

14.37

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV VE LOGARİTMİK SOBOLEV

EŞİTSİZLİKLERİ

T. C.

Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Faruk GONGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 6 Haziran 1990

Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Temmuz 1990

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Cevdet KOÇAK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER

Prof. Dr. Atilla AŞKAR

TEMMUZ 1990

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında değerli yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof.Dr. CEVDET KOÇAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu tezi titizlikle daktilo eden Sayın Sema BAL ve Fatma YILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. SOBOLEV UZAYLARI	4
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar	4
2.2. Sobolev Daldırma Teoremleri	7
BÖLÜM 3. SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ VE EN İYİ SABİTLERİN BELİRLENMESİ	14
3.1. Klasik Sobolev Eşitsizlikleri ve en iyi Sabitler	14
3.2. Genelleştirilmiş Sobolev Eşitsizlikleri	23
BÖLÜM 4. LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ	30
4.1. Giriş	30
4.2. Gross Logaritmik Sobolev ve Nelson Eşitsizliklerinin Denkleği	34
BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ	39
5.1. Giriş	39
5.2. Gross Logaritmik Sobolev Eşitsizliğinin Adams ve Clarke Yöntemi ile Genelleştirilmesi	40
BÖLÜM 6. LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİNDE EN İYİ SABİTLER KONJEKTÖRÜ	47
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

ÖZET

Bu çalışmada, klasik Sobolev ve Gross logaritmik Sobolev eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerde ortaya çıkan en iyi sabitler incelenmiştir. Gross logaritmik Sobolev eşitsizliği bir teoremle genelleştirilmiş ve en genel uzaylar için en iyi sabitler konjektürü olarak bilinen bir konjektür için bazı yaklaşımlar önerilmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde konu ile ilgili bazı önemli çalışmalar bir literatür taraması olarak kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Sobolev uzayları tanımlanmış ve Sobolev eşitsizlikleri ile yakından ilgili olan Sobolev daldırma teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde klasik Sobolev eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerde ortaya çıkan en iyi sabitler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Gross logaritmik Sobolev eşitsizlikleri ele alınmış, Nelson hiper_kontraktif eşitsizliğine denkliği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde Adams ve Clarke tarafından geliştirilen ispat tekniği uygulanarak Gross logaritmik Sobolev eşitsizliği genelleştirilmiş ve bu eşitsizliğe ilişkin en iyi sabit elde edilmiştir.

Son bölümde ise en genel logaritmik Sobolev eşitsizliklerinde en iyi sabitler konjektürünün ispatı için literatürdeki çalışmalar gözönünde bulundurularak bazı öneriler verilmiştir.

SOBOLEV AND LOGARITHMIC SOBOLEV INEQUALITIES

SUMMARY

This thesis is concerned with standard Sobolev inequalities and a special class of inequalities called logarithmic Sobolev inequalities which play a very important role in quantum field theory. These inequalities could be candidates for inclusion in some future successor to the classical work of Littlewood-Hardy-Polya [21]. Another problem on which we focus our attention will be about best constants arising in these inequalities. In the case of logarithmic Sobolev inequality in $\mathbb{R}^n$ we are led to examine an open problem of proving uniqueness of solutions of some semilinear partial differential equations in $\mathbb{R}^n$.

We call any inequality expressing the boundedness of a map from L^p to L^q a Sobolev type inequality or

more precisely,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1)$$

where $q = np/(n-p)$, $1 < p < n$ and C is a constant independent of u .

This inequality, also known as a Sobolev embedding theorem, was first proved by Sobolev in 1939 by using a representation formula and applying a theorem of Hardy-Littlewood concerning fractional integrals.

The publication of Sobolev inequality has attracted a great deal of attention among mathematicians working in Partial differential equations and in the calculus of variations. After this there followed a remarkable number of papers including applications and development of these inequalities.

A drawback of the Sobolev method is that it does not give the exact value of the best possible constant C or any estimates for C . To this end several authors have made attempts to get best constants. For instance, Rosen [30] obtained the best constant for the special case $n=3$, $p=2$, $q=6$ which leads to a sharp form of inequality (1).

The other special case when p is equal to unity is known as Federer-Fleming-Rishe1 form of the Sobolev inequality which is sharp and can be written as follows:

$$\left\{ \int_{R^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right\}^{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{\{\Gamma(1 + \frac{n}{2})\}^{1/n}}{\sqrt{\pi n}} \int_{R^n} |\nabla u| dx \quad (2)$$

The constant appearing in (2) is the best possible.

For the general case $1 < p < n$, $q = \frac{np}{n-p}$ best constant in Sobolev inequality (1) has been given at approximately same time independently by Talenti [32] and Aubin [4].

In the standard Sobolev inequality the equation

$q = \frac{np}{n-p}$ implies $q \rightarrow p$ as the dimension n goes to infinity.

So there is a loss of information in the usual form of Sobolev inequality as the dimension gets bigger.

The problem of finding infinite dimensional versions of classical Sobolev inequalities is first discussed by Gross [19]. These types of inequalities are nowadays called Gross's logarithmic Sobolev inequalities. In his paper Gross also demonstrated the equivalence of logarithmic Sobolev inequality and Nelson's hypercontractive inequality [26] arising in constructive quantum field theory.

Gross's logarithmic inequality asserts that the inequality

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \ln |f| \, d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, d\mu(x) + \|f\|_2^2 \ln \|f\|_2 \quad (3)$$

holds for all continuously differentiable functions f . Herein μ denotes Gauss measure on $\mathbb{R}^n$ and $\|f\|_2$ denotes $L^2(\mu)$ norm of f .

The dimension dependent analogue of (3), called the weak form of the logarithmic Sobolev inequality can also be obtained through the use of Nirenberg's derivation of Sobolev's inequality and Hölder's inequality. Although this form is not suitable for passage to infinite dimensions, it designates a connection between the classical Sobolev inequality and the Gaussian Sobolev inequality.

The inequality (3) has been derived by using rather lengthy probabilistic methods. Three years after Gross's paper, Adams and Clarke [2] gave a very simple proof of Gross's logarithmic Sobolev inequality using only elementary calculus.

The aim of this study will mainly be centered on the possibility of whether Gross's logarithmic Sobolev inequalities might be further extended on the basis of Adams and Clarke method of proof. In this context it will be shown that this, to some extent, is possible.

Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities have proved to be very useful for the study of boundary value problems of mathematical physics, particularly in qualitative studies of very complicated problems that are generally intractable for analytic solutions. For example when one wishes to establish operator estimates this approach usually leads to Sobolev type inequalities.

This thesis is organized into five chapters. In the first chapter, a literature survey on the subject has been presented. In the second chapter we summarize a number of preliminary facts, some definitions, important theorems (Embedding theorems) and related results needed in the sequel.

The third chapter deals with standard Sobolev inequalities and best constants arising in these inequalities. In a typical Sobolev inequality best constant is defined by an investigation of the following infimum:

$$S = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_q} = \frac{\left(\int |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}}{\left(\int |u|^q dx \right)^{1/q}}, \quad q = \frac{np}{n-p} \quad (4)$$

This problem has been studied by several authors. The main features are the following:

- a) S does not depend on Ω ,
- b) S is never achieved if Ω is bounded
- c) if $\Omega = \mathbb{R}^n$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$ is replaced by functions in $L^q(\Omega)$ such that $\nabla u \in L^p(\Omega)$, then S is achieved.

A standard method for the investigation of the above problem is one due to Schwarz, known as Schwarz symmetrization argument. In this approach the problem is first reduced to the class of functions which are positive, spherically symmetric and monotonic decreasing. Then it is shown that the infimum is actually attained by some minimizing function in the class and that there is a unique solution, that is, unique minimizer to the Euler equation for the variational problem (4). This then gives the desired minimum.

Aubin's and Talenti's papers follow the above pattern for investigating the variational problem (4) which leads to best constant for the Sobolev inequality.

In the fourth chapter, logarithmic Sobolev inequalities have been introduced. Also the equivalence of Gross's logarithmic Sobolev and Nelson's hypercontractive inequalities is demonstrated and the weak form of Gross's logarithmic Sobolev inequality in which the

coefficients depend on the space dimension is obtained from Nirenberg's form of Sobolev inequality and Hölder's inequality. The Logarithmic Sobolev inequality of Gross is, in its Lebesgue measure form, the $p=2$ case of the general inequality.

$$p^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \ln |\phi| dx - ||\phi||_{n,p}^p \ln ||\phi||_{n,p} + k_{n,p} ||\phi||_{n,p}^p \quad (5)$$

where $||\cdot||_{n,p}$ denotes the norm on the Banach space $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ defined by

$$||u||_{n,p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx$$

with dx Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$.

For $n=1$ and $p=2$, Adams and Clarke gave a very elegant proof of this inequality using elementary calculus and one dimensional calculus of variations. By converting to the Lebesgue form and using induction on n , the proof for general n then follows.

In the fifth chapter we present a proof of this inequality for $n=1$ and general $p>1$ by adapting the method of Adams and Clarke.

Unfortunately, the induction method fails to generalize when $p \neq 2$.

We have the following theorem:

Let $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a continuously differentiable function. Then for $p>1$

$$p^{-1} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}} |u|^p \ln |u| dx - ||u||_p^p \ln ||u||_p + k_p ||u||_p^p \quad (6)$$

where

$$k_p = \frac{1}{p} \left[1 + \ln \left((p-1)^{1/p} \frac{1}{p} \Gamma \left(\frac{p-1}{p} \right) \right) \right]$$

is the best possible constant. The equality holds in (6) if u has the form

$$u(x) = \lambda \exp \left\{ -\frac{1}{q} |x+\mu|^q \right\}$$

where p and q are pairs of conjugate indices, i.e. $p^{-1} + q^{-1} = 1$ and λ and μ are positive constants and $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

The last chapter concentrates on the investigation of the tricky uniqueness problem of the positive, radial solutions of the equation:

$$\Delta_p u + u^{p-1} (p \ln u + 1) = 0 \quad (7)$$

$\Delta_p u$ being the p -Laplacian of u defined by

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

and u is a symmetric rearrangement.

This is needed in order to complete the proof of conjectured best constants in logarithmic Sobolev inequalities. At the moment this remains an open problem. Even with $p=2$ in which case $\Delta u + u(2 \ln u + 1) = 0$, Δ being the usual Laplace-operator, it is still very hard to prove the uniqueness of solutions which would show the existence of the unique minimizer. The $p=2$ case has recently been worked out by several researchers [6,7,8,17,18,23,26, 28]. Relying on a paper by Kwong [22] who proves the uniqueness of positive, radial solutions of $\Delta u + u^p - u = 0$ ($p>1$) it seems quite possible that the method of Kwong's proof can be applied to ensure the uniqueness for our particular problem replacing polynomial function $u^p - u$ ($p>1$) by the logarithmic function $u(2 \ln u + 1)$. In recent years a remarkable number of important

papers [12] have been published concerning the existence and nonexistence of solutions of p-Laplace equations. But the general uniqueness problem in $\Delta_p u + u^{p-1}(p \ln u + 1) = 0$ is still unsolved. This would lead us to the best constants in (5), consequently we would get the sharp form of the logarithmic Sobolev inequality in $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ with dx Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Analizde ve matematik fiziğin sınır değer problemlerinde karşılaşılan eşitsizlikler kabaca şu başlıklar altında sınıflandırılabilir: Sobolev ve spektral eşitsizlikler, majorizasyon eşitsizlikleri, konveksite eşitsizlikleri, yeniden düzenleme eşitsizlikleri, öz fonksiyon eşitsizlikleri, saçılma eşitsizlikleri ve korrelasyon eşitsizlikleri. Bu çalışmada esas olarak, sınır değer problemlerinde ve matematik fizikte önemli rol oynayan klasik Sobolev ve logaritmik Sobolev eşitsizlikleri, ilgili eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerde ortaya çıkan en iyi sabitler [21] incelenecektir. Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Eşitsizlikler" (1934) isimli klasik kitapta çeşitli integral eşitsizlikler ve bunların ispatı için pek çok yöntem verilmiştir. Bunlar arasında, varyasyonlar hesabı standard bir yöntem olarak sayılabilir. 1938'de Sobolev [31] kendi adıyla tanınan bazı eşitsizlikleri fonksiyonel analiz yöntemleri kullanarak ispatlamıştır. Sonra böyle eşitsizlikler kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar hesabında çalışan matematikçiler arasında oldukça popüler olmaya başlamıştır. Bu arada klasik Sobolev eşitsizlikleri ve izoperimetrik eşitsizlikler arasındaki ilişkiler de çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Sobolev'in yukarıda sözü edilen eşitsizliklerinde ortaya çıkan sabitler en iyi sabitler değildir. Sobolev eşitsizliği için en iyi sabit ilk defa özel durumda Rösen [30] tarafından verilmiştir. Genel durumda ise en iyi sabitlerin ispatı 1976'da iki ayrı yazar tarafından, Aubin [3][4] ve Talenti [32], bağımsız olarak yapılmıştır. Her iki yazarın da ispatı esas olarak geometrik düşüncelere ve varyasyonlar hesabının kullanılmasına dayanmaktadır. Aubin, kompakt bir Riemann uzayı, R^n Euklid uzayı ve S_n küresi için Sobolev eşitsizliklerini ve bu eşitsizliklere ait en iyi sabitleri ve izoperimetrik eşitsizliklerle Sobolev eşitsizlikleri arasındaki ilişkileri incelemiştir. Talenti'nin çalışmasında ise en iyi sabitlerin çıkarılmasında Mayer ekstramaller alanları, Hilbert değişmez integrali ve Weirstrass E:

fonksiyonu gibi kavramlar kullanılmıştır. Literatürde Hardy-Littlewood- Sobolev eşitsizlikleri olarak bilinen HLS eşitsizlikleri ve çift ağırlıklı HLS eşitsizliklerinde en iyi sabitler Lieb [23] tarafından hesaplanmıştır. Sobolev ve ilgili eşitsizlikler matematik fizikte, özellikle kurantum alan teorisinde oldukça önemli bir uygulama alanı bulmuştur. Genellikle analitik çözümleri bulunamayan çok karmaşık problemlerin kalitatif olarak incelenmesi, yani operatörlerin normları üzerine bazı tahminlerin yapılması kaçınılmazdır. Bu analiz ise bizi genellikle Sobolev tipi eşitsizliklere götürür. Bundan dolayı literatürde böyle problemlerle ilgili çok sayıda yayın bulunmaktadır ve bu alanda çalışan araştırmacıların sayısı da gittikçe artmaktadır. Son zamanlarda ise genelleştirilmiş Sobolev eşitsizlikleri üzerine yapılmış oldukça ilginç, dikkate değer çalışmalar göze çarpmaktadır. Bunlar arasında Lions, Pacella, Tricarico [24] ve Egnell, Pacella, Tricarico [13] tarafından çeşitli fonksiyon sınıfları için geliştirilen bazı Sobolev eşitsizlikleri (Kalan terimli) sayılabilir. Sınır değer problemlerinin incelenmesinde büyük önemi olan ve Sobolev iz eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlikler Escobar [14] tarafından ele alınmış ve bunlar için en iyi sabitler verilmiştir. İspat tamamen geometrik düşüncelere dayanmaktadır. İki normun oranının infimumu olarak tanımlanan Sobolev oranının konform olarak değişmez kalması gerçeği kullanılmıştır. En iyi Sobolev eşitsizlikleri doğal olarak Yamabe probleminin çözümünde de ortaya çıkmaktadır. Sınırı, sıfır skaler eğrilikli bir Riemann manifoldu üzerinde konformal metriğin varlığını göstermek için bu tür eşitsizliklerin kullanılması yine aynı yazar tarafından yapılmıştır.

Diğer önemli bir sınıf eşitsizlikler de logaritmik Sobolev eşitsizlikleridir. Bu tip eşitsizlikler ilk önce 1976'da yayınlanan bir makalede Gross [19] tarafından ispatlanmıştır. Yine aynı makalede logaritmik Sobolev eşitsizliğinin konstrüktif kuantum mekaniğinde ortaya çıkan Nelson hiperkontraktif eşitsizliğine denk olduğu gösterilmiştir. Son derece uzun probabilistik yöntemler kullanan Gross'un ve Nelson'un ispatları çok karmaşık olduğundan, Adams ve Clarke [23], bu tür eşitsizliklerin ispatına alternatif olarak yalnızca elemanter analizin kullanıldığı kısa ve basit bir ispat geliştirdiler.

Daha sonra Davies ve Simon [10] ultrakontraktivite kavramını

tanımlayarak Gross teoremini ve Gross ve Nelson eşitsizliklerinin denkliğini yeniden ispatladılar.

Bu çalışmada esas olarak logaritmik Sobolev eşitsizliğinin daha genel uzaylara genişletilmesi sorunu üzerinde durulacaktır. Adams ve Clarke tarafından önerilen ispat yönteminin Gross logaritmik Sobolev eşitsizliğinin daha genel durumları için de uygulanabileceği gösterilecektir. R^n ($n>1$) Euklid uzayı için ise bu yaklaşım başarısız kalmaktadır. Bu durumda ise Schwarz simetrikleştirme yöntemini kullanacağız. Bundan başka ilgileneceğimiz diğer bir problem de logaritmik Sobolev eşitsizliklerinde en iyi sabitlerin hesaplanmasıdır. Bu Gauss ölçüsü olmak üzere $L^2(R^n, d\mu)$ uzayı için en iyi sabit Gross [19] ve Adams ve Clarke [2] tarafından hesaplanmıştır. Bu sabitlerin L^p gibi daha genel uzaylarda hesaplanması açık bir problem olarak durmaktadır. Bu çalışmada logaritmik Sobolev eşitsizliklerinde en iyi sabitler konjektürü olarak bilinen bir konjektürün ispatı için bazı yaklaşımlar verilmiştir.

BÖLÜM 2

SOBOLEV UZAYLARI

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Sobolev eşitsizlikleri Sobolev daldırma teoremleri ile yakından ilişkilidir. Bu yüzden Sobolev eşitsizliklerine geçmeden önce Sobolev uzayları ve Sobolev tasvirlerinin en önemli özellikleri kısaca özetlenecektir. Önce multi-indis notasyonu tanımlayalım. Eğer $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, negatif-olmayan α_j tamsayılarının n-li bir sıralanışı ise, α 'ya multi-indis denir ve aşağıdaki gösterimler tanımlanır.

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{ve}$$

$$\text{eğer } \beta \leq \alpha \text{ ise} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

Benzer şekilde

$$\text{eğer } i \leq j \leq n \text{ için} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{ise o zaman}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

mertebesi $|\alpha|$ olan bir diferansiyel operatörü göstermektedir ve ayrıca

$$D^{(0,0,0,\dots,0)} u = u$$

dir. Bu tanımlarla, n değişkenli fonksiyonlar cebri ve analizi oldukça basitleşir ve daha kompakt bir biçim alır. Örneğin;

$$D^\alpha (uv) (x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} v(x)$$

Leibnitz formülü, x komşuluğunda $|\alpha|$ defa sürekli olarak türetilen u ve v fonksiyonları için geçerlidir.

Şimdi Ω , R^n de açık sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda mertebesi (m,p) , $1 \leq p \leq m$ olan Sobolev uzayı, $\leq m$ mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayı içinde olan fonksiyonlar uzayı olarak tanımlanır. Yani

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ for } 0 \leq |\alpha| \leq m \} \quad (2.1.1)$$

burada $D^\alpha u$, $\leq m$ mertebesinde zayıf (veya distribüsyonel) kısmi türevi göstermektedir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı için aşağıdaki norm tanımlanır.

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{1/p} \quad \text{eğer}$$

$$1 < p < \infty \quad (2.1.2)$$

ve

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty} \quad (p=\infty)$$

Örneğin ;

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega) \}$$

ve

$$||u||_{1,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_j |D_j u|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{1/p}$$

Şimdi Ω üzerinde $||u||_{m,p}$ normuna göre m-defa sürekli olarak türetilen fonksiyonların oluşturduğu $C^m(\Omega)$ uzayının tamamlanışı

yani

$$H^{m,p}(\Omega) \equiv \{ u \in C^m(\Omega) : ||u||_{m,p} < \infty \} \quad \text{nin tamamlanışı ise}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayının $H^{m,p}(\Omega)$ ile çakıştığı gösterilmiştir. Bu elemanter sonuç ilk önce 1964 de Meyers ve Serrin tarafından yayınlandı. Diğer ilgili bir uzay da $||u||_{m,p}$ normuna göre Ω de kompakt dayanaklı m-defa sürekli türetilen $C_0^m(\Omega)$ fonksiyonlar uzayının tamamlanışı olarak tanımlanan $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayıdır. Eğer $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise o zaman

$$D^\alpha u = 0 \quad ; \quad \partial\Omega \text{ üzerinde } |\alpha| \leq m-1.$$

$p=2$ durumunun özel bir önemi vardır. Bu durumda Sobolev uzayları

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \quad (2.1.3)$$

iç çarpımı ile donatılmış Hilbert uzayları olur. Bu özel durumda

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \quad \text{ve} \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) \quad (2.1.4)$$

notasyonunu kullanacağız.

Negatif ve kesirsel Sobolev uzayları m 'in negatif ve negatif olmayan değerleri için tanımlanabilir. Negatif uzaylara karşı $W_0^{m,p}(\Omega)$ nin dual uzayları karşı gelir ve $m > 0$ için

$$W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))' ; \quad H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \quad (2.1.5)$$

olarak gösterilir.

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve

$$||u||_{-m,q} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|<u,v>|}{||v||_{m,p}}$$

$< \dots >$ $(W_0^{m,p}(\Omega))' \times W_0^{m,p}(\Omega)$ üzerinde dualite çiftlemesini göstermektedir.

Teorem (2.1.1):

$W_0^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach, H^m uzayı da bir Hilbert uzayıdır [1].

2.2. Sobolev Daldırma Teoremleri

Sobolev uzaylarının en önemli karakteristiklerinden birisi Sobolev daldırma teoremidir. Matematik fiziğin çeşitli problemlerinde ve analizin diğer alanlarında, fonksiyonların diferansiyel özellikleri arasındaki karşılıklı ilişkiler önemli bir rol oynar. Örneğin bazı durumlarda kısmi türevleri içeren fonksiyonların integral tahminlerini bilirsek fonksiyonların sınırlılığı ve hatta sürekliliği hakkında sonuçlar çıkarabiliriz. Bizim ilgilendiğimiz uzaylar, bunlara ait olan fonksiyonların çeşitli diferansiyel özellikleri ile karakterize edildiğinden, böyle bir uzay başka bir uzay içinde ise ilk uzayı karakterize eden özellikler diğer uzayın karakteristik özelliklerini de verecektir. Eğer bu durumda ilk uzayın bir elemanı olarak bakılan bir fonksiyona ikinci uzayın bir elemanı olarak yine

aynı fonksiyonu karşı getirirsek o zaman bir daldırma operatörü elde ederiz. Bir uzaydan başka bir uzaya sınırlı bir tasvirin varlığı doldurma teoremleri ile ifade edilir.

$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow X$; (X, Ω) üzerinde tanımlanmış Banach fonksiyonlar uzayıdır)

biçiminde bir daldırma ile

$$||u||_X \leq K ||u||_{m,p,\Omega}$$

eşitsizliği bütün $u \in W^{m,p}(\Omega)$ fonksiyonları için sağlanacak biçimde bir K sabitinin varlığını anlayacağız. K sabiti n boyutuna ve çeşitli parametrelere bağlı olabilir. Sobolev daldırma teoremleri Sobolev eşitsizlikleri ile yakından ilişkilidir. Klasik Sobolev eşitsizliklerine geçmeden önce aşağıdaki Sobolev daldırma teoremini verelim.

Teorem (2.2.1) (Sobolev Daldırma Teoremi)

$1 < p < n$ olduğunu varsayalım ve $q = np/(n-p)$ koyalım. Bu durumda $W^{1,p}(\Omega)$ uzayı sürekli olarak $L^q(\Omega)$ uzayına daldırılabilir ve bütün $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fonksiyonları için

$$||u||_q \leq C_{n,p} ||\nabla u||_p \quad (2.2.1)$$

olacak şekilde yalnızca p ve n'ye bağlı bir C sabiti vardır. Yukarıda $\Omega = \mathbb{R}^n$ ve

$$||\nabla u||_p = ||(\sum_{j=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2)^{1/2}||_p$$

Dirichlet normudur. (2.2.1) Sobolev daldırması Standard Sobolev eşitsizliği olarak bilinir. Teoremin ispatı Gagliardo-Nirenberg çarpım eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Lemma (2.2.2) (Gagliardo-Nirenberg Eşitsizliği)

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1^{1/n} \quad n \geq 1 \quad (2.2.2)$$

dir.

İspat : Bu eşitsizliği ilk önce $u \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonları için göstere-
lim. Şimdi $u \in C_0^1(\Omega)$ ise herhangi bir $X = (X_1, \dots, X_n) \in \Omega$ için

$$u(x) = \int_{-\infty}^{X_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, X_2, \dots, X_n) d\xi_1 = - \int_{X_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, X_2, \dots, X_n) d\xi_1$$

ve

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, X_2, \dots, X_n) \right| d\xi_1$$

dir. Diğer koordinatlar üzerindeki integrasyonları içeren benzer eşit-
sizlikler kullanılırsa

$$|2 u(x)|^{n/(n-1)} \leq \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, X_2, \dots, X_n) \right| d\xi_1 \right) \dots \right.$$

$$\left. \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} u(X_1, \dots, X_{n-1}, \xi_n) \right| d\xi_n \right) \right]^{1/(n-1)}$$

bulunur. Bunun X_1 e göre integrasyonu ve Hölder eşitsizliğinin
kullanılması bize

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2 u(X_1, X_2, \dots, X_n)|^{n/(n-1)} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} u(X_1, X_2, \dots, X_n) \right| dx_1 \right)^{1/(n-1)}$$

$$\cdot \prod_{j=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| dx_j \right)^{1/(n-1)}$$

verir. Şimdi $X_2, \dots, X_n$ değişkenlerine göre ardışık olarak integre edilir ve her defasında Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_{\Omega} |2 u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right| dx \right)^{1/n-1}$$

bulunur. Yani

$$||u||_{n/n-1} \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n ||\frac{\partial u}{\partial x_j}||_1^{1/n} \quad (2.2.3)$$

$u \in C_0^1$ için ispatlanmış olur. $[u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fonksiyonları için ispat " $W_0^{1,p}(\Omega)$ normuna göre basit kapanışla" elde edilir. Bu kapanışla şu kastedilir. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olsun ve buna $W_0^{1,p}(\Omega)$ normunda $u^{(m)}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $m=1,2,\dots$ fonksiyonları ile yaklaşılsın ve yukarıdaki eşitsizliği $u^{(m)}$ için alıp $m \rightarrow \infty$ için $W_0^{1,p}$ normunda limite geçerek ispat tamamlanmış olur.]

Teorem (2.2.1) in ispatı :

Eğer aritmetik-geometrik eşitsizliği ve Schwarz eşitsizliğini

$$\sum_{r=1}^n a_r \leq \sqrt{n} \left(\sum_{r=1}^n a_r^2 \right)^{1/2}$$

biçiminde kullanırsak

$$||u||_{n/n-1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} ||\nabla u||_1 \quad (2.2.4)$$

elde ederiz. Bu ise $p=1$ için Sobolev eşitsizliğidir. Şimdi $p>1$ için gösterelim.

$p>1$ olmak üzere $u = v^{\gamma}$ koyalım. Bu durumda

$$\left\{ \int_{\Omega} |v|^{\gamma n/n-1} dx \right\}^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{\Omega} \gamma |v|^{\gamma-1} |\nabla v| dx \quad (2.2.5)$$

$$\leq \frac{\gamma}{2\sqrt{n}} \left(\int_{\Omega} |v|^{(\gamma-1)r} dx \right)^{1/r} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}$$

ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$. Eğer γ 'yı $\gamma n / n-1 = (\gamma-1) r = q$ olacak şekilde seçersek $\gamma = p(n-1) / (n-p)$ olur. Yukarıdaki eşitsizlik ise

$$||v||_q^{\gamma} \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{n}} ||v||_q^{\gamma-1} ||\nabla v||_p$$

veya

$$||v||_q \leq C ||\nabla v||_p$$

olur. Burada $C = \frac{p(n-1)}{2\sqrt{n} (n-p)}$ sabiti (En iyi sabit değil)

$W^{1,p} \rightarrow L^q$ Sobolev daldırmasının normudur. Şimdi

$C_0^1(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ içinde yoğun olduğundan $u \in C_0^1(\Omega)$ olması koşulunu kaldırabiliriz yani $u \in W^{1,p}(\Omega)$ için ispat tamamlanmış olur.

Teorem (2.2.3):

$p > n$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise $u \in C_0(\bar{\Omega})$ ve

$$||u||_{\infty} \leq C ||\nabla u||_p^{\beta} \quad \beta = 1 - \frac{n}{p} \quad (2.2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir. β , Ω nin yarıçapı ve $C=C(n,p)$ dir.

Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemma'dan kolayca elde edilir.

Lemma (2.2.4) :

Eğer $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ ise

$$|u(x)| \leq C (h_{n/n-1} * |\nabla u|)(x) \quad (2.2.7)$$

dir. Burada $C = C(n)$ ve $h_s(x) = |x|^{-\frac{n}{s}}$

İspat : Yukarıdaki eşitsizlik $W_0^{1,1}(\Omega)$ deki norm limitleri altında korunduğundan yalnızca $u \in C_0^1(\Omega)$ durumunu düşünmemiz yeterlidir. Ayrıca $\Omega = \mathbb{R}^n$ olduğunu varsayıyoruz.

o halde herhangi bir $|\omega| = 1$ için

$$u(x) = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} u(x+r\omega) dr$$

ve

$$|u(x)| \leq S_n^{-1} \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty |\nabla u(x+r\omega)| dr d\omega$$

yazılabilir. Burada S_n , $\mathbb{R}^n$ de birim kürenin yüzey alanıdır. O halde

$$|u(x)| \leq S_n^{-1} \int \frac{|\nabla u(x+r\omega)|}{r^{n-1}} r^{n-1} dr d\omega$$

$$= S_n^{-1} (h_{n/n-1} * |\nabla u|)(x)$$

olarak ispat tamamlanmış olur.

Teoremin (2.2.3) ün ispatı :

(2.12) eşitsizliğine Young eşitsizliğini uygularsak

$$||u||_{\infty} \leq S_n^{-1} ||h_{n/n-1}||_q ||\nabla u||_p, \text{ Burada } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ dir.}$$

Diğer yandan $p > n$ için

$$\begin{aligned} ||h_{n/n-1}||_q^q &= \int_{\Omega} r^{-(n-1)q+n-1} dr d\omega \leq S_n \frac{\beta^{n-(n-1)q}}{n-(n-1)q} \\ &= S_n \frac{p-1}{p-n} \beta^{(1-\frac{n}{p})q} \end{aligned}$$

yazılır. O halde

$$||u||_{\infty} \leq C ||\nabla u||_p \beta^{1-\frac{n}{p}}, \quad C = C(n,p) = \frac{p-1}{p-n} \quad (2.2.8)$$

olur. Eğer $\{u^{(n)}(x)\} \in C_0^1(\Omega)$ ve $\{u^{(n)}(x)\} \rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise o

zaman (2.2.6) $||u^{(n)} - u||_{\infty} \rightarrow 0$ olduğunu ifade eder öyleki

$u \in C_0(\bar{\Omega})$ olur.

BÖLÜM 3

SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ VE EN İYİ SABİTLERİN BELİRLENMESİ

3.1. Klasik Sobolev Eşitsizlikleri ve En iyi Sabitler

Sobolev eşitsizliklerinin Sobolev daldırma teoremleri ile yakından ilişkili olduklarını 2. bölümde gördük. Bu bölümde ise Sobolev eşitsizliklerinin daha geliştirilmiş biçimlerini elde etmeye çalışacağız. Diğer bir deyişle bu eşitsizliklerde ortaya çıkan en küçük sabitlerle ilgileneceğiz. Böyle sabitlerle ifade edilen Sobolev eşitsizlikleri özellikle sınır değer problemlerinin kalitatif incelenmesinde çok önemli rol oynarlar. Şimdi aşağıdaki çarpım eşitsizliğini [20] göz önüne alalım.

$$||\nabla u||_p^\theta ||u||_q^{1-\theta} \geq C ||u||_r, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (3.1.1)$$

Burada Ω , R^n de sınırlı olması gerekmeyen keyfi bir bölge, $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\frac{1}{r} = \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q}, \quad \text{ve } r \in \left[q, \frac{np}{n-p} \right], \quad 1 \leq p < n \text{ dir. } (3.1.1)$$

eşitsizliği üç-norm eşitsizliği olarak da bilinir. Bu eşitsiz-

liğin ispatı [11] de verilmiştir. (3.1.1) eşitsizliğinde ortaya çıkan en iyi sabit

$$C_{n,p,q,\theta} = \inf_{u \in W_0^{1,p}} \left\{ \frac{||\nabla u||_p^\theta ||u||_q^{1-\theta}}{||u||_r} \right\} \quad (3.1.2)$$

olarak tanımlanır. p, q, r, θ, n parametreleri arasındaki bağıntılar (3.1.2) deki normların oranının u 'ya göre homojen ve $x \rightarrow \alpha x$

$\alpha > 0$ benzerlik dönüşümü altında değişmez kalmasını garanti eder. Buna infimumun sıfır olduğu triviyal durumlar dahil değildir.

$\Theta = 1$ için aşağıdaki iki-normlu Sobolev sabitleri

$$C_{n,p} = \inf \left(\frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_r} \right) ; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad 1 \leq p \leq n \quad (3.1.3)$$

elde edilir.

Bu ise (2.2.1) eşitsizliğindeki en iyi sabittir. Bu sabit Aubin [3,4] (1976) ve Talenti [33] (1976) tarafından hesaplanmıştır.

$\Theta = 0$ trivial durumda $C=1$ olarak elde edilir. En iyi sabitlerin açık olarak bilindiği diğer durumlar Θ 'nun aşağıdaki özel değeri için geçerlidir.

$$\xi = \left(\frac{pq-n(q-p)}{q-p} \right), \quad \tau = \left(\frac{pq-n(q-p)}{qp} \right),$$

$$\Theta = \frac{n(q-p)}{(pq-n(q-p))(q-1)}, \quad p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$$

Bu durumlarda da en iyi sabitler

$$C_{n,p,q,\Theta} = \left\{ \frac{\pi^{n/2} \tau^{-\xi(p-1)/p} \Gamma(\xi(p-1)/p) \Gamma(1+n(p-1)/p)}{\left(\frac{q-p}{p}\right)^{n(p-1)/p} \left(\frac{q}{n}\right)^{n/p} \Gamma\left(\frac{q(p-1)}{q-p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \right\}^{\Theta/n}$$

olarak ifade edilebilir [20].

Teorem (3.1.1) (Talenti, 1976)

u, R^n Euklid uzayının tamamı üzerinde tanımlanmış, yeterince düzgün ve sonsuza yaklaşıırken hızla azalan herhangi bir reel (veya kompleks) bir fonksiyon olsun. Ayrıca $1 < p < n$ ise

$$||u||_q \leq C ||\nabla u||_p, \text{ burada } q = \frac{np}{n-p} \quad (3.1.4)$$

ve

$$C = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2}) \Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{p}) \Gamma(1+n-\frac{n}{p})} \right\}^{1/n} \quad (3.1.5)$$

en iyi sabit olarak belirlenir.

$$u(x) = [a+b|x|^{p/p-1}]^{1-\frac{n}{p}}, |x|=r, a \text{ ve } b \text{ pozitif sabitler}$$

olduğu takdirde eşitsizlik eşitliğe dönüşür. (3.1.6)

(3.1.4) eşitsizliği $L^p(R^n)$ den $L^q(R^n)$ ye giden bir u tasvirinin sınırlı kalmasını ifade etmektedir. C sabiti ise

$$C = \sup \frac{||u||_q}{||\nabla u||_p} \quad (3.1.7)$$

olarak tanımlanır. Bu sabit

$$C^{-1} = \inf \frac{||\nabla u||_p}{||u||_q} \quad (3.1.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada supremum veya infimum, sonsuza giderken azalan (yani kompakt dayanaklı) düzgün (yani Lipschitz anlamında sürekli) bütün u fonksiyonlar sınıfı üzerinden alınmaktadır. $C_0^1(R^n)$ yani kompakt dayanaklı sürekli türetilebilen fonksiyonlar uzayı için (3.1.4.) eşitsizliğinin ispatı

$$u(x) = - \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}} \int_{R^n} |x-y|^{1-n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k - y_k}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial x_k}(y) dy$$

gösterilimi kullanılarak ve bunun sağ yanına integrallerle ilgili Hardy-Littlewood teoreminin n-boyutlu biçimi uygulanarak Sobolev tarafından verilmiştir. Fakat ne yazık ki Sobolev metodu ne en iyi C sabitinin tam değerini ne de C için açık olarak herhangi bir tahmin vermemektedir. En iyi sabitin açık olarak hesaplanması ilk önce Rosen [30] tarafından n=3, p=2, q=6 özel durumu için verilmiştir. En genel durumda ise Talenti ve Aubin tarafından yapılmıştır.

Teorem (3.1.1) in ispatı iki adımdan oluşmaktadır. Önce Schwarz simetrikleştirme (veya yeniden düzenleme) argümanı kullanılarak problem pozitif, küresel simetrik ve radyal olarak monoton azalan fonksiyonlar sınıfına indirgenir, sonra da infimumun bu sınıfa ait minimum yapan bir fonksiyon ile erişildiği ve (3.1.8) varyasyonel probleme ait Euler denkleminin tek bir çözümü olduğu gösterilir. Şimdi kısaca yeniden düzenleme eşitsizliklerine ait bazı tanım ve teoremlerden söz edelim. Yeniden-düzenleme eşitsizliğinde bir u fonksiyonuna bağlı bir ifadenin sayısal değerleri yeniden düzenlenmiş (Schwarz simetrikleştirme) bir u^* fonksiyonuna bağlı aynı ifadenin değerleri ile karşılaştırılır. Hardy-Littlewood-Polya'nın klasik çalışmasının [21] onuncu bölümü bu tip eşitsizliklere ayrılmıştır. Böylece eşitsizlikler bazı Sobolev eşitsizliklerini ispatlamak için kullanılmasından başka matematik fiziğin çeşitli varyasyonel problemlerinin incelenmesinde özellikle de çözümlerin simetri özelliklerinin elde edilmesinde etkin bir biçimde kullanılmıştır. Böyle tipik problemler Bandle [5] ın çalışmasında bulunabilir.

Tanım : (Schwarz Simetrikleştirme) u , R^n de ölçülebilir bir fonksiyon ve μ de Lebesgue ölçüsünü göstere sin. $\{x \in R^n : |u(x)| > \alpha\}$ kümesinin sonlu Lebesgue ölçümü olacak şekilde sonlu bir α sabiti varsa, bu durumda u ile ölçümü aynı olan yani

$$\mu(\{x : |u(x)| > \alpha\}) = \mu(\{x : u^*(x) > \alpha\}) \quad , \quad \alpha > 0$$

ve u^* , yalnızca $r=|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ radyal koordinata

bağlı olan bir fonksiyon olması anlamında simetrik azalan ve r 'ye göre monoton azalan bir tek negatif olmayan u^* fonksiyonu vardır. Bu u^* fonksiyonuna u 'nun simetrik azalan yeniden düzenlenişi veya Schwarz simetrikleştirme denir. Eğer u fonksiyonu sürekli ise u^* da sürekli'dir. Ayrıca, herhangi bir sürekli $F(t)$ fonksiyonu için simetrikleştirme $F(u)$ nun integralini invaryant bırakır ve $F(|\nabla u|)$ nun integralini de azaltır.

Teoremin ispatında kullanılan bazı sonuçlar:

$L^p(\Omega, du)$ uzayındaki bütün fonksiyonlar için aşağıdaki temel yeniden düzenleme bağıntıları geçerlidir.

$$\|u\|_p = \|u^*\|_p \quad \text{ve} \quad \|f^* - g^*\|_p \leq \|f - g\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.1.9)$$

Yani yeniden düzenlenmiş bir tasvir herhangi bir L^p uzayında norm koruyan bir büzülme tasviridir. Diğer çok önemli bir sonuçta

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.1.10)$$

eşitsizliğidir. (3.1.9) ve (3.1.10) eşitsizliklerinin ispatı Polya ve Szegö [29] ve Talenti [32] tarafından verilmiştir. (3.1.10) eşitsizliği n boyutlu klasik izoperimetri eşitsizliği ile yakından ilişkilidir. Yine bunun ayrıntılı bir analizi Bandle [5]'ın kitabında incelenmiştir. $p=2$ durumunda yani Hilbert uzayı için bu eşitsizliğin çok kısa bir ispatı ısı yarı-gurupları kullanılarak Lieb [23] tarafından yapılmıştır.

Şimdi en iyi Sobolev sabitinin ispatına geçebiliriz. (3.1.7) fonksiyoneli (veya (3.1.8) fonksiyoneli) u yerine u^* konursa bu fonksiyonel artar (veya azalır). Şimdi eğer u yalnızca $r=|x|$ 'e bağlı ise

$$\omega_n^{-1/n} \left(\int_0^\infty |v|^q r^{n-1} dr \right)^{1/q} \leq K \left(\int_0^\infty |v'|^p r^{n-1} dr \right)^{1/p} \quad (3.1.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $\omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$ R^n de birim kürenin yüzey alanıdır.

$p > 1$ için

$$\max I(v) = \max \int_0^\infty |v|^q r^{n-1} dr \quad (3.1.12)$$

$$J(v) = \int_0^\infty |v'|^p r^{n-1} dr = \text{verilmiş pozitif bir sabit.}$$

Varyasyonel problemi düşünelim. Buna ait Euler denklemi

$$(|v'|^{p-1} r^{n-1})' = k v^{q-1} r^{n-1}, \quad k = \text{Sbt. olur.}$$

$$p = 2 \text{ için } v'' - \frac{n-1}{r} v' = k v^\alpha, \quad \alpha = \frac{n+2}{n-2} \quad (3.1.13)$$

Emden-Fowler denklemlerinin oldukça basit bir biçimini elde ederiz.

Bunun çözümleri kuvadrattürlerle ifade edilebilir. Genel olarak yani $1 < p < n$, $q = np/n-p$ iken,

$$y = (\lambda + |x|^{p'})^{1 - \frac{n}{p}}, \text{ burada } p' = \frac{p}{p-1}, \lambda \text{ reel bir sayı}$$

fonksiyonlarının ekstremaller olduğunu görmek kolaydır. Buna karşı gelen I integralinin değerinin mutlak maksimum olduğunu Bliss [9] in bir teoremini kullanarak çıkarabiliriz. En iyi sabit ise

$$K(n,p) = \omega_n^{-\frac{1}{n}} (I(y))^{1/q} (J(y))^{-1/p}$$

olarak bulunur. Şimdi bu sabiti $\lambda=1$ için hesaplayalım. Aşağıdaki integralleri hemen yazabiliriz.

$$(i) J = \int_0^\infty |y'|^p r^{n-1} dr = \frac{p-1}{p} \left(\frac{n-p}{p} \right)^p I_1 = \frac{1}{p'} \left(\frac{n}{p} - 1 \right)^p I_1,$$

burada $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{t^{n/p'}}{1+t} dt$ dir.

(ii) $I = \int_0^{\infty} y^q r^{n-1} dr = \frac{1}{p'} I_2$, burada $I_2 = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{n}{p'}-1}}{1+t} dt$ dir.

ve kısmi integrasyonla $I_1 = \frac{n}{n-1} \frac{p-1}{p} (I_1 + I_2)$ veya

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n-p}{n(p-1)}$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$I_2 = \int_0^1 u^{\frac{n}{p'}-1} (1-u)^{\frac{n}{p}-1} du = B\left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p'}\right)}{\Gamma(n)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} K(n,p) &= \omega_n \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I_2 - \frac{1}{n} I_1 \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{I_2 \omega_n}{p'}\right)^{-1/n} \frac{p-1}{n-p} \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{1/p} \\ &= \frac{p-1}{n-p} \left\{\frac{n-p}{n(p-1)}\right\}^{1/p} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Gamma(n)}{\pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p'}+1\right)}\right\}^{1/n} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left\{\frac{\Gamma(n) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right)}\right\}^{1/n} \quad 1 < p < n \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Bu ise aranan en iyi sabittir. Şimdi bu sabitin yegane olduğunu göstermek için $h(x) \geq 0$ R üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$J = \int_0^{\infty} h^q(x) dx \quad \text{verilmiş ve sonlu olduğuna göre}$$

$$I = \int_0^{\infty} g^p(x) x^{\alpha-p} dx, \quad g(x) = \int_0^x h(t) dt \quad \text{integrali maksimum değerini}$$

$$h(x) = (\lambda x^{\alpha+1})^{-(\alpha+1)/\alpha}, \quad \alpha = \frac{p}{q} - 1, \quad p > q > 1$$

fonksiyonu için alır şeklinde ifade edilen Bliss teoremini kullanarak yukarıdaki problemde $x = r^{-(n-q)/(q-1)}$, $\alpha = \frac{p}{n}$ dönüşümü yapmak yeterlidir.

$p=1$ limit durumu için en iyi sabit

$$K(n,1) = \lim_{p \rightarrow 1} K(n,p) = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_n} \right)^{1/n} = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})^{1/n}}{n \sqrt{\pi}}, \quad \omega_n = R^n \text{ de}$$

birim kürenin yüzey alanı

olur. Bu sabit ilk önce Federer-Fleming-Rishel (F-F-R) [15] tarafından verildi. F-F-R, sonsuzda sıfır olan geniş bir fonksiyon sınıfına ait olan fonksiyonlar için

$$\left\{ \int_{R^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right\}^{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_n} \right)^{1/n} \int_{R^n} |\nabla u| dx, \quad \omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

$$(3.1.15)$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

eşitsizliğini ispatladılar. $K(n,1)$ sabitinin izoperimetrik sabit olduğunu görmek dikkate değer bir sonuçtur. Tipik bir izoperimetri

eşitsizliği

$$\left\{ H_n(E) \right\}^{1 - \frac{1}{n}} \leq Q(n) H_{n-1}(\partial E) \quad (3.1.16)$$

olarak tanımlanır.

Bu izoperimetri eşitsizliğinde ortaya çıkan Q sabitine izoperimetri sabiti denir. Burada E, R^n nin herhangi bir sınırlı alt kümesi, ∂E , E nin sınırı ve H_n , n -boyutlu Hausdorff ölçümünü göstermektedir. Sobolev eşitsizliğinin F-F-R şekli ve izoperimetrik eşitsizlik arasında sıkı bir ilişki vardır. Gerçekten de F-F-R yukarıdaki eşitsizliği izoperimetrik eşitsizlikten çıkarmışlardır. Diğer yandan izoperimetrik eşitsizlik F-F-R eşitsizliğinden çıkarılabilir. Bunu göstermek amacıyla reel değişkenli fonksiyonlar için toplam varyasyon tanımını verelim. Bir değişkenli yerel olarak integre edilebilir reel değişkenli bir u fonksiyonunun toplam varyasyonu

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |u(x_k) - u(x_{k-1})| : -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < +\infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bunun

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi'(x) dx \right| \leq C \max |\phi(x)|, \quad \phi \in C_0^1 [(-\infty, \infty)]$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde en küçük C sabiti olduğu bilinmektedir. Eğer u mutlak sürekli bir fonksiyon ise u nun toplam varyasyonu $\int_{-\infty}^{\infty} |u'| dx$ 'e eşittir. R^n üzerinde tanımlı çok değişkenli yerel olarak integre edilebilir bir u fonksiyonunun toplam varyasyonu ise

$$\sup_{R^n} \left\{ \int u(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dx : v_k \in C_0^1(R^n), \max_{k=1}^n \sum_{k=1}^n v_k^2 \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda u 'nun toplam varyasyonu $\int_{R^n} |\nabla u| dx$

olur. Burada u sürekli olarak türetilebilir bir fonksiyondur. R^n de integre edilebilir ve toplam varyasyonu sonlu olan bütün fonksiyonlar kümesi $BV(R^n)$ ile gösterilir. O halde (3.1.15) F-F-R eşitsizliği $u \in BV(R^n)$ için

$$\left(\int_{R^n} |u|^{n/n-1} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{\{ \Gamma(1+\frac{n}{2}) \}^{1/n}}{n\sqrt{\pi}} \cdot (u'nun toplam varyasyonu) \quad (3.1.17)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlik u sürekli türetilebilir bir fonksiyon ise açıktır. Eğer u sürekli türetilebilir bir fonksiyon değilse o zaman daha başka tekniklerle toplam varyasyonun artmadığı gerçeği kullanılarak yukarıdaki eşitsizlik yazılabilir. Bu eşitsizliğin özel bir halde izoperimetrik eşitsizliği içerdiği açıktır. Gerçekten E , R^n nin sınırlı, düzgün bir alt kümesi olsun (3.1.17) eşitsizliğinde u yerine E nin karakteristik fonksiyonu 1_E konursa bu eşitsizliğin sol yanı E nin n -boyutlu ölçümünün $(1-\frac{1}{n})$ kuvveti, sağ yanı ise

$$1_E \text{ nin toplam varyasyonu} = \sup_{\partial E} \left\{ \int \sum_{k=1}^n v_k(x) X_k(x) H_{n-1}(dx) : \right.$$

$$\left. \max \sum_{k=1}^n v_k^2 \leq 1 \right\}$$

= E nin sınırının $(n-1)$ - boyutlu ölçümü olur. Yani sonuç olarak

$$\{ H_n(E) \}^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{\{ \Gamma(1+\frac{n}{2}) \}^{1/n}}{n\sqrt{\pi}} H_{n-1}(\partial E)$$

klasik izoperimetri eşitsizliği bulunmuş olur.

3.2. Genelleştirilmiş Sobolev Eşitsizlikleri

Bu kısımda bazı önemli genelleştirilmiş eşitsizlikler ispatsız olarak ele alınacaktır. Bu eşitsizliklerden biri de İnterpolasyon eşitsizliğidir.

Teorem (3.2.1):

$m, j \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq j \leq m$ ve $q, r \in [1, \infty]$ olsun ve p

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{j}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$$

bağıntısı ile tanımlansın. $u \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için

$$||\nabla^j u||_p \leq C ||\nabla^m u||_r^{j/m} ||u||_q^{1 - \frac{j}{m}} \quad (3.2.1)$$

Burada

$$||\nabla^m u||_p = \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_p^p \right)^{1/p}$$

olacak şekilde yalnızca j, m, n, q, r sabitlerine bağlı olan C sabiti vardır. Bu teoremin ayrıntılı bir ispatı Edmunds - Evans [11] de verilmiştir. (3.2.1) eşitsizliğindeki

$$C(j, m, n, q, r) = \inf_{u \in C_0^m(\mathbb{R}^n)} \frac{||\nabla^j u||_p}{||\nabla^m u||_r^{j/m} ||u||_q^{1-j/m}} \quad (3.2.2)$$

ile tanımlanan en iyi Sobolev sabitinin hesaplanmasına literatürde rastlanmamıştır. Açık bir problem olarak durmaktadır. Sobolev eşitsizliklerinin genelleştirilmiş şekli Hardy - Littlewood-Sobolev eşitsizliğidir. Klasik Hardy - Littlewood - Sobolev eşitsizliği,

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^t(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları ve $1 < p, t < \infty$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \frac{\lambda}{n} = 2 \text{ ve } 0 < \lambda < n \text{ için}$$

$$| \iint f(x) |x-y|^{-\lambda} g(y) dx dy | \leq N_{p, \lambda, n} ||f||_p ||g||_t \quad (3.2.3)$$

olduğunu ifade eder. Burada $N_{p,\lambda,n}$, p, λ ve n 'ye bağlı sabittir. (3.2.3) deki N sabitinin maksimum değerini veren bir f, g çiftinin yani (3.2.3) eşitsizliğini eşitliğe dönüştüren bir f, g çiftinin varlığı Lieb [23] tarafından gösterilmiştir. Böyle bir f, g çiftinin varlığı

$$R(F) = || |x|^{-\lambda} * F ||_q / ||F||_p, F \neq 0$$

$$R(f) = N_{p,\lambda,n} \equiv \sup \{ R(F) : F \in L^p, F \neq 0 \}$$

olacak şekilde $f \in L^p$, $p^{-1} + \lambda/n = 1 + q^{-1}$ fonksiyonunun bulunması demektir. $R(F)$: uzamalar, dönmeler ve ötelemelerden oluşan bir konform grubu

(yani

$$F(x) \rightarrow F(\gamma Rx + y), \gamma > 0, R \in O(n), y \in \mathbb{R}^n$$

altında invariant kalır. Ayrıca eğer $q = p' = p/(p-1)$ ise bir inversiyon simetrisi yani

$$F(x) \rightarrow |x|^{\lambda-2n} F(x|x|^{-2})$$

vardır.

Böyle zengin bir simetri grubunun varlığı maksimum yapan bir f fonksiyonunun tek olamayacağı anlamına gelir. Bazı durumlarda maksimum yapan f fonksiyonu bulunabilir ve N sabiti (en iyi sabit) açık olarak hesaplanabilir.

Teorem (3.2.2) (Lieb)

$$(i) \quad t = p = 2n/(2n-\lambda), \quad q = 2n/\lambda \quad (\text{veya} \quad p' = \frac{p}{p-1} = q) \quad \text{ise}$$

maksimum yapan f fonksiyonu tek olarak

$$f(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n}{p}}$$

elde edilir ve

$$N_{p,\lambda,n} = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(n - \frac{\lambda}{2})} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right\}^{-1 + \frac{\lambda}{n}}$$

en iyi sabit bulunur.

$$(ii) \quad p=2, \quad t=2n/(3n-2\lambda), \quad q=2n/2\lambda-n \text{ ise}$$

bu durumda $n < 2\lambda < 2n$ olmalıdır. Maksimum yapan f fonksiyonu tek olarak

$$f = |x|^{-\lambda} * (1 + |x|^2)^{-n/t}$$

şeklinde belirlenir.

Ayrıca HLS eşitsizliğinin genelleştirilmiş olan çift ağırlıklı HLS eşitsizliği ile ilgili olarak aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem (3.2.3):

$$0 < \lambda < n, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad 0 \leq \alpha < \frac{n}{p'} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right),$$

$$0 \leq \beta < n/q \quad \text{ve} \quad \frac{1}{p} + (\lambda + \alpha + \beta) / n = 1 + \frac{1}{q} \quad \text{ise ve}$$

$$V(x, y) = |x|^{-\beta} |x-y|^{-\lambda} |y|^{-\alpha}$$

R^n üzerinde bir integral çekirdek olmak üzere

$$f \rightarrow Vf, \quad (Vf)(x) = \int V(x, y) f(y) dy$$

$L^p(R^n)$ den $L^q(R^n)$ 'ye sınırlı bir tasvirdir. Ayrıca

$p < q$ için

$$R(f) = ||\nabla f||_q / ||f||_p, \quad f \neq 0 \text{ ve}$$

$$P_{\alpha, \beta, p, \lambda, n} = \sup \{ R(f) : f \in L^p(\mathbb{R}^n), f \neq 0 \}$$

ise maksimum yapan bir tek f fonksiyonu vardır yani

$$R(f) = P_{\alpha, \beta, p, \lambda, n}$$

dir.

Bu teoremin ispatı Lieb [23] de verilmiştir.

Liens, Pacella ve Tricarico [24] ortak çalışmasında

$$V^p(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega), u \equiv 0 \text{ } \Gamma_0 \text{ üzerinde} \},$$

Γ_0 sınırlı, açık bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin sınırının bir parçası olmak üzere

$$V^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad q = \frac{np}{n-p}, \quad p < n$$

daldırması için en iyi Sobolev sabitinin bir tahmini vermişlerdir.

Başka bir deyişle

$$S^p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in V^p(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{||\nabla u||_p}{||u||_q}$$

$$||\phi||_r = \left(\int_{\Omega} |\phi|^r dx \right)^{1/r}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad \phi \in L^r(\Omega)$$

infimumunu incelemişlerdir.

Sobolev iz eşitsizliği üzerine dikkate değer bir çalışma da Escobar (1988) [14] tarafından yapılmıştır. Bu alışma esas olarak aşağıdaki teoremden oluşmaktadır.

Teorem (3.2.4) :

ϕ , $R_+^n = \{ (x,t) \in R^n : x \in R^{n-1} , t>0 \}$ n-boyutlu üst

yarım Euklid uzayında tanımlı, sonsuzda yeterince hızlı azalan reel-değerli herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\left(\int_{\partial R_+^n} |\phi|^{2(n-1)/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/2(n-1)} \leq C^{-1}(n) \left(\int_{R_+^n} |\nabla \phi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

$$C(n) = \left(\frac{n-2}{2} \right)^{1/2} \sigma_n^{1/2(n-1)}, \quad n \geq 3$$

ve σ_n , R^n de (n-1)-boyutlu birim kürenin hacmi.

Eřitlik ancak ve ancak

$$\phi(x,t) = \left\{ \frac{\epsilon}{(\epsilon+t)^2 + |x-x_0|^2} \right\}^{(n-2)/2}, \quad \epsilon > 0$$

için sağlanır.

Ayrıca aynı çalışmada bu eşitsizliğin geliştirilmiş biçimi bir konjektür olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Konjektür :

$$Q_p(R_+^n) = \inf_{\phi \in C_0^\infty(R_+^n)} \frac{\int_{R_+^n} |\nabla \phi|^p dx dt}{\left(\int_{\partial R_+^n} |\phi|^{p(n-1)/(n-p)} dx \right)^{(n-p)/(n-1)}}$$

Sobolev oranını minimum yapan fonksiyonlar

$$\phi(x,t) = \left\{ \frac{\varepsilon^{p/2}}{(\varepsilon+t)^2 + |x|^2} \right\}^{(n-p)/2(p-1)}$$

dir.

Kompakt dayanağı olmayan fonksiyonlar sınıfı için yani yalnızca sınırın bir kısmında sıfır olan fonksiyonlar için Sobolev eşitsizliklerinin kalan terimli olarak genişletilmesi ise Egnell-Pacella-Tricarico [13] (1988) tarafından yapılmıştır.

BÖLÜM 4

LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ

4.1. Giriş

Bu bölümde logaritmik Sobolev eşitsizlikleri diye bilinen önemli bir eşitsizlik sınıfı incelenecektir. Bu tip eşitsizlikler matematik fizikte, özellikle kuvantum alan teorisinde operatörlerin incelenmesinde önemli rol oynarlar. Gerçekten de bu alanda yapılan çalışmaların çoğu böyle eşitsizliklere denk olan operatör eşitlikler ile gelişmişlerdir. Gross logaritmik Sobolev eşitsizliği $\mathbb{R}^n$ Euklid uzayında tanımlı sürekli olarak türetilen herhangi bir kompleks değerli u fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \ln|u| \, d\mu(x) \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \ln\|u\| \quad (4.1.1)$$

eşitsizliğini ifade eder. Burada $\mu(x)$

$$d\mu = \pi^{-\frac{n}{2}} \exp(-|x|^2) \, dx$$

Gauss ölçümü ve $\|\cdot\|$, $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ Hilbert uzayı üzerinde

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, d\mu(x)$$

normunu göstermektedir. Gross [19] (1976) tarafından gösterildiği gibi, log-Sobolev eşitsizliğinin en önemli özelliği, Standard Sobolev eşitsizliğinin tersine, n boyutu sonsuza gittiğinde triviyal kalmamasıdır. Halbuki Sobolev eşitsizliğinde $q \rightarrow np/(n-p)$ denklemi $n \rightarrow \infty$ için $q \rightarrow p$

olmasını gerektirir. Bu ise trivialdir. Gerçekten bu (4.1.1) eşitsizliğindeki katsayılar boyuta bağlı olmadığından bu eşitsizlik sonsuz boyutlarda bile trivial kalmaz. Klasik Sobolev eşitsizlikleri ile logaritmik Sobolev eşitsizlikleri arasındaki ilişki yine Gross tarafından verilmiştir.

Eğer $N \in L^2(\mu)$ de negatif olmayan kendine eş bir operatör ise Gauss Dirichlet formu

$$\langle N f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu(x) \quad (4.1.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ dir. (4.1.1) de $u = |v|^{p/2}$ ($1 < p < \infty$) dönüşümü yapılırsa (4.1.1) eşitsizliği

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^p \ln |v| d\mu \leq \frac{p}{2(p-1)} \operatorname{Re} \langle N v, v \rangle + ||v||_p^p \ln ||v||_p \quad (4.1.3)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $v_p = (\operatorname{sgn} v) |v|^{p-1}$, $p \in (1, \infty)$. Bu eşitsizlik kullanılarak logaritmik Sobolev eşitsizliğinin Nelson eşitsizliğine denk olduğu gösterilebilir. Nelson eşitsizliği $1 < q \leq p < \infty$ için e^{-tN} operatörünün ancak ve ancak $t \geq \log \left(\frac{p-1}{q-1} \right)^{1/2}$ olduğunda L^q dan L^p ye bir büzülme olduğunu ifade eder. Başka bir deyişle

$$||e^{-tN}||_{q,p} \leq 1 \text{ dir. Eğer } e^{-t} \leq \left(\frac{q-1}{p-1} \right)^{1/2} \text{ ise} \quad (4.1.4)$$

Yukarıda $-N$, $(e^{-tN} : t \geq 0)$ yarı-grubunun infinitezimal jeneratörü ve $||A||_{q,p}$ $L^q(\mu)$ dan $L^p(\mu)$ ye A operatörünün normunu göstermektedir.

Yüksek mertebeden logaritmik Sobolev eşitsizlikleri G. Feissner [16] tarafından incelenmiştir.

Logaritmik-Sobolev eşitsizlikleri ile ilgili bazı tanımlar ve önemli özellikler :

Tanım : $L^p(\mu)$ de tanımlı bir H operatörü L^p de güçlü sürekli bir e^{-tH} yarı-grubunun jeneratörü ve reel $c>0$ ve γ sabitleri için

$$\int |u|^p \ln|u| d\mu \leq c \operatorname{Re} \langle (H+\gamma)u, u_p \rangle + \left\| |u| \right\|_p^p \ln \left\| |u| \right\|_p \quad (4.1.5)$$

eşitsizliği geçerliyse bu H operatörüne p indisli Sobolev jeneratörü c 'ye H nın Sobolev katsayısı ve γ 'ya da H nın yerel normu adı verilir.

$1 \leq a < b < \infty$, $r \in (a,b)$ ve e^{-tH} nın $L^r(\mu)$ de güçlü sürekli bir yarı-grup olduğunu varsayalım öyleki $p > r$ ise L^p ye kısıtlaması ya da $p < r$ ise L^p de kapanışı her $p \in (a,b)$ için L^p de güçlü sürekli bir yarı grup olsun. Bu durumda (a,b) deki bütün p ler için e^{-tH} yarı grubunun L^p deki jeneratörü, Sobolev katsayısı $c(p)$ ve yerel normu $\gamma(p)$ olan p indisli bir Sobolev jeneratörü olacak şekilde sürekli reel değerli $c(p)>0$ ve $\gamma(p)>0$ fonksiyonları varsa H ya (a,b) üzerinde Sobolev jeneratörü denir. Aşağıdaki özellikler geçerlidir :

$$(i) \int |u|^p \ln|u| d\mu - \left\| |u| \right\|_p^p \ln \left\| |u| \right\|_p \text{ ifadesi } u \text{ ya göre } p.\text{dere-}$$

ceden pozitif hemojendir. $u \mapsto \lambda u$ dönüşümü ile (4.1.5) eşitsizliği değişmez kalır.

(ii) $\phi(x) = x \ln x$, $\phi(0) = 0$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında konveks olduğundan Jensen eşitsizliği

$$\int |u|^p \ln|u| d\mu - \left\| |u| \right\|_p^p \ln \left\| |u| \right\|_p = p^{-1} \{ \int \phi(|u|^p) - \phi(\int |u|^p) \} \geq 0$$

olduğunu gösterir. 0 halde (4.1.5) eşitsizliği

$$\operatorname{Re} \langle (H+\gamma)u, u_p \rangle \geq 0$$

$$(4.1.6)$$

eşitsizliğine götürür.

(iii) (4.1.6) eşitsizliği $H+\gamma$ operatörünün büzülme yarı grubu jeneratörü olduğunu ifade eder. Yani

$$||e^{-tH}||_{p,p} \leq e^{t\gamma}$$

dir.

Burada $||A||_{q,p}$ yine A operatörünün L^q dan L^p ye normunu göstermektedir. Gerçekten Hölder eşitsizliği ve (4.1.6) dan

$$\begin{aligned} ||(H+\gamma+\lambda)u||_p ||u||_p^{p-1} &\geq \operatorname{Re} \langle (H+\gamma+\lambda)u, u_p \rangle \\ &\geq \lambda ||u||_p^p, \text{ her } \lambda > 0 \text{ için} \end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde

$$|| (H+\gamma+\lambda)u ||_p \geq \lambda ||u||_p$$

ve Hille-Yosida teoremine göre

$$||e^{-t(H+\gamma)}||_{p,p} \leq 1 \quad (4.1.7)$$

olur. Özel olarak H ın yerel normu sıfırsa ($\gamma = 0$) e^{-tH} büzülme yarı grubu olur.

(iv) $p' = \frac{p}{p-1}$ ise $u \mapsto u_p$ tasviri, tersi $v \mapsto v_p$, olan L^p den $L^{p'}$ ($1 < p < \infty$) üzerine bir hemeomorfizmadır.

Teorem (4.1.1) :

H Sobolev katsayı fonksiyonu $c(p)$ ve yerel norm fonksiyonu $\gamma(p)$ olan (a,b) üzerinde tanımlı Sobolev jeneratörü olsun. (a,b) deki her q için $p(t,q)$

$$c(p) \frac{dp}{dt} = p, \quad p(0, q) = q \quad (4.1.8)$$

başlangıç değer probleminin çözümü olsun ve

$$M(t, q) = \int_0^t \gamma(p(s, q)) ds \quad (4.1.9)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $p(t, q)$ ve $M(t, q)$ $p(t, q) < b$ için tanımlanmıştır. Böylece

$$\|e^{-tH}\|_{q, p(t, q)} \leq e^{M(t, q)}$$

olur.

Teoremden $\gamma = 0$ alınırsa $\|e^{-tH}\|_{q, p(t, q)} \leq 1$ sonucu çıkar.

4.2. Gross Logaritmik Sobolev ve Nelson Eşitsizliklerinin Denkliği

Şimdi yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu derhal çıkarabiliriz. (Nelson denkliği)

Teorem (4.2.1) : (Nelson) [27]

Eğer $1 < q, p < \infty$ ve $e^{-t} \leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{1/2}$ ise

$$\|e^{-tN}\|_{q, p} \leq 1 \quad (4.2.1)$$

dir.

İspat : $c(p) = \frac{p}{2(p-1)}$ alınırsa (4.1.8) denkleminin çözümü

$p(t, q) = 1 + (q-1)e^{2t}$, $q > 1$, $t \geq 0$ olarak yazılabilir. Teorem (4.1.1)i kullanırsak $p \leq p(t, q)$ eşitsizliğine denk olan $e^{-t} \leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{1/2}$

koşulu

$$\|e^{-tN}\|_{q, p} \leq 1 \text{ bağıntısını verir.}$$

Şimdi aşağıdaki teoremden klasik Sobolev eşitsizliğinden başlayarak logaritmik-Sobolev eşitsizliğinin ispatını vereceğiz. İspat tamamen Sobolev eşitsizliğinin Nirenberg formu ile Hölder eşitsizliğine dayanmaktadır.

Teorem (4.2.2) :

$$b_n = \beta_n + \frac{n}{4} (1 + \ln \pi) \quad \text{ve} \quad \beta_n \rightarrow \frac{1}{2} \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \ln |u| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, d\mu + b_n \|u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \ln \|u\|_2 \quad (4.2.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : İspatı tamamlamak için

$$\|v\|_{2n/n-2} \leq \frac{n-1}{n-2} \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_2^{1/n} \quad (4.2.3)$$

Sobolev eşitsizliğinin Nirenberg formu ve

$$\|v\|_s \leq \|v\|_2^{(r^{-1}-s^{-1})/(r^{-1}-2^{-1})} \|v\|_r^{(s^{-1}-2^{-1})/(r^{-1}-2^{-1})}, \quad 2 \leq s \leq r \quad (4.2.4)$$

interpolasyon formülünden yararlanılır. (4.2.4) eşitsizliği $s=2$ için eşitliğe dönüşür. (4.2.4) ün her iki yanının s kuvvetini alır ve s ye göre $s=2$ deki türevini hesaplırsak

$$\int |v|^2 \ln |v| \, dx \leq \frac{2^{-1}}{2^{-1}-r^{-1}} \|v\|_2^2 \ln \|v\|_r - \frac{r^{-1}}{2^{-1}-r^{-1}} \|v\|_2^2 \ln \|v\|_2 \quad r > 2, \quad (4.2.5)$$

buluruz. $r = \frac{2n}{n-2}$ alalım ve (4.2.3) eşitsizliğini kullanalım.

o zaman $\beta_n = \frac{n}{2} \ln \frac{n-1}{n-2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int |v|^2 \ln |v| \, dx &\leq \frac{n}{2} \|v\|_2^2 \ln \left\{ \frac{n-1}{n-2} \prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_2^{1/n} \right\} \\ &= \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \|v\|_2^2 \ln \|v\|_2 = \beta_n \|v\|_2^2 + \frac{1}{4} \|v\|_2^2 \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_2^2}{\|v\|_2^2} \right) \\ &+ \|v\|_2^2 \ln \|v\|_2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada normlar Lebesgue ölçümüne göre yazılmıştır. Bu eşitsizliği μ Gauss ölçümü ile ifade etmek için $v = Uu = uw_n$, $w_n = (2\pi)^{-n/4} \exp(-|x|^2/4)$ $d\mu = w_n^2 dx$ birimsel dönüşümünü yapalım.

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_2^2 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{4} \langle x_j, u, u \rangle$$

olduğunu görmek kolaydır. Sağ yandaki normlar ve iç çarpım Gauss ölçümüne göre yazılmıştır. Bütün normlar L^2 normu olduğundan normlardaki alt indisleri açık olarak belirtmeyeceğiz. $\ln x \leq x-1$, $x > 0$ eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 \ln \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_2^2 / \|v\|_2^2 \right) &\leq \|v\|_2^2 \ln \frac{1}{2} + \left(2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_2^2 - \|v\|_2^2 \right) \\ &= \|u\|_2^2 \ln \frac{1}{2} + 2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_2^2 - \frac{1}{2} \langle x_j, u, u \rangle \end{aligned}$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \int |v|^2 \ln |v| \, dx &= \int |u|^2 \ln |uw_n| \, d\mu \\ &= \int |u|^2 \ln |u| \, d\mu - \frac{n}{4} (\ln 2\pi) ||u||^2 - \frac{1}{4} \int |x|^2 |u|^2 \, d\mu \end{aligned}$$

bağıntısını kullanırsak

$$\begin{aligned} \int |u|^2 \ln |u| \, d\mu &\leq \frac{n}{4} (\ln 2\pi) ||u||^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \int |x|^2 |u|^2 \, d\mu \\ &+ \beta_n ||u||^2 + \left(-\frac{n}{4}\right) \left(\ln \frac{1}{2}\right) ||u||^2 + \frac{1}{2} \langle Nu, u \rangle - \frac{1}{8} \int |x|^2 |u|^2 \, d\mu \\ &+ ||u||^2 \ln ||u|| = \left(\beta_n + \frac{n}{4} \ln \pi\right) ||u||^2 + \frac{1}{2} \langle Nu, u \rangle \quad (4.2.7) \\ &+ \frac{1}{8} \int |x|^2 |u|^2 \, d\mu + ||u||^2 \ln ||u|| \end{aligned}$$

buluruz. Ayrıca $A_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $A_j^* = -\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j$

operatörleri $x_j u = (A_j + A_j^*) u$ bağıntısını sağlar öyle ki

$$\begin{aligned} ||x_j u||^2 &\leq (||A_j u|| + ||A_j^* u||)^2 \leq 2 ||A_j u||^2 + 2 ||A_j^* u||^2 \\ &= 4 ||A_j u||^2 + 2 ||u||^2 \end{aligned}$$

olur. Burada $A_j A_j^* = A_j^* A_j + I$ bağıntısı kullanıldı.

0 halde

$$\frac{1}{8} \int |x|^2 |u|^2 d\mu \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n ||A_j u||^2 + \frac{n}{4} ||u||^2$$

$$= \frac{1}{2} \langle Nu, u \rangle + \frac{n}{4} ||u||^2$$

olur. Bunu (4.2.7) de yerine koyarsak (4.2.2) eşitsizliği elde edilir.

(4.2.2) eşitsizliği zayıf logaritmik Sobolev eşitsizliğidir. Çünkü burada ortaya çıkan b_n yerel normu boyuta bağlıdır ve dolayısıyla sonsuz boyuta geçiş için uygun değildir. Bununla birlikte klasik Sobolev eşitsizliği ile logaritmik Sobolev eşitsizliği arasında bir bağlantı kurmak bakımından ilgi çekicidir.

BÖLÜM 5

GENELLEŞTİRİLMİŞ LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİ :

5.1. Giriş

Bu bölümde Gross logaritmik Sobolev eşitsizliği genelleştirilektir. Gross'un aksine, Adams ve Clarke [2] karmaşık probabilistik yöntemlerden kaçınarak yalnızca elemanter analizi kullanarak (4.1.1) logaritmik Sobolev eşitsizliğinin elegan bir ispatını verdiler. Biz de bu bölümde Adams ve Clarke ispat yöntemini kullanarak (4.1.1) eşitsizliğini genişletmeye çalışacağız.

Şimdi Lebesgue ölçümü ile ifade edilmiş aşağıdaki eşitsizliği düşünelim.

$$p^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \ln |\phi| dx - ||\phi||_{n,p}^p \ln ||\phi||_{n,p} + k_{n,p} ||\phi||_{n,p}^p \quad (5.1.1)$$

Burada $||\cdot||_{n,p}$, $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ Banach uzayı üzerinde

$$||u||_{n,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanan normu göstermektedir.

Adams ve Clarke tarafından önerilen tekniğin (5.1.1) eşitsizliğine de uygulanabilirliği sorusunu inceleyeceğiz. Bu sorunun yanıtı $n=1$ ve genel $p>1$ için pozitiftir. Bunu bir teoremle ispatlayacağız. Buna karşın Adams ve Clarke'ın ispatında olduğu gibi $p \neq 2$ için induksiyon yöntemi ile genel n için genelleştirme mümkün olmadığından bu durumda probleme Schwarz simetrikleştirme yönteminden yararlanarak

yaklaşacağız.

5.2. Gross Logaritmik Sobolev eşitsizliğinin Adams ve Glarke Yöntemi ile Genelleştirilmesi

Şimdi $n=1$ için (5.1) eşitsizliğinin ispatını verelim.

Teorem (5.2.1) :

$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli türetilebilen kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $p>1$ için

$$p^{-1} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}} |u|^p \ln|u| dx - \frac{||u||_p^p \ln||u||_p}{p} + k_p \frac{||u||_p^p}{p} \quad (5.2.1)$$

burada $k_p = \left[(1 + \ln((p-1)^{1/p} \Gamma(\frac{p-1}{p}) \frac{1}{p})) \right] / p$

en iyi sabit olmak üzere,

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : $\mathbb{R}$ üzerinde hemen her yerde $|(|u|)'| \leq |u'|$ olduğundan u y u reel ve negatif olmayan bir fonksiyon varsayabiliriz. Eğer v , u nun simetrik azalan yeniden düzenlenişi ise

$$\int |v'|^2 dx \leq \int |u'|^2 dx$$

dir. Bu yeniden düzenleme eşitsizliği u' yu aynı zamanda çift ve $r = |x|$ 'e göre azalan olarak varsayabileceğimizi göstermektedir. Adams ve Clarke'ın ispat yöntemini izleyerek önce

$r, s>0$ için

$$\int_0^{\infty} u^p dx = r, \quad u(0) = s \quad \text{ve} \quad (5.2.2)$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} F(u, u') dx; \quad F(u, u') = \frac{1}{p} |u'|^p - u^p \ln u$$

olmak üzere $\inf J(u)$ ' yu hesaplayalım. (5.2.2) deki fonksiyonele ait ekstremaller ailesi

$$(p-1) |u'|^{p-2} |u'|' + u^{p-1} (p \ln u + 1) = 0 \quad (5.2.3)$$

Euler-Lagrange denkleminin çözümü olur. (5.2.3) ün integrali

$$\frac{1}{q} |u'|^p + u^p \ln u = \text{Sabit}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (5.2.4)$$

olarak hemen çıkar. Bunun bir kez daha integrasyonu iki parametrelili

$$u(x) = \lambda \exp \left\{ -\frac{1}{q} |x+\mu|^q \right\} \quad (5.2.5)$$

fonksiyon ailesini verir. (5.2.2) deki kısıtlamalar kullanılırsa λ ve μ yü belirleyecek olan

$$s = \lambda \exp \left\{ -\frac{1}{q} |\mu|^q \right\} \quad \text{ve} \quad r = \lambda^p \int_0^{\infty} \exp \left\{ -(p-1) |t+\mu|^q \right\} dt \quad (5.2.6)$$

denklemleri bulunur. Ayrıca

$$h(x) = \exp \left\{ (p-1) |x|^q \right\} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -(p-1) |t+x|^q \right\} dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.2.7)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $h(x)$ $\mathbb{R}$ üzerinde kesin azalan bir fonksiyondur ve $h(\mu) = \frac{r}{s^p}$ bağıntısını sağlar.

0 halde

$$\mu = h^{-1} \left(\frac{r}{s^p} \right) \quad \text{ve} \quad \ln \lambda = \ln s + \frac{1}{q} |\mu|^q$$

yazılabilir. Ayrıca

$$h'(x) = \varepsilon(x) p |x|^{1/p-1} h(x) - 1$$

türevini kullanırsak

$$(h^{-1})'(x) = \{ p |h^{-1}(x)|^{1/p-1} x - 1 \}^{-1} \quad (5.2.8)$$

elde edilir. (5.2.2) deki fonksiyoneli (5.2.5) ekstremali için hesaplırsak

$$\lambda^p \mu^{p-1} \exp \{ -(p-1) |\mu|^q \} + \lambda^p (p^{-1} - \ln \lambda) \int_0^\infty \exp \{ -(p-1) |t+\mu|^q \} dt$$

ifadesini verir. Bu ise r ve s nin fonksiyonu olarak

$$V(s,r) = p^{-1} \left\{ r(1-p \ln s - \frac{p}{q} |g|^q + g s^p) \right\} \quad (5.2.9)$$

$$g(s,r) = \mu = h^{-1} \left(\frac{r}{s^p} \right)$$

şeklinde yazılabilir. V nin birinci mertebeden kısmi türevleri (5.2.7) den yararlanarak hesaplanabilir ve

$$V_s(r,s) = g(s,r) s^{p-1}, \quad V_r(s,r) = -\ln s - \frac{1}{q} |g(s,r)|^q \quad (5.2.10)$$

olur.

$$0 \text{ halde } s = u(x) \text{ ve } r = \int_0^\infty (u(t))^p dt \quad \text{alınarak}$$

$$\frac{d}{dx} V(u(x), \int_x^\infty (u(t))^p dt) = g u^{p-1} u' + u^p \ln u + u^p |g|^q / q$$

yazılabilir. Şimdi $|x|^p + px + p-1 \geq 0$ eşitsizliği kullanılırsa

$$g u^{p-1} u' + u^p |g|^q / q = \frac{1}{q} u^p |g|^q (p-1 + \varepsilon(g)p |g|^{-\frac{q}{p}} \frac{u'}{u})$$

$$\geq - \frac{1}{p} |u'|^p$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d}{dx} V(u(x), \int_x^\infty (u(t))^p dt) \geq u^p \ln u - \frac{1}{p} |u'|^p = -F(u, u') \quad (5.2.11)$$

elde edilir. (5.2.11) eşitsizliği $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse

$$\int_0^\infty F(u, u') dx \geq V(u(0), \int_0^\infty u^p dx) - \liminf_{x \rightarrow \infty} V(u(x), \int_x^\infty u^p dt) \quad (5.2.12)$$

bulunur. Aşağıdaki lemma ile (5.2.12) nin sağ yanındaki limitin sıfır olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla (5.2.12) eşitsizliği ile (5.2.2) koşullu minimizasyon problemi için (5.2.5) ekstremallerinin gerçekten minimum yapan fonksiyonlar olduğu görülmektedir. Ayrıca (5.2.12) nin sağ yanını $u(0)$ 'a göre minimum yaparak k_p en iyi sabiti bulabiliriz.

$$s > 0 \text{ için } V(s, r), \quad V_s = 0 \text{ veya } h^{-1} \left(\frac{r}{s^p} \right) = 0$$

olduğu zaman minimum değerini alır. h^{-1} kesin azalan bir fonksiyon olduğundan $\frac{r}{s^p} = h(0)$ bağıntısı ile verilen s değeri için tek bir minimum vardır. 0 halde

$$V(s,r) \geq \frac{1}{p} ((r/h(o))^{1/p}, r) = \frac{r}{p} (1 - \ln(r/h(o))), \quad s > 0 \quad (5.2.13)$$

bulunur. $h(o)$ değeri (5.2.7) den

$$h(o) = \frac{1}{p} (p-1)^{1/p} \Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

olarak kolayca hesaplanır. (5.2.12) ve (5.2.13) den

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{p} |u'|^p - u^p \ln u \right\} dx \geq \frac{1}{p} \int_0^\infty u^p dx \left\{ - \ln \int_0^\infty u^p dx + (1 + \ln h(o)) \right\} \quad (5.2.14)$$

elde edilir. (5.2.14), (5.2.1) ile karşılaştırılırsa

$$k_p = \frac{1}{p} (1 + \ln h(o))$$

en iyi sabitini buluruz. Özel olarak $k_2 = \frac{1}{2} (1 + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ dir.

Lemma (5.2.2):

Eğer $u(x) > 0$, $\int_0^\infty u^p dx < \infty$ ve $\int_0^\infty |u'|^p dx < \infty$

ise o zaman

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} V(u(x), \int_x^\infty (u(t))^p dt) = 0 \quad (5.2.15)$$

dır.

İspat :

$$h(x) < x^{-\frac{1}{p-1}}, \quad 0 < x < \infty \text{ eşitsizliğinden } h^{-1}(x) < x^{1-p}, \quad x > 0$$

ve bundan da

$$g(s,r) s^p < r^{1-p} s^{p^2}$$

yazılabilir. Benzer şekilde eğer $M = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ (p-1) t^q \} dt$ ise

$$h(x) \leq M \exp \{ (p-1) x^p \}, \quad x \leq 0 \text{ ve sonuç olarak}$$

$$h^{-1}(x) < - \left(\ln \left(\frac{x}{M} \right)^{1/p-1} \right)^{1/q}, \quad x \geq M$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde

$$(p-1) |g(s,r)|^q \geq \ln r - p \ln s - \ln M, \quad r \geq M s^p \text{ için}$$

olur. Buradan

$$r(1-p \ln s - p/q |g|^q) \leq \max \{ r(1 - \ln r + \ln M), M s^p (1-p \ln s) \}$$

eşitsizliği ve sonuç olarak her $r, s > 0$ için

$$V(s,r) \leq r^{1-p} s^{p^2} + p^{-1} \max \{ r(1 - \ln r + \ln M), M s^p (1-p \ln s) \} \quad (5.2.16)$$

yazılabilir. Lemma'nın hipotezlerini gerçekleyen

u' lar için

$$s = u(x), \quad r = \int_x^\infty u^p dx \quad \text{ve} \quad \eta = \int_x^\infty |u'|^p dx$$

büyüklikleri $x \rightarrow \infty$ için hepsi sıfıra gider.

Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} s^{p^2} &\leq (p \int_x^\infty |u'| u^{p-1} dx)^p \leq p^p \left(\int_x^\infty |u'|^p dx \right) \left(\int_x^\infty u^p dx \right)^{p-1} \\ &= p^p \eta r^{p-1} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (5.2.16) eşitsizliği $x \rightarrow \infty$ limit durumunda (5.2.15)'i verir. Böylece Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.



BÖLÜM 6

LOGARİTMİK SOBOLEV EŞİTSİZLİKLERİNDE EN İYİ SABİTLER KONJEKTÖRÜ

Bu bölümde (5.1.1) eşitsizliğine ilişkin en iyi sabit için aşağıdaki konjektörü vereceğiz.

Konjektür : (5.1.1) de ortaya çıkan $k_{n,p}$ nin en iyi değeri normalize edilmiş ϕ ler için

$$\phi = \lambda \exp \left[-\frac{1}{q} (|x| + \mu)^q \right] \quad (6.1)$$

(burada λ, μ Sabitler, $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

fonksiyonu ile erişilir ve sabitin en iyi değeri olarak

$$k_{n,p} = \frac{n}{p} + \frac{n \log \pi}{2p} + \frac{n \log \pi}{p^2} - \frac{n(p-1) \log(p-1)}{p^2} - \frac{1}{p} \log \left[\frac{\Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{\Gamma \left(\frac{n(p-1)}{p} + 1 \right)} \right] \quad (6.2)$$

verilir ve özel olarak $p=2$ için

$$k_{n,2} = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log 2\pi \right) \quad (6.3)$$

olur. Şimdi aşağıdaki geliştirilmiş eşitsizlikleri

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \log |\phi| dx + k_{n,p}, \quad ||\phi||_p = 1 \quad (6.4)$$

ve

$$\int_{R^n} |\nabla \phi|^2 dx \geq \int_{R^n} |\phi|^2 \log |\phi| dx + n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log 2\pi \right), \quad \|\phi\|_2 = 1 \quad (6.5)$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliklerden (6.5) eşitsizliği Bialynicki-Birula ve Mycielski [8] tarafından elde edilen belirsizlik ilkesi eşitsizliğinin güçlü biçiminden de çıkarılabilir.

(6.2) en iyi sabiti hesaplamak üzere

$$k_{n,p} = \inf \left\{ V(u) = \int_{R^n} \left\{ \frac{1}{p} |\nabla u|^p - |u|^p \ln |u| \right\} dx ; \|u\|_p = 1 \right\} \quad (6.6)$$

minimizasyon problemini inceleyeceğiz. Amacımız, standard Sobolev ve ilgili eşitsizliklere başarı ile uygulanmış olan Schwarz simetrikleştirme argümanı olarak bilinen standard bir yöntemi kullanmak olacaktır. Bundan dolayı problemi pozitif, küresel simetrik (radyal) ve radyal olarak monoton azalan fonksiyonlar sınıfına indirgemeye çalışacağız. (Böylece varyasyonel problemi bir boyutlu bir probleme indirgemiş olacağız) Sonra da infimuma, gerçekten bu sınıftaki minimum yapan bir fonksiyon ile erişildiğini ve (6.6) varyasyonel problemine ilişkin Euler - Lagrange denkleminin aranan minimum veren tek bir çözümü olduğunu göstereceğiz.

Eğer (6.6) problemi için minimum varsa

$$\Delta_p u + u^{p-1} (p \ln u + 1) = 0 \quad (6.7)$$

Euler - Lagrange denklemi sağlanır. Burada

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

u 'nun R^n deki p - Laplasyenidir.

Genel olarak $\nabla \cdot A(x, \nabla u) = 0$ denklemini sağlayan $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operatörüne dejenere eliptik operatör ve denklemin her zaman sürekli olan zayıf çözümlerine de A -harmonik fonksiyonlar adı verilir. Zayıf çözüm ile

$$\int A(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi \, dx = 0 \text{ her } \phi \in C_0^\infty$$

olan u fonksiyon anlaşılabacaktır. Kritik Sobolev üstlerini içeren p -Laplace denklemi için varlık ve teklik sonuçları Egnell [12]'in bir çalışmasında verilmiştir. Fakat genel olarak

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad (6.8)$$

denklemini için varlık ve teklik problemi henüz çözülememiştir. Eğer minimuma küresel simetrik fonksiyonlarla erişilirse (6.7) denklemini

$$\frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} |u'|^{p-1})' + f(u) = 0, \quad f(u) = u^{p-1} (p \ln u + 1) \quad (6.8)$$

veya açık olarak

$$(p-1) |u'|^{p-2} |u'|' + \frac{m}{r} |u'|^{p-1} + f(u) = 0, \quad m=n-1 \quad (6.9)$$

şeklini alır. Burada

$r = |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ radyal değişkeni ve üstler de r 'ye göre türevleri göstermektedir.

(6.6) varyasyonel problemi minimum yapan radyal fonksiyonların tek olduğunu yani (6.9) denkleminin özel bir f için tek bir çözümü olduğunu göstermek için bazı yaklaşımlar önerilecektir.

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.10)$$

Yarı-lineer eliptik diferansiyel denkleminin astrofizik, akışkanlar mekaniği (Van der Waals akışkanlarının faz geçişleri) ve popülasyon genetiği gibi çeşitli fiziksel problemlerin incelenmesinde ortaya çıkması ile son yıllarda çok sayıda matematikçiyi bu denklemin çözümlerinin varlığı ve tekliği sorusuna yanıt bulmaya yöneltmiştir. Bu bakımdan problemimizi önce $p=2$, $f(u) = u(2\ln u + 1)$ özel hali için incelemek uygun olacaktır.

Bu denklem üzerine, (özellikle pozitif, radyal çözümlerinin tekliği) literatürde pek çok çalışma bulunmasına rağmen $f(u) = u(2\ln u + 1)$ özel seçilişi için teklik teoremlerinin koşulları hepsi birden gerçekleşmemektedir. Ancak $n > 1$ boyutunun belirli bir aralıktaki değerleri için tek bir çözümün varlığı garanti edilmektedir.

Şimdi (6.10) denkleminin pozitif, radyal çözümlerinin tekliği üzerine yapılmış bazı çalışmaları kısaca gözden geçirip sonuçlarını verelim.

Aşağıdaki problemin pozitif klasik çözümlerinin tekliği Peletier ve Serrin [28] ortak çalışmasında gösterilmiştir:

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (n > 1) \quad (6.11)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{iken}$$

ve f aşağıdaki hipotezleri gerçekleştiriyor :

H1. f , $(0, \infty)$ aralığında tanımlı ve yerel olarak Lipschitz sürekli.

$$H2. \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = -m, \quad m \text{ pozitif bir sabit}$$

$$H3. \quad \int_0^\delta f(u) du > 0, \quad \delta \text{ pozitif bir sabit}$$

H1, H2, H3 hipotezleri kısaca H olarak belirtilecektir.

Berestycki ve Lions [6,7] pozitif çözümün varlığını garanti eden f üzerine oldukça genel koşulları verdiler. Buna göre varlık için H hipotezleri ile birlikte

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{(n-2)/(n-2)}} \leq 0, \quad n > 2$$

koşulunun yeterli olacağını belirttiler. ($n=2$ ise $f(u) \rightarrow \infty$ iken herhangi bir cebirsel büyüme olarak düşünülebilir.) Gidas, Ni ve Nirenberg [17] H hipotezlerine, f nin bir $(0, \sigma)$, $\sigma > 0$ aralığında düzgün olarak $C^{1-\varepsilon}$ sınıfından olması koşulu eklendiğinde, (6.11) probleminin herhangi bir pozitif çözümünün radyal olması gerektiğini gösterdiler. Buna göre, (6.11) probleminin pozitif çözümlerinin varlığını göstermek için buna karşı gelen

$$\begin{aligned} u'' + \frac{m}{r} u' + f(u) &= 0, \quad r > 0 \quad (m=n-1) \\ u'(0) &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0 \quad \text{ve } u > 0, \quad r \geq 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

radyal problemin çözümlerinin tekliğini incelemenin yeterli olacağı görülür.

(6.12) probleminin çözümünün tekliğini ispatlamak için bir hipoteze daha gerek vardır. Onu da S ile gösterelim.

$\frac{f(u)}{u-\beta}$ fonksiyonu, $f(u) > 0$ olmak üzere (β, ∞) ın alt kümesi üzerinde azalan bir fonksiyon olsun.

Burada $\beta = \inf \{ u \in (0, \infty) : F(u) = \int_0^u f(s) ds > 0 \}$

dir.

Şimdi teklik teoremini ifade edebiliriz.

Teorem (6.1):

Eğer H ve S hipotezleri sağlanırsa (6.12) probleminin en çok bir çözümü vardır.

Özel olarak (6.12) denkleminde $m=0$ ($n=1$) durumu oldukça trivialdir. Çünkü denklem otonom olur ve incelenmesi çok daha kolaydır. Bu durumda (6.12) denklemi

$$u'' + f(u) = 0$$

şeklini alır ve çözümü kuvadratur ile verilebilir.

Ayrıca

$$u'' + f(u) = 0, \quad R \text{ de}$$

(6.13)

$$u \in C^2(R), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad u \text{ simetrik}$$

probleminin varlık ve teklik ispatı Berestycki ve Lions tarafından verilmiştir. [7] Burada f yerel olarak Lipschitz sürekli ve $f(0) = 0$ olup aşağıdaki teoremden $F(z)$

$$F(z) = \int_0^z f(s) ds$$

olarak tanımlanmıştır.

Teorem (6.2) :

(6.13) denkleminin $u(0) > 0$ olacak şekilde bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul

$$\zeta_0 = \inf \{ \zeta > 0 : F(\zeta) = 0 \} \quad (6.14)$$

büyükliğünün var olması, pozitif olması ve $f(\zeta_0) > 0$ koşulunun sağlanmasıdır. Ayrıca, $u > 0$, $u(0) = \zeta_0$ ve $u'(x) < 0$, $x > 0$ olacak şekilde tek bir u çözümü vardır. (6.14) koşulu altında (6.13)'ün u çözümü aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü olarak verilir.

$$-u'' = f(u) \quad , \quad R^+ \quad \text{de}$$

$$u(0) = \zeta_0 \quad , \quad u'(0) = 0 \quad \text{ve } u \text{ simetrik}$$

Bizim problemimiz için $f(u) = u(2\ln u + 1)$ seçilirse (6.2) varlık ve teklik teoreminin koşullarının sağlandığı kolayca görülür. Böylece $n = 1$ için tek bir çözüm garanti edilmiş oldu.

(1986) da Peletier ve Serrin [28] (6.12) probleminin çözümlerinin tekliğini f üzerine H hipotezlerinden daha zayıf hipotezler koyarak ispatladılar.

Önce

$$\alpha = \inf \{ u > 0 ; f(u) > 0 \} \quad , \quad \beta = \inf \{ u > 0 : F(u) > 0 \}$$

büyükliklerini tanımlayalım. Buradan $0 < \alpha < \beta$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi yeni bir hipotez koyalım.

Bunun için

$$(i) \quad n=2 \quad \text{ve} \quad \beta > 0$$

$$(ii) \quad n \geq 2 \quad \text{ve} \quad \alpha > 0$$

koşullarına H^* diyelim. Eğer H_2 koşulu ile H^* koşulunu yer değiştirirsek böylece H_2 den çok daha zayıf bir koşul elde etmiş oluruz.

Şimdi teklik teoremini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

Teorem (6.3) :

H^* ve S koşulları sağlanırsa (6.12) probleminin birden çok çözümü olamaz.

Diğer taraftan (1987) de McLoed ve Serrin [25] , $f(u)$ üzerine aşağıdaki koşulları koyarak

$$(i) f \in C^1 [0, \infty) ; f(0) = 0 , f'(0) = -m < 0$$

$$(ii) u \in (0, \alpha) \text{ için } f(u) < 0 \text{ ve } u \in (\alpha, \infty) \text{ için } f(u) > 0$$

olacak şekilde bir α sabiti vardır.

$$(iii) f'(\alpha) > 0 .$$

R^n de $\Delta u + f(u) = 0$ denkleminin pozitif radyal çözümlerinin tekliğini ispatladılar.

Şimdi

$$u > 0 \text{ ve } \sigma, c \text{ reel sabitleri için}$$

$$I(u; \sigma, c) = (u-c) f'(u) - \sigma f(u)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. McLoed ve Serrin'in [25] esas teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem (6.4):

Her $U > \alpha$ için U ya sürekli olarak bağlı olan ve

$$a \geq n-2 , b \geq 3-n \quad (a > 0 , b = 1 \quad n \leq 2 \text{ için})$$

$$I(u; \sigma, c) > 0 , 0 < u < U , u \neq \alpha \text{ iken}$$

$$I(u; \sigma, c) < 0 , u > U \text{ iken}$$

$$\sigma = 1 + \frac{2b}{a}, \quad \bar{\sigma} = 1 + \frac{2}{a}$$

koşullarını gerçekleyen a, b, c sabitleri bulunabiliyorsa (6.12) probleminin en çok bir çözümü vardır.

Teorem (6.4) ün doğrudan uygulamaları oldukça güçlüdür. Parametrelerin $a=n-2$, $b=0$, $c=\alpha$ şeklindeki özel seçimleri ile yukarıdaki teoremin koşulları sağlanır ve teorem aşağıdaki şekilde basitleşir.

Teorem (6.5)

$n \geq 3$ olduğunu ve f nin

$$(u-\alpha) f'(u) - f(u) > 0 \quad u \neq \alpha$$

$$(u-\alpha) f'(u) - \frac{n}{n-2} f(u) < 0 \quad u > \alpha$$

koşullarını gerçekleyen (6.12) nin en çok bir çözümü vardır.

Bizim problemimizdeki $f(u)=u(2\ln u + 1)$ özel seçilişi için yukarıdaki her iki teoremin de f üzerindeki hipotezleri genel olarak gerçekenmemektedir. Yukarıdaki teorem ancak n boyutunun belirli bir aralıktaki değerleri için çözümlerin tekliğini garanti eder. O halde problemimizdeki $f(u)=u(2\ln u + 1)$ fonksiyonu için yeni bir teklik teoremine gerek vardır yada teoremdaki hipotezler problemimizdeki özel $f(u)$ fonksiyonu için gerçekleştirilecek biçimde değiştirilmelidir. Konjektürde de belirtildiği gibi $n > 1$ için pozitif radyal çözümlerin tekliği henüz çözülmemiş olup açık bir problemdir.

Kwang bir çalışmasında [22] R^n de $\Delta u - u + u^p = 0$ ($p > 1$) denkleminin pozitif, radyal simetrik çözümlerine ait teklik teoremini ispatladı. Bu çalışmada kullanılan esas yaklaşım Coffman yöntemidir. İspat tamamen ikinci - mertebeden lineer diferansiyel denklemler için Sturm salınım teorisinin kullanılmasına dayanmaktadır. Çözümlerin tekliğini garantileyen ana teoremin ispatı için 35 yardımcı teorem kullanılmıştır.

Genel n için çözümün tekliğini göstermek için Kwong'un çalışmasında verilen ispat yönteminin uygulanması olumlu görünmesine rağmen oldukça uzun ve karmaşık hesapların yapılmasını gerektirmektedir. Kwong'un çalışmasında incelenen $f(u) = -u + u^p$ ($p>1$) fonksiyonu yerine $f(u) = u(2\ln u + 1)$ fonksiyonu alındığı zaman da ispatın geçerli kaldığı gösterilmelidir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında

$$p^{-1} \int_{R^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \int_{R^n} |\phi|^p \ln |\phi| dx - ||\phi||_{n,p}^p \ln ||\phi||_{n,p} + k_{n,p} ||\phi||_{n,p}^p \quad (1)$$

(Burada $||\phi||_{n,p}^p = \int_{R^n} |\phi|^p dx$ $L^p(R^n, dx)$ Banach uzayı

üzerinde tanımlı norm ve dx de R^n de Lebesgue ölçüsüdür.)

genel eşitsizliğinin $p=2$ durumuna karşı gelen Lebesgue ölçümüne göre Gross logaritmik Sobolev eşitsizliği, Adams ve Clarke tarafından Gross ispatına alternatif olarak geliştirilen ispat tekniği kullanılarak $p>1$ ve $n=1$ için genelleştirilmiş ve aynı zamanda bu eşitsizlikte ortaya çıkan $k_{1,p}$ sabitinin en iyi değeri hesaplanmıştır.

Fakat Adams ve Clarke'in ispatında olduğu gibi (yani $p=2$ durumu) genel n için indüksiyon yönteminin kullanılması mümkün olmadığından genel n için yani bir yaklaşıma gerek olduğu görülmüştür.

(1) genel eşitsizliğine ilişkin en iyi sabitler konjektörü ele alınmış ve konjektürün ispatı otonam olmayan yarı lineer

$$(p-1) |u'|^{p-2} |u'|' + \frac{n-1}{r} |u'| + f(u) = 0, \quad f(u) = u^{p-1} (p \ln u + 1) \quad (2)$$

denkleminin pozitif çözümlerinin tekliğinin gösterilmesi problemine indirgenmiştir.

Çeşitli fiziksel problemlerde ortaya çıkan ve yukarıdaki denklemin $p=2$ ve genel bir $f(u)$ fonksiyonuna karşı gelen

$$u^n + \frac{n-1}{r} u' + f(u) = 0, \quad u > 0 \quad (3)$$

denklemini ile ilgili literatürdeki teklik teoremleri problemimizdeki özel $f(n) = u(2\ln u + 1)$ fonksiyonu için uygulanmış ve bu teoremlerin başarısız kaldığı yada en çok uzay boyutunun ancak belirli değerleri için tekliğin garanti edilebileceği gösterilmiştir.

İncelenen teklik teoremleri arasında Kwong tarafından özel bir $f(u)$ için uygulanan ve büyük ölçüde Sturm salınım teorisinin kullanılmasına dayanan bir yöntemin $p=2$, $n>1$ için (2) denkleminin pozitif çözümlerinin tekliğini ispatlamak için uygulanabileceği önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] ADAMS, R., Sobolev Spaces, Academic Press, (1975).
- [2] ADAMS, R., ve CLARKE, F.H., Gross's logarithmic Sobolev Inequality : A Simple Proof, Amer. J. Math., Vol. 101, 1265-1269 (1979).
- [3] AUBIN, T., Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, (1982).
- [4] AUBIN, T., Problèmes Isoperimétriques et Espaces de Sobolev, J. Diff. Geo., Vol.11, 573-598 (1976).
- [5] BANDLE, C., Isoperimetric Equations and Applications, Pitman, London, (1980).
- [6] BERESTYCKI, H., ve LIONS, P.L., Existence d'ondes Solitaires dans les Problèmes nonlineaires du type Klein-Gordon, Comptes Rendus, Paris, Serie A, 287, 503-506 (1972).
- [7] BERESTYCKI, H., ve LIONS, P.L., Existence of a ground state in Nonlinear Equations of the type Klein-Gordon, in Variational Inequalities, John Wiley, (1980).
- [8] BIALYNICKI-BIRULA I., ve MYCIELSKI, J., Uncertainty Relations for Information Entropy in Wave Mechanics, Commun. Math. Phys., Vol. 44, 129-132 (1975).
- [9] BLISS, G.A., An Integral Inequality, J. Lon. Math. Soc. Vol. 5, 40-46 (1930).
- [10] DAVIES, E.B., ve SIMON, B., Ultracontractivity and the Heat Kernel for Schrödinger Operators and Dirichlet Laplacians, J.Func. Anal., Vol. 59, 335-395 (1984).

- [11] EDMUNDS, D.E., ve EVANS, W.D., Spectral Theory and Partial Differential Operators, Oxford University Press, (1987).
- [12] EGNELL, H., Existence and Non-existence Results for m -Laplace Equations Involving Critical Sobolev Exponents, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 104, 27-56 (1988).
- [13] EGNELL, H., PACELLA, F., ve TRICARICO, M., Some Remarks on Sobolev Inequalities, U.D.D.M. Report, (1988).
- [14] ESCOBAR, J.F., Sharp Constant in a Sobolev Trace Inequality Ind. Univ. Math. J., Vol. 37, 687-698 (1988).
- [15] FEDERER, H., ve FLEMING, W., Normal and Integral Currents, Annals of Math., Vol. 4, (1960).
- [16] FEISSNER, G., A Gaussian Measure Analogue to Sobolev's Inequality, Ph.D. Thesis, Cornell Univ., (1972).
- [17] GIDAS, B., NI, W.M., ve NIRENBERG, L., Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle, Comm. Math. Phys. Vol. 68, 209-243 (1979).
- [18] GIDAS, B., NI, W.M., ve NIRENBERG, L., Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in R^n , Math. Anal. Appl. Adv. in Math. Suppl. Stud. 7 A, 369-402 (1981).
- [19] GROSS, L., Logarithmic Sobolev Inequalities, Amer J. Math. Vol. 97, 1061-1083 (1976).
- [20] GUNSON, J., Inequalities in Mathematical Physics, Proceedings of the Inequalities Conference, Birmingham, (1987).
- [21] HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., ve POLYA, G., Inequalities, Cambridge University Press, (1934).

- [22] KWONG, M.K., Uniqueness of Positive Solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in R^n , Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 105, 243-266 (1989).
- [23] LIEB, E.H., Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities, Ann. Math., Vol. 118, 349-374 (1983).
- [24] LIONS, P.L., PACELLA, F., ve TRICARICO, M., Best Constants in Sobolev Inequalities for Functions Vanishing on Some Part of the Boundary and Related Questions, Ind. Univ. Math. J., Vol. 37, 301-324 (1988).
- [25] MCLEOD, K., SERRIN, J., Uniqueness of Positive Radial Solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in R^n , Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 99, 115-145 (1987).
- [26] NELSON, E., The Free Markoff Field, J. Func. An., Vol. 12, 211-227 (1973).
- [27] PELETIER, L.A., ve SERRIN, J., Uniqueness of Positive Solutions of Semilinear Equations in R^n , Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 81, 181-197 (1983).
- [28] PELETIER, L.A., ve SERRIN, J., Uniqueness of Non-negative Solutions of Semilinear Equations in R^n , J. Diff. Eqs., Vol. 61, 380-387 (1986).
- [29] POLYA, G., ve SZEGÖ, G., Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1951).
- [30] ROSEN, G., Minimum Value for c in the Sobolev Inequality, SIAM J. Appl. Math., Vol. 21, (1971).
- [31] SOBOLEV, S.L., Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., (1963).

- [32] TALENTI, G., Best Constants in Sobolev Inequality, Annali
D. Math. P.E. Appl., Vol. 110, 353-372 (1976).



ÖZGEÇMİŞ

Faruk Güngör 1959 da İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Bahçelievler Lisesinde tamamladıktan sonra 1976 yılında İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümüne girdi ve 1981 yılında mezun oldu. 1984 yılında aynı fakültenin Mekanik bölümünden Yüksek Lisans derecesi aldı.

1982 tarihinden beri araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.