlikte uygulanması hata payının daha da azaltılmasını sağlamıştır.

4.3.1 Önem örnekleme (importance sampling)

Önem örnekleme yöntemi temel olarak beklenen değer ifadesindeki integralin değeri için daha önemli bölgeden daha fazla örnekleme yapılması ilkesine dayanmaktadır. Yöntemin ismi de buradan gelmektedir. Eş benzetim koşullarında önemli bölgeden daha fazla örnekleme yapılması sağlanırken örnekleme hacmi sabit kalmaktadır. Böylece daha doğru istatistiksel sonuçlar elde edilmesi ve güven aralığının daraltılması amaçlanır.

Önem örneklemesinin diğer varyans azaltma tekniklerinden en büyük farkı rassal değerlerin türetildiği orjinal dağılım yerine bir başka dağılımın kullanılmasıdır. Rassal değerlerin türetildiği yeni dağılıma önem örnekleme dağılımı (importance sampling density) ya da hedef dağılımı (target distribution) isimleri verilmektedir (Hesterberg, 1995). Hedef dağılımının kullanılmasıyla birlikte orijinal dağılım tümünden terk edilmez. İntegral değerinin ve dolayısıyla hesaplanan beklenen değer ifadesinin ilk duruma göre değişmemesi için her bir benzetim sonucuna bir düzeltme işlemi uygulanır, (Ökten, Salta, & Göncü, 2007). Bu işlem orjinal dağılım ile birlikte hedef dağılımına bağlı bir ağırlık fonksiyonu ile sağlanır. Ağırlık fonksiyonu sayesinde beklenen değer ifadesinin sonucu aynı kalmaktadır, (Ökten, Salta, & Göncü, 2007). Ağırlık fonksiyonu türetilen her bir rassal sayı için bu rassal sayı noktasındaki orjinal dağılım değerinin hedef dağılım değerine bölünmesi ile hesaplanmaktadır.

$$A(x_1) = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \quad (4.57)$$

Benzetim konusuna bağlı olarak bir koşum süresince birden çok rassal sayının türetilmesi gerektiği hallerde ağırlık fonksiyonu bu oranların çarpımı formundan oluşmaktadır. Benzetim süreçleri çoğunlukla belirli bir zaman aralığını kapsadığından hesaplanmak istenen istatistik değeri bu zaman zarfındaki birçok etkene bağlıdır. Bu etkenler Monte Carlo uygulamalarına rassal değişken olarak yansıtılır. Örneğin d adet rassal değişkenden oluşan bir koşum için ağırlık fonksiyonu

$$A(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \quad (4.58)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece her bir benzetim koşumu için tek bir ağırlık değeri hesaplanmış olmaktadır. Ağırlık fonksiyonu Monte Carlo benzetim sürecindeki istatistiksel dalgalanmaların azaltılmasını ve böylece daha düşük bir varyans elde edilmesini sağlamaktadır.

Bir koşulum içinde türetilen d adet rassal değişkene bağlı olarak hesaplanacak istatistiki fonksiyonun beklenen değer ifadesindeki integral $d -$ boyutlu olacaktır. Monte Carlo uygulaması ile integral ifadesi hesaplanacak gerçek değerli bir $q(x)$ olayının $f(\cdot)$ olasılık dağılımı altındaki beklenen değeri

$$\theta_f = E_f[q(\mathbf{x})] = \iiint_{R^d} q(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.59)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada $d -$ boyutlu $\mathbf{x}$ vektörü $f(\cdot)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan türetilmektedir. Önem örnekleme basitçe denklem (4.59)'a ağırlık fonksiyonunun $A(\mathbf{x})$ eklenmesi ve buradaki beklenen değer ifadesinin hedef dağılımı $g(\cdot)$ altında alınması şeklinde uygulanır. Hedef dağılımının parametresi r ile gösterilmek üzere risksiz faiz oranı ile karıştırılmaması için tez boyunca parametre ifadesi ile birlikte kullanılacaktır. Önem örneklemesinin matematiksel gösterimi şu şekilde verilmektedir.

$$\theta_g = E_g \left[q(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right] = \iiint_{R^d} q(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} g_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.60)$$

Buna göre denklem (4.59) ve denklem (4.60)'ın sonuçlarının çok yaklaşık olmasını sağlayacak şekilde

$$\theta_f \cong \theta_g \quad (4.61)$$

ve aynı zamanda daha düşük varyansın elde edilmesini sağlayan bir hedef dağılımı $g(x)$ seçilmelidir. Hedef dağılımının özelliklerine ve daha düşük varyansı sağlaması için sahip olması gereken kriterlere bir sonraki bölümde değinilecektir. Monte Carlo İntegrasyon Yöntemi kullanılarak denklem (4.59) yerine

$$\hat{\theta}_{f,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q(\mathbf{x}_i) f_x(\mathbf{x}_i) \quad (4.62)$$

denklemini, denklem (4.60) yerine ise

$$\hat{\theta}_{g,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q(\mathbf{x}_i) \left(\prod_{j=1}^d \frac{f(x_{i,j})}{g(x_{i,j})} \right) g_x(\mathbf{x}_i) \quad (4.63)$$

denkleminle hesaplamalar yapılabilir. Son iki denklemde d tek bir koşumun örnek hacmini gösterirken N benzetimdeki koşum adedini göstermektedir.

Bir örnek üzerinden Önem Örnekleme yöntemi daha iyi açıklanabilir. Her biri ortalaması 1 olan üssel dağılımdan alınmış 5 adet rassal sayıdan en az birinin 5'ten büyük olma olasılığı bulunmak istensin. Bu durumda orjinal dağılım ortalaması 1 olan üssel dağılımdır ve $q(x)$ olayı en az bir rassal sayının 5'ten büyük olması olasılığıdır. Matematiksel gösterimle $q(x)$ ifadesi bir olasılık fonksiyonu olarak

$$q(\mathbf{x}) = \{q(x): \exists x[i] > 5 \mid \forall x[i] \in \mathbb{R}^+, x[i] \sim \text{Üssel}(1), i = 1, 2, \dots, 5\} \quad (4.64)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu problemin denklem (4.59) formunda beklenen değer ifadesi olacak şekildeki gösterimi ise

$$E_{\text{Ü}(1)}[q(\mathbf{x})] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(x) \prod_{i=1}^5 e^{-x_i} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 \quad (4.65)$$

şeklinde dir. Beklenen değer operatöründeki alt indis hesaplamasının Üssel(1) dağılımı altında yapıldığını göstermektedir. Denklem (4.65)'in Monte Carlo benzetim tekniği ile hesaplanması halinde $I_{q(x_i)}$ benzetim sonucunu gösteren indikatör fonksiyon olmak üzere ilgili formülasyon aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$E_{\text{Ü}(1)}[q(\mathbf{x})] = \frac{1}{1000000} \sum_{i=1}^{1000000} I_{q(x_i)} e^{-x_i} \quad (4.66)$$

C programı ile gerekli hesaplamaların yapılmasıyla $q(x)$ fonksiyonunun ortalaması, varyansı ve %95 düzeyindeki güven aralığı için Çizelge 4.10'da verilen sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre herbiri Üssel(1) dağılımından alınmış olan 5 adet rassal

sayıdan en az birinin 5'ten büyük olması olasılığı Monte Carlo yöntemiyle 0.03321 olarak bulunmuştur. Bu tahminin varyansı 0.03210 olarak hesaplanmıştır. Koşum sayısı bu örnekte ve tezimizde yer alan tüm uygulamalarda bir milyon adet olarak alınmış olup %95 güven düzeyi için $Z_{0.025} = 1.96$ kullanılarak güven aralıklarından alt sınır 0.03285 ve üst sınır 0.03356 olarak bulunmuştur.

Önem Örneklemesinin uygulanmasında ilk adım hedef dağılımının belirlenmesidir. Burada yine basitçe ortalaması 1.25 olan bir üssel dağılım hedef dağılımı olarak seçilebilir. Hedef dağılımın orjinal dağılım ile aynı olması zorunluluğu bulunmamaktadır. Serbestçe bir başka dağılım seçilebilir. Ancak hedef dağılımın parametre değerleriyle birlikte istenen beklenen değer ifadesini arttıran bir dağılım olmasına bir başka ifade ile $q(x)$ fonksiyonunun değerini arttıran bir dağılım olmasına dikkat edilmelidir. Böylece aranan sonuç değeri için önemli bölgeden daha fazla örnekleme yapılması sağlanabilir. Ortalaması 1 olan üssel dağılım yerine ortalaması 1'den büyük bir başka üssel dağılım hedef dağılımı olarak kullanılabilir. Seçilen *Üssel*(1.25) hedef dağılımı için denklem (4.66)'ya Önem Örnekleme uygulandığında hesaplamalar aşağıdaki şekilde yapılmaktadır.

$$E_{\tilde{U}(1.25)}[q(\mathbf{x})] = \frac{1}{1000000} \sum_{i=1}^{1000000} I_{q(x_i)} \left(\prod_{j=1}^5 1.25 e^{-0.2x_{i,j}} \right) \frac{e^{\frac{-x_i}{1.25}}}{1.25} \quad (4.67)$$

Burada ağırlık fonksiyonunun sadeleştirilmiş şekline yer verilmiştir. Beklenen değer operatöründeki alt indisten de görüldüğü üzere rassal sayılar hedef dağılımından türetilmektedir. Bir milyon koşum sayısı için C programı ile bulunan sonuçlar Çizelge 4.10'da verilmiştir.

Çizelge 4.12 : $q(x)$ fonksiyonu için Monte Carlo ve Önem Örnekleme sonuçları.

Yöntem	Ortalama	MSE	Std Sapma	Yarı Güv. Ara	%95 Güven Aralığı	
Monte Carlo	0.03321	0.03210	0.17917	0.00035	0.03285	0.03356
Önem Örnekleme	0.03332	0.01054	0.10267	0.00020	0.03311	0.03352

Buna göre Önem örnekleme yöntemi Monte Carlo yöntemiyle çok yakın ortalama değer vermesine karşın varyansta 0.01054 seviyesine kadar bir azalma sağlamıştır. Böylece güven aralığını daraltarak alt sınırı 0.03311 ve üst sınırı 0.03352 olan

güven aralığı vermiştir. Bu güven aralığı Monte Carlo yöntemiyle bulunan ortalama değerini de kapsamaktadır.

Önem Örneklemesi varyans azaltma tekniğinin kullanılmasındaki amaç orjinal dağılım yerine bir hedef dağılımın alınması yoluyla ortalamadan belirgin bir sapma olmadan varyansın düşürülmesi ve aynı güven düzeyi için daha dar bir güven aralığı bulunmasıdır. Ayrıca orjinal dağılımdan rassal sayı türetmenin mümkün olmadığı ya da çok külfetli olduğu durumlarda varyans azaltma amacından çok sonuç bulma yöntemi olarak da kullanılabilmektedir.

4.3.1.1. Hedef dağılımın özellikleri

Hedef dağılımın yukarıdaki örnekte de belirtildiği üzere orjinal dağılım ile aynı olması zorunluluğu bulunmamaktadır. Bir başka dağılım da seçilebilir. Ancak hedef dağılımının ilk önemli özelliği orjinal dağılım ile aynı tanım kümesine sahip olması gerekliliğidir. Orjinal dağılımın tanımlı olduğu bölgelerde tanımlı, tanımsız olduğu bölgelerde de tanımsız olmalıdır. Aksi takdirde daha yüksek bir varyans değeri elde edilmesi ya da sonsuza giden bir varyans ile karşılaşılması gibi durumlar söz konusu olabilecektir (Yön S. , 2007).

Hedef dağılımının denklem (4.61)'in sağlanması şartıyla hesaplanması amaçlanan istatistiki değerin benzetim süresince görülmesi sıklığını artırıyor olması gerekir. Ağırlık fonksiyonu benzetim sürecine yapılan bu müdahaleyi dengeleyecek ve sonuçta denklem (4.61)'in gerçekleşmesi sağlanacaktır. Yukarıdaki örnekte ele alınan $q(x)$ fonksiyonunun ortalama değerinin orjinal dağılımın ortalama değerinden daha yüksek alınmasında olduğu gibi. Ya da örneğin bir banka şubesine gelen müşterilerin hizmet görmeden önceki bekleme süreleri bulunmak istenirse müşterilerin gelişler arasındaki süresini kısaltan ve böylece geliş adedini arttıran bir dağılım hedef dağılımı olarak seçilebilir. Böylece aranan sonuç değeri için önemli bölgeden daha fazla örnekleme yapılması sağlanabilir.

Hedef dağılımının bir varyans azalması sağlayabilmesi için integralin değeri üzerindeki daha önemli bölgelerde orjinal dağılımdan daha yüksek değer alması buna karşın diğer bölgelerde de orjinal dağılımdan daha düşük değer alması gerekmektedir.

Monte Carlo ve Önem Örneklemesinin varyans formülleri üzerinden gidilerek hedef dağılımın özellikleri matematiksel olarak da ifade edilebilir. Öncelikle denklem (4.59)'a uygun şekilde Monte Carlo varyansı

$$Var_f = \iiint_{R^d} (q(\mathbf{x}))^2 f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - (\theta_f)^2 \quad (4.68)$$

şeklinde yazılabilir. Önem Örneklemesinin varyansını yazabilmek için Önem Örnekleme yönteminin temel özelliği olan denklem (4.61)'den yararlanılır ve

$$E_f[q(\mathbf{x})] \cong E_g \left[q(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right] \quad (4.69)$$

denkliği tam eşitlik olacak şekilde kabul edilir. Denklem (4.60)'a uygun şekilde Önem Örnekleme varyansı

$$\begin{aligned} Var_g &= \iiint_{R^d} \left(q(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right)^2 g_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - (\theta_g)^2 \\ &= \iiint_{R^d} (q(\mathbf{x}))^2 \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - (\theta_g)^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

şeklinde yazılabilir. Monte Carlo ve Önem Örnekleme varyans ifadelerinin farkı alınır

$$\Delta Var = Var_f - Var_g = \iiint_{R^d} (q(\mathbf{x}))^2 \left(1 - \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.71)$$

ifadesi bulunur. Bu durumda aşağıdaki hallerde hedef dağılımı ile varyans azalması sağlanabilecektir:

$$\begin{cases} (q(\mathbf{x}))^2 \text{ ifadesinin büyük olduğu bölgelerde } g(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}) \\ (q(\mathbf{x}))^2 \text{ ifadesinin küçük olduğu bölgelerde } f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.72)$$

4.3.2 Zıt rassal sayılar (antithetic varieties)

Finansal Monte Carlo hesaplamalarıyla birlikte her konuya uygulanabilen zıt rassal sayılar varyans azaltma tekniği temel olarak rasal sayı üretilmesi sürecine dayanmaktadır. Monte Carlo uygulamalarının esası rassal sayı üretimidir. Zıt rassal

sayılar varyans azaltma tekniğinin en büyük avantajı her konuya uygulanabilmesinin yanında ek bir işlem gerektirmeden benzetim sürecinin adımları içerisinde kolay uygulanabilmesidir (Law & Kelton, 2000).

Benzetim adımlarının uygulanması için ilk olarak düzgün rassal sayı U üretilir. Daha sonra istenen işleme uygun algoritma ile benzetim sonuçlandırılır ve herbiri birbirinden bağımsız belirli bir koşum sayısında tekrarlanır. Zıt rassal sayılar varyans azaltma tekniği iki koşumun bir çift olarak ele alınması ve bunların ortalamasının alınarak istatistiki değerlerin hesaplanması şeklinde uygulanır. İlk koşumda üretilen U düzgün rassal sayılarına göre benzetim sonuçlandırılır. İkinci koşumda bu kez ilk koşumda alınan düzgün rassal sayılar $1 - U$ şeklinde alınarak benzetim sonuçlandırılır. Bu iki koşum sonucu bulunan ortalama değere bağlı olarak değişkenliğin azalması sağlanacak ve istatistiki güven aralığının daraltılması gerçekleşecektir.

Zıt rassal sayılar yönteminin matematiksel ifadesi şu şekilde gösterilebilir: $E[X]$ U rassal sayılarıyla, $E[X']$ ise $1 - U$ rassal sayılarıyla hesaplanan birer beklenen değer olmak üzere

$$E[(X + X')/2] = \frac{E[X] + E[X']}{2} = E[X] = E[X'] \quad (4.73)$$

eşitliği sağlanmak üzere

$$Var[(X + X')/2] = \frac{Var[X] + Var[X'] + 2Cov[X, X']}{4} \quad (4.74)$$

eşitliğine bakıldığında X ve X' için kovaryansın negatif büyük değer alması durumunda varyansın azalmasını sağlayacaktır. Bu kısımda zıt rassal sayılar varyans azaltma tekniğinin tanıtımı yapılmış uygulama şekli ve detaylarına bir sonraki bölümde yer verilmiştir. Ayrıca önem örnekleme yöntemi ile sonuçların kıyaslanmasına ve iki yöntemin birlikte uygulandığında elde edilen sonuçlara bir sonraki kısımda yer verilmiştir.

5. SINIRLI VE SINIRSIZ PİYASALARDA UÇ BENZETİMİ İLE DÜŞÜK VARYANSLI FİYAT MODELİ

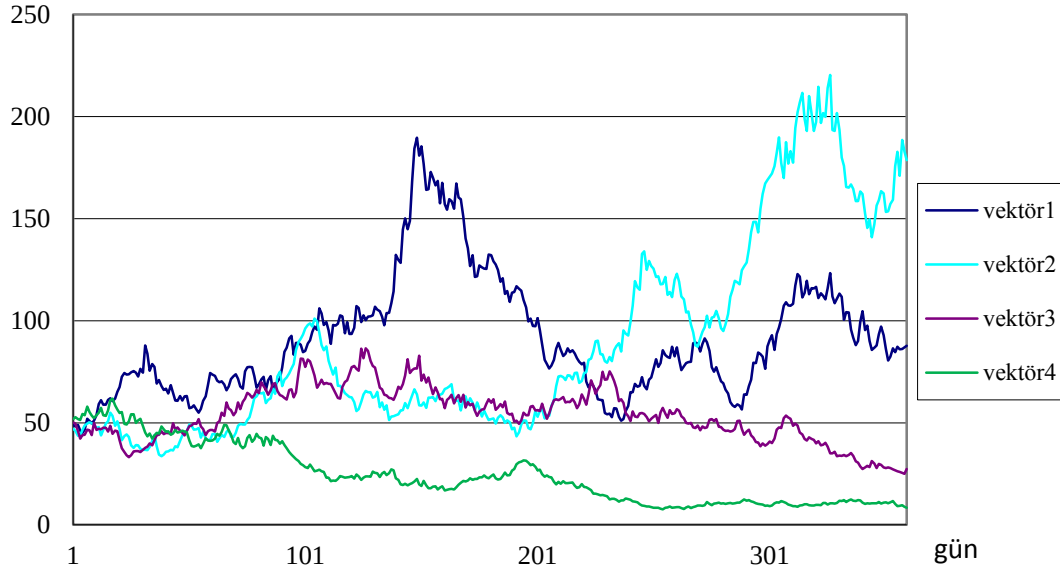
Opsiyonların bir piyasada aktif olarak işlem görebilmesi ve burada yüksek işlem hacimlerine ulaşması için piyasadaki işlemlerin şeffaf bir ortamda gerçekleşmesi ve tüm piyasa katılımcıları tarafından paylaşılan bir düzlemde izlenebilmesi gerekmektedir. Tüm katılımcıların piyasada açıklanan verilere eşit bir şekilde erişebildiği kabul edilmektedir. Bu şekilde bir piyasa işleyişinin sağlanmış olması sonucunda finansal hesaplamaların güvenilirliği ve uygulanabilirliği artmış olmaktadır.

Piyasa katılımcı sayısının artırılması hedeflenen bir ortamda şeffaflık ve güvenilirlik gibi özelliklerin yanında yatırımcıları teşvik edici birtakım başka uygulamalara da yer verilmektedir. Bunlar birtakım vergi avantajları sağlanması gibi genel ekonomik yönde olabildiği gibi fiyat değişimleri için günlük sınırlama getirilerek yüksek tutarlı kayıpların önüne geçilmesinin garanti altına alınması şeklinde teknik düzeyde de gerçekleşebilmektedir.

BİST bünyesindeki hisse senetleri piyasasında daha önce belirtildiği üzere her seansta fiyatın bir önceki seans ağırlıklı ortalama baz fiyatının en çok %10'u kadar²⁴ artıp azalmasına izin verilmektedir. Böyle bir sınırlama uygulamasının olmadığı piyasalar için geliştirilen fiyatlama modellerinin doğrudan bu konuda regülasyon yapılmış olan piyasalarda kullanılması uygun olmamakta ve bazı durumlarda fiyat farklılıklarına yol açabilmektedir.

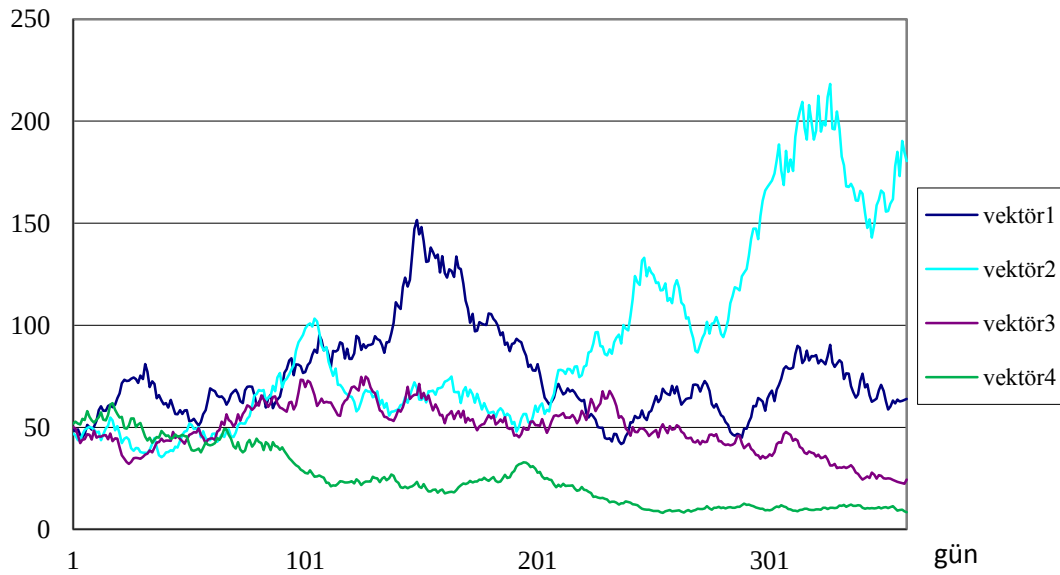
Sınırlı stokastik fiyat sürecine sahip bir piyasada çok sık olarak %10'luk artış veya azalışlar görülmese de zaman zaman tavan ya da taban yapan hisse senetleri gözlemlenmektedir. Şekil 5.1'de sınırsız stokastik fiyat sürecine sahip olan bir menkul kıymetin örnek olarak dört adet 360 günlük fiyat vektörü gösterilmiştir.

²⁴ BİST AŞ bünyesindeki Pay Senetleri Piyasasında uygulanan fiyat adımı kuralına bağlı olarak dayanak menkul kıymet fiyatının %10'dan fazla artmasına izin verilebilir. Ancak bu kısım küsurattan kaynaklanmakta olup %11 ve üstü fiyat değişimleri görülemeyecektir.



Şekil 5.1 : 360 günlük sınırsız fiyat stokastik süreç grafiği.

Fiyatın 50 seviyesinden başlayıp 150 seviyesinin üzerine iki kez çıktığı, vektör1 ve vektör2'den görülmektedir. Şekil 5.2'de sınırlı fiyat stokastik sürecine sahip olunması halinde Şekil 5.1'de verilen menkul kıymet fiyatında nasıl bir değişim olacağını gösteren dört fiyat vektörünün grafiği gösterilmiştir.



Şekil 5.2 : 360 günlük %10 marj dahilinde sınırlı fiyat stokastik süreç grafiği.

Bu grafikten fiyatın 50 seviyesinden başlayıp yalnız bir kez 150 seviyesinin üzerine çıktığı görülmektedir. Vektör1 sınırlı fiyat stokastik sürecinde tam 150 seviyesine gelip burdan geri dönmektedir.

Vektör2'nin sınırsız fiyat stokastik sürecinde olduğu gibi sınırlı fiyat stokastik sürecinde de yaklaşık aynı seyri izlediği görülmektedir. %10'luk fiyat marjının yüksek olmasına bağlı olarak vektör2 fiyat sürecinin fazla etkilenmediği görülmektedir.

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de görüldüğü üzere fiyat marjı uygulamasının sınırlı fiyat stokastik süreci ile fiyat seyrine önemli etkisi olabilmektedir. Uygulanan fiyat marjı oranı önem kazanmaktadır. Fiyat marjı oranına bağlı olarak fiyatın seyri belirlenmekte ve diğer türev ürün fiyatlarına yansıma derecesi önceden yaklaşık olarak görülebilmektedir. Ancak ardı ardına bir kaç gün süren hızlı yükseliş veya düşme durumlarında fiyat seyrinin belirgin şekilde değişebileceği görülmektedir.

Bu bölümde öncelikle sınırsız fiyat stokastik sürecine uygun piyasalarda kullanılan ve bir önceki bölümde tüm detayları verilen opsiyon fiyatlama modeline göre sonuçlar alınmıştır. Sınırsız fiyat stokastik süreci üzerinden Önem örnekleme varyans azaltma tekniği ve zıt rassal sayılar varyans azaltma tekniği önce ayrı ayrı sonra birlikte uygulanarak önemli ölçüde varyans azalması sağlanmıştır. Opsiyon fiyatına ait güven aralığının önemli ölçüde daraltılması sağlanmıştır.

Ardından sınırlı fiyat stokastik süreçleri için geliştirilen C programları ile sonuçlar alınmıştır. Aynı yol izlenerek önce Önem örnekleme yöntemi ve zıt rassal sayılar yöntemi için ayrı ayrı sonuçlar alınmış ve son olarak birlikte uygulamasına yer verilmiştir.

5.1 Sınırsız Fiyat Stokastik Süreçleri için Opsiyon Fiyatlaması

5.1.1. Önem örnekleme uygulaması

Bir varyans azaltma tekniği olarak Önem Örnekleme yöntemi Monte Carlo benzetim uygulamalarının etkinliğini arttırmaktadır. Önem Örnekleme yöntemi temel olarak çeşitli seçim kriterlerine bağlı örnekleme yapılması ilkesine dayanmaktadır. Seçilen hedef dağılımına bağlı olan kriterlere göre benzetim sürecinde örnekleme yapılır. Sonrasında ağırlık fonksiyonu ile düzeltme işlemi uygulanarak istatistiksel dalgalanmaların azaltılması sağlanır. Böylece benzetim sonucunun aynı kalması sağlanırken sade Monte Carlo yöntemine göre daha düşük bir varyans elde edilerek güven düzeyi arttırılmış olmaktadır.

Dayanak varlık fiyatına ait stokastik süreç birçok noktada düşük olasılıklı değerlerden oluşmaktadır. Bu yüzden Önem Örneklemesi finansal uygulamalarda Monte Carlo yöntemleriyle birlikte geniş bir kullanım alanına sahiptir. Özellikle karmaşık opsiyon fiyatının belirlenmesinde ve varyansın düşürülerek güven düzeyinin artırılmasında tek yol olarak Önem Örneklemesi yöntemi ortaya çıkmaktadır.

Daha önce Black-Scholes formülü ve Monte Carlo İntegrasyon yöntemiyle hesaplanan opsiyon fiyatları burada tekrar hesaplanmış ve anlamlı varyans azalması sağlanmasına odaklanılmıştır. Önem Örneklemesi yöntemi Çizelge 4.1'de verilen parametre seti için uygulanmıştır. Hedef dağılımı olarak dayanak varlık getirileri için farklı parametrelili normal dağılım, gama dağılımı, pareto dağılımı ve beta dağılımları kullanılmıştır. En iyi sonuç verdiği görülen farklı parametrelili normal dağılım için sonuçlar aşağıdaki şekilde listelenmiştir. Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de alım opsiyonu fiyatına ait düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları verilmiştir. Çizelge 5.1'de Black-Scholes modeli, Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemleri sonuçlarına birlikte yer verilerek kıyaslama yapılması sağlanmıştır. Monte Carlo ve Önem Örneklemesi için %95 güven düzeyindeki tahmin aralıkları hesaplanmıştır. Çizelge 4.1'de verilen parametrelerden kullanım fiyatı ($K = 50$) ve risksiz faiz oranı ($r = 0.10$) sabit alınırken, spot fiyat için $S = \{30,40,50,60,70\}$ değerleri alınmıştır.

Kullanılan önem Örneklemesi hedef dağılımına ait parametre daha önce de belirtildiği üzere (r) ile gösterilmek üzere hedef dağılımının alım ve satım opsiyonları için ters yönlerde değiştirilerek optimum sonuçların bulunduğu vurgulanmalıdır. Bu parametre alım veya satım opsiyonunun kullanılma ihtimalini arttıracak yönde seçilerek opsiyon fiyatının önemli bölgesi için daha fazla örneklem yapılmasının sağlanması hedeflenmektedir.

Çizelge 5.2'de parametre sütununda hedef dağılım parametresinin aldığı optimum değerler kullanılarak tablonun geri kalanı hesaplanmış ve sonuçlar listelenmiştir.

Çizelge 5.1 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.05384	0.05341	0.35151	0.59288	0.00116	0.05225	0.05458	0.05377	0.00285	0.05334	0.00010	0.05367	0.05388
40	1.39496	1.39636	12.87750	3.58852	0.00703	1.38932	1.40339	1.39372	0.84678	0.92021	0.00180	1.39191	1.39552
50	6.63484	6.63941	64.83510	8.05203	0.01578	6.62363	6.65520	6.65658	7.16481	2.67672	0.00525	6.65133	6.66183
60	15.12924	15.13739	133.50263	11.55433	0.02265	15.11474	15.16004	15.14704	12.37387	3.51765	0.00689	15.14015	15.15394
70	24.81572	24.82018	196.81740	14.02916	0.02750	24.79268	24.84768	24.82817	12.41773	3.52388	0.00691	24.82126	24.83508

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.2 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.05341	0.35151	0.59288	11.09973	0.05377	0.00285	0.05334	r=0.62	0.99184	123.55255	11.19109
40	1.39636	12.87750	3.58852	2.56992	1.39372	0.84678	0.92021	r=0.42	0.66025	15.20756	3.89232
50	6.63941	64.83510	8.05203	1.21276	6.65658	7.16481	2.67672	r=0.29	0.40212	9.04910	3.01595
60	15.13739	133.50263	11.55433	0.76301	15.14704	12.37387	3.51765	r=0.22	0.23817	10.27813	3.20367
70	24.82018	196.81740	14.02916	0.56523	24.82817	12.41773	3.52388	r=0.19	0.14193	15.84971	3.98245

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Buna göre her üç yöntem kullanılarak bulunan opsiyon fiyatlarının çok yaklaşık oldukları görülmektedir. Aynı zamanda %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örnekleme tahmin aralıklarına bakıldığında anlamlı şekilde gelişme sağlandığı görülmektedir. Spot fiyatın ($S = 30$) olduğu durumda prim değerleri üç yöntem için sırasıyla çok yaklaşık olarak 0.05384, 0.05341 ve 0.05377 bulunurken Önem Örnekleme yöntemi ile güven aralığı $[0.05367, 0.05388]$ mertebesinde bulunmuştur. Primler arasındaki farkın çok az olması noktasında BİST bünyesindeki fiyat adımı uygulamasına bakılabilir. Buna göre Vadeli İşlem ve Opsiyon Piyasasında (VİOP) geçerli olan VİOP İşleyiş Esaslarına göre her bir opsiyonun fiyat adımı 0.01 TL olarak uygulanmaktadır. Borsa İstanbul Yönetimi tarafından halihazırda Hisse Senetleri Piyasası ve VİOP için uygulanan fiyat adımı kuralı Çizelge 5.3'te verilmiştir.

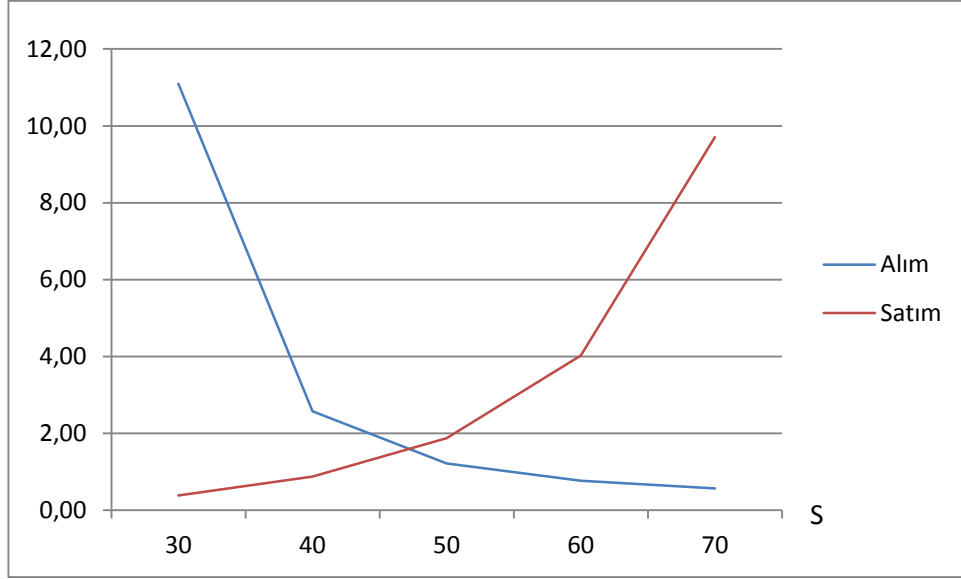
Çizelge 5.3 : Borsa İstanbul'da uygulanan fiyat adımı kuralı.

Baz Fiyat Aralığı (TL)	Hisse Senetleri Piyasası Fiyat Adımı (TL)	VİOP Fiyat Adımı (TL)
0.01 - 10.00	0.01	0.01
10.05 - 100.00	0.05	
100.50 ve üzeri	0.50	

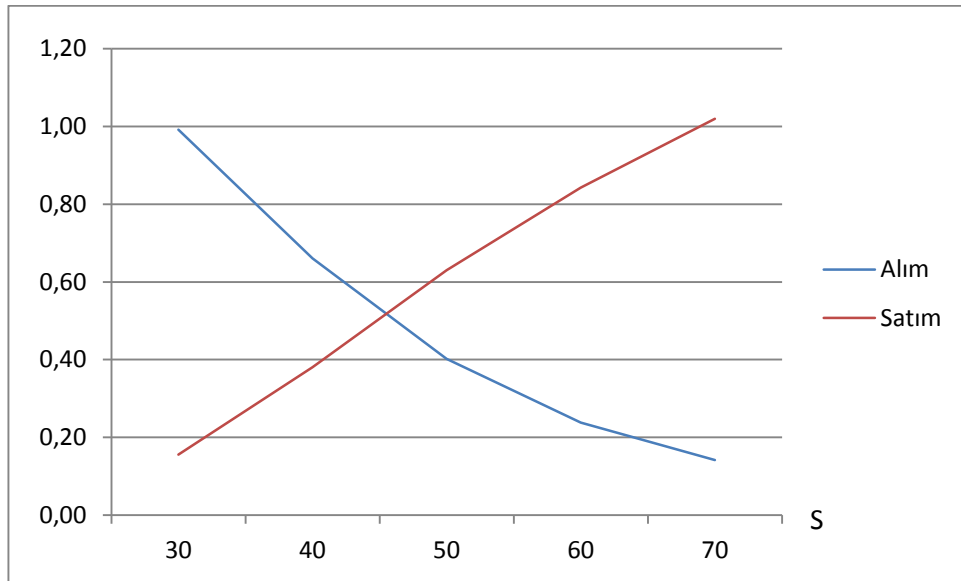
Buna göre Black-Scholes formülü ile hesaplanan 0.05384 değeri 0.05 ya da 0.06 olarak kotasyonlara yansiyacaktır. ($S = 70$) içinse kotasyonlar piyasa koşulları da göz önünde bulundurularak tercihen 24.81 veya 24.82 veya 24.83'den bir tanesi olacaktır. Burada fiyatlardan düşük olanı piyasadaki alım fiyatı olarak, yüksek olanı da piyasadaki satım fiyatı olarak düşünülebilir.

Yarı güven aralığı değerleri üzerinden kıyaslama yapıldığında Monte Carlo yöntemi ile bulunan Yarı güven aralığı değerlerinin Önem Örnekleme ile bulunanlardan birkaç misli daha fazla gerçekleştiği görülmektedir. İki yöntemin bir başka ölçüt üzerinden kıyaslanması amacıyla ortalama değişkenliği ölçen varyasyon katsayıları hesaplanmış ve Çizelge 5.2'de sonuçlara varyasyon katsayıları eklenmiştir. Buna göre alım opsiyonu için Monte Carlo varyasyon katsayısı değerlerinin spot fiyat artışına bağlı olarak hızlı bir şekilde düşüş kaydettiği görülmektedir. Monte Carlo için 11'li seviyelerden 0.57 seviyelerine gelinmiştir. Önem Örnekleme Yöntemi

uygulandığında bulunan varyasyon katsayısı değerlerinin 1'den küçük değerler aldığı ve spot fiyat artışına bağı olarak daha yatay bir düşüş kaydettiği görülmektedir. Böylece varyasyon katsayısının yüksek olduğu durumlarda Önem Örneklemesi yönteminin daha iyi çalıştığı belirtilebilir. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te sırasıyla Monte Carlo yöntemi ve Önem örneklemesi yönteminin düşük oynaklık ve ($T = 1$ yıl) için varyasyon katsayısı grafiklerine yer verilmiştir. Satım opsiyonu sonuçları daha sonra verilmek üzere satım opsiyonu grafiklerine de yer verilmiştir.



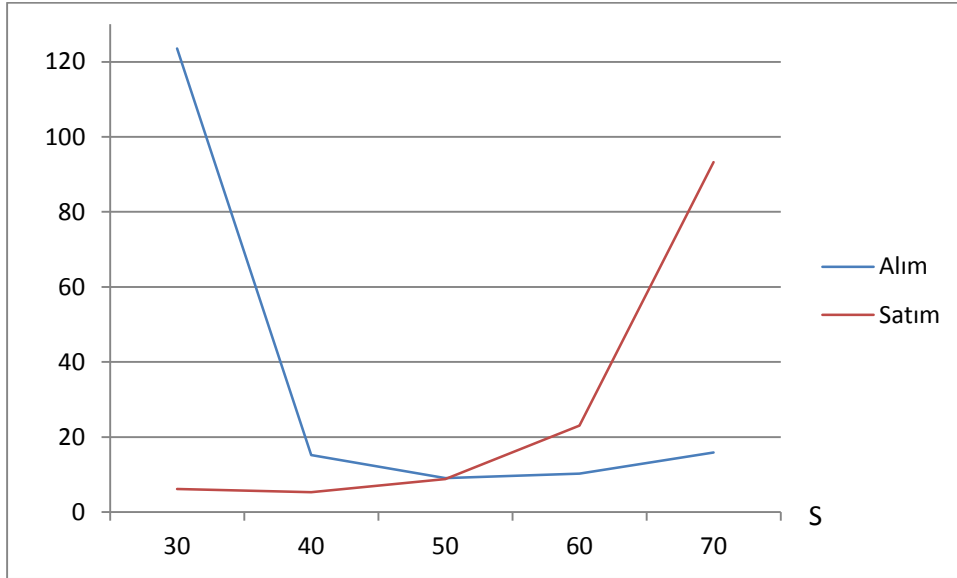
Şekil 5.3 : Monte Carlo yöntemi spot fiyata bağı varyasyon katsayısı grafiğı ($T = 1$ yıl).



Şekil 5.4 : Önem Örneklemesi yöntemi spot fiyata bağı varyasyon katsayısı grafiğı ($T = 1$ yıl).

Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te görüldüğü üzere Önem örnekleme varyans azaltma tekniği ile önemli ölçüde hata payında azalma sağlanmış varyasyon katsayısı 1'den küçük seviyelere kadar çekilmiştir.

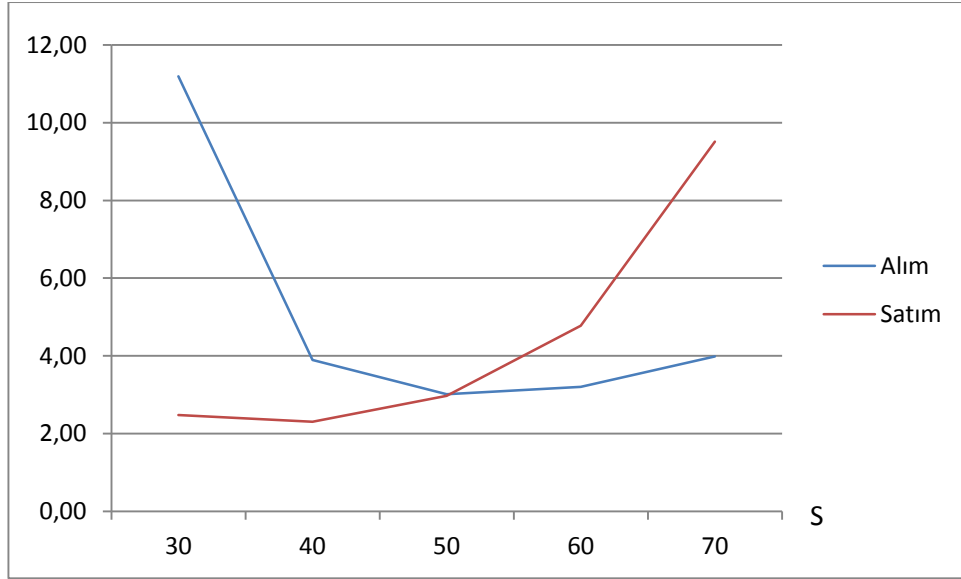
Önem Örnekleme yönteminin performansını ortaya koymak için Çizelge 5.2'nin son kısmında değişim alanına yer verilmiştir. Buna göre Önem Örnekleme yönteminin uygulanması sonucu varyansta sağlanan azalmayı göstermek amacıyla Varyans Azalma Faktörü (VAF) ve Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü (VKAF) tanımlanmıştır. Bu değerler Monte Carlo yöntemiyle bulunan varyans ve varyasyon katsayısı sonuçlarının Önem Örnekleme yöntemiyle bulunan varyans ve varyasyon katsayısı sonuçlarına bölünmesiyle bulunmuştur. Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da ($T = 1$ yıl) için sırasıyla performans kriterleri VAF ve VKAF grafiklerine yer verilmiştir.



Şekil 5.5 : Varyans Azalma Faktörü grafiği ($\sigma = 0.2$ ve $T = 1$ yıl)

Çizelge 5.2'de verilen VAF ve VKAF sonuçlarına göre Önem Örnekleme yöntemi alım opsiyonu için en iyi değerleri ($S = 30$)'da vermiştir. VAF değeri 123 seviyelerinde VKAF ise 11 seviyelerinde gerçekleşmiştir. Bir başka ifade ile Önem Örnekleme yönteminin uygulanması sonucu varyansta 123 kat iyileşme sağlanmıştır. VAF ve VKAF grafiklerine bakıldığında alım opsiyonu için önemli bir sonuçla karşılaşılır. Spot fiyat uç değerlerden kullanım fiyatına doğru yaklaştıkça VAF ve VKAF değerlerinde azalma olduğu görülmektedir. Buradan Önem Örnekleme yönteminin düşük olasılığa sahip noktalarda daha iyi sonuç vermekte olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5'de alım opsiyonu fiyatının düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve orta vade ($T = 3$ ay) sonuçları verilmiştir. Black-Scholes modeliyle ($T = 3$ ay) vadesinde çözüm bulunamayan ($S = 70$) için Çizelge 5.4'te Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemleri ile sonuca ulaşıldığı görülmektedir. Monte Carlo benzetim tekniğinin kapalı formüllere göre avantajı burada ortaya çıkmaktadır. ($S = 30$) değeri için prim değeri sıfır olarak bulunduğundan güven aralıkları hesaplanamamaktadır.



Şekil 5.6 : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü grafiği ($\sigma = 0.2$ ve $T = 1$ yıl)

Çizelge 5.5'da görüldüğü üzere VAF değeri 92 seviyelerinde, VKAF değeri ise 9.62 seviyelerinde gerçekleşmiştir. Çizelge 5.2'de verilmiş olan ($T = 1$ yıl) sonuçlarına göre opsiyon vadesinin kısılmasına bağlı olarak kritik faktörlerde azalma olduğu görülmektedir.

Bir başka önemli nokta şu şekilde ortaya çıkmaktadır: Uzun vade ($T = 1$ yıl) için hedef dağılım parametresinin ($S = 30$)'da ($r = 0.62$) ile en yüksek değerini aldığı, orta vade ($T = 3$ ay) içinse en yüksek ($S = 40$)'da ($r = 0.28$) değerini aldığı görülmektedir. Hedef dağılım parametrelerinin alım opsiyonu için vade kısılmasına bağlı olarak azaldığı görülmektedir. Aynı vade için bakıldığında yine spot fiyat artışına bağlı olarak en düşük varyansı sağlayan hedef dağılım parametresinde azalma olduğu görülmektedir. Alım opsiyonu için hedef dağılım parametresi opsiyonun kullanılma olasılığını arttıracak yönde spot fiyatı yükseltecek şekilde seçildiğinden başlangıç spot fiyatın yüksek olmasına bağlı olarak hedef dağılım

parametresinin düşük olması beklentilere de uygundur. Böylece hedef dağılımına ve hedef dağılımın parametresine bağlı olarak en iyi varyans azalması sağlanan bir optimum nokta olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7'de alım opsiyonu fiyatının düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve kısa vade ($T = 1$ ay) sonuçları verilmiştir. Opsiyon vadesi kısaldıkça Black-Scholes formülünün kullanım fiyatından uzak spot fiyatlar için sonuç vermediği görülmektedir.

Burada C programı ile hazırlanan ve Ek-C'de verilmiş olan programların geliştirilmiş algoritmasına yer verilmiştir.

Algoritma 5.1 : Opsiyon fiyatlaması benzetim programının algoritması

1. i	Değişkenlerin, kullanılacak fonksiyonların ve günlük kapanış fiyatlarının kayıt edilmesi için dizilerin tanımlanması
ii	Değişkenlerin ilk değerlerinin atanması, txt dosyasından parametre okutulması
iii	$j=1$ den 1.000.000'a kadar benzetimin çalıştırılması
iv	Günlük fiyat değişimi için uygun rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonundan türetilmesi
v	Fiyat vektörünün oluşturulması için dizi içinde ilerlenmesi, Vade sonuna kadar tüm gözlem noktalarındaki fiyat vektörünün bulunması
vi	Opsiyon çeşidine uygun olarak beklenen getirinin hesaplanması
vii	Dizi içindeki MSE ve ortalama hesaplaması için gerekli kayıtların tutulması
viii	Benzetim sonuna gelinmediyse 1.i'ye aksi halde 2.i'ye geçilmesi
2. i	Ortalama alınarak opsiyon fiyatının hesaplanması
ii	Dizi içindeki verilerden MSE ve Yarı genişlik değerlerinin hesaplanması
iii	Varyasyon katsayılarının hesaplanması
iv	Sonuçların txt, xls dosyalarına yazdırılması

Buna göre yazılan program iki adıma ayrılabilir. Birinci adımda benzetim süreci gerçekleşmekte ve gerekli kayıtların tutulması sağlanmaktadır. İkinci adımdaysa istenen istatistiki hesaplamalar yaptırılmaktadır.

Çizelge 5.4 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve orta vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	0.03937	0.03931	0.13631	0.36921	0.00072	0.03859	0.04003	0.03939	0.00148	0.03843	0.00008	0.03931	0.03946
50	2.64768	2.65080	12.27574	3.50368	0.00687	2.64393	2.65767	2.64544	1.53293	1.23812	0.00243	2.64301	2.64787
60	11.27213	11.27517	35.26040	5.93805	0.01164	11.26353	11.28681	11.26596	4.11912	2.02956	0.00398	11.26198	11.26993
70	-	21.23749	49.34691	7.02474	0.01377	21.22372	21.25126	21.23410	4.04926	2.01228	0.00394	21.23015	21.23804

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.5 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve orta vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-
40	0.03931	0.13631	0.36921	9.39198	0.03939	0.00148	0.03843	r=0.28	0.97570	92.29113	9.62585
50	2.65080	12.27574	3.50368	1.32174	2.64544	1.53293	1.23812	r=0.12	0.46802	8.00802	2.82412
60	11.27517	35.26040	5.93805	0.52665	11.26596	4.11912	2.02956	r=0.08	0.18015	8.56018	2.92339
70	21.23749	49.34691	7.02474	0.33077	21.23410	4.04926	2.01228	r=0.06	0.09477	12.18665	3.49038

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.6 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve kısa vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	-	0.00006	0.00007	0.00824	0.00002	0.00004	0.00007	0.00006	0.00000	0.00008	0.00000	0.00006	0.00006
50	1.36737	1.36783	3.54807	1.88363	0.00369	1.36414	1.37153	1.36446	0.44436	0.66660	0.00131	1.36315	1.36576
60	-	10.41677	12.03822	3.46961	0.00680	10.40996	10.42357	10.44149	0.09358	0.30591	0.00060	10.44089	10.44209
70	-	20.41654	16.39615	4.04922	0.00794	20.40861	20.42448	20.41454	9.24209	3.04008	0.00596	20.40858	20.42050

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.7 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve kısa vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-
40	0.00006	0.00007	0.00824	144.57895	0.00006	6.4x10 ⁻⁹	0.00008	r=0.25	1.34426	10113.02796	107.55263
50	1.36783	3.54807	1.88363	1.37709	1.36446	0.44436	0.66660	r=0.07	0.48855	7.98477	2.81876
60	10.41677	12.03822	3.46961	0.33308	10.44149	0.09358	0.30591	r=0.03	0.02930	128.64234	11.36898
70	20.41654	16.39615	4.04922	0.19833	20.41454	9.24209	3.04008	r=0.03	0.14892	1.77408	1.33181

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Daha önce de belirtildiği üzere Black-Scholes formülü Çizelge 4.1'deki parametre değerleri kullanılmak üzere ($T = 1$ ay) için ($S = [42,59]$) aralığında, ($T = 3$ ay) içinse ($S = [36,66]$) aralığında sonuç vermektedir. Böylece Monte Carlo yöntemi her noktada opsiyon fiyatının bulunmasını sağlaması açısından önem kazanmaktadır.

Alım opsiyonları için düşük oynaklık piyasasındaki fiyat durumlarına ve performans kriterlerine bakıldıktan sonra aynı işlemler satım opsiyonları için de yapılmış ve bulgularan sonuçlara aşağıda yer verilmiştir. Bununla birlikte Avrupa tipi alım ve satım opsiyonları arasında Ek-B'de verilmiş olan alım-satım bağıntısı bulunduğundan alım opsiyonu fiyatı hesaplandığında bu bağıntı kullanılarak satım opsiyonu fiyatı da ek bir benzetim süreci uygulanmadan hesaplanabilir. Ancak burada alım opsiyonu için izlenen tüm yollar yeniden yapılarak satım opsiyonu için sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 5.8 ve Çizelge 5.9'da satım opsiyonu fiyatının düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları verilmiştir. Daha sonra sırasıyla orta vade ($T = 3$ ay) için Çizelge 5.10 ve Çizelge 5.11'de ve kısa vade ($T = 1$ ay) için Çizelge 5.12 ve Çizelge 5.13'te düşük oynaklık piyasasındaki satım opsiyonu sonuçlarına yer verilmiştir. Alım opsiyonu sonuçlarında olduğu gibi burada da hedef dağılım parametresine bağlı olarak varyans azalmasının bir optimum değeri olduğu görülmektedir.

Hedef dağılımı ve parametresinin seçimi kriterlerine daha önce değinilmişti. Burada hedef dağılımın parametresi seçilirken şu şekilde hareket edilmiştir: Satım opsiyonunun kullanılma olasılığının arttırılması hedeflenmektedir. Bunun için vade sonundaki dayanak varlık piyasa fiyatının düşürülmesini sağlayacak yönde hedef dağılım parametreleri tercih edilmiştir. Kümülatif çarpım formundaki ağırlık fonksiyonu ile düzeltme yapılması sonucunda benzetim neticesinin değişmediği hedef dağılımın özellikleri bölümünde belirtilmişti. Bu yüzden hedef dağılım parametresi olarak negatif faiz oranı kullanılmasında bir sakınca bulunmamaktadır. Bu durumla piyasada çok sık karşılaşılsa da Avrupa Merkez Bankası (ECB) 2014 yılının ortalarından itibaren kendisinde tutulan mevduata negatif faiz uygulamaya başlamıştır. Danimarka, İsveç ve İsviçre Merkez Bankaları 2015 yılı içerisinde negatif politika faizi uygulamasını benimsemişlerdir.

Çizelge 5.9'da görüldüğü üzere ($S = 70$) değeri için hedef dağılım parametresi ($r = -0.45$) seçilerek 93.29 kat varyans azalması ve 9.51 kat varyasyon katsayısı azalışı sağlanmıştır. Alım opsiyonları için daha önce yapılan açıklamalardan burada satım opsiyonu sonuçları için de söz edilebilir. Opsiyon priminin güven aralığının daraltılması sağlanmış ve varyasyon katsayısı azaltılmıştır. Ayrıca düşük oynaklık ortamında Önem Örneklemesi yönteminin her durumda sonuç verdiği görülürken performans değişkenlerinden VAF ve VKAF değerlerinin her durumda 1'den büyük çıkmasıyla sade Monte Carlo yöntemine göre daha üstün olduğu da görülmüştür.

Çizelge 5.8 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	15.29571	15.30282	34.85894	5.90415	0.01157	15.29125	15.31439	15.29456	5.66185	2.37946	0.00466	15.2899	15.29922
40	6.63684	6.64039	33.89217	5.82170	0.01141	6.62898	6.65180	6.63718	6.37729	2.52533	0.00495	6.632233	6.64213
50	1.87671	1.87079	12.26189	3.50170	0.00686	1.86392	1.87765	1.87448	1.39664	1.18180	0.00232	1.872166	1.87680
60	0.37111	0.37388	2.26548	1.50515	0.00295	0.37093	0.37683	0.37207	0.09837	0.31364	0.00061	0.371457	0.37269
70	0.05760	0.05862	0.32345	0.56873	0.00111	0.05750	0.05973	0.05775	0.00347	0.05888	0.00012	0.057635	0.05787

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.9 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	15.30282	34.85894	5.90415	0.38582	15.29456	5.66185	2.37946	r=0.01	0.15558	6.15682	2.47995
40	6.64039	33.89217	5.82170	0.87671	6.63718	6.37729	2.52533	r=-0.07	0.38048	5.31451	2.30421
50	1.87079	12.26189	3.50170	1.87178	1.87448	1.39664	1.18180	r=-0.20	0.63047	8.77954	2.96888
60	0.37388	2.26548	1.50515	4.02572	0.37207	0.09837	0.31364	r=-0.33	0.84294	23.03067	4.77578
70	0.05862	0.32345	0.56873	9.70231	0.05775	0.00347	0.05888	r=-0.45	1.01964	93.29507	9.51546

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.10 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve orta vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	18.76416	9.06332	3.01054	0.00590	18.75826	18.77006	18.76253	9.03131	3.00521	0.00589	18.75664	18.76842
40	8.80486	8.80300	15.27890	3.90882	0.00766	8.795336	8.81066	8.79074	2.46774	1.57091	0.00308	8.787656	8.79381
50	1.41318	1.41416	5.39942	2.32367	0.00455	1.409606	1.41871	1.41331	0.65666	0.81035	0.00159	1.411725	1.41490
60	0.03763	0.03827	0.11835	0.34402	0.00067	0.037592	0.03894	0.03766	0.00141	0.03753	0.00007	0.037587	0.03773
70	-	0.00025	0.00060	0.02448	0.00005	0.000199	0.00029	0.00023	0.00010	0.00995	0.00002	0.000207	0.00025

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.11 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve orta vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	18.76416	9.06332	3.01054	0.16044	18.76253	9.03131	3.00521	r=0.01	0.16017	1.00354	1.00168
40	8.80300	15.27890	3.90882	0.44403	8.79074	2.46774	1.57091	r=-0.02	0.17870	6.19144	2.48479
50	1.41416	5.39942	2.32367	1.64314	1.41331	0.65666	0.81035	r=-0.10	0.57337	8.22251	2.86578
60	0.03827	0.11835	0.34402	8.99023	0.03766	0.00141	0.03753	r=-0.24	0.99660	83.99574	9.02089
70	0.00025	0.00060	0.02448	99.12146	0.00022	0.00000	0.00031	r=-0.42	1.44186	6233.09053	68.74553

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.12 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve kısa vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	19.58281	3.02019	1.73787	0.00341	19.57940	19.58621	19.58487	2.98821	1.72864	0.00339	19.58148	19.58826
40	-	9.58417	5.35341	2.31374	0.00453	9.579635	9.58870	9.59412	1.13591	1.06579	0.00209	9.592026	9.59620
50	0.95244	0.95180	2.21204	1.48729	0.00292	0.948882	0.95471	0.95108	0.29368	0.54193	0.00106	0.950019	0.95214
60	-	0.00044	0.00065	0.02544	0.00005	0.000388	0.00049	0.00040	0.00000	0.00051	0.00000	0.000397	0.00040
70	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.13 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve kısa vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.58281	3.02019	1.73787	0.08874	19.58487	2.98821	1.72864	r= 0.01	0.08826	1.01070	1.00544
40	9.58417	5.35341	2.31374	0.24141	9.59412	1.13591	1.06579	r= -0.01	0.11109	4.71290	2.17317
50	0.95180	2.21204	1.48729	1.56262	0.95108	0.29368	0.54193	r= -0.05	0.56980	7.53208	2.74240
60	0.00044	0.00065	0.02544	58.07534	0.00040	0.00000	0.00051	r= -0.19	1.28141	2487.50481	45.32154
70	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Yüksek oynaklık ortamındaki opsiyon fiyatını görmek amacıyla ($\sigma = 0.8$) seçilerek tüm diğer parametre değerleri için sonuçlar alınmış ve alım opsiyonu için Çizelge 5.14 ve Çizelge 5.15'de ($T = 1$ yıl), Çizelge 5.16 ve Çizelge 5.17'de ($T = 3$ ay) ve Çizelge 5.18 ve Çizelge 5.19'da ($T = 1$ ay) sonuçlarına yer verilmiştir. Yüksek oynaklık ortamında opsiyon primlerinin de çok yüksek seviyelere geldiği ilk göze çarpan noktadır. Bu şekildeki piyasa şartlarının içinde işlem hacimlerinde azalma görülmesi beklenebilir. Ancak finans piyasasında genellikle öncü göstergelere bakılarak oynaklık ortamının bu seviyelere gelmesinden önce gerekli opsiyon yatırımlarının yapılması yönünde eğilim bulunduğu belirtilmelidir.

Düşük oynaklık ve yüksek oynaklık ortamlarının kıyaslanmasına Yarı güven aralığı değerleri üzerinden devam edilirse yüksek oynaklık için tüm Yarı güven aralığı değerlerinde bir artış olduğu ve bu artışın vade uzadıkça daha da arttığı görülmektedir. Bu bakımdan sonuçların benzetim uygulaması öncesindeki beklentilerle örtüştüğü söylenebilir.

Alım opsiyonları için düşük oynaklık ortamı ve yüksek oynaklık ortamlarının VAF ve VKAF değerlerine bakıldığında yüksek oynaklık ortamı için performans değerlerinin birbirine yakın seyrettiği görülmektedir. Bununla birlikte düşük oynaklık ortamında kullanım fiyatının hemen altındaki spot fiyat değerleri için en az düzeylerine gelen VAF ve VKAF değerlerinin yüksek oynaklık ortamında kullanım fiyatının üstündeki spot fiyat değerleri için en az düzeylerine geldikleri görülmektedir.

Yüksek oynaklık ortamındaki ($\sigma = 0.8$) satım opsiyonu için Çizelge 5.20 ve Çizelge 5.21'de ($T = 1$ yıl), Çizelge 5.22 ve Çizelge 5.23'te ($T = 3$ ay) ve Çizelge 5.24 ve Çizelge 5.25'da ($T = 1$ ay) sonuçlarına yer verilmiştir.

Çizelge 5.14 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	5.47882	5.49200	389.49762	19.73570	0.03868	5.45332	5.53068	5.47829	11.31121	3.36321	0.00659	5.47169	5.48488
40	10.77419	10.80142	898.51025	29.97516	0.05875	10.74267	10.86017	10.77813	32.26085	5.67986	0.01113	10.76700	10.78926
50	17.28934	17.32574	1632.35144	40.40237	0.07919	17.24655	17.40492	17.29011	64.31077	8.01940	0.01572	17.27439	17.30582
60	24.68176	24.72551	2581.64429	50.80988	0.09959	24.62593	24.82510	24.67771	103.54497	10.17571	0.01994	24.65777	24.69766
70	32.70806	32.75703	3736.34155	61.12562	0.11980	32.63723	32.87683	32.74379	146.18077	12.09052	0.02370	32.72010	32.76749

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.15 : Alm opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	5.49200	389.49762	19.73570	3.59354	5.47829	11.31121	3.36321	r=1.26	0.61392	34.43465	5.85345
40	10.80142	898.51025	29.97516	2.77511	10.77813	32.26085	5.67986	r=1.12	0.52698	27.85141	5.26606
50	17.32574	1632.35144	40.40237	2.33193	17.29011	64.31077	8.01940	r=1.02	0.46381	25.38224	5.02772
60	24.72551	2581.64429	50.80988	2.05496	24.67771	103.54497	10.17571	r=0.90	0.41234	24.93259	4.98360
70	32.75703	3736.34155	61.12562	1.86603	32.74379	146.18077	12.09052	r=0.84	0.36925	25.55973	5.05362

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.16 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve orta vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.82183	0.82378	16.76119	4.09404	0.00802	0.81576	0.83181	0.82118	0.42647	0.65305	0.00128	0.81990	0.82245
40	3.48414	3.49417	86.26440	9.28786	0.01820	3.47597	3.51237	3.48421	4.72970	2.17479	0.00426	3.47995	3.48848
50	8.45853	8.47646	233.56424	15.28281	0.02995	8.44651	8.50642	8.46408	17.49904	4.18319	0.00820	8.45588	8.47228
60	15.35068	15.36916	449.70929	21.20635	0.04156	15.32760	15.41072	15.37156	36.50750	6.04214	0.01184	15.35972	15.38340
70	23.53739	23.55946	714.10126	26.72267	0.05238	23.50709	23.61184	23.56212	55.63098	7.45862	0.01462	23.54750	23.57674

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.17 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve orta vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.82378	16.76119	4.09404	4.96980	0.82118	0.42647	0.65305	r=0.805	0.79526	39.30234	6.24931
40	3.49417	86.26440	9.28786	2.65810	3.48421	4.72970	2.17479	r=0.605	0.62418	18.23887	4.25853
50	8.47646	233.56424	15.28281	1.80297	8.46408	17.49904	4.18319	r=0.485	0.49423	13.34726	3.64805
60	15.36916	449.70929	21.20635	1.37980	15.37156	36.50750	6.04214	r=0.385	0.39307	12.31827	3.51029
70	23.55946	714.10126	26.72267	1.13426	23.56212	55.63098	7.45862	r=0.325	0.31655	12.83640	3.58320

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.18 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve kısa vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.04645	0.04603	0.37634	0.61346	0.00120	0.04483	0.04723	0.04636	0.00224	0.04729	0.00009	0.04627	0.04645
40	0.97374	0.97593	11.02998	3.32114	0.00651	0.96942	0.98244	0.97316	0.50531	0.71085	0.00139	0.97176	0.97455
50	4.78498	4.79598	62.06479	7.87812	0.01544	4.78054	4.81142	4.78839	5.85611	2.41994	0.00474	4.78365	4.79313
60	11.85728	11.86619	151.53221	12.30984	0.02413	11.84206	11.89032	11.85963	16.26773	4.03333	0.00791	11.85173	11.86754
70	20.81856	20.82849	248.79652	15.77329	0.03092	20.79758	20.85941	20.80601	21.96184	4.68635	0.00919	20.79682	20.81519

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.19 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve kısa vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.04603	0.37634	0.61346	13.32806	0.04636	0.00224	0.04729	r=0.642	1.02013	168.30859	13.06511
40	0.97593	11.02998	3.32114	3.40305	0.97316	0.50531	0.71085	r=0.402	0.73046	21.82828	4.65879
50	4.79598	62.06479	7.87812	1.64265	4.78839	5.85611	2.41994	r=0.282	0.50538	10.59829	3.25035
60	11.86619	151.53221	12.30984	1.03739	11.85963	16.26773	4.03333	r=0.202	0.34009	9.31489	3.05034
70	20.82849	248.79652	15.77329	0.75729	20.80601	21.96184	4.68635	r=0.142	0.22524	11.32858	3.36216

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.20 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	20.72069	20.71278	188.54108	13.73103	0.02691	20.68587	20.73969	20.73549	60.67252	7.78926	0.01527	20.72023	20.75076
40	16.01606	16.01567	187.56622	13.69548	0.02684	15.98883	16.04252	16.02319	53.65009	7.32462	0.01436	16.00884	16.03755
50	12.53121	12.53290	170.80693	13.06931	0.02562	12.50728	12.55851	12.53790	42.53617	6.52198	0.01278	12.52512	12.55068
60	9.92363	9.92671	148.95068	12.20454	0.02392	9.90279	9.95063	9.92521	32.59941	5.70959	0.01119	9.91401	9.93640
70	7.94993	7.95123	127.09971	11.27385	0.02210	7.92914	7.97333	7.96130	24.35552	4.93513	0.00967	7.95162	7.97097

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.21 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	20.71278	188.54108	13.73103	0.66293	20.73549	60.67252	7.78926	r= -0.66	0.37565	3.10752	1.76475
40	16.01567	187.56622	13.69548	0.85513	16.02319	53.65009	7.32462	r= -0.82	0.45713	3.49610	1.87066
50	12.53290	170.80693	13.06931	1.04280	12.53790	42.53617	6.52198	r= -0.92	0.52018	4.01557	2.00469
60	9.92671	148.95068	12.20454	1.22946	9.92521	32.59941	5.70959	r= -1.00	0.57526	4.56912	2.13723
70	7.95123	127.09971	11.27385	1.41787	7.96130	24.35552	4.93513	r= -1.08	0.61989	5.21852	2.28730

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.22 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve orta vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	19.58732	19.58044	107.31171	10.35914	0.02030	19.56014	19.60074	19.62442	26.23743	5.12225	0.01004	19.61438	19.63446
40	12.24963	12.24833	106.10252	10.30061	0.02019	12.22814	12.26852	12.26212	23.96051	4.89495	0.00959	12.25252	12.27171
50	7.22403	7.22782	78.20984	8.84363	0.01733	7.21049	7.24516	7.22487	14.26465	3.77686	0.00740	7.21746	7.23227
60	4.11617	4.11807	49.00660	7.00047	0.01372	4.10435	4.13179	4.11888	6.70564	2.58953	0.00508	4.11380	4.12395
70	2.30289	2.30619	28.16577	5.30714	0.01040	2.29579	2.31659	2.30441	2.75810	1.66075	0.00326	2.30115	2.30766

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.23 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve orta vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.58044	107.31171	10.35914	0.52906	19.62442	26.23743	5.12225	r=-0.255	0.26101	4.09002	2.02692
40	12.24833	106.10252	10.30061	0.84098	12.26212	23.96051	4.89495	r=-0.355	0.39919	4.42822	2.10670
50	7.22782	78.20984	8.84363	1.22355	7.22487	14.26465	3.77686	r=-0.455	0.52276	5.48277	2.34057
60	4.11807	49.00660	7.00047	1.69994	4.11888	6.70564	2.58953	r=-0.555	0.62870	7.30827	2.70391
70	2.30619	28.16577	5.30714	2.30126	2.30441	2.75810	1.66075	r=-0.675	0.72069	10.21201	3.19315

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.24 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve kısa vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	19.63152	19.62744	47.18721	6.86930	0.01346	19.61397	19.64090	19.66137	6.75815	2.59964	0.00510	19.65627	19.66646
40	10.55880	10.55541	56.15311	7.49354	0.01469	10.54072	10.57010	10.55700	11.60150	3.40610	0.00668	10.55033	10.56368
50	4.37004	4.37446	33.15244	5.75782	0.01129	4.36317	4.38574	4.36973	5.21654	2.28398	0.00448	4.36525	4.37421
60	1.44235	1.44391	11.69681	3.42006	0.00670	1.43720	1.45061	1.44011	1.03444	1.01708	0.00199	1.43812	1.44210
70	0.40362	0.40561	3.07857	1.75459	0.00344	0.40217	0.40905	0.40314	0.12142	0.34845	0.00068	0.40246	0.40382

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.25 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve kısa vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.62744	47.18721	6.86930	0.34998	19.66137	6.75815	2.59964	r=-0.098	0.13222	6.98227	2.64697
40	10.55541	56.15311	7.49354	0.70992	10.55700	11.60150	3.40610	r=-0.178	0.32264	4.84016	2.20037
50	4.37446	33.15244	5.75782	1.31624	4.36973	5.21654	2.28398	r=-0.258	0.52268	6.35525	2.51824
60	1.44391	11.69681	3.42006	2.36862	1.44011	1.03444	1.01708	r=-0.378	0.70625	11.30736	3.35380
70	0.40561	3.07857	1.75459	4.32576	0.40314	0.12142	0.34845	r=-0.478	0.86433	25.35575	5.00474

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Düşük oynaklık ortamından yüksek oynaklık ortamına geçişte alım ve satım opsiyonu primlerinin aynı ölçüde etkilenmediği alım opsiyonu priminde meydana gelen artışın daha yüksek olduğu görülmektedir.

5.1.2. Zıt rassal sayılar varyans azaltma uygulaması

Zıt rassal sayılar yöntemi Önem örneklemesine ek bir yöntem olarak seçilerek birlikte uygulanmak ve performansın artırılmasını sağlamak üzere tercih edilmiştir. Zıt rassal sayılar (antithetic varieties) yöntemi her konuya uygulanabilmekte ancak performansı belirli ölçülerde sınırlı kalabilen bir yöntemdir, (Law & Kelton, 2000), (Jäkel, 2002).

Opsiyon fiyatı hesaplaması için rassal getiri dağılımı olarak lognormal dağılım kullanıldığından varyans azaltma uygulaması düzgün dağılım yerine standart normal dağılım üzerinden şu şekilde gerçekleştirilmiştir: Koşum çiftlerinden birincisi için bir (z) standart normal rassal değişken türetilirken ikincisi için ($-z$) şeklinde bir standart normal rassal değişkeni alınarak benzetim tamamlanmıştır, (Law & Kelton, 2000), (Jackel, 2002).

Önem örnekleme yönteminde üç vade için sonuçlara yer verilirken burada mukayese yapabilmek adına düşük ve yüksek oynaklıktaki ($T = 1$ yıl) sonuçlarına yer verilmiştir. Buna göre alım opsiyonu için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları Çizelge 5.26 ve Çizelge 5.27'de, satım opsiyonu için Çizelge 5.28 ve Çizelge 5.29'da verilmiştir. Diğer vade seçenekleri için sonuçlar Ek-D içerisinde verilmiştir.

Düşük oynaklık için zıt rassal sayılar yönteminin Önem örnekleme yöntemi ile çoğunlukla benzer sonuçlar verdiği, aynı trendi devam ettirdiği görülmektedir. Zıt rassal sayılar yöntemi ile Önem örnekleme yönteminin ayrıldığı tek nokta ise Önem örnekleme yöntemi düşük oynaklık ve uzun vade için alım opsiyonlarında daha iyi performans verirken zıt rassal sayılar yöntemi satım opsiyonu için daha iyi sonuç vermektedir. Daha iyi sonuç verme ifadesi ile performans değişkenlerinde gözlemlenen iyileşmeye vurgu yapılmaktadır.

Yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) sonuçları ise yine uzun vadede ($T = 1$ yıl), alım opsiyonu için Çizelge 5.30 ve Çizelge 5.31'de, satım opsiyonu için Çizelge 5.32 ve Çizelge 5.33'de verilmiştir.

Çizelge 5.26 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.05384	0.05341	0.35151	0.59288	0.00116	0.05225	0.05458	0.05461	0.18459	0.42964	0.00084	0.05377	0.05546
40	1.39496	1.39636	12.87750	3.58852	0.00703	1.38932	1.40339	1.39886	5.49878	2.34495	0.00460	1.39426	1.40346
50	6.63484	6.63941	64.83510	8.05203	0.01578	6.62363	6.65520	6.65709	11.87675	3.44627	0.00675	6.65033	6.66384
60	15.12924	15.13739	133.50263	11.55433	0.02265	15.11474	15.16004	15.17678	6.68662	2.58585	0.00507	15.17171	15.18184
70	24.81572	24.82018	196.81740	14.02916	0.02750	24.79268	24.84768	24.86363	3.47039	1.86290	0.00365	24.85998	24.86728

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.27 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.05341	0.35151	0.59288	11.09973	0.05461	0.18459	0.42964	7.86681	1.90427	1.41096
40	1.39636	12.87750	3.58852	2.56992	1.39886	5.49878	2.34495	1.67633	2.34188	1.53307
50	6.63941	64.83510	8.05203	1.21276	6.65709	11.87675	3.44627	0.51768	5.45899	2.34267
60	15.13739	133.50263	11.55433	0.76330	15.17678	6.68662	2.58585	0.17038	19.96565	4.47992
70	24.82018	196.81740	14.02916	0.56523	24.86363	3.47039	1.86290	0.07492	56.71335	7.54401

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.28 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	15.29571	15.30282	34.85894	5.90415	0.01157	15.29125	15.31439	15.29456	5.66185	2.37946	0.00466	15.2899	15.29922
40	6.63684	6.64039	33.89217	5.82170	0.01141	6.62898	6.65180	6.63718	6.37729	2.52533	0.00495	6.632233	6.64213
50	1.87671	1.87079	12.26189	3.50170	0.00686	1.86392	1.87765	1.87448	1.39664	1.18180	0.00232	1.872166	1.87680
60	0.37111	0.37388	2.26548	1.50515	0.00295	0.37093	0.37683	0.37207	0.09837	0.31364	0.00061	0.371457	0.37269
70	0.05760	0.05862	0.32345	0.56873	0.00111	0.05750	0.05973	0.05775	0.00347	0.05888	0.00012	0.057635	0.05787

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.29 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	15.30282	34.85894	5.90415	0.38582	15.29456	5.66185	2.37946	0.15558	6.15682	2.47995
40	6.64039	33.89217	5.82170	0.87671	6.63718	6.37729	2.52533	0.38048	5.31451	2.30421
50	1.87079	12.26189	3.50170	1.87178	1.87448	1.39664	1.18180	0.63047	8.77954	2.96888
60	0.37388	2.26548	1.50515	4.02572	0.37207	0.09837	0.31364	0.84294	23.03067	4.77578
70	0.05862	0.32345	0.56873	9.70231	0.05775	0.00347	0.05888	1.01964	93.29507	9.51546

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.30 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	5.47882	5.49200	389.49762	19.73570	0.03868	5.45332	5.53068	5.48001	180.75749	13.44461	0.02635	5.45366	5.50636
40	10.77419	10.80142	898.51025	29.97516	0.05875	10.74267	10.86017	10.77431	392.80713	19.81936	0.03885	10.73546	10.81315
50	17.28934	17.32574	1632.35144	40.40237	0.07919	17.24655	17.40492	17.28511	668.91504	25.86339	0.05069	17.23442	17.33580
60	24.68176	24.72551	2581.64429	50.80988	0.09959	24.62593	24.82510	24.67246	988.98328	31.44811	0.06164	24.61082	24.73409
70	32.70806	32.75703	3736.34155	61.12562	0.11980	32.63723	32.87683	32.72061	1335.91187	36.55013	0.07164	32.64897	32.79224

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.31 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	5.49200	389.49762	19.73570	3.59354	5.48001	180.75749	13.44461	2.45339	2.15481	1.46472
40	10.80142	898.51025	29.97516	2.77511	10.77431	392.80713	19.81936	1.83950	2.28741	1.50862
50	17.32574	1632.35144	40.40237	2.33193	17.28511	668.91504	25.86339	1.49628	2.44030	1.55848
60	24.72551	2581.64429	50.80988	2.05496	24.67246	988.98328	31.44811	1.27462	2.61040	1.61221
70	32.75703	3736.34155	61.12562	1.86603	32.72061	1335.91187	36.55013	1.11704	2.79685	1.67052

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.32 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	20.72069	20.71278	188.54108	13.73103	0.02691	20.68587	20.73969	20.72149	3.95903	1.98973	0.00390	20.71759	20.72538
40	16.01606	16.01567	187.56622	13.69548	0.02684	15.98883	16.04252	16.01412	3.03815	1.74303	0.00342	16.01070	16.01754
50	12.53121	12.53290	170.80693	13.06931	0.02562	12.50728	12.55851	12.53673	12.54991	3.54259	0.00694	12.52979	12.54367
60	9.92363	9.92671	148.95068	12.20454	0.02392	9.90279	9.95063	9.91987	25.23143	5.02309	0.00985	9.91002	9.92971
70	7.94993	7.95123	127.09971	11.27385	0.02210	7.92914	7.97333	7.94425	31.91846	5.64964	0.01107	7.93317	7.95532

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.33 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	20.71278	188.54108	13.73103	0.66293	20.72149	3.95903	1.98973	0.09602	47.62300	6.90384
40	16.01567	187.56622	13.69548	0.85513	16.01412	3.03815	1.74303	0.10884	61.73695	7.85652
50	12.53290	170.80693	13.06931	1.04280	12.53673	12.54991	3.54259	0.28258	13.61021	3.69033
60	9.92671	148.95068	12.20454	1.22946	9.91987	25.23143	5.02309	0.50637	5.90338	2.42801
70	7.95123	127.09971	11.27385	1.41787	7.94425	31.91846	5.64964	0.71116	3.98201	1.99375

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Düşük oynaklık ortamında ($\sigma = 0.2$) zıt rassal sayılar yöntemi ile Önem Örneklemesi yöntemleri çok yaklaşık sonuçlar vermişlerdir. Kritik performans faktörleri VAF ve VKAF, her iki yöntemde de, Monte Carlo yöntemine göre değişkenliğin iyi seviyede azaldığını göstermektedir. Alım opsiyonu için en iyi VAF değeri 56 seviyelerinde satım opsiyonu içinse 93 seviyelerinde bulunmuştur. Varyasyon katsayısı değerlerinde de önemli miktarda iyileşme sağlandığı görülmektedir.

Yüksek oynaklık durumuna bakıldığında ise beklendiği üzere düşük oynaklık ortamındaki kadar iyi sonuç alınamadığı görülmektedir. Performans kriterleri düşük oynaklık durumuna göre daha düşük değerler alırken varyasyon katsayısı değerleri de hem düşük oynaklık durumuna hem de diğer varyans azaltma tekniği Önem Örneklemesi yöntemine göre daha düşük seviyelerde gerçekleşmiştir.

5.1.3. Önem örneklemesi ve zıt rassal sayıların birlikte uygulanması

Ayrı ayrı iki yöntemin başarılı sonuç vermiş olmasına bağlı olarak birlikte uygulanmaları sonucunda varyanstaki azalma ve varyasyon katsayısındaki azalmanın daha da artması beklenmektedir. İki yöntem birlikte ele alınarak, beşyüzbin adet koşum tekrarı için U rassal sayılarıyla bulunan önem örneklemesi sonuçları ile $1 - U$ rassal sayılarıyla bulunan önem örneklemesi sonuçlarının ortalaması alınarak zıt rassal sayılar ve önem örneklemesi yöntemlerinin birlikte uygulanması sağlanmıştır.

Çizelge 4.1'de verilen parametre seti için sonuçlar alınmıştır. ($T = 1$ yıl) için düşük ve yüksek oynaklıktaki alım ve satım opsiyonu sonuçları aşağıda gösterilirken diğer vade seçenekleri için sonuçlara Ek-D'de yer verilmiştir.

Çizelge 5.34 ve Çizelge 5.35'de düşük oynaklık için alım opsiyonunun ($T = 1$ yıl) sonuçları, Çizelge 5.36 ve Çizelge 5.37'de düşük oynaklık için satım opsiyonunun ($T = 1$ yıl) sonuçları verilmiştir. Yüksek oynaklık sonuçlarıysa alım opsiyonu için Çizelge 5.38 ve Çizelge 5.39'da, satım opsiyonu için Çizelge 5.40 ve Çizelge 5.41'de verilmiştir.

Çizelge 5.34 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi -Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.05384	0.05341	0.35151	0.59288	0.00116	0.05225	0.05458	0.05461	0.18459	0.42964	0.00084	0.05377	0.05546
40	1.39496	1.39636	12.87750	3.58852	0.00703	1.38932	1.40339	1.39886	5.49878	2.34495	0.00460	1.39426	1.40346
50	6.63484	6.63941	64.83510	8.05203	0.01578	6.62363	6.65520	6.65709	11.87675	3.44627	0.00675	6.65033	6.66384
60	15.12924	15.13739	133.50263	11.55433	0.02265	15.11474	15.16004	15.17678	6.68662	2.58585	0.00507	15.17171	15.18184
70	24.81572	24.82018	196.81740	14.02916	0.02750	24.79268	24.84768	24.86363	3.47039	1.86290	0.00365	24.85998	24.86728

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.35 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.05341	0.35151	0.59288	11.09973	0.05383	0.00125	0.03537	r=0.75	0.65706	280.98082	16.89313
40	1.39636	12.87750	3.58852	2.56992	1.39724	0.01852	0.13610	r=0.28	0.09740	695.21676	26.38399
50	6.63941	64.83510	8.05203	1.21276	6.64289	0.20782	0.45588	r=0.15	0.06863	311.97269	17.67199
60	15.13739	133.50263	11.55433	0.76330	15.10456	0.60428	0.77735	r=0.11	0.05146	220.92952	14.83145
70	24.82018	196.81740	14.02916	0.56523	24.85560	0.42531	0.65216	r=0.13	0.02624	462.76222	21.54261

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.36 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	15.29571	15.30282	34.85894	5.90415	0.01157	15.29125	15.31439	15.29911	0.72544	0.85173	0.00167	15.29744	15.30078
40	6.63684	6.64039	33.89217	5.82170	0.01141	6.62898	6.65180	6.64541	0.22659	0.47602	0.00093	6.644474	6.64634
50	1.87671	1.87079	12.26189	3.50170	0.00686	1.86392	1.87765	1.87524	0.03005	0.17335	0.00034	1.8749	1.87558
60	0.37111	0.37388	2.26548	1.50515	0.00295	0.37093	0.37683	0.37122	0.00870	0.09329	0.00018	0.371034	0.37140
70	0.05760	0.05862	0.32345	0.56873	0.00111	0.05750	0.05973	0.05750	0.00153	0.03907	0.00008	0.057424	0.05758

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.37 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar						Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴	
30	15.30282	34.85894	5.90415	0.38582	15.29911	0.72544	0.85173	r= 0.07	0.05567	48.05247	6.93031	
40	6.64039	33.89217	5.82170	0.87671	6.64541	0.22659	0.47602	r= 0.04	0.07163	149.57421	12.23928	
50	1.87079	12.26189	3.50170	1.87178	1.87524	0.03005	0.17335	r= -0.06	0.09244	408.07674	20.24885	
60	0.37388	2.26548	1.50515	4.02572	0.37122	0.00870	0.09329	r= -0.20	0.25130	260.34027	16.01955	
70	0.05862	0.32345	0.56873	9.70231	0.05750	0.00153	0.03907	r= -0.57	0.67954	211.82318	14.27785	

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.38 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	5.47882	5.49200	389.49762	19.73570	0.03868	5.45332	5.53068	5.48234	0.18850	2.21021	0.00433	5.47801	5.48667
40	10.77419	10.80142	898.51025	29.97516	0.05875	10.74267	10.86017	10.78700	0.49078	0.70055	0.00137	10.78563	10.78838
50	17.28934	17.32574	1632.35144	40.40237	0.07919	17.24655	17.40492	17.30148	1.30621	1.14290	0.00224	17.29924	17.30372
60	24.68176	24.72551	2581.64429	50.80988	0.09959	24.62593	24.82510	24.72017	2.76918	1.66409	0.00326	24.71691	24.72343
70	32.70806	32.75703	3736.34155	61.12562	0.11980	32.63723	32.87683	32.73777	5.24411	2.29000	0.00449	32.73328	32.74225

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.39 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	5.49200	389.49762	19.73570	3.59354	5.48234	0.18850	2.21021	r=0.75	0.40315	2066.25433	8.91361
40	10.80142	898.51025	29.97516	2.77511	10.78700	0.49078	0.70055	r=0.67	0.06494	1830.79874	42.73075
50	17.32574	1632.35144	40.40237	2.33193	17.30148	1.30621	1.14290	r=0.48	0.06606	1249.68530	35.30141
60	24.72551	2581.64429	50.80988	2.05496	24.72017	2.76918	1.66409	r=0.44	0.06732	932.27652	30.52661
70	32.75703	3736.34155	61.12562	1.86603	32.73777	5.24411	2.29000	r=0.38	0.06995	712.48412	26.67670

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge 5.40 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	20.72069	20.71278	188.54108	13.73103	0.02691	20.68587	20.73969	20.72198	3.95403	1.98848	r=-0.14	0.09596	47.68323
40	16.01606	16.01567	187.56622	13.69548	0.02684	15.98883	16.04252	16.03097	1.15929	1.07670	r=-0.20	0.06716	161.79419
50	12.53121	12.53290	170.80693	13.06931	0.02562	12.50728	12.55851	12.54221	0.38713	0.62220	r=-0.30	0.04961	441.21337
60	9.92363	9.92671	148.95068	12.20454	0.02392	9.90279	9.95063	9.94539	0.31325	0.55968	r=-0.51	0.05628	475.50858
70	7.94993	7.95123	127.09971	11.27385	0.02210	7.92914	7.97333	7.96187	0.23776	0.48760	r=-0.58	0.06124	534.58270

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.41 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo					Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²		Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴
30	20.71278	188.54108	13.73103	0.66293		20.72198	3.95403	1.98848	0.00390	20.71808	20.72588	20.72198
40	16.01567	187.56622	13.69548	0.85513		16.03097	1.15929	1.07670	0.00211	16.02886	16.03308	16.03097
50	12.53290	170.80693	13.06931	1.04280		12.54221	0.38713	0.62220	0.00122	12.54099	12.54342	12.54221
60	9.92671	148.95068	12.20454	1.22946		9.94539	0.31325	0.55968	0.00110	9.94429	9.94648	9.94539
70	7.95123	127.09971	11.27385	1.41787		7.96187	0.23776	0.48760	0.00096	7.96091	7.96283	7.96187

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Sonuçlar incelendiğinde kritik başarı faktörlerinin en iyi seviyelere geldiği görülmüştür. Bazı parametre değerlerinde 700 kata yakın iyileşme olduğu görülmüştür. İki yöntemin tek tek uygulanmasına kıyasla tüm başarı faktörlerinde çok çok iyi sonuçlar alınmıştır.

Her iki varyans azaltma tekniğinin birlikte uygulanması için hazırladığımız C programı Ek-C3'te verilmiştir. Burdan da görüleceği üzere, iki yöntemin birlikte uygulanmasında birbirinden bağımsız yöntemler olmaları dolayısıyla herhangi bir zorlukla karşılaşılmamış, ayrı ayrı uygulanmasındaki algoritmaları aynı koşum içerisinde çalıştırılarak benzetim süreci tamamlanmıştır.

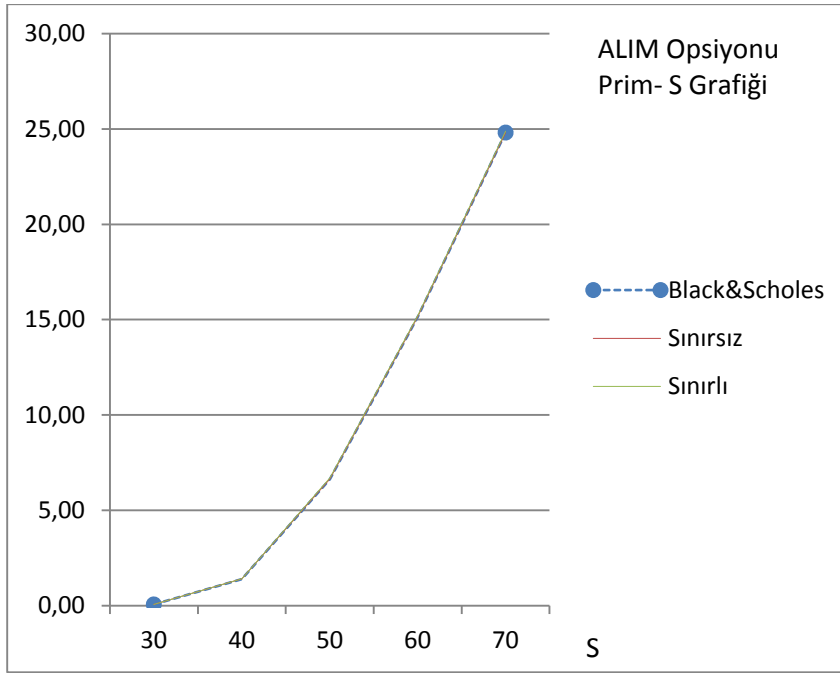
Bu iki tekniğin birlikte uygulanmasına literatür araştırması esnasında raslanmamış olup elde edilen sonuçlar bundan sonrası için başka araştırma konularında da birlikte uygulanmalarının son derece faydalı olabileceğini ortaya koymuştur.

5.2 Sınırlı Fiyat Stokastik Süreçleri için Opsiyon Fiyatlaması

Önemi gün geçtikçe artan opsiyon fiyatlaması konusunun uluslararası piyasalar nezdindeki farklı fiyat süreçlerine göre değişim gösterip göstermediğinin araştırılması gerekmektedir. Örneğin BİST'te uygulanan tavan-taban fiyat kuralına bağlı olarak opsiyon fiyatlarının nasıl hesaplanması gerektiği belirlenmelidir.

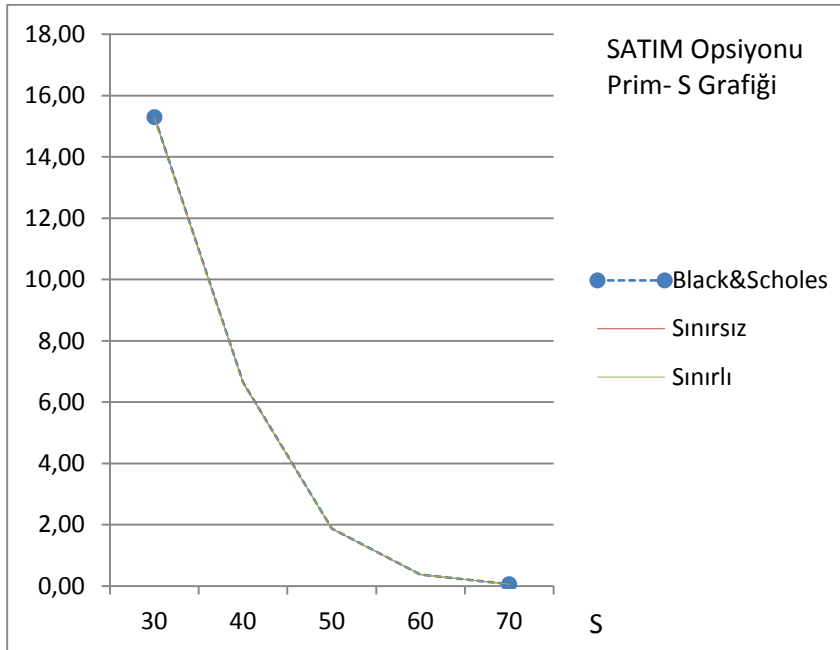
Son derece önemli olan bu uygulama ile opsiyon fiyatının nasıl değiştiğinin görülmesi gerekmektedir. Sınırlı fiyat stokastik sürecinin uzun dönemde yaratabileceği etkiyi araştırmak üzere sınırlı fiyat stokastik süreçleri için Monte Carlo benzetim modeli geliştirilerek sonuçlar alınmıştır.

Düşük oynaklık ortamında sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçleri arasında belirgin bir fark olmadığı bulgulanmıştır. Şekil 5.7'de alım opsiyonu fiyatının dayanak varlık fiyatına göre grafiği verilmiştir. ($\sigma = 0.2$) için Black-Scholes fiyatıyla birlikte sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreci opsiyon fiyatlarının çok yaklaşık oldukları görülmektedir.



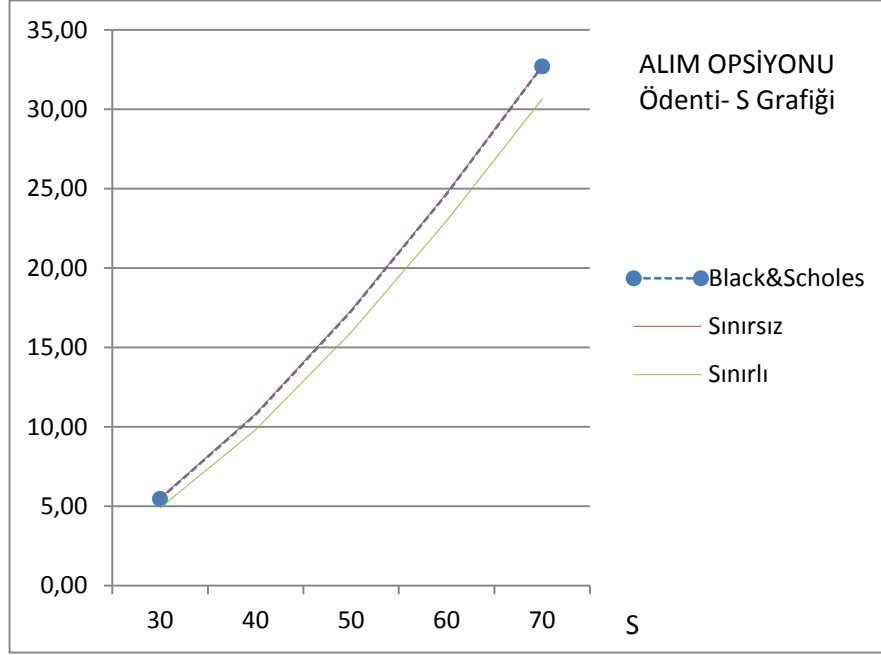
Şekil 5.7 : Düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) alım opsiyonu grafiği.

Düşük oynaklık ortamında satım opsiyonu grafiği Şekil 5.8'de verilmiş olup yine Black-Scholes fiyatıyla birlikte her iki stokastik süreç opsiyon fiyatlarının çok yaklaşık oldukları görülmektedir.



Şekil 5.8 : Düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) satım opsiyonu grafiği.

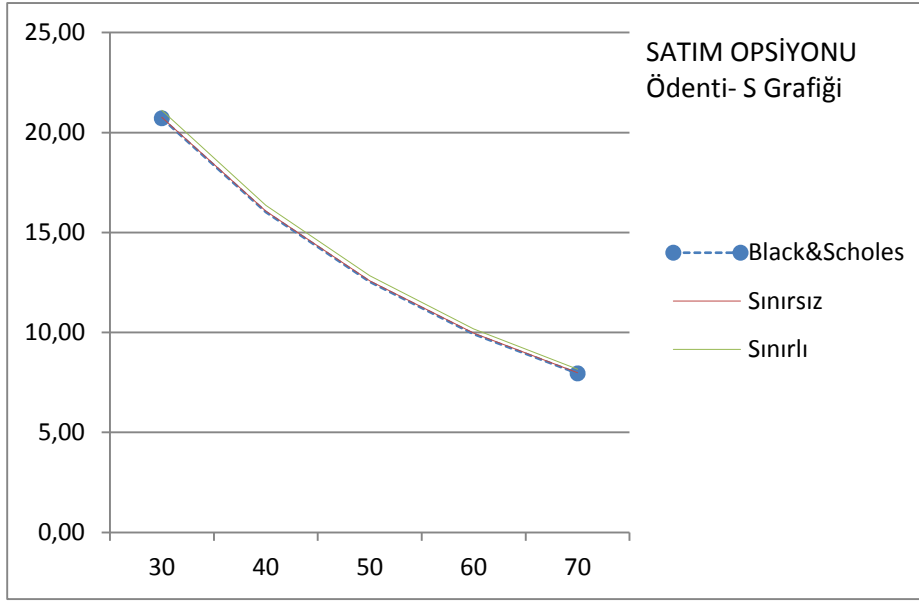
Yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ortamında ise sınırlı ve sınırsız fiyat süreçleri için hesaplanan opsiyon fiyatları arasında belirgin bir fark olduğu bulgulanmıştır. Şekil 5.9'da verilen alım opsiyonu grafiğinde Black-Scholes fiyatıyla birlikte sınırsız fiyat sürecine göre bulunan fiyatın çok yaklaşık seyrettiği buna karşın sınırlı fiyat süreci için fiyatın belirgin biçimde azalmış olduğu görülmektedir.



Şekil 5.9 : Yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) alım opsiyonu grafiği.

Alım opsiyonu fiyatının azalmasının nedenleri araştırıldığında şu sonuçla karşılaşılmaktadır. Sınırlı fiyat stokastik süreci fiyatın yükselme ihtimalini azaltmakta olduğundan alım opsiyonunun kullanılma ihtimali de azalmaktadır. Bu durumda beklenen opsiyon ödentisinin azalmasına bağlı olarak opsiyon priminde azalma görülmektedir. Fiyatın aşağıdan sıfır ile sınırlanmış olmasından dolayı bu etki yukarı yönlü olarak belirleyici olmakta ve opsiyon fiyatının azalmasına neden olmaktadır.

Satım opsiyonuna bakıldığında ise Şekil 5.10'da verilen satım opsiyonu grafiğinden görüldüğü üzere yine Black-Scholes fiyatı ile sınırsız fiyat sürecine göre bulunan fiyatın çok yaklaşık seyrettiği buna karşın sınırlı fiyat sürecinde fiyatın bir miktar artmış olduğu görülmektedir.



Şekil 5.10 : Yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) satım opsiyonu grafiği.

Sınırlı fiyat stokastik sürecinde fiyatın hem yükselmesi hem de düşmesine sınırlama getirilmiştir. Ancak bu iki etki opsiyon fiyatını eşit şekilde etkilememekte ve opsiyon fiyatında bir miktar fark oluşmaktadır.

Satım opsiyonu fiyatında artış görülmesinin nedeni de benzer şekilde açıklanabilir. Satım opsiyonun kullanılma ihtimali dayanak varlık fiyatının düşmesine bağlı olarak artmakta, dayanak varlık fiyatının artmasına bağlı olarak da azalmaktadır. Sınırlı fiyat stokastik sürecinin dayanak varlık fiyatının artmasına daha fazla sınır getirmesi nedeniyle satım opsiyonunun kullanılmama ihtimali azalacaktır, (Yön ve Bozdağ, 2014). Dolayısıyla satım opsiyonu ödentisinde artış görülmektedir.

Grafiklerde gösterilen sonuçların detaylarına aşağıda yer alan Çizelge 5.42'den Çizelge 5.49'a kadar yer verilmiştir.

Çizelge 5.42 : Sınırlı fiyat süreci alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve sınırlı fiyat süreci tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Sınırlı Stokastik Süreç					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.05384	0.05341	0.35151	0.59288	0.00116	0.05225	0.05458	0.05392	0.00285	0.05339	0.00010	0.05381	0.05402
40	1.39496	1.39636	12.87750	3.58852	0.00703	1.38932	1.40339	1.39520	0.83733	0.91506	0.00179	1.39340	1.39699
50	6.63484	6.63941	64.83510	8.05203	0.01578	6.62363	6.65520	6.63676	7.24997	2.69258	0.00528	6.63148	6.64203
60	15.12924	15.13739	133.50263	11.55433	0.02265	15.11474	15.16004	15.13396	12.84542	3.58405	0.00702	15.12693	15.14098
70	24.81572	24.82018	196.81740	14.02916	0.02750	24.79268	24.84768	24.81389	13.13488	3.62421	0.00710	24.80678	24.82099

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.43 : Sınırlı fiyat süreci alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Sınırlı Stokastik Süreç					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.05341	0.35151	0.59288	11.09973	0.05392	0.00285	0.05339	r=0.74	0.99019	123.33579	11.20971
40	1.39636	12.87750	3.58852	2.56992	1.39520	0.83733	0.91506	r=0.43	0.65586	15.37924	3.91838
50	6.63941	64.83510	8.05203	1.21276	6.63676	7.24997	2.69258	r=0.31	0.40571	8.94282	2.98926
60	15.13739	133.50263	11.55433	0.76330	15.13396	12.84542	3.58405	r=0.24	0.23682	10.39301	3.22309
70	24.82018	196.81740	14.02916	0.56523	24.81389	13.13488	3.62421	r=0.20	0.14606	14.98433	3.86998

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.44 : Sınırlı fiyat süreci Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Sınırlı Stokastik Süreç					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	15.29571	15.30282	34.85894	5.90415	0.01157	15.29125	15.31439	15.30940	5.80837	2.41006	0.00472	15.30468	15.31413
40	6.63684	6.64039	33.89217	5.82170	0.01141	6.62898	6.65180	6.64032	6.39316	2.52847	0.00496	6.635363	6.64527
50	1.87671	1.87079	12.26189	3.50170	0.00686	1.86392	1.87765	1.88772	1.38557	1.17710	0.00231	1.885409	1.89002
60	0.37111	0.37388	2.26548	1.50515	0.00295	0.37093	0.37683	0.37087	0.09813	0.31326	0.00061	0.37026	0.37149
70	0.05760	0.05862	0.32345	0.56873	0.00111	0.05750	0.05973	0.05715	0.00345	0.05875	0.00012	0.057035	0.05727

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.45 : Sınırlı fiyat süreci Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Sınırlı Stokastik Süreç					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	15.30282	34.85894	5.90415	0.38582	15.30940	5.80837	2.41006	r=0.06	0.15742	6.00150	2.45085
40	6.64039	33.89217	5.82170	0.87671	6.64032	6.39316	2.52847	r=-0.06	0.38078	5.30131	2.30243
50	1.87079	12.26189	3.50170	1.87178	1.88772	1.38557	1.17710	r=-0.17	0.62356	8.84973	3.00177
60	0.37388	2.26548	1.50515	4.02572	0.37087	0.09813	0.31326	r=-0.29	0.84465	23.08606	4.76612
70	0.05862	0.32345	0.56873	9.70231	0.05715	0.00345	0.05875	r=-0.32	1.02801	93.70046	9.43792

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge 5.46 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Sınırlı Stokastik Süreç					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	5.47882	5.49200	389.49762	19.73570	0.03868	5.45332	5.53068	4.84109	9.60159	3.09864	0.00607	4.83502	4.84716
40	10.77419	10.80142	898.51025	29.97516	0.05875	10.74267	10.86017	9.68672	28.89264	5.37519	0.01054	9.67619	9.69726
50	17.28934	17.32574	1632.35144	40.40237	0.07919	17.24655	17.40492	15.75293	174.31754	13.20294	0.02588	15.72705	15.77881
60	24.68176	24.72551	2581.64429	50.80988	0.09959	24.62593	24.82510	22.68310	257.95230	16.06089	0.03148	22.65162	22.71458
70	32.70806	32.75703	3736.34155	61.12562	0.11980	32.63723	32.87683	30.27356	153.83077	12.40285	0.02431	30.24925	30.29787

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.47 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Sınırlı Stokastik Süreç					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	5.49200	389.49762	19.73570	3.59354	4.84109	9.60159	3.09864	r=1.62	0.64007	40.56597	5.61427
40	10.80142	898.51025	29.97516	2.77511	9.68672	28.89264	5.37519	r=1.44	0.55490	31.09824	5.00108
50	17.32574	1632.35144	40.40237	2.33193	15.75293	174.31754	13.20294	r=1.29	0.83813	9.36424	2.78231
60	24.72551	2581.64429	50.80988	2.05496	22.68310	257.95230	16.06089	r=0.82	0.70806	10.00822	2.90225
70	32.75703	3736.34155	61.12562	1.86603	30.27356	153.83077	12.40285	r=0.59	0.40969	24.28865	4.55471

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Fakt

Yüksek oynaklık ortamındaki sonuçlar incelendiğinde her iki varyans azaltma tekniğinin birlikte kullanılmış olmasına rağmen performans değişkenlerinin (VAF ve VKAF) sınırsız fiyat sürecindeki kadar yüksek değerlerde olmadığı görülmüştür. Çizelgelerden görüldüğü üzere Dolayısıyla satım opsiyonu ödentisinde artış görülmektedir.

Çizelge 5.48 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ yıl) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Önem Örneklemesi Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	20.72069	20.71278	188.54108	13.73103	0.02691	20.68587	20.73969	21.22058	61.12383	7.81817	0.01532	21.20526	21.23590
40	16.01606	16.01567	187.56622	13.69548	0.02684	15.98883	16.04252	16.48519	54.32266	7.37039	0.01445	16.47074	16.49963
50	12.53121	12.53290	170.80693	13.06931	0.02562	12.50728	12.55851	12.88719	43.94394	6.62902	0.01299	12.87419	12.90018
60	9.92363	9.92671	148.95068	12.20454	0.02392	9.90279	9.95063	10.23241	34.94635	5.91154	0.01159	10.22082	10.24400
70	7.94993	7.95123	127.09971	11.27385	0.02210	7.92914	7.97333	8.17008	25.50621	5.05037	0.00990	8.16018	8.17997

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge 5.49 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ yıl) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo					Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²		Prim	MSE	S.Sapma	Parametre	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	20.71278	188.54108	13.73103	0.66293		21.22058	61.12383	7.81817	r=-0.36	0.36842	3.08458	1.79935
40	16.01567	187.56622	13.69548	0.85513		16.48519	54.32266	7.37039	r=-0.47	0.44709	3.45282	1.91265
50	12.53290	170.80693	13.06931	1.04280		12.88719	43.94394	6.62902	r=-0.55	0.51439	3.88693	2.02726
60	9.92671	148.95068	12.20454	1.22946		10.23241	34.94635	5.91154	r=-0.58	0.57773	4.26227	2.12810
70	7.95123	127.09971	11.27385	1.41787		8.17008	25.50621	5.05037	r=-0.66	0.61815	4.98309	2.29372

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Opsiyon fiyatı temelde vade sonuna kalan süre, dayanak varlığın spot fiyatı, dayanak varlık fiyatına ait yıllık volatilité, risksiz faiz oranı ve opsiyonun gelecek tarihteki kullanım fiyatı olmak üzere beş adet değişkene bağılıdır. Opsiyonların ve diğér riskli ürünlerin fiyatları yukarıda sayılan değişkenlere bağılı bir stokastik kısmi diferansiyel denkleme uygun şekilde değişim göstermektedir. Tez çalışmamızda bu denklemin kolay anlaşılır ve kısa bir yoldan türetilmesine yer verilmiştir.

Sınırlı fiyat stokastik süreçleri ya da fiyat sapmaları gibi piyasa gerçeklerinin opsiyon fiyatlama modeline dahil edilmesi halinde Monte Carlo İntegrasyon tekniğı çözüm sunan tek yöntem olarak ortaya çıkmaktadır. Monte Carlo İntegrasyon tekniğı kullanıldığında varyansın düşürölerek güvenilir sonuçlar elde edilmesi gerekmektedir. Çalışmada ortalama değér dejenere olmadan varyans anlamlı derecede azaltılmıştır.

Fiyat marjı uygulamasının yer aldığı piyasalarda fiyat stokastik sürecinin sınırlı fiyat stokastik süreci halinde alınması ve sonuçların bu modele göre bulunması gerekmektedir. Ülkemizdeki gibi sınırlı fiyat stokastik sürecine uygun piyasalarda işlem gören opsiyonların fiyatının hesaplanması sağlanmış ve sınırsız fiyat stokastik süreci kullanılması halinde ortaya çıkacak farklar sebepleriyle birlikte açıklanarak opsiyon fiyatlama konusunun ülkemizdeki uygulamasına ışık tutulmuştur.

Temelde riskli ürün fiyatı log-normal proses kullanılarak modellenmektedir. Bu durumda iki kısımdan oluşan bir optimizasyon bölgesi ortaya çıkmaktadır. Tek bir dağılım olası tüm fiyat senaryolarının modellenmesinde yetersiz kalmaktadır. Log-normal prosesin özellikle getiri dağılımı üzerinde uç bölgelerden yeterli örnekleme yapılmasını sağlayamaması fiyatlamada sapma meydana gelmesine neden olmaktadır.

Literatür taraması sonucunda opsiyon fiyatlaması ve varyans azaltma teknikleri konularında mevcut yöntem ve uygulamalar incelenmiştir. Mevcut opsiyon fiyatlaması yöntemlerinin sınırsız fiyat stokastik süreçleri kullanılarak tasarlanmış

olduğu belirlenerek, sınırlı fiyat stokastik sürecine uygun piyasalarda kullanılmak üzere opsiyon fiyatlama modeli geliştirilmesi üzerine çalışmalar odaklanmıştır. Opsiyon fiyatı Monte Carlo İntegrasyon tekniği kullanılarak hesaplanmıştır. Önem örnekleme ve zıt rassal sayılar varyans azaltma teknikleri birlikte kullanılarak geliştirilen yöntemin performansının artırılması sağlanmıştır.

Opsiyon fiyatlama yöntemleri içerisinde Monte Carlo İntegrasyon tekniği esnek yapısı, tüm opsiyon çeşitlerinin fiyatlarının hesaplanmasında kullanılabilmesi, hızlı sonuç vermesi gibi özelliklerinden dolayı tercih edilmiştir. Black-Scholes modeli, Binom modeli ve diğer yöntemler sınırlı çözüm verirken Monte Carlo tekniği uygun varyans azaltma teknikleri ile birlikte kullanıldığında en etkin opsiyon fiyatlama yöntemi olarak ortaya çıkmıştır.

Çalışmada önem örnekleme varyans azaltma tekniğine yer verilerek alternatif olasılık dağılımı kullanımıyla performansın artırılması sağlanmıştır. Önem örnekleme yöntemi temel olarak çeşitli seçim kriterlerine bağlı olarak örnekleme sürecinin değiştirilmesi ilkesine dayanmaktadır. İkinci bir olasılık dağılımı kullanılmasıyla hesaplanan ağırlık fonksiyonu sayesinde istatistiksel dalgalanma azaltılmakta ve daha dar güven aralıkları elde edilmektedir. Kullanım alanı çok geniş olan zıt rassal sayılar varyans azaltma tekniği ile birlikte uygulanması sonucu istenen düzeylerde varyans azalması ve varyasyon katsayısı azalması sağlanmıştır. Böylece hesaplanan sonucun güven düzeyinin yükseltilmesi sağlanmıştır.

Benzetim süresince MSE tahmincisi ile bulunan varyansın hedef dağılımının farklı parametreleri için bir minimuma sahip konveks eğri şeklinde olduğu görülmüştür. Parametre optimizasyonu ile en düşük varyans hesaplanarak en uygun çözüm bulunmuş ve sonuçlarda herbir parametre seti için optimum sonuçlara yer verilmiştir. Bunun için uygun strateji kuyruk olasılıklarını arttıran dağılım parametreleri tercih edilerek çözüm için önemli bölgenin örnekleme için daha ağırlıklı olarak yapılmasının sağlanmasıdır.

Çalışmanın amacı iki tane olmuştur. Sınırlı fiyat stokastik sürecine uygun opsiyon fiyatlamasının sağlanması ve iki varyans azaltma tekniğinin konuya uygulanması olmak üzere belirlenen iki amaca da ulaşılmıştır.

Opsiyon fiyatlaması son yıllarda gerek akademik çevreler gerekse de finans çevreleri tarafından üzerinde daha çok çalışılan bir konu haline gelmiştir. İleri düzeyde

matematiksel ve istatistiksel hesaplama içermesine rağmen sürekli genişleyen kullanım alanı ve çok hızlı artan işlem hacimleri dolayısıyla opsiyon fiyatlama konusuna ilgi artırmıştır. Uluslararası ticaret hacimlerinin yükselmesine bağlı olarak sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçlerinin kıyaslanması sağlanmıştır. Uluslararası piyasalarda geçerli opsiyon fiyatlarının yerel uygulamalarla ne yönde değişebileceği gösterilmiştir. Bunun için düşük ve yüksek oynaklık ortamlarında alınan sonuçlar irdelenmiştir.

Yapılan araştırmalar sonucunda, görece yüksek oynaklığın bulunduğu piyasa koşullarında sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçleri arasında farklı sonuçların bulunduğu gözlemlenmiştir. Uygulanan fiyat marjı miktarına göre artıp azalabilen farkın nereden kaynaklandığı ve hangi opsiyon türünde ne yönde fark oluştuğu detaylı olarak açıklanmıştır.

Buna göre oynaklığın yüksek seviyelerde olduğu piyasa zamanlarında alım opsiyonu ve satım opsiyonu fiyat stokastik sürecinin sınırlı hale getirilmiş olmasına bağlı olarak farklı yönlerde etkilenmektedir. Alım opsiyonu fiyatının, olası varyans azalma etkisi ile birlikte fiyatın yükselmesine sınır getirilmiş olması dolayısıyla iki etkinin düşüş yönündeki etkisi altında azaldığı bulgulanmıştır. Buna karşın satım opsiyonu fiyatının dayanak varlık fiyatına üst sınır getirilmesi ile kullanılmama ihtimalinin azaltılmış olmasına bağlı olarak yükseldiği ancak olası varyans azaltılması etkisi ile bu yükselişin sınırlı kaldığı bulgulanmıştır. Sonuçta satım opsiyonları için sınırlı fiyat stokastik sürecinin getirilmesi yüksek oynaklık ortamında opsiyon fiyatının düşmesine değil yükselmesine neden olduğu bulgulanmıştır.

Finansal dalgalanmaların yaşanmadığı görece düşük oynaklık ortamında sınırlı ve sınırsız fiyat stokastik süreçleri için çok yaklaşık sonuçların bulunduğu gözlemlenmiştir. Bulunan tüm sonuçlar için varyans azalma faktörü ve varyasyon katsayısı azalma faktörleri hesaplanmıştır.

Monte Carlo Benzetim tekniği uygulanabilirlik ve esneklik bakımından en kullanışlı opsiyon fiyatlama yöntemi olmakla birlikte özellikle değişken sayısının arttığı bazı egzotik opsiyonların fiyatlanması için tek yöntem olarak ortaya çıkmaktadır.

Çalışmada opsiyonların geometrisine yer verilerek değişkenlerin opsiyon fiyatını nasıl etkiledikleri görsel olarak ortaya konmuştur.

Çalışma süresi boyunca seçilen araştırma konularına yönelik tüm durumlar ve gereken tüm modeller için C programı hazırlanarak etkin ve hızlı bir şekilde sonucun bulunması sağlanmıştır. Bunun için hazırlanan tüm benzetim programlarında bir milyon tekrar kullanılarak benzetimin etkinliği yüksek tutulmuştur.

Gelecek çalışmaların sınırlı fiyat stokastik süreçlerinin matematiksel ifadesinin ortaya çıkarılması üzerine olması gerekmektedir. Ayrıca Önem örnekleme yönteminde olduğu gibi log-normal proses yerine daha temsilci bir fiyat stokastik sürecinin araştırılması yoluna gidilmelidir. Bunun için birleşik dağılımlar üzerinden yola çıkılabilir ya da rejim değişimi modelleri ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- Aït-Sahalia, Y., ve Kimmel, R.** (2006). Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Financial Economics*, 83 (2007) 413–452.
- Bastani, A., Ahmadi, Z., ve Damircheli, D.** (2013). A radial basis collocation method for pricing American options under regime switching jump diffusion models. *Applied Numerical Mathematics*, 65 (2013) 79–90.
- Benth, E.** (2002). *Option Theory with Stochastic Analysis*. Berlin: Springer Verlag ISBN 3-540-4052-X.
- Black, F., ve Scholes, M.** (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81,637–659.
- Bodie, Z., Kane, A., ve Marcus, A.** (2007). *Essentials of Investments*. New York, 6. baskı: Mc Graw Hill.
- Boyle, P.,** (1986). Option valuation using a three jump process. *International Options Journal*, vol. 3, s. 7–12,
- Boyle, P., Broadie, M., ve Glasserman, P.** (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1267-1321.
- Boyle, P., ve Draviam, T.** (2007). Pricing exotic options under regime switching. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40 (2007), 267-282.
- Boyle, P., Broadie, M., ve Glasserman, P.** (1995). Recent advances in simulation for security pricing. In *Proceedings of the 1995 Winter Simulation Conference*. Winter Simulation Conference.
- Brandimarte, P.** (2006). *Numerical Methods in Finance and Economics*. New Jersey: John Wiley ve Sons, Inc.
- Broadie, M., ve Glasserman, P.** (1996). Estimating security price derivatives using simulation. *Management Science*, vol. 42, s. 269 - 285.
- Broadie, M., ve Glasserman, P.** (1997). Pricing American style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, s. 1323-1352.
- Charnes, J. M.** (2000). Using Simulation for Option Pricing. *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference* . Orlando, FL.: Winter Simulation Conference.
- Chesney, M., ve Scott, L.** (1989). Pricing European Currency Options: A Comparison of the modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model Random Variance Option Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 267-284.
- Cox, J. C., Ross, S. A., ve Rubinstein, M.** (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, Vo. 7, no. 3, Eylül 1979, s. 229-263, Elsevier.
- David, J. M., ve James, B. M.,** (2014). Option Pricing and Distribution Characteristics. *Computational Econ.*, (2015) 45:579–595, Springer, Science Business Media, New York

- Dupuis, P.** (2005). Dynamic Importance Sampling for uniformly Recurrent Markov Chains. *Annals of Applied Probab*, 15, 1-38.
- Gallant, A., Hsieh, D., ve Tauehen, G.** (1997). Estimation of stochastic volatility models with diagnostics. *Journal of Econometrics*, v81: 159-192.
- Gerlach, R., ve Tuyl, F.,** (2006). MCMC methods for comparing stochastic volatility and GARCH models. *International Journal of Forecasting*, vol. 22: s.91-107.
- Geske, R.** (1977). The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 541-552.
- Glasserman, P., Heidelberger, P., ve Perwez, S.** (1999). Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk. *Winter Simulation Conference*, 351-358.
- Haase, G., Tait, D., ve Wiechen, A.** (1993). Monte Carlo simulation of several gamma-emitting source and detector arrangements for determining corrections of self-attenuation and coincidence summation in gamma-spectrometry. *Elsevier*, vol 329 issue 1, p. 483-492.
- Hesterberg, T.** (1995, May). Weighted Average Importance Sampling and Defensive Mixture Distributions. 37(2).
- Heston, S.** (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- Hull, J., ve White, A.** (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, vol no 2, p 281-300.
- Jäckel, P.** (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley and Sons, ISBN: 978-0-471-49741-7.
- Jackwert, C., ve Rubinstein, M.** (1996). Recovering Probability Distributions from Option. *Journal of Finance*, 5 (1996), 1611-1631.
- Junichi, I.,** (2014). Dimension Reduction for Pricing Options Under Multidimensional Lévy Processes, *Asia Pasific Financial Markets*, Springer Japan (2015) 22:1–26
- Kawakatsu, H.** (2007). Specification and estimation of discrete time quadratic stochastic volatility models. *Journal of Empirical Finance*, 14, 424-442.
- Law, A., ve Kelton, W.** (2000). *Simulation Modeling and Analysis*. Singapur: Mc Grow Hill- 3rd edit.
- Levy, H.** (1985). Upper and Lower Bounds of Put and Call Option Value: Stochastic Dominance Approach. *The Journal of Finance*, Vol. 11, no. 4, 1197 - 1217.
- Liu, R., ve Zhao, J.** (2013). A Lattice Method for Option Pricing with Two Underlying Assets in Regime-Switching Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, S0377-0427(13)00081-2.
- Longstaff, F. A.** (1995). Option Pricing and Martingale Restriction. *The review of Financial Studies*, Vol. 8, sf. 1091-1124.
- Mauler, D, J., ve McDonald, J. B.,** (2014). Option Pricing and Distribution Charecteristics. *Computational Economics*, Vol.45, no. 4 s.579-595 Springer New York.
- Mehrdoust, F.,** (2015). A new hybrid Monte Carlo simulation for Asian options pricing. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 85, No. 3, s.507–516 Taylor & Francis.
- Merton, R. C.** (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management*, 4, 141-183.
- Merton, R. C.** (1976). Options Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.

- Neumann, M.** (1998). Option Pricing under the Mixture of Distributions Hypothesis. <http://finance.fbv.kit.edu/download/dp208.pdf>.
- Ökten, G., Salta, E., ve Göncü, A.** (2007). On pricing discrete barrier options using conditional expectation and importance sampling Monte Carlo. *Elsevier Mathematical and Computer Modeling*, 484-494.
- Raggi, D., ve Bordignon, S.** (2006). Comparing stochastic volatility models through Monte Carlo simulations. *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, 1678-1699.
- Rindell, K.** (1995). Pricing of index options when interest rates are stochastic: An empirical test. *Journal of Banking & Finance*, 19, 785 - 802.
- Rubinstein, M.** (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49, 771–818.
- Schepper, A. D., ve Heijnen, B.** (2007). Distribution-free option pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40, 179 - 199.
- Scott, L.** (1987). Option Pricing Whenthe Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419-438
- Scott, R.** (2009). Sample path Large Deviations and optimal importance sampling for stochastic volatility models. *Stochastic Processes and their Applications*, 120, 66-83.
- SERPAM.** (2012). *Türkiye Sermaye Piyasası 2012 Yılı Raporu*. İstanbul: Sermaye Piyasası Araştırma Merkezi.
- Seydel, R.** (2006). *Tools for Computational Finance. Third Edition*. Köln, üçüncü baskı: Springer.
- Stein, J.** (1989). Overreactions in the Options Market. *The Journal of Finance*, 4, 1011-1023.
- Sun, Y., ve Timofeyev, I.** (2014). Kinetic Monte Carlo simulations of one-dimensional and two-dimensional traffic flows: Comparison of two look-ahead rules. *Physical Review E*, vol 89 issue 5, .
- Şamilov, A.** (2007). *Ölçüm teorisi, olasılık ve lebesgue integrali*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- TSPB.** (2015). *Finansal Piyasalar 2014 Yılı Raporu*, . İstanbul: Türkiye Sermaye Piyasası Birliği (TSPB).
- Yaşar, İ. B.** (2003). *İntegral dönüşümleri ve uygulamaları*. Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Xiaoyu, J., Jian, Z.,** (2015). Option pricing for an uncertain stock model with jumps. *Soft Computing* (2015) vol.19: s.3323–3329. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015.
- Yön, S.** (2007). *Importance Sampling for Queuing Simulations* Yüksek Lisans Tezi, IE 2007 Y66, Bogazici University.
- Yön, S., ve Goldsman, D.** (2006). Variance reduction via importance sampling. *Istanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, year 5 vol 10, p 35-41.
- Url-1**<Haugh,M.,(2010),http://www.columbia.edu/~mh2078/stochastic_calculus.pdf>, erişim tarihi 12.08.2014
- Url-2**<Olson,M.(2008),<http://www.math.uchicago.edu/~may/vigre/vigre2008/reupapers/>>, erişim tarihi 22.11.2010
- Url-3**< <http://www.borsaistanbul.com>>, erişim tarihi 17.06.2010

Url-4<<http://www.borsaistanbul.com/urunlervepiyasalar/piyasalar/paypiyasasi/fiyat-araligi>>, erişim tarihi 22.06.2014

Url-5< <http://www.kap.gov.tr>>, erişim tarihi 13.02.2011

EKLER

EK A: Stokastik Tanımlar

EK B: Taylor Seri Açılımı

EK C: C Programları

EK D: Sonuçlar

EK A : Stokastik Tanımlar

Bu bölümde stokastik süreçlere ait bazı tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Öncelikle Ω sonlu ya da sonsuz olabilen çözüm uzayı olarak tanımlanır. Herhangi bir sürecin belli koşullar altındaki sonuç değeri için $\Omega = \mathbb{R}$ olarak seçilebilir. Belirli bir kural altında $A \subseteq \Omega$ olmak üzere çözüm uzayının bir alt kümesine A olayı ve $\omega \in A$ olmak üzere A olayının bir elemanına örnek nokta denir ve zaman $t \in [0, T]$ ile birlikte (ω, t) şeklinde gösterilir. Belirli kural ya da kural dizisi $\mathfrak{F}$ olmak üzere, her bir $s \in [t, T]$ için tüm olayların (sonuçların) çözüm uzayı içinde kalması durumunda $\mathcal{F}_s$ –sigma cebiri olarak tanımlanır. Ω uzayı içinde bir A olayının P olasılık fonksiyonu altında aşağıdaki olasılık kuramı temel aksiyomlarını

i.) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$

ii.) $P(\Omega) = 1.0$ ve

iii.) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \forall A \in \mathcal{F}$

sağlanması halinde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir *olasılık uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım A.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı gerçekteğerli bir X fonksiyonu için $X : (\Omega \otimes T) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t)$ 'ye bir *rassal değişken* denir.

Tanım A.2. Herbiri $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı rassal sayı dizisinden oluşan $X(t)_{t \in [0, T]}$ sürecine *stokastik süreç* denir.

Fiyat dinamiklerinin modellenmesinde bir başka konu martingal özelliğidir (martingale concept). Buna göre gelecek fiyat sadece şu anki fiyata bağlı olup önceki dönemlerin fiyat bilgisi gelecek fiyat hareketlerini değiştirmez. Daha genel ifade ile martingal stokastik prosesleri adil oyun (fair game) olarak tanımlanır. Örneğin on kez atılan bir çift zarın onbirinci kez atılmasında çıkacak sonuç bir martingal prosesi olur. Ancak yarısı açılmış elliiki kartlık bir desteden henüz açılmamış bir kartın seçilmesi olayı bir martingal prosesi olmaz. Matematiksel ifade ile aşağıdaki şekilde tanımlama yapılabilir.

Tanım A.3. Bir $M(t)$ stokastik prosesi $\forall t \in [0, T]$ için F_t – ölçümlenebilir (bir başka ifade ile F_t –sigma cebiri bulunabilir) olmak üzere $E[|M(t)|] < \infty$ ve

$E[M(t)|F_s -] = M(s), \quad \forall 0 \leq s < t < \infty$ üzere sağlanıyorsa $M(t)$ stokastik prosesine bir martingal prosesidir denir.

Bu tanımlamayı açıklamak gerekirse verilen bir s zamanı ve bu zamana kadar gerçekleşmiş olaylar kümesi F_s – koşullu olarak bilinirken $s < t$ için $M(t)$ değerleri bilinemez ancak en iyi tahmincisi $M(s)$ olabilir anlamındadır. Bu yüzden yukardaki şartları sağlayan tüm $M(t)$ prosesi bir martingaldir. s zamanına kadar gerçekleşen olayların F_s –koşullu bilinmesi ise bu zamana kadar bir stokastik sürecin işlemesinden kaynaklanır. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ için fiyatlandırma yapılmaktadır. Martingal proseslerin bir diğer özelliği de ilgili istatistik değişkenin beklenen değerinin 0 (sıfır) olmasıdır. Bu ortalama değere drift parametresi ismi verilir. Örneğin $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ rassal değişkenleri kesikli bir martingal prosesinin elemanları olsun, martingal tanımından dolayı

$$E[X_{n+1}|X_1, X_2, \dots, X_n] = X_n \quad (\text{A.1})$$

yazılabilir. Bir başka şekilde iteratif olarak

$$E[X_{n+1} - X_n|X_1, X_2, \dots, X_n] = 0 \quad (\text{A.2})$$

koşullu beklenen değer ifadesine bakıldığında gözlem noktasından sonraki noktalardaki beklenen ortalama değişimin sıfır olduğu görülür.

EK B : Taylor Seri Açılımı

Bir $G(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunun diferansiyel ifadesi

$$dG = \frac{\delta G}{\delta x} dx + \frac{\delta G}{\delta y} dy \quad (\text{B.4})$$

şeklinde hesaplanır. Burdan hareketle $G(x, y)$ fonksiyonu için Taylor açılımı $\delta x, \delta y \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\delta G = \frac{\delta G}{\delta x} \delta x + \frac{\delta G}{\delta y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} (\delta x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta y^2} (\delta y)^2 + \frac{\delta^2 G}{\delta x \delta y} \delta x \delta y + \dots \quad (\text{B.2})$$

şeklinde yazılabilir.

EK C :

EK C1 : Brown Hareketi için C programı

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "lcgrand.h"
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include <ctype.h>

#define REP 10000

float * q; // pointer

FILE *normalFuncFile; //dosyalar
FILE *output_st;

float normal_random_variete(float nu,float sigma); // normal rassal sayı üretici
int strm; // kök - seed, rassal sayı
int i,j; //sayaç

void main()

{

float Nor_d1, Nor_d2;
float norm1, norm2;

output_st = fopen("outfile_BM.xls", "w");
strm=1;

fprintf(output_st,"\n");

for(j=1;j<=REP;)
{
if(strm>99) strm=1;

for(i=1;i<5;)
{
norm1=normal_random_variete(0,1); norm2=*q;

fprintf(output_st,"\t %f \t %f",norm1,norm2);

strm=strm+1;
```



```

i=i+1;
}
fprintf(output_st,"\n");

j=j+1;

}

fclose(output_st);
}

float normal_random_variete(float nu,float sigma)
{
int x;
float Ubir, Uiki, Vbir, Viki, W, Y, Xbir, Xiki;
float tempp;

for(;;)
{
Ubir=lcgrand(strm);
strm=strm+1;
Uiki=lcgrand(strm);
Vbir=2*Ubir-1;
Viki=2*Uiki-1;
W=Vbir*Vbir+Viki*Viki;
strm=strm-1;

if(W<1)
{
Y= sqrt(-2*log(W)/W);
Xbir=Vbir*Y;
Xiki=Viki*Y;
q=& Xiki;
return (nu + Xbir * sigma);
//return Xbir;
}
}
}

```

EK C2 : Black-Scholes Formülü için C programı

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "lcgrand.h"
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include <ctype.h>

float * q;

FILE *infile,*normalFuncFile;
FILE *output_st;

float normal_func(float z);
float normal_random_variete(float nu,float sigma);
void BS_call();
void BS_put();

int TV,tz;
float T_Vade,t_zaman,r_faiz;
float St, K_Strike;
float Vol, dividend;
float yil,delta_t; //yil =(T_Vade-t_zaman)/360

float Nor_d1, Nor_d2;
float norm1, norm2;

float d1,d2,Ct,Pt;
float prim_c,prim_p;

void main()
{
    infile = fopen("mm1_infile.txt", "r");
    output_st = fopen("outfile_st.txt", "w");

    fscanf(infile, "%f %f %f %f %f %f",
    &T_Vade,&t_zaman,&r_faiz,&St,&K_Strike,&Vol);
    fclose(infile);
    printf("\n\n %.0f \n %.0f \n %f \n %f \n %f\n %f\n", T_Vade, t_zaman, r_faiz,
    St, K_Strike, Vol);

    prim_c=0;
    prim_p=0;
    dividend=0;

    TV=T_Vade;
    tz=t_zaman; //simdiki zaman
    yil=(T_Vade-t_zaman)/360;
    delta_t=(T_Vade-t_zaman)/360; //1/360 int olarak aliyor
    printf("\n \n yil: \t %f \n delta: \t %f \n",yil,delta_t);

    d1=(log(St/K_Strike)+(r_faiz-dividend+Vol*Vol/2)*(yil))/(Vol*sqrt(yil));
    d2=d1-Vol*sqrt(yil);
    BS_call();BS_put();

    printf("\n \n %f \n %f \n %f \n %f",d1, d2, Nor_d1, Nor_d2);
```

```

fprintf(output_st, "\nd1= %f \nd2= %f \n Nd1= %f \n Nd2=%f", d1, d2, Nor_d1,
Nor_d2);

fclose(output_st);

}

//*****

void BS_call()
{
normalFuncFile = fopen("table_Normal_dist.txt", "r");
Nor_d1=normal_func(d1);
fclose(normalFuncFile);
normalFuncFile = fopen("table_Normal_dist.txt", "r");
Nor_d2=normal_func(d2);
fclose(normalFuncFile);

prim_c=St*exp(-1*dividend*yil)*Nor_d1-K_Strike*exp(-1*r_faiz*yil)*Nor_d2;
fprintf(output_st, "\n%f", prim_c);

}

void BS_put()
{
normalFuncFile = fopen("table_Normal_dist.txt", "r");
Nor_d1=normal_func(-d1);
fclose(normalFuncFile);
normalFuncFile = fopen("table_Normal_dist.txt", "r");
Nor_d2=normal_func(-d2);
fclose(normalFuncFile);

prim_p=-1*St*exp(-1*dividend*yil)*Nor_d1+K_Strike*exp(-1*r_faiz*yil)*Nor_d2;
fprintf(output_st, "\n%f", prim_p);

}

float normal_func(float z)
{
int x;
float ga,value,value1;
float tempp;

if (z<0)
tempp=z*(-1.0);
else tempp=z;

for(x=0;x<10000*tempp-1;x++)
{
fscanf(normalFuncFile, "%f", &value1);
//fprintf(outfile, "%f\n", value1[x]);
}
fscanf(normalFuncFile, "%f", &value);
ga=value;
if (z<0)
return (0.5-ga);
else return (ga+0.5);
}

```

EK C3 : Önem Örneklemesi ve Zıt Rassal Sayılar Varyans Azaltma Yöntemleri için C programı

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "lcgrand.h"
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include <ctype.h>

#define REP 1000000

int i,j,stm;
float St_generate[1000],St_gen_zitras[1000]; //buradaki array size dinamik
bir şekilde belirlenmelidir
float term1,term2,term3,term4;

//mc ve bs fiyatlarını aynı programda hesaplasın

float * q;

FILE *normalFuncFile;
FILE *infile;
FILE *output_st; //MC call
FILE *output_pt; //MC put
FILE *output_ist; //ISMC call
FILE *output_ipt; //ISMC put
FILE *sonuc_tot; //excel
FILE *results; //son sonuclar

float normal_func(float z);
float normal_random_variete();

void initialize1(); //ilk set up
void initialize(); //ara set up
float MC_call();
float MC_put();
float IS_call(float z, float c);
float IS_put(float z, float p);
float BS_call();
float BS_put();
float r_bul(float c, float p);

float stats(float a, float b, int c);

float MC_call_price;
float MC_put_price;
float IS_call_price;
float IS_put_price;
//float BS_call_price;
//float BS_put_price;

int TV,tz;
float T_Vade,t_zaman,r_faiz;
float St, K_Strike;
float Vol, dividend, mu, r_org,r_is,r_isput,si_is; //mu IS için
float ortalama,yil,delta_t; //yil =(T_Vade-t_zaman)/360
```

```

float payoff, payoff_ort, count1, count2, count3, count4; //count1 0-1 sayılar için
1:MC call, 2:MC put, 3:IS call
float payoff_a; //american opt search
float put_call_par;
float temp_prim_c, temp_min_var_c, temp_min_std_c, temp_ris; //optimal is
sonuclarını listelemek için
float temp_prim_p, temp_min_var_p, temp_min_std_p, temp_risput;

void main()
{
float norm1, norm2;
int k, temp_c, temp_p;

infile = fopen("opt_infile.txt", "r");
fscanf(infile, "%f %f %f %f %f %f %f", &T_Vade, &t_zaman, &r_faiz, &St,
&K_Strike, &Vol, &dividend);

printf(" \n %f \n %f \n %f \n %f \n %f \n %f \n %f", T_Vade, t_zaman, r_faiz,
St, K_Strike, Vol, dividend);

output_st = fopen("outfile_st.txt", "w");
output_pt = fopen("outfile_pt.txt", "w");
output_ist = fopen("outfile_ist.txt", "w");
output_ipt = fopen("outfile_ipt.txt", "w");
sonuc_tot = fopen("sonuc_tot.xls", "w");
results = fopen("results.txt", "w");

strm=1; //rassal kök indisi

TV=T_Vade;
tz=t_zaman; //simdiki zaman
delta_t=(3.2-2.2)/360;
yil=(T_Vade-t_zaman)/360;
delta_t=(T_Vade-t_zaman)/360; //1/360 int olarak aliyor
put_call_par=K_Strike*exp(-r_faiz*delta_t);

printf("\n \n yil: \t %f \n delta: \t %f \n %f \n", yil, delta_t, put_call_par);
printf("\n \n");

fprintf(sonuc_tot, "\n%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f", T_Vade, t_zaman, r_faiz,
St, K_Strike, Vol, dividend);

initialize1();

//if(tz==0) tz=1; opsiyon çıktıktan sonra herhangi bir gün için de fiyat
hesaplanabilir.

BS_call();
BS_put();
printf("\n \n");

for(j=1; j<=REP; j++)
{
//for (i=tz; i<TV; i++) 2. normal rv kullanımı eklenecek...
norm1=normal_random_variete(); //ortalama degiskeni fazla çıkarılabilir,
sonraki dagilimler için ekledim

```

```

//norm2=*q;
St_generate[TV] = St_generate[tz] * exp((r_faiz-Vol*Vol/2) *delta_t+ Vol *
sqrt(delta_t)*norm1); //delta t yi 1 aldım
//St_generate[i+1] = St_generate[i+1]+ St_generate[tz] * exp((r_faiz-
Vol*Vol/2) *delta_t+ Vol * sqrt(delta_t)* norm2) ; //delta t yi 1 aldım
payoff=St_generate[TV]-K_Strike;
if (payoff>0) //buraya birtakım maliyetleri ekleyebilirm sbt veya %
{MC_call_price =MC_call_price+MC_call();count1++;}
else
{MC_put_price =MC_put_price+MC_put();count2++;}

j=j+1;
}
MC_call_price=MC_call_price/REP;
MC_put_price=MC_put_price/REP;

stats(MC_call_price,term1,1);
stats(MC_put_price,term2,2);
printf("\n \n");
//strm=2;

for(k=0;k<79;k++)
{initialize();
mu=r_bul(k,k);

for(i=1;i<=REP;)
{
//for (i=tz;i<TV;i++) 2. normal rv kullanımı eklenecek...
norm1=normal_random_variete(); //ortalama degiskeni fazla çıkarılabilir,
sonraki dagilimler için ekledim
//norm2=*q;
IS_call_price =IS_call_price+IS_call(norm1, MC_call_price);

i++;
}
IS_call_price=IS_call_price/REP;

stats(IS_call_price,term3,3);

initialize();

for(i=1;i<=REP;)
{
//for (i=tz;i<TV;i++) 2. normal rv kullanımı eklenecek...
norm1=normal_random_variete(); //ortalama degiskeni fazla çıkarılabilir,
sonraki dagilimler için ekledim
//norm2=*q;
IS_put_price =IS_put_price+IS_put(norm1, MC_put_price);

i++;
}
IS_put_price=IS_put_price/REP;

stats(IS_put_price,term4,4);
//St=St+5;

}
fprintf(results,
"\nISMC\t%f\t%f\t%f\t%f",temp_prim_c,temp_min_var_c,temp_min_std_c,temp_ris);
fprintf(results,
"\t\t%f\t%f\t%f\t%f",temp_prim_p,temp_min_var_p,temp_min_std_p,temp_risput);

```

```

printf("\n \n");

fclose(infile);
fclose(output_st);
fclose(output_pt);
fclose(output_ist);
fclose(output_ipt);
fclose(sonuc_tot);
fclose(results);
}

void initialize1()
{
St_generate[tz]=St;St_gen_zitras[tz]=St;
St_generate[TV]=0;St_gen_zitras[TV]=0;
term1=0;
term2=0;term3=0;
term4=0;
payoff=0;
count1=0;count2=0;count3=0;count4=0;
MC_call_price=0; //bu blok initialize icine alma
MC_put_price=0;
IS_call_price=0;
IS_put_price=0;

temp_prim_c=1;temp_min_var_c=10000;temp_min_std_c=10000;temp_ris=0;
temp_prim_p=1;temp_min_var_p=10000;temp_min_std_p=10000;temp_risput=0;

}

void initialize()
{
St_generate[tz]=St;St_gen_zitras[tz]=St;
St_generate[TV]=0;St_gen_zitras[TV]=0;
term1=0;
term2=0;term3=0;
term4=0;
payoff=0;
count1=0;count2=0;count3=0;count4=0;

}

float MC_call()
{
float payoff_temp;
payoff_temp=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(St_generate[TV]-K_Strike);
term1 += pow((payoff_temp),2);
return payoff_temp;

}

float MC_put()
{
float payoff_temp;

payoff_temp=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(K_Strike - St_generate[TV]);
term2 += pow((payoff_temp),2);
return payoff_temp;

}

```

```

float stats(float a, float b, int c)
{
float varyans, s_sapma;
varyans=(b/REP-pow((a),2))*REP/(REP-1);
s_sapma=sqrt(varyans);
if (c==1)
printf("\nMC CALL Prim :");
else if(c==2) printf("\nMC PUT Prim :");
else if(c==3) printf("\nIS CALL Prim :");
else if(c==4) printf("\nIS PUT Prim :");

printf("\t %f",a);fprintf(sonuc_tot, "%f\t%f",r_is,a);
printf("\t Var : \t %f",varyans);fprintf(sonuc_tot, "\t%f",varyans);
printf("\t Std_S : %f",s_sapma);fprintf(sonuc_tot, "\t%f",s_sapma);
//fprintf(sonuc_tot, "\t%f",count1/REP);

if (c==1)
{fprintf(output_st, "\n\t%f\t %f\t %f\t %f",a, varyans, s_sapma,
count1/REP);fprintf(sonuc_tot, "\t%f\t\t",count1/REP);fprintf(results,
"\nMC\t%f\t%f\t%f\t%f\t\t",a,varyans,s_sapma,r_faiz);}
else if(c==2)
{fprintf(output_pt, "\n\t%f \t %f \t %f\t %f",a, varyans, s_sapma,
count2/REP);fprintf(sonuc_tot, "\t%f\n",count2/REP);fprintf(results,
"%f\t%f\t%f\t%f",a,varyans,s_sapma,r_faiz);}
else if(c==3)
{fprintf(output_ist, "\n%f \t%f \t %f \t %f\t %f",r_is,a, varyans,
s_sapma,count3/REP);fprintf(sonuc_tot, "\t%f\t\t%f",count3/REP,r_isput);
if (varyans<temp_min_var_c){
temp_prim_c=a;temp_min_var_c=varyans;temp_min_std_c=s_sapma;temp_ris=r_is;}
}
else if(c==4)
{fprintf(output_ipt, "\n%f \t %f \t %f\t %f",r_isput,a, varyans, s_sapma,
count4/REP);fprintf(sonuc_tot, "\t%f\n",count4/REP);
if (varyans<temp_min_var_p){
temp_prim_p=a;temp_min_var_p=varyans;temp_min_std_p=s_sapma;temp_risput=r_ispu
t;}
}
}

float r_bul(float c, float p)
{
float r;int i;r=0;

r_org=(r_faiz-Vol*Vol/2)*delta_t;
r_is=r_org+0.01*c;
r_isput=r_org-0.01*p;

si_is=Vol*sqrt(delta_t);

return 0;
}
float IS_call(float z, float c)
{
float payoff2,payoff_temp,payoff_a,vy,vy2;
payoff_temp=0;payoff_a=0;

vy=r_is+ si_is*z;
vy2=r_is+ si_is*(-z);
St_generate[TV] = St_generate[tz] * exp(vy); //delta t yi 1 aldim
//St_generate[i+1] = St_generate[i+1]+ St_generate[tz] * exp((r_faiz-
Vol*Vol/2) *delta_t+ Vol * sqrt(delta_t)* norm2) ; //delta t yi 1 aldim

```



```

St_gen_zitras[TV] = St_gen_zitras[tz] * exp(vy2);
payoff_temp=St_generate[TV]-K_Strike;
payoff_a=St_gen_zitras[TV]-K_Strike;

if(payoff_temp>0)
{
payoff_temp=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(St_generate[TV]-K_Strike)*exp((2*(r_org-
r_is)*vy+pow(r_is,2)-pow(r_org,2))/(2*pow(si_is,2)));
if(payoff_a>0)
{
payoff_a=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(St_gen_zitras[TV]-K_Strike)*exp((2*(r_org-
r_is)*vy2+pow(r_is,2)-pow(r_org,2))/(2*pow(si_is,2)));
payoff2=(payoff_temp+payoff_a)/2;
} else payoff2=payoff_temp/2;

term3 += pow((payoff2),2);
count3++;
return payoff2;
}else
if(payoff_a>0)
{
payoff_a=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(St_gen_zitras[TV]-K_Strike)*exp((2*(r_org-
r_is)*vy2+pow(r_is,2)-pow(r_org,2))/(2*pow(si_is,2)));
payoff2=payoff_a/2;
} else return 0;

term3 += pow((payoff2),2);
count3++;
return payoff2;

}

float IS_put(float z, float p)
{
float payoff2,payoff_temp,payoff_a,vy,vy2;
payoff_temp=0;payoff_a=0;

vy=r_isput+ si_is*z;
vy2=r_isput+ si_is*(-z);
St_generate[TV] = St_generate[tz] * exp(vy); //delta t yi 1 aldim
//St_generate[i+1] = St_generate[i+1]+ St_generate[tz] * exp((r_faiz-
Vol*Vol/2) *delta_t+ Vol * sqrt(delta_t)* norm2) ; //delta t yi 1 aldim
St_gen_zitras[TV] = St_gen_zitras[tz] * exp(vy2);
payoff_temp=K_Strike-St_generate[TV];
payoff_a=K_Strike-St_gen_zitras[TV];

if(payoff_temp>0)
{
payoff_temp=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(K_Strike-St_generate[TV])*exp((2*(r_org-
r_isput)*vy+pow(r_isput,2)-pow(r_org,2))/(2*pow(si_is,2)));
if(payoff_a>0)
{
payoff_a=exp(-1*r_faiz*delta_t)*(K_Strike-St_gen_zitras[TV])*exp((2*(r_org-
r_isput)*vy2+pow(r_isput,2)-pow(r_org,2))/(2*pow(si_is,2)));
payoff2=(payoff_temp+payoff_a)/2;
} else payoff2=payoff_temp/2;

term4 += pow((payoff2),2);
count4++;

```


[illegible]

EK D : Sonuçlar

Bu bölümde sonuçlara yer verilmiştir.

Çizelge D.1 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	0.03937	0.03931	0.13631	0.36921	0.00072	0.03859	0.04003	0.03935	0.06714	0.25911	0.00051	0.03884	0.03985
50	2.64768	2.65080	12.27574	3.50368	0.00687	2.64393	2.65767	2.64821	2.67244	1.63476	0.00320	2.64501	2.65142
60	11.27213	11.27517	35.26040	5.93805	0.01164	11.26353	11.28681	11.26408	0.42089	0.64876	0.00127	11.26281	11.26535
70	-	21.23749	49.34691	7.02474	0.01377	21.22372	21.25126	21.22094	2.41237	1.55318	0.00304	21.21789	21.22398

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.2 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	0.03931	0.13631	0.36921	9.39198	0.03935	0.06714	0.25911	6.58564	2.03033	1.42613
50	2.65080	12.27574	3.50368	1.32174	2.64821	2.67244	1.63476	0.61731	4.59345	2.14114
60	11.27517	35.26040	5.93805	0.52665	11.26408	0.42089	0.64876	0.05760	83.77660	9.14396
70	21.23749	49.34691	7.02474	0.33077	21.22094	2.41237	1.55318	0.07319	20.45582	4.51929

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.3 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	18.76416	9.06332	3.01054	0.00590	18.75826	18.77006	-	-	-	-	-	-
40	8.80486	8.80300	15.27890	3.90882	0.00766	8.795336	8.81066	-	-	-	-	-	-
50	1.41318	1.41416	5.39942	2.32367	0.00455	1.409606	1.41871	1.41234	1.69382	1.30147	0.00255	1.409788	1.41489
60	0.03763	0.03827	0.11835	0.34402	0.00067	0.037592	0.03894	0.03761	0.05693	0.23861	0.00047	0.037139	0.03807
70	-	0.00025	0.00060	0.02448	0.00005	0.000199	0.00029	0.00021	0.00025	0.01576	0.00003	0.000183	0.00024

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.4 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	18.76416	9.06332	3.01054	0.16044	-	-	-	-	-	-
40	8.80300	15.27890	3.90882	0.44403	-	-	-	-	-	-
50	1.41416	5.39942	2.32367	1.64314	1.41234	1.69382	1.30147	0.92150	3.18772	1.78312
60	0.03827	0.11835	0.34402	8.99023	0.03761	0.05693	0.23861	6.34478	2.07872	1.41695
70	0.00025	0.00060	0.02448	99.12146	0.00021	0.00025	0.01576	73.65421	2.41532	1.34577

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge D.5 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	-	0.00006	0.00007	0.00824	0.00002	0.00004	0.00007	0.00006	0.00005	0.00671	0.00001	0.00005	0.00008
50	1.36737	1.36783	3.54807	1.88363	0.00369	1.36414	1.37153	1.36599	0.84027	0.91666	0.00180	1.36419	1.36778
60	-	10.41677	12.03822	3.46961	0.00680	10.40996	10.42357	-	-	-	-	-	-
70	-	20.41654	16.39615	4.04922	0.00794	20.40861	20.42448	20.27417	6.63282	3.04008	0.00596	20.26821	20.28013

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.6 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	0.00006	0.00007	0.00824	144.57895	0.00006	0.00005	0.00671	104.78125	1.51111	1.37982
50	1.36783	3.54807	1.88363	1.37709	1.36599	0.84027	0.91666	0.67106	4.22253	2.05211
60	10.41677	12.03822	3.46961	0.33308	-	-	-	-	-	-
70	20.41654	16.39615	4.04922	0.19833	20.27417	6.63282	3.04008	0.14995	2.47197	1.32266

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge D.7 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	19.58281	3.02019	1.73787	0.00341	19.57940	19.58621	-	-	-	-	-	-
40	-	9.58417	5.35341	2.31374	0.00453	9.579635	9.58870	9.58245	0.26567	0.51543	0.00101	9.581437	9.58346
50	0.95244	0.95180	2.21204	1.48729	0.00292	0.948882	0.95471	0.95059	0.65071	0.80666	0.00158	0.949008	0.95217
60	-	0.00044	0.00065	0.02544	0.00005	0.000388	0.00049	0.00041	0.00030	0.00051	0.00000	0.000413	0.00041
70	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.8 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.58281	3.02019	1.73787	0.08874	-	-	-	-	-	-
40	9.58417	5.35341	2.31374	0.24141	9.58245	0.26567	0.51543	0.05379	20.15068	4.48814
50	0.95180	2.21204	1.48729	1.56262	0.95059	0.65071	0.80666	0.84859	3.39946	1.84142
60	0.00044	0.00065	0.02544	58.07534	0.00041	0.00030	0.00051	1.23188	2.19322	47.14351
70	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge D.9 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.82183	0.82378	16.76119	4.09404	0.00802	0.81576	0.83181	0.82237	8.06568	2.84001	0.00557	0.81680	0.82793
40	3.48414	3.49417	86.26440	9.28786	0.01820	3.47597	3.51237	3.48393	37.04748	6.08666	0.01193	3.47200	3.49586
50	8.45853	8.47646	233.56424	15.28281	0.02995	8.44651	8.50642	8.45628	80.87172	8.99287	0.01763	8.43866	8.47391
60	15.35068	15.36916	449.70929	21.20635	0.04156	15.32760	15.41072	15.37062	109.68751	10.47318	0.02053	15.35009	15.39114
70	23.53739	23.55946	714.10126	26.72267	0.05238	23.50709	23.61184	23.52726	124.99007	11.17990	0.02191	23.50535	23.54917

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.10 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.82378	16.76119	4.09404	4.96980	0.82237	8.06568	2.84001	3.45347	2.07809	1.43908
40	3.49417	86.26440	9.28786	2.65810	3.48393	37.04748	6.08666	1.74707	2.32848	1.52146
50	8.47646	233.56424	15.28281	1.80297	8.45628	80.87172	8.99287	1.06345	2.88808	1.69539
60	15.36916	449.70929	21.20635	1.37980	15.37062	109.68751	10.47318	0.68138	4.09991	2.02502
70	23.55946	714.10126	26.72267	1.13426	23.52726	124.99007	11.17990	0.47519	5.71326	2.38698

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.11 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	19.58732	19.58044	107.31171	10.35914	0.02030	19.56014	19.60074	19.59115	2.48632	1.57681	0.00309	19.58806	19.59424
40	12.24963	12.24833	106.10252	10.30061	0.02019	12.22814	12.26852	12.27012	2.29350	1.51443	0.00297	12.26715	12.27309
50	7.22403	7.22782	78.20984	8.84363	0.01733	7.21049	7.24516	7.21612	13.38283	3.65826	0.00717	7.20895	7.22329
60	4.11617	4.11807	49.00660	7.00047	0.01372	4.10435	4.13179	4.11387	15.98286	3.99786	0.00784	4.10603	4.12171
70	2.30289	2.30619	28.16577	5.30714	0.01040	2.29579	2.31659	2.30248	11.37394	3.37253	0.00661	2.29587	2.30909

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.12 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.58044	107.31171	10.35914	0.52906	19.59115	2.48632	1.57681	0.08049	43.16084	6.57329
40	12.24833	106.10252	10.30061	0.84098	12.27012	2.29350	1.51443	0.12342	46.26237	6.81374
50	7.22782	78.20984	8.84363	1.22355	7.21612	13.38283	3.65826	0.50696	5.84404	2.41353
60	4.11807	49.00660	7.00047	1.69994	4.11387	15.98286	3.99786	0.97180	3.06620	1.74927
70	2.30619	28.16577	5.30714	2.30126	2.30248	11.37394	3.37253	1.46474	2.47634	1.57111

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.13 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	0.04645	0.04603	0.37634	0.61346	0.00120	0.04483	0.04723	0.04629	0.18970	0.43555	0.00085	0.04543	0.04714
40	0.97374	0.97593	11.02998	3.32114	0.00651	0.96942	0.98244	0.97339	5.04014	2.24503	0.00440	0.96899	0.97779
50	4.78498	4.79598	62.06479	7.87812	0.01544	4.78054	4.81142	4.78481	19.52800	4.41905	0.00866	4.77615	4.79347
60	11.85728	11.86619	151.53221	12.30984	0.02413	11.84206	11.89032	11.86179	19.40488	4.40510	0.00863	11.85316	11.87043
70	20.81856	20.82849	248.79652	15.77329	0.03092	20.79758	20.85941	20.82372	14.56965	3.81702	0.00748	20.81624	20.83120

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.14 : Alım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	0.04603	0.37634	0.61346	13.32806	0.04629	0.18970	0.43555	9.40977	1.98382	1.41641
40	0.97593	11.02998	3.32114	3.40305	0.97339	5.04014	2.24503	2.30641	2.18843	1.47548
50	4.79598	62.06479	7.87812	1.64265	4.78481	19.52800	4.41905	0.92356	3.17825	1.77861
60	11.86619	151.53221	12.30984	1.03739	11.86179	19.40488	4.40510	0.37137	7.80898	2.79342
70	20.82849	248.79652	15.77329	0.75729	20.82372	14.56965	3.81702	0.18330	17.07635	4.13141

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.15 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklık ($\sigma = 0.8$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	19.63152	19.62744	47.18721	6.86930	0.01346	19.61397	19.64090	19.57760	3.80778	1.95135	0.00382	19.57377	19.58142
40	10.55880	10.55541	56.15311	7.49354	0.01469	10.54072	10.57010	10.56520	0.56407	0.75105	0.00147	10.56373	10.56668
50	4.37004	4.37446	33.15244	5.75782	0.01129	4.36317	4.38574	4.37372	6.98010	2.64199	0.00518	4.36854	4.37890
60	1.44235	1.44391	11.69681	3.42006	0.00670	1.43720	1.45061	1.44123	4.78149	2.18666	0.00429	1.43695	1.44552
70	0.40362	0.40561	3.07857	1.75459	0.00344	0.40217	0.40905	0.40347	1.44122	1.20051	0.00235	0.40111	0.40582

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.16 : Satım opsiyonu fiyatı için yüksek oynaklıkta ($\sigma = 0.8$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Zıt Rassal Sayılar				Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK	VAF ³	VKAF ⁴
30	19.62744	47.18721	6.86930	0.34998	19.57760	3.80778	1.95135	0.09967	12.39231	3.51133
40	10.55541	56.15311	7.49354	0.70992	10.56520	0.56407	0.75105	0.07109	99.54955	9.98671
50	4.37446	33.15244	5.75782	1.31624	4.37372	6.98010	2.64199	0.60406	4.74957	2.17898
60	1.44391	11.69681	3.42006	2.36862	1.44123	4.78149	2.18666	1.51721	2.44627	1.56116
70	0.40561	3.07857	1.75459	4.32576	0.40347	1.44122	1.20051	2.97549	2.13609	1.45380

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.17 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	0.03937	0.03931	0.13631	0.36921	0.00072	0.03859	0.04003	0.03935	0.06714	0.25911	0.00051	0.03884	0.03985
50	2.64768	2.65080	12.27574	3.50368	0.00687	2.64393	2.65767	2.64821	2.67244	1.63476	0.00320	2.64501	2.65142
60	11.27213	11.27517	35.26040	5.93805	0.01164	11.26353	11.28681	11.26408	0.42089	0.64876	0.00127	11.26281	11.26535
70	-	21.23749	49.34691	7.02474	0.01377	21.22372	21.25126	21.22094	2.41237	1.55318	0.00304	21.21789	21.22398

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.18 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-
40	0.03931	0.13631	0.36921	9.39198	0.03935	0.00021	0.01460	r=0.23	0.37099	639.97183	25.31613
50	2.65080	12.27574	3.50368	1.32174	2.64675	0.03640	0.19077	r=0.06	0.07208	337.29202	18.33749
60	11.27517	35.26040	5.93805	0.52665	11.26433	0.42717	0.65358	r=0.02	0.05802	82.54380	9.07662
70	21.23749	49.34691	7.02474	0.33077	21.17486	3.72454	1.92991	r=0.06	0.09114	13.24912	3.62920

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.19 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 3$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	18.76416	9.06332	3.01054	0.00590	18.75826	18.77006	-	-	-	-	-	-
40	8.80486	8.80300	15.27890	3.90882	0.00766	8.795336	8.81066	-	-	-	-	-	-
50	1.41318	1.41416	5.39942	2.32367	0.00455	1.409606	1.41871	1.41234	1.69382	1.30147	0.00255	1.409788	1.41489
60	0.03763	0.03827	0.11835	0.34402	0.00067	0.037592	0.03894	0.03761	0.05693	0.23861	0.00047	0.037139	0.03807
70	-	0.00025	0.00060	0.02448	0.00005	0.000199	0.00029	0.00021	0.00025	0.01576	0.00003	0.000183	0.00024

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.20 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 3$ ay) ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴
30	18.76416	9.06332	3.01054	0.16044	-	-	-	-	-	-	-
40	8.80300	15.27890	3.90882	0.44403	8.81047	0.44711	0.66866	r=0.01	0.07589	34.17287	5.85072
50	1.41416	5.39942	2.32367	1.64314	1.41351	0.00777	0.08816	r=-0.04	0.06237	694.63798	26.34437
60	0.03827	0.11835	0.34402	8.99023	0.03766	0.00022	0.01472	r=-0.19	0.39069	545.39171	23.01107
70	0.00025	0.00060	0.02448	99.12146	0.00022	0.00000	0.00072	r=-0.17	3.33953	599.00000	29.68122

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktör

Çizelge D.21 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-
40	-	0.00006	0.00007	0.00824	0.00002	0.00004	0.00007	0.00006	0.00005	0.00671	0.00001	0.00005	0.00008
50	1.36737	1.36783	3.54807	1.88363	0.00369	1.36414	1.37153	1.36599	0.84027	0.91666	0.00180	1.36419	1.36778
60	-	10.41677	12.03822	3.46961	0.00680	10.40996	10.42357	-	-	-	-	-	-
70	-	20.41654	16.39615	4.04922	0.00794	20.40861	20.42448	20.27417	6.63282	3.04008	0.00596	20.26821	20.28013

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.22 : Alım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) ÖÖ-ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴
30	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-
40	0.00006	0.00007	0.00824	144.57895	0.00006	0.00000	0.00087	r=0.066	14.19672	68.00000	10.18397
50	1.36783	3.54807	1.88363	1.37709	1.36596	0.02235	0.14950	r=0.037	0.10945	158.75047	12.58239
60	10.41677	12.03822	3.46961	0.33308	10.42685	0.01897	0.13774	r=0.037	-	-	-
70	20.41654	16.39615	4.04922	0.19833	20.37824	0.03242	0.18005	r=0.017	0.00884	505.78875	22.44759

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

Çizelge D.23 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklık ($\sigma = 0.2$) ve uzun vade ($T = 1$ ay) sonuçları. %95 güven düzeyi için Monte Carlo Önem Örnekleme ve Zıt Rassal Sayılar yöntemlerinin tahmin aralıkları verilmiştir.

S	Black-Scholes	Monte Carlo						Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					
	Prim	Prim	MSE	S.Sapma ¹	YGA ²	Alt Sınır	Üst Sınır	Prim	MSE	S.Sapma	YGA	Alt Sınır	Üst Sınır
30	-	19.58281	3.02019	1.73787	0.00341	19.57940	19.58621	-	-	-	-	-	-
40	-	9.58417	5.35341	2.31374	0.00453	9.579635	9.58870	9.58245	0.26567	0.51543	0.00101	9.581437	9.58346
50	0.95244	0.95180	2.21204	1.48729	0.00292	0.948882	0.95471	0.95059	0.65071	0.80666	0.00158	0.949008	0.95217
60	-	0.00044	0.00065	0.02544	0.00005	0.000388	0.00049	0.00041	0.00030	0.00051	0.00000	0.000413	0.00041
70	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.00	0.00	0.00	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²YGA : Yarı güven aralığı

Çizelge D.24 : Satım opsiyonu fiyatı için düşük oynaklıkta ($\sigma = 0.2$) ve uzun vadede ($T = 1$ ay) ÖÖ – ZT sonuçları varyasyon katsayısı (VK) ile birlikte verilmiştir. Varyans azalma faktörü (VAF) ve varyasyon katsayısı azalma faktörü (VKAF) hesaplanmıştır.

S	Monte Carlo				Önem Örnekleme - Zıt Rassal Sayılar					Değişim	
	Prim	MSE	S.Sapma ¹	VK ²	Prim	MSE	S.Sapma	VK		VAF ³	VKAF ⁴
30	19.58281	3.02019	1.73787	0.08874	-	-	-	-	-	-	-
40	9.58417	5.35341	2.31374	0.24141	9.59927	0.69945	0.83633	r=-0.033	0.08712	7.65372	2.77090
50	0.95180	2.21204	1.48729	1.56262	0.95139	0.00419	0.06473	r=-0.023	0.06804	527.93413	22.96664
60	0.00044	0.00065	0.02544	58.07534	0.00040	0.00000	0.00079	r=-0.113	1.98744	647.00000	29.22122
70	0.00	0.00	0.00	-	-	-	-	-	-	-	-

¹S.Sapma : Standart Sapma

²VK : Varyasyon Katsayısı

³VAF : Varyans Azalma Faktörü

⁴VKAF : Varyasyon Katsayısı Azalma Faktörü

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Semih Yön
Doğum Yeri ve Tarihi : Çankırı – 06.01.1981
E-Posta : semih.yon@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2004, Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü
- **Yükseklisans** : 2007, Boğaziçi Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Endüstri Mühendisliği Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2004 yılında Citibank AŞ'de başlamıştır.
- 2008 Ziraat Bankası Hazine ve Bireysel Krediler bölümlerinde çalışmış olup halen Ziraat Bankasında çalışmaya devam etmektedir..

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Yön S., Bozdağ E., 2014:** Test of Bounded Log-normal process for options pricing. *ACRN Journal of Finance and Risk Perspectives*, Vol. 3 Issue 4, December 2014 p.120–126 - Oxford Oriel College, Oxford, İngiltere.
- **Yön S., Bozdağ E., 2014:** Test of Bounded Log-normal process for options pricing. Sunum, *International Congress – Oxford Oriel College*, September 22-24, 2014 Oxford, İngiltere.

