

EYLÜL 2019

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

ÜMIT CAN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA
BAĞLANTILILIK VE BAĞLANTISIZLIK

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMIT CAN

EYLÜL 2019

**SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA
BAĞLANTILILIK VE BAĞLANTISIZLIK**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK

Ümit CAN

Eylül 2019

©2019[Ümit CAN]

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı : Soft Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık ve Bağlantısızlık

Öğrencinin Adı Soyadı : Ümit CAN

Tez Savunma Tarihi : 13. 09. 2019

Fen Bilimleri Enstitü Onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Doç. Dr. Necati OLGUN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK

.....

Dr. Öğr. Üyesi Ali KARAKUŞ

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Ümit CAN

ABSTRACT

CONNECTEDNESS AND DISCONNECTEDNESS IN SOFT TOPOLOGY SPACES

CAN, Ümit

M. Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sabri BİRLİK

September 2019

55 pages

In this thesis, the concepts of soft set and soft topological space are investigated and the general attributes of soft topological spaces are reminded. Moreover, examples for the attributes of soft topological space are presented. Basic definitions and theorems, which were used in previous studies of connectedness in soft topological spaces and disconnectedness in soft topological space are presented. Next, a theorem, which tests a soft topological space connectedness and soft topological space disconnectedness is introduced and proved. Finally, a result is revealed and several examples are presented by using this theorem.

Key Words: Soft Set, Soft Topology, Open-Closed Sets, Connectedness,

Disconnectedness

ÖZET

SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK VE BAĞLANTISIZLIK

CAN, Ümit
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Eylül 2019
55 sayfa

Bu tezde, soft küme ve soft topolojik uzay kavramları incelendi ve soft topolojik uzayın genel özellikleri hatırlatıldı. Ayrıca soft topolojik uzayın özelliklerine örnekler verildi. Soft topolojik uzaylarda bağlantılık ve soft topolojik uzaylarda bağlantısızlıkta daha önce kullanılan temel tanım ve teorem verilip bir soft topolojik uzayda bağlantılık ve soft topolojik uzayda bağlantısızlığı test eden bir teorem verilip ispatlandı. Ayrıca bu teorem kullanılarak sonuç ortaya çıkarılıp örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler : Soft Küme, Soft Topoloji, Açık-Kapalı Kümeler, Bağlantılılık, Bağlantısızlık



Çok kıymetli aileme ...

TEŞEKKÜR

Bu tez süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak ta bana çok şey katan Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi hazırlarken ayırdığı değerli destekleri ile çalışmalarına katkıda bulunan Bekir ÇINGİ, Sultan BAŞARAN ve Şahin IŞIKLAR' a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen sevgili annem Hatice CAN, eşim Nazan CAN, kardeşim Özlem CAN 'a sabırlarından ötürü şükran ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT.....	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ.....	x
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.....	3
GENEL BİLGİLER.....	3
2. 1 Soft Kümeler.....	3
BÖLÜM 3.....	24
SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR.....	24
3. 1. Soft Topolojik Uzaylar.....	24
BÖLÜM 4.....	46
SOFT BAĞLANTILI VE SOFT BAĞLANTISIZ TOPOLOJİK UZAYLAR.....	46
4. 1 Soft Bağlantılı Topolojik Uzaylar.....	46
4. 2 Soft Bağlantısız Topolojik Uzaylar.....	50
BÖLÜM 5.....	53
SONUÇ VE TARTIŞMA.....	53
KAYNAKLAR.....	54

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 2. 1 Bir soft kümenin temsili tablosu	7
--	---



SEMBOLLER LİSTESİ

μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
E	Parametre kümesi
(F, E)	E parametresi ile F fonksiyonu
TE	E parametrelerinin değil kümesi
$(F, E)^c$	(F, E) soft kümesinin komplementi
Φ_E	E parametrelili boş (null) küme
$\tilde{\cap}$	Soft kesişim
$\tilde{\cup}$	Soft birleşim
$\tilde{\setminus}$	Soft fark
$(F, E)^r$	(F, E) soft kümesinin bağıl tamamlayıcı kümesi
$\in$	Elemanı olma
$\notin$	Elemanı olmama
$(F, E)^ $	(F, E) nin komplementi
X	Soft kümenin başlangıç evreni
(X, τ, E)	Topolojik uzay
$(F, E)^\circ$	(F, E) nin içi
$(F, E)^b$	(F, E) nin sınırı
$\overline{(F, E)}$	(F, E) nin kapanışı
$\tilde{\subseteq}$	Kapsar

$\mathbb{M}$

Kısıtlanmış kesişim

 $\neq$

Eşit değil

 $=$

Eşit

 $\Rightarrow$

ise (tek taraflı gerektirme)

 $\Leftrightarrow$

Ancak ve ancak (çift taraflı gerektirme)

 $C_{(F, E)}$

Soft değer kümesi sınıfı

 $\smile \mathfrak{R}$

Sınırlı fark

 $\mathcal{U}_A$

A parametresine bağlı göreceli küme

 $\widetilde{X}$

Soft topolojik uzayın başlangıç evreni

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Gerçek dünya bizim onu doğrudan anlamamız için çok karışıktır. Bizler gerçek dünyayı anlayabilmek için matematik ile modellemeler oluştururuz. Bu modellemeler gerçek dünyanın bize açılan pencereleridir. Ancak matematik modellemelerinin çok karışık olması ve kesin çözümler bulunamaması mühendislik, bilişim bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler, fizik, tıp ve birçok alanda sonuçlarda problem oluşturmaktadır. Bu alanlarda problemler modellenirken bilgilerin belirsizliği ve klasik modeller kullanılması başarısızlığa neden olur. Bunun temel sebeplerinden biri de insanların gerçek dünya hakkındaki bilgilerinin doğal ve çevresel olguların belirsizliğinden ya da olguları ölçerken kullanılan yolların yaklaşık olmasından kaynaklanmaktadır. Bu yüzden klasik küme teorileri hızlı ve tam birebir olması gereken durumları belirsizlikte ele aldığı net olarak vermez.

Birçok teori bu belirsizlikler ile başa çıkmak için ortaya konulmuştur. Fakat birçoğunun kendi içinde olduğu zorluktan kaynaklı olarak daha kapsayıcı yeni teoriler süreç içinde yerlerini almaktadır. Bu teoriler arasında ilk kullanılan Zadeh'in [1] 1965 yılında ortaya çıkardığı fuzzy teorisidir. Bu teori bulanık küme teorisi olarak da adlandırılmakla beraber zaman içinde teknoloji çağının da etkisiyle kullanım alanı genişlemiştir. Fuzzy küme teoriden farklı olarak aralık matematiği ve oyun teorisi şeklindeki yapıları modellemede kullanabilecek matematik yapıları ortaya çıkmıştır. Fuzzy kümesindeki elemanların üyelik fonksiyon değerlerini belirleme durumundaki zorluktan kaynaklı tüm araçların sadece belli türdeki belirsizlikleri modellemesi, farklı türdeki belirsizlikleri içeren durumlardaki problemlerin çözümünü yetersizleştirmektedir. Bu ve benzeri yetersizliklerden kurtulabilmek için sezgisel fuzzy [2, 3], kararsız küme teorisi [4], rough küme teorisi [5] gibi teoriler tanımlanmıştır. Ancak bu tanımlanan teorilerin bir parametrelendirme durumlarının yeterli olmaması bu teorileri matematik, ekonomi,

doğa bilimleri ve birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümünü oluşturmakta yeterli olamamışlardır. Bu yetersizliklerden başa çıkmak adına 1999 yılında Rus matematikçi Molodtsov (1999) tarafından Soft küme teorisi ortaya atılmıştır. Molodtsov soft kümeyi evrenin parametrelenmiş alt kümelerinin bir ailesi olarak tanımladı. Molodtsov soft küme teorisinde, Zadeh in bulanık küme teorisinde bir elemanın üyelik fonksiyonundaki değerini kurmadaki problemini ortadan kaldırmış olup yaklaşık tanımlamalarda hiçbir sınırlamanın olmaması soft kümeyi etkin hale getirmiştir. Daha sonra Maji ve arkadaşları (2003) Soft küme teorisinde soft küme iki soft kümenin eşitliği, ve, veya işlemleri, birleşim ve kesişimin soft küme tanımlarını yapıp De Morgan kanunun doğrulunu soft kümelerde göstermiştir. Ayrıca soft boş küme, soft evrensel küme soft kümenin komplementi tanımlarını yapmıştır. Ancak İrfan Ali ve arkadaşları (2009), Majinin hatalar yaptığını ve bu hataların özellikle de morgan kurallarında yapıldığını örneklerle vererek soft kümeler üzerindeki çeşitli işlemlerin analizine dayanarak sınırlanmış kesişme, sınırlanmış birleşme, sınırlanmış fark kavramları vermiştir. Ayrıca İrfan Ali ve arkadaşları Majinin soft ikili işlemlerde iki soft kümenin aynı alt kümeye sahip olmasının gerekmediğini ifade etmiştir. Chen ve arkadaşları (2005) parametre azaltma tanımlarına gittiler. N.Çağman ve H. Aktaş (2007) soft grup kavramını verdiler. Cheng Fu Yang (2008) ise Majinin bir lemmasının yanlış olduğunu örneklemiştir. N.Çağman ve arkadaşları (2011) soft küme tanımında değişiklik yaparak tanımladılar. M. Shabir ve M. Naz (2011) Soft topolojik uzay kavramını vermiş olup daha sonra soft açık, soft kapalı kümeleri tanımladılar. M. Shabir ve M. Naz (2011) daha sonra soft kümelerde komşuluk, iç, kapanış ve ayırma aksiyomlarını verdi. Ancak Won Keun Min (2011), M. Shabir ve M. Naz (2011) tarafından verilen bir lemma da hata olduğunu örnekledi. N. Çağman ve arkadaşları (2011) ise M. Shabir ve M. Naz (2011) [12] tarafından verilen soft topolojik uzay tanımını daha genişleterek verdiler. N. Çağman ve arkadaşları (2011) soft iç, sınır, kapanış, açık, kapalı, komşuluk, yığılma noktası ve soft taban gibi özellikleri tanımladılar. H. Shabir ve arkadaşları (2011) soft topolojik uzaylar ile ilgili kavramları yeniden tanımladı. Soft topolojik uzaylarda bağlantılık ve soft bağlantısızlığı E. Peyghan ve arkadaşları (2011, 2018) de tanımladı. Biz de soft bağlantılı ve soft bağlantısız topolojik uzayların fark edilmesi ile ilgili bir teorem ve bu teoremin sonucunda kullanılacak lemma verip örneklendireceğiz.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde soft küme, soft topolojik uzaylar ile ilgili bazı kavramlar verilecektir. [2], [6-11]

2. 1 Soft Kümeler

Bu bölümde soft küme kavramı üzerinde durulacaktır. Zorluklardan kaçınmak için uygun parametreler kullanılmalıdır.

Tanım 2. 1. 1 [5]

X başlangıç evreni ve E parametreler kümesi olsun. X in her bir E alt kümesinin F ye eşlenmesiyle oluşan (F, E) çiftine X de bir soft küme olarak adlandırılır.

Diğer bir deyişle bu soft küme X kümesinin parametrikleştirilmiş bir alt küme ailesidir. Her $F(\varepsilon)$ kümesi $\varepsilon \in E$ bu aileden (F, E) soft kümesinin ε eleman kümesi ya da soft kümenin ε yaklaşık eleman kümesi olarak düşünülebilir. Örnek olarak aşağıdaki örnekleri düşünelim.

Örnek 2. 1. 1 [5]

(F, E) soft kümesi ile X kişinin alacağı evin albenisi tanımlansın.

$X \rightarrow$ Düşünmekte olduğu ev kümesi

$E \rightarrow$ Parametreler kümesi (her bir parametre kelime ya da cümledir)

$E = \{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, etrafı yeşil, modern, iyi durumda, kötü durumda\}$
bu durumda soft kümeyi tanımlama, pahalı evler, güzel evler anlamına

gelir. Şu da söylemeye değerlidir ki $F(\varepsilon)$ gelişigüzel de olabilir. Bunların bazıısı $\emptyset$, bazıısı da boş olmayan kümelerin kesişimidir.

Örnek 2. 1. 2 [5]

Zadeh [2] in fuzzy kümesi soft kümenin özel bir parçası olarak düşünülebilir. A Fuzzy kümesi olsun ve μ_A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olsun. $\mu_A, [0, 1]$ de X e dönüşümüdür.

μ_A fonksiyonu için α – seviye kümesi ailesini düşünelim. Eğer F ailesini tanıyorsak aşağıdaki formül yardımıyla $\mu_A(x)$ fonksiyonu bulabiliriz.

$$\mu_A(x) = \sup \alpha$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$x \in F(\alpha)$$

Bu nedenle Zadeh'in her A fuzzy kümesi $(F, [0, 1])$ soft kümesi olarak düşünülebilir.

Örnek 2. 1. 3 [5]

(X, τ) bir topolojik uzay olarak alalım. X bir küme ve τ bir topoloji olmak üzere τ, X in alt kümelerinin bir ailesidir. Diğer bir deyişle τ, X in alt kümelerinin ailesi ve X in açık kümeleri olarak da adlandırılır.

$$T(x) = \{V \in \tau \mid x \in V\}, \quad x \text{ noktasının açık komşuluk ailesi.}$$

Soft küme teorisinde herhangi bir objenin tanımlanması ya da kurulum yolu bize klasik matematikte kullandığımız yollardan farklı olabilir. Klasik matematikte bir objenin matematiksel bir modelini kurar. Bu modelin kesin çözümünün kavram tanımını yaparız. Genellikle matematiksel modeller çok karışıktır ve tam çözümü bulamayız. Bu yüzden 2.adımda yaklaşık bir sonuç ortaya sunar ve sonucu hesaplarız. Soft küme teorisinde bu probleme karşıt yaklaşırız. Objenin ilk tanımının tam tersinden doğası gereği yaklaşık değerdir. Biz kesin çözüm kavramını ortaya

sunma ihtiyacı duymayız. Bir soft küme teorisinde yaklaşık tanımlarda hiçbir sınırlanmanın olmaması bu teoriyi uygun bir hale getirir ve pratikte kolayca uygulanabilir olur. Herhangi bir parametreyi kullanabiliriz. Genellikle kelimelerin yardımını, gerçek rakamlarla işlemleri, fonksiyon ve dönüşüm vs tercih ederiz. Bu demek oluyor ki üyelik fonksiyonu kurmadaki problem ya da buna benzer herhangi bir problem soft küme teorisinden kaynaklanmaz.

Örnek 2. 1. 4 [7]

(F, E) soft kümesi ile A kişinin alacağı evin çekiciliği belirlensin.

$X \rightarrow$ düşünmekte olduğu ev kümesi

$E \rightarrow$ Parametreler kümesi (Her bir parametre bir kelime yada cümle)

$E = \{pahalı; güzel; ahşap; ucuz; etrafı yeşil; modern; iyi durumda; kötü durumda\}$

bu durumda soft kümeyi tanımla pahalı evler, ucuz evler vs anlamına gelir.Şu da söylemeye değerdir ki varsayalım;

X evreninde 6 ev olsun ve $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ki burada

e_1 "pahalı" parametresini

e_2 "güzel" parametresini

e_3 "ahşap" parametresini

e_4 "ucuz" parametresini

e_5 "bahçeli" parametresini simgelerler.

Varsayalım ki

$$F(e_1) = \{h_2, h_4\},$$

$$F(e_2) = \{h_1, h_3\},$$

$$F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\},$$

$$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\},$$

$$F(e_5) = \{h_1\}.$$

(F, E) soft kümesi $\{F(e_i), i=1, 2, \dots, 8\}$, U kümesinin alt kümelerinin parametrik ailesidir. Evler $e \in E$ parametresiyle, F nin bir fonksiyonu olsun. Bu nedenle $F(e_1)$, işlem değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan "evler (pahalı)" anlamına gelir.

Bu nedenle (F, E) yi soft kümenin aşağıdaki gibi koleksiyonlar toplamı olarak görebiliriz.

$(F, E) = \{ \text{pahalı evler} = \{h_2, h_4\}, \text{güzel evler} = \{h_1, h_3\}, \text{ahşap evler} = \{h_3, h_4, h_5\}, \text{ucuz evler} = \{h_1, h_3, h_5\}, \text{bahçeli evler} = \{h_1\} \}$ yaklaşık iki bölüme ayrılır.

(i) bir tahmini p ; ve

(ii) u nun yaklaşık değer kümesi (yada basitçe u değer kümesi denir)

örneğin "pahalı evler = $\{h_2, h_4\}$ " yaklaşığı için aşağıdaki iki durum vardır:

(i) tahmini adı pahalı evler; ve

(ii) yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{h_2, h_4\}$

Tablo 2. 1 : Bir soft kümenin temsili tablosu

X	"PAHALI"	"GÜZEL"	"AHŞAP"	"UCUZ"	"ETRAFI YEŞİL"
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Bu nedenle (F, E) soft kümesi aşağıda verilen yaklaşıklar koleksiyonu olarak görülebilir.

$$(F, E) = \{p_1 = u_1, p_2 = u_2, \dots, p_n = u_n\}$$

Bir bilgisayarda soft bir kümeyi depolama amacı için, biz soft kümeyi tablo 1 deki şekilde sunabilirdik (yukarıdaki esnek küme örneğinden bahsediliyor.)

Tanım 2. 2 [7]

(F, E) soft kümesinin bütün değer kümelerinin sınıfına soft değer kümesi sınıfı denir ve $C_{(F, E)}$ ile gösterir.

örnek 2. 1. 4 için $C_{(F, E)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ açıktır ki $C_{(F, E)} \subseteq P(X)$

Tanım 2. 3 [7]

(F, A) ve (G, B) , X evrensel kümesinin iki alt kümesi için, (F, A) kümesi (G, B) nin alt kümesidir. Eğer,

(i) $A \subset B$ ve

(ii) $\forall \varepsilon \in A, F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ benzer yaklaşıklardır.

Biz $(F, A) \subset (G, B)$ şeklinde yazabiliriz.

$(F, A), (G, B)$ nin bir soft kuvvet kümesi olduğunda $(G, B), (F, A)$ nin bir soft alt kümesidir. Biz bunu $(F, A) \tilde{\supset} (G, B)$ ile gösteririz.

Tanım 2. 4 [7]

(F, A) ve (G, B) , X in iki soft alt kümeleri olmak üzere eğer $(F, A), (G, B)$ nin bir soft alt kümesi ve $(G, B), (F, A)$ nin bir soft alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) soft eşit iki küme olduğu söylenir.

Örnek 2. 1. 5

$A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. Açıktır ki $A \subset B$

(F, A) ve (G, B) aynı X evreninde iki soft küme olsunlar

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ için

$G(e_1) = \{h_2, h_4\}, G(e_2) = \{h_1, h_3\}, G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ ve $G(e_5) = \{h_1\}$

$F(e_1) = \{h_2, h_4\} \quad F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\} \quad F(e_5) = \{h_1\}$

bu nedenle $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$

Tanım 2. 1. 5 [7]

$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ bir parametreler kümesi olsun. E nin değil kümesi $T E$ olarak gösterilir ve $T E = \{\neg e_1, \neg e_2, \dots, \neg e_n\}$ olarak tanımlanır ve burada $T e_i = e_i$ nin değili (T ve $\neg$ farklı işlemler olduğu not edilebilir) Devamındaki sonuçlar açıktır.

Önerme 2. 1. 1 [7]

1. $T(TA) = A$

2. $T(A \cup B) = (TA \cup TB)$

3. $T(A \cap B) = (TA \cap TB)$

Örnek 2. 1. 6 [7]

örnek 2. 1. 1 i ele alalım. Burada $TE = \{ \text{pahalı olmayan, güzel olmayan, ahşap olmayan, ucuz olmayan, çevresi yeşillik olmayan} \}$

Tanım 2. 1. 6 [7]

Bir Soft kümenin komplement kümesi, (F, A) soft küme olmak üzere $(F, A)^C$ olarak gösterilir. Ve $(F, A)^C = (F^C, IA)$ ile tanımlanır.

Buradan $F^C : IA \rightarrow P(U)$, $F^C(\alpha) = U - F(I\alpha)$, $\forall \alpha \in IA$ şeklinde verilen bir fonksiyondur. F^C ye F soft komplement fonksiyonu diyelim.

$$(F^C)^C = F \text{ ve } ((F, A)^C)^C = (F, A) \text{ dır.}$$

Örnek 2. 1. 7 [7]

Örnek 2. 1. 1 i düşünelim. Burada $(F, E)^C = \{ \text{pahalı olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_5, h_6\}$, güzel olmayan evler $= \{h_2, h_4, h_5, h_6\}$, ahşap olmayan evler $= \{h_1, h_2, h_6\}$, ucuz olmayan evler $= \{h_2, h_4, h_6\}$, etrafı yeşil olmayan evler $= \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\} \}$

Tanım 2. 1. 7 [7]

Boş soft küme : (F, A) , U da bir soft kümesi eğer $\forall \varepsilon \in A, F(\varepsilon) = \emptyset$ ise bir boş (null) sof küme denir ve Φ ile gösterilir.

Örnek 2. 1. 8 [7]

Varsayalım ki;

U düşünmekte olunan ahşap evler kümesi

A da parametrelerin kümesi

U evreninde 5 tane ev olsun ve aşağıdaki gibi verilsin.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $A = \{tuğla; çamurlu; çelik; taş\}$

(F, A) soft kümesi "evin yapısını" tanımlar. (F, A) soft kümeleri ise

$F(Tuğla) \rightarrow$ Tuğladan yapılmış

$F(Çamurlu) \rightarrow$ Çamurdan yapılmış

$F(Çelik) \rightarrow$ Çelikten yapılmış

$F(Taş) \rightarrow$ Taştan yapılmış evler anlamına gelecek şekilde tanımlanır.

(F, A) soft kümeleri aşağıda verildiği gibi yaklaşıklar toplamıdır.

$(F, A) = \{ tuğladan yapılmış evler = \emptyset, çamur evler = \emptyset, çelikten yapılmış evler = \emptyset, taş evler = \emptyset \}$ burada (F, A) bir boş soft kümedir.

Tanım 2. 1. 8 [7]

Mutlak soft küme: U üzerinde bir (F, A) soft kümesi, eğer $\forall \varepsilon \in A, F(\varepsilon) = U$ ise

mutlak soft kümesidir denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıktır ki, $\tilde{A}^C = \Phi$ ve $\Phi^C = \tilde{A}$

Örnek 2. 1. 9 [7]

Varsayalım ki ;

U alınması düşünülen ahşap evlerin kümesidir.

B Parametreler Kümesidir.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $B = \{ tuğla olmayan; çamur olmayan; çelik olmayan; taştan olmayan \}$ olarak verilsin. (G, B) soft kümesi " evlerin yapısı " olarak tanımlanır. (G, B) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$G(tuğla olmayan), tuğladan inşa edilmemişler evler$

$G(çamur olmayanlar), çamurdan olmayan evler$

G (çelik olmayanlar) , çelikten inşa edilmemiş evler

G (taştan olmayanlar) ise taştan inşa edilmeyen evlerdir.

(G, B) soft kümesi aşağıda gösterildiği gibi yaklaşıklar toplamıdır ;

$(G, B) = \{ \text{tuğladan yapılmamış evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} , \text{çamurdan olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} , \text{çelikten yapılmamış evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} , \text{taştan yapılmamış evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \} .$

(G, B) kümesi mutlak soft kümedir.

Molodtsov tarafından verilen öneriler ışığında iki soft küme üzerinde ve, veya kavramlarını aşağıdaki gibi verdik. [7]

Tanım 2. 1. 9 [7]

Eğer (F, A) ve (G, B) iki soft küme ise " (F, A) ve (G, B) " işlemi $(F, A) \wedge (G, B)$ ile gösterilir. $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ buradan

$H(\alpha\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta) , \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ olarak ifade edilir.

Örnek 2. 1. 10 [7]

(F, A) yı evlerin fiyatını tanımlayan soft küme olduğunu düşünelim. Varsayalım ki

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\} , A = \{ \text{çok pahalı ; pahalı ; ucuz} \}$ ve

$B = \{ \text{güzel ; çerçevesi yeşil ; ucuz} \} .$

$F(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\} , F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\} , F(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

$G(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\} , G(\text{çerçevesi yeşil}) = \{h_5, h_6, h_8\} , G(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

olsun. O zaman $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B) : H(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_7\} , H$

$(\text{çok pahalı, çevresi yeşil}) = \{h_5\} , H(\text{çok pahalı , ucuz}) = \emptyset , H(\text{pahalı, güzel}) = \{h_3\} ,$

$H(\text{pahalı , çevresi yeşil}) = \{h_5\}$, $H(\text{pahalı , ucuz}) = \emptyset$, $H(\text{ucuz , güzel}) = \emptyset$, $H(\text{ucuz , çevresi yeşil}) = \{h_6\}$, $H(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ dır.

Tanım 2. 1. 10 [7]

Eğer (F, A) ve (G, B) iki soft küme ise, o halde " (F, A) veya (G, B) " , $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilir ve $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ dir. Böylece $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$, $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ dir.

Örnek 2. 1. 11 [7]

yukarıdaki örnek 2.1.10 'u düşünelim. Göreceğiz ki $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$

$O(\text{çok pahalı ve güzel}) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$, $O(\text{çok pahalı, çevresi yeşil}) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$, $O(\text{çok pahalı, ucuz}) = \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{pahalı, güzel}) = \{h_1, h_2, h_5, h_7\}$, $O(\text{pahalı, çevresi yeşil}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$, $O(\text{pahalı, ucuz}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{ucuz, güzel}) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{ucuz, çevresi yeşil}) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

Devamındaki De Morgan kurallarının doğru olduğunu görüyoruz.

Önerme 2. 1. 2 [7]

$$(i) \quad ((F, A) \vee (G, B))^C = (F, A)^C \wedge (G, B)^C$$

$$(ii) \quad ((F, A) \wedge (G, B))^C = (F, A)^C \vee (G, B)^C$$

İspat: (i) Varsayalım ki $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olsun. Buradan

$$((F, A) \vee (G, B))^C = (O, A \times B)^C = (O^C, I(A \times B))$$

$$\begin{aligned} (F, A)^C \wedge (G, B)^C &= (F^C, IA) \wedge (G^C, IB) \\ &= (J, IA \times IB) = (J, I(A \times B)) \end{aligned}$$

ve $J(x, y) = F^C(x) \cap G^C(y)$ dir.

Şimdi, $(\imath \alpha, \imath \beta) \in I(A \times B)$ alalım. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
 O^C(\imath \alpha, \imath \beta) &= U - o(\alpha, \beta) \\
 &= U - [F(\alpha \cup G(\beta))] \\
 &= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)] \\
 &= F^C(\imath \alpha) \cap G^C(\imath \beta) \\
 &= J(\imath \alpha, \imath \beta)
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla O^C ve J aynıdır.

(ii) Varsayalım ki, $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu nedenle ,

$$((F, A) \wedge (G, B))^C = (H, A \times B)^C = (H^C, I(A \times B))$$

Şimdi, $(F, A)^C \vee (G, B)^C = (F^C, IA) \vee (G^C, IB),$

$$= (K, IA \times IB), \text{ buradan } K(x, y) = F^C(x) \cup G^C(y)$$

$$= (K, I(A \times B)).$$

Şimdi de $(\imath \alpha, \imath \beta) \in I(A \times B)$ alalım. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
 H^C(\imath \alpha, \imath \beta) &= U - H(\alpha, \beta), \\
 &= U - (F(\alpha) \cap G(\beta)), \\
 &= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)], \\
 &= F^C(\imath \alpha) \cup G^C(\imath \beta),
 \end{aligned}$$

$$=K(\alpha, \beta).$$

Sonuç olarak H^C ve K aynıdır.

Tanım 2. 1. 11 [7]

(F, A) ve (G, B) iki soft kümenin X ortak evreni üzerinde birleşimi (H, C) soft kümesidir ve $\forall e \in C$ için $C = A \cup B$,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A - B \\ G(e), & e \in B - A \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

Biz bunu $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ diye göstereceğiz. Örnek 2. 1. 11 de

$(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$, dolayısıyla H (çok pahalı) = $\{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, H (pahalı) = $\{h_1, h_3, h_5\}$, H (ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$, H (güzel) = $\{h_2, h_3, h_7\}$ ve H (çevresi yeşil) = $\{h_5, h_6, h_8\}$

Tanım 2. 1. 12 [7]

X ortak evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft kümesinin kesişimi (H, C) soft kümesidir $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e)$ yada $G(e)$, (her ikisi de aynı kümedir). Biz $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ yazarız. Yukarıdaki örnekte ,

(F, A) ve (G, B) şeklindeki iki soft kümenin kesişimi (H, C) soft kümesidir. Böylece $C = \{ucuz\}$ ve $H(ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ olup aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Önerme 2. 1. 3 [7]

(i) $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$,

(ii) $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$,

(iii) $(F, A) \tilde{\cup} \Phi = \Phi$, Φ boş soft kümedir.

(iv) $(F, A) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$,

(v) $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$, $\tilde{A}$ mutlak soft kümedir.

(vi) $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A)$

Önerme 2. 1. 4 [7]

$$(i) \left((F, A) \tilde{\cup} (G, B) \right)^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c,$$

$$(ii) \left((F, A) \tilde{\cap} (G, B) \right)^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c,$$

İspat:

(i) Varsayalım $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, A \cup B)$ olsun. Buradan

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in A - B, \\ G(\alpha), & \alpha \in B - A, \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \alpha \in A \cap B, \end{cases}$$

$$\text{Bu nedenle, } \left((F, A) \tilde{\cup} (G, B) \right)^c = (H, A \cup B)^c,$$

$$= (H^c, \neg A \cup \neg B),$$

O halde $\forall \neg \alpha \in \neg A \cup \neg B$ için $H^c(\neg \alpha) = \neg H(\alpha)$

$$\text{Ayrıca } H^c(\neg \alpha) = \begin{cases} F^c(\neg \alpha), & \neg \alpha \in \neg A - \neg B, \\ G^c(\neg \alpha), & \neg \alpha \in \neg B - \neg A, \\ F^c(\neg \alpha) \cup G^c(\neg \alpha), & \neg \alpha \in \neg A \cap \neg B, \end{cases}$$

$$\text{tekrar, } (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cup} (G^c, \neg B),$$

$= (K, IA \cup IB)$ dir. Böylece

$$K(\alpha) = \begin{cases} F^c(\alpha), & \alpha \in IA - IB, \\ G^c(\alpha), & \alpha \in IB - IA, \\ F^c(\alpha) \cup G^c(\alpha), & \alpha \in IA \cap IB, \end{cases}$$

sonuç olarak H^c ile K nin aynı olduğu görülür.

(ii) Varsayalım ki $((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) = (H, A \cap B)$ olsun. Bu nedenle

$$((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (H^c, IA \cap IB)$$

$$(F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c = (F^c, IA) \tilde{\cap} (G^c, IB),$$

$$= (K, IA \cap IB), \quad \forall \alpha \in (IA \cap IB),$$

$$K(\alpha) = F^c(\alpha) \text{ ya da } G^c(\alpha),$$

$$= F(\alpha) \text{ ya da } G(\alpha), \quad \alpha \in A \cap B,$$

$$= H(\alpha),$$

$$= H^c(\alpha) \quad \text{böylece } K \text{ ve } H^c \text{ aynı fonksiyondur.}$$

Aşağıdaki önermeler basittir ve bu nedenle ispatları olmadan verilmiştir.

Önerme 2. 1. 5 [7]

Eğer (F, A) , (G, B) ve (H, C) X de 3 soft küme olsun.

$$(i) (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cup} (H, C),$$

$$(ii) (F, A) \tilde{\cap} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) \tilde{\cap} (H, C),$$

$$(iii) (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cap} ((F, A) \tilde{\cup} (H, C)),$$

$$(iv) (F, A) \tilde{\cap} \left((G, B) \tilde{\cup} (H, C) \right) = \left((F, A) \tilde{\cap} (G, B) \right) \tilde{\cup} \left((F, A) \tilde{\cap} (H, C) \right).$$

Önerme 2. 1. 6 [7]

Eğer (F, A) , (G, B) ve (H, C) X de 3 soft küme olsun.

$$(i) (F, A) \vee ((G, B) \vee (H, C)) = ((F, A) \vee (G, B)) \vee (H, C),$$

$$(ii) (F, A) \wedge ((G, B) \wedge (H, C)) = ((F, A) \wedge (G, B)) \wedge (H, C),$$

$$(iii) (F, A) \vee ((G, B) \wedge (H, C)) = ((F, A) \vee (G, B)) \wedge ((F, A) \vee (H, C)),$$

$$(iv) (F, A) \wedge ((G, B) \vee (H, C)) = ((F, A) \wedge (G, B)) \vee ((F, A) \wedge (H, C)).$$

İ.Ali [11] ve arkadaşları önerme 2. 1. 14 [7] ün (i) koşulunun ve değil kümesini komplement koşulları sağlamadığına dair aşağıdaki aksi örnekleri verdiler.

Örnek 2. 1. 11 [11]

Diyelim ki evrende 5 tane ev var. Evrenimiz X olmak üzere $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$
 $A = \{ucuz, güzel\}$ ve $B = \{rahat, güzel\}$ olsun. X ortak evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri Bay C ve Bay D nin alacağı evlerin çekiciliğini açıklar. O zaman,

$$\begin{aligned} H'(e) &= (F(e) \cap G(e))^c \\ &= (F(e))^c \cup (G(e))^c \\ &= (F^c(e)) \cup (G^c(e)) \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Maji ye göre (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin koleksiyonu aşağıdaki gibi:

$$(F, A) = \{ ucuz evler = \{h_1, h_3, h_5\}, güzel evler = \{h_1, h_2, h_4\} \}, \text{ ve}$$

$(G, B) = \{ \text{rahat evler} = \{h_2, h_5\}, \text{güzel evler} = \{h_2, h_4\} \}$, sonra
 $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = \{ \text{ucuz evler} = \{h_1, h_3, h_5\}, \text{rahat evler} = \{h_2, h_5\}, \text{güzel evler} = \{h_1, h_2, h_4\} \}$
ve böylece önerme 2.1.14 den elimizdeki $\left((F, A) \tilde{\cup} (G, B) \right)^c = \{ \text{ucuz olmayan}$
 $\text{evler} = \{h_2, h_4\} , \text{rahat olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_4\}, \text{güzel olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_4\} \}$
 $(F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c = \{ \text{ucuz olmayan evler} = \{h_2, h_4\}, \text{rahat olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_4\}$
 $, \text{güzel olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_5\} \}$ buradan $\left((F, A) \tilde{\cup} (G, B) \right)^c \neq (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c$

olduğu görülür.

Örnek 2. 1. 12 [11]

E evrendeki parametreler kümesi ve $A = \{e_1, e_2, e_3\}, B = \{e_3, e_4, e_5\}$ kümeleri E nin alt kümesi olmak üzere,

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ da (F, A) ve (G, B) iki soft küme öyle ki

$$F(e_1) = \{h_1, h_2\},$$

$$F(e_2) = \{h_3, h_4\},$$

$$F(e_3) = \{h_2, h_3, h_6\},$$

$$G(e_4) = \{h_5\},$$

$$G(e_5) = \{h_6\}$$

$$G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5, h_6\},$$

$$(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, A \cup B)$$

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A-B, \\ G(e), & e \in B-A, \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B, \end{cases}$$

Sonra,

$$H(e_1) = F(e_1) = \{h_1, h_2\},$$

$$H(e_2) = F(e_2) = \{h_3, h_4\},$$

$$H(e_4) = G(e_4) = \{h_5\}, H(e_5) = G(e_5) = \{h_6\},$$

$$H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}, \text{ böylece } \gamma_{e_3} \in IA \cap IB \text{ nin}$$

tanım 2.1.6[7] den, $H^C(\gamma_{e_3}) = U - H(e_3) = \{h_1\}$ diğer taraftan

$$(F^C, IA) \tilde{\cup} (G^C, IB) = (K, IA \cup IB)$$

$$K(\gamma_e) = \begin{cases} F^C(\gamma_e), & \gamma_e \in IA-IB, \\ G^C(\gamma_e), & \gamma_e \in IB-IA, \\ F^C(\gamma_e) \cup G^C(\gamma_e), & \gamma_e \in IA \cap IB, \end{cases}$$

Bundan dolayı $\gamma_{e_3} \in IA \cap IB$,

$$\begin{aligned} K(\gamma_{e_3}) &= F^C(\gamma_{e_3}) \cup G^C(\gamma_{e_3}) = (U - F(e_3)) \cup (U - G(e_3)) \\ &= \{h_1, h_4, h_5\} \cup \{h_1, h_2\} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \end{aligned}$$

Açıkça $K(\gamma_{e_3}) \neq H^C(\gamma_{e_3})$ için $\gamma_{e_3} \in IA \cap IB$ sonuç olarak,

$$\left((F, A) \tilde{\cup} (G, B) \right)^C \neq (F, A)^C \tilde{\cup} (G, B)^C \text{ önerme 2.1.14[7] deki (i) nin yanlış}$$

olduğunu gösterir. Önerme 2. 1. 14 [7] ün (ii) durumu içinse ek olarak,

$$A \cap B = \{e_3\}, F(e_3) = \{h_2, h_3, h_6\} \text{ ve } G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5, h_6\} \text{ üstteki örnekte var}$$

$$F(e_3) \neq G(e_3) \text{ ve böylece } (F, A) \tilde{\cap} (G, B) \text{ olmadığı görünmekte olup}$$

$\left((F, A) \tilde{\cap} (G, B) \right)^c$ aynı zamanda 2. 1. 14 [7] (ii) eşitliğini kontrol etmeyi imkanı

kılan yoktur. Bu nedenle (ii) deki ifadenin belirsiz bir ifade olduğu sonucuna varıyoruz.

Tanım 2. 1. 13 [11]

(F, A) ve (G, B) U ortak evreninde iki soft küme olmak üzere $A \cap B \neq \emptyset$ için (F, A) ve (G, B) için **sınırlı kesişme** $(F, A) \mathbb{M} (G, B)$ olarak tanımlanır. $(F, A) \mathbb{M} (G, B) = (H, C)$ ve $C = A \cap B, \forall c \in C, H(c) = F(c) \cap G(c)$ dır.

Tanım 2. 1. 14 [11]

(F, A) ve (G, B) aynı X evreninde iki soft küme öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere (F, A) ve (G, B) için **Sınırlı fark** $(F, A) \smile_{\mathfrak{R}} (G, B)$ olarak tanımlanır. $(F, A) \smile_{\mathfrak{R}} (G, B) = (H, C), C = A \cap B, \forall c \in C$ için $H(c) = F(c) - G(c)$ ifadesi $F(c)$ ve $G(c)$ kümelerinin farkı şeklinde gösterilir.

Tanım 2. 1. 15 [11]

X başlangıç evreni olmak üzere, E de evrendeki parametre kümesi ve $A \subset E$ olsun.

(i) A parametreleri için (F, A) nın göreceli boş kümesi Φ_A ile gösterilir. Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = X$ ise

(ii) A parametreleri için (G, A) nın göreceli kümeleri $\mathcal{U}_A$ ile gösterilir. Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = X$ ise

Kesinlikle X soft evreninde E parametrelerinin bütün göreceli soft kümesi $\mathcal{U}_E$ dır.

Tanım 2. 1. 16 [11]

(F, A) soft kümesinin bağıl tamamlayıcı kümesi $(F, A)^f$ ile gösterilir. $(F, A)^f = (F^f, A)$ ile tanımlanır. $F^f : A \rightarrow P(X)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere

$F^r(\alpha) = X - F(\alpha)$, $\forall \alpha \in A$ için. Açıkça, $(F, A)^r = \mathcal{U}_E \smile_{\mathfrak{R}} (F, A)$ ve $((F, A)^r)^r = (F, A)$, yukarıda yeni tanımlanan tamamlayıcı kümenin dikkate alınması önemlidir. Majinin [7], IA olarak A soft kümelerinin komplement gösterimi yerine $(F, A)^r$ hala A parametre kümesinin komplementidir. Ancak iler ki kısımlarda önemle vurgulanır ki tanım 2. 1. 6 [7] da ki komplement'i sözde tamamlayıcı olarak kullanacağız.

Tanım 2 .1. 17 [11]

(F, A) ve (G, B) kümeleri X da iki soft küme olsun. $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere (F, A) ve (G, B) nin **kısıtlanmış birleşimi** $(F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B)$ olarak tanımlanır. $(F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B) = (H, C)$, $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ için $H(c) = F(c) \cup G(c)$

İrfan Ali ve arkadaşları soft kümelerde göreceli komplement, sınırlı birleşim ve sınırlı kesişim üzerine aşağıdaki teoremleri verip ispatlamışlardır. Temel etken Maji [7] nin iki soft kümenin ortak parametre alt kümesinde işlem yapmasına karşılık olarak vermişlerdir.

Teorem 2. 1. 1 [11]

(F, A) ve (G, B) kümeleri X evreninde iki soft küme olsun. Öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere ,

$$(1) \left((F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B) \right)^r = (F, A)^r \mathbin{\boxtimes} (G, B)^r ,$$

$$(2) \left((F, A) \mathbin{\boxtimes} (G, B) \right)^r = (F, A)^r \cup_{\mathfrak{R}} (G, B)^r$$

İspat

$$(1) (F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B) = (H, C) \text{ olsun. } H(c) = F(c) \cup G(c), \forall c \in C = A \cap B \neq \emptyset$$

için $\left((F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B) \right)^r = (H, C)^r$ dan tanım olarak

$$H^r(c) = X - [F(c) \cup G(c)] = [X - F(c)] \cap [G(c)], \forall c \in C. \text{ Şimdi, } (F, A)^r \mathbin{\boxtimes}$$

$$(G, B)^r = (F^r, A) \mathbin{\boxtimes} (G^r, B) = (K, C) \text{ burada } C = A \cap B \text{ yani tanım gereği}$$

$$K(c) = F^x(c) \cap G^x(c) = (X - F(c)) \cap (X - G(c)) = H^x(c), \forall c \in C \text{ bundan dolayı}$$

$$((F, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G, B))^x = (F, A)^x \mathbb{M} (G, B)^x.$$

$$(2) (F, A) \mathbb{M} (G, B) = (H, C) \text{ olsun. } H(c) = F(c) \cap G(c), \forall c \in C = A \cap B \neq \emptyset$$

$$((F, A) \mathbb{M} (G, B))^x = (H, C)^x \text{ tanımından}$$

$$H^x(c) = X - (F(c) \cap G(c)) = [X - F(c)] \cup [X - G(c)], \forall c \in C \text{ için,}$$

$$\text{Şimdi, } (F, A)^x \cup_{\mathfrak{R}} (G, B)^x = (F^x, A) \cup_{\mathfrak{R}} (G^x, B) = (K, C) \text{ burada } C = A \cap B \text{ yani}$$

$$\text{tanım gereği } \forall c \in C, K(c) = F^x(c) \cup G^x(c) = (X - F(c)) \cup (X - G(c)) = H^x(c)$$

bundan dolayı $((F, A) \mathbb{M} (G, B))^x = (F, A)^x \cup_{\mathfrak{R}} (G, B)^x$. Benzer teknikler kullanılarak aşağıdaki De Morgan yasalarının genişletilmiş kesişim, birleşim ve olumsuz tamamlayıcı için soft küme teorisinde geçerli olduğunu kanıtlayabiliriz.

Cheng Fu Yang [10], Majinin [7] önerme 2.1.3 (iii) nin yanlış olduğunu iddia ederek aşağıdaki örneği vermiştir.

Örnek 2.1.13 [10]

X düşünülen ahşap evlerin kümesidir; A ve B nin ikisi de parametre kümesidir. U evreni beş evden oluşmaktadır.

$$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}, A = \{brick; mud; steel; stone\}, B = \{wooden\}$$

(F, A) ve (G, B) "evlerin inşasını" açıklar. Soft küme (F, A) şöyle tanımlanır:

$F(brick)$ tuğladan inşa edilmiş evler anlamına gelir, $F(mud)$ çamur evleri anlamına gelir, $F(steel)$ çelik yapı evler anlamına gelir ve $F(stone)$ taş evler inşa anlamına gelir. Soft küme (F, A) aşağıdaki gibi yaklaşımların toplanması;

$(F, A) = \{ \text{tuğladan yapılmış evler} = \emptyset, \text{çamur evleri} = \emptyset, \text{çelik yapı evler} = \emptyset, \text{taştan evler} = \emptyset \}$ Açıkçası (F, A) null soft ayarlanmış. $G(wooden)$ ahşap evler anlamına gelir ve (G, B) olarak tanımlanır. Soft küme (G, B) aşağıdaki gibi yaklaşımların toplanmasıdır;

$(G, B) = \{ahşap \text{ evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}\}$ olmak üzere

$(G, B) \tilde{\cup} (F, A) = (G, B) \tilde{\cup} \Phi = (H, C)$ sonra

$C = A \cup B = \{wooden, brick, mud, steel, stone\}$, tanım 2.1.11[7] den

$H(wooden) = G(wooden) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \neq \emptyset$ böylece (H, C) bir boş (null) değil.

Bu ima $(F, A) \tilde{\cup} \Phi = \Phi$ olduğunu tutmaz.



BÖLÜM 3

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde soft topolojik uzay kavramı ve soft topolojik uzayın bazı özellikleri üzerinde durulacaktır. [12-16], bu bölümde X ile başlangıç evrenini ve E ile parametre kümesini belirtiyoruz.

Tanım 3. 1. 1 [12]

X başlangıç evreni ve E parametre kümesi olsun.

X de (F, E) ve (G, E) iki soft küme olmak üzere $(F, E) \setminus (G, E)$ kümesi (H, E) fark kümesi olarak tanımlanır. $\forall e \in E, H(e) = F(e) \setminus G(e)$ dir.

Tanım 3. 1. 2 [12]

(F, E) soft kümesi X evreninde ve $x \in X$. Biz $x \in (F, E)$ yazımını $x \in F(\alpha)$, $\forall \alpha \in E$ yazımına aittir diye okuruz. Herhangi bir $x \in X$ için $x \notin (F, E)$ olup bir $\alpha \in E$ için $x \notin F(\alpha)$ dir.

Tanım 3. 1. 3 [12]

Y soft kümesi, X başlangıç evrenin boş olmayan alt kümeleri olmak üzere $Y(\alpha) = Y$ için X in üzerinde (Y, E) soft kümeleri $\tilde{Y}$ ile nitelendirilir. Özellikle $\tilde{X}$ ile (X, E) nin gösterimi yapılır.

Tanım 3. 1. 4 [12]

$x \in X$ için (x, E) , X üzerindeki soft kümeleri $\forall \alpha \in E$ için $x(\alpha) = \{x\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3. 1. 5 [12]

Y kümesi X in boş olmayan alt kümesi ve X üzerinde (F, E) soft bir küme olmak üzere, (F, E) nin soft alt kümelerini üzerindeki Y ler $({}^Y F, E)$ ile şöyle tanımlanır

$${}^Y F(\alpha) = Y \cap F(\alpha), \forall \alpha \in E$$

Diğer bir deyişle $({}^Y F, E) = \tilde{Y} \cap (F, E)$.

Tanım 3. 1. 6 [12]

Bir (F, A) soft kümesinin komplementinin görüntüsü $(F, A)'$ ile gösterilir ve $(F, A)' = (F', A)$ ile tanımlanır.

$$F' : A \rightarrow P(X) \text{ dönüşümü ile } F'(\alpha) = X - F(\alpha), \forall \alpha \in A$$

Önerme 3. 1. 1 [12]

(F, E) ve (G, E) , X de soft kümeler olmak üzere,

$$(1) \quad ((F, E) \cup (G, E))' = (F, E)' \cap (G, E)',$$

$$(2) \quad ((F, E) \cap (G, E))' = (F, E)' \cup (G, E)',$$

İspat

(1) Burada $(F, E) \cup (G, E) = (H, E)$ olsun. $\forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ dir.

$$\text{Dolayısıyla} \quad H'(e) = (F(e) \cup G(e))^c$$

$$= (F(e)^c) \cap (G(e)^c)$$

$$= (F^c(e)) \cap (G^c(e)) \quad , \quad \forall e \in E \text{ olduğundan} \quad ,$$

$$(H, E)' = (F, E)' \cap (G, E)' \text{ ve benzer olarak } ((F, E) \cup (G, E))' = (F, E)' \cap (G, E)'$$

$$(2) (F, E) \cap (G, E) = (H, E) \text{ olsun. } H(e) = F(e) \cap G(e), \forall e \in E$$

ve

$$\begin{aligned} H'(e) &= (F(e) \cap G(e))^c \\ &= (F(e))^c \cup (G(e))^c \\ &= (F^c(e)) \cup (G^c(e)), \forall e \in E \end{aligned}$$

olduğundan

$$(H, E)' = (F, E)' \cup (G, E)'$$

benzer olarak

$$((F, E) \cap (G, E))' = (F, E)' \cup (G, E)'$$

Tanım 3. 1. 7 [12]

τ ile X soft kümelerinin bir koleksiyon olmak üzere, τ X de bir topolojidir.

$$(1) \Phi, X \in \tau$$

(2) τ ya ait sonlu sayıdaki soft kümenin birleşimi yine τ ya aittir.

(3) τ nun içindeki herhangi iki kümenin kesişimi τ ya aittir.

Dolayısıyla (X, τ, E) üçlüsü X üzerinde bir topolojik uzaydır.

Tanım 3. 1. 8 [12]

(X, τ, E) , X soft kümesi üzerinde bir topolojik uzay olmak üzere τ nun üyeleri X in açık soft kümeleridir.

Tanım 3. 1. 9 [12] (X, τ, E) , X soft kümesi üzerinde bir topoloji olmak üzere X de bir (F, E) soft kümesinin X içinde bir kapalı kümesidir. Eğer (F, E) soft kümesinin komplementi $(F, E)^{\perp}$, τ ya aitse $(F, E)^{\perp}$, X de kapalıdır.

Önerme 3. 1. 2 [12]

(X, τ, E) bir soft uzay olsun.

- (1) $\Phi, \tilde{X}$ kümeleri X de kapalı soft kümelerdir.
- (2) Herhangi sayıda soft kapalı kümenin kesişimi X de bir soft kapalı kümedir.
- (3) Herhangi iki kapalı soft kümenin birleşimi X de kapalı bir soft kümedir.

İspat

Soft topolojik uzay tanımına De Morgan kurallarını önerme 3. 1. 1 deki şekilde uygularsak ispat biter.

Tanım 3. 1. 10 [12]

X başlangıç evreninde herhangi bir küme olmak üzere, E parametre kümeleri ve

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}\}, \tau \text{ ya } X \text{ üzerinde ayrık olmayan topoloji denir.}$$

Tanım 3. 1. 11 [12]

X başlangıç evreninde bir küme, E parametreler kümesi olmak üzere τ X üzerinde tanımlanabilecek tüm soft kümelerin koleksiyonudur. Dolayısıyla τ , X de soft ayrık topoloji ve (X, τ, E) , X de bir soft ayrık uzay olarak tanımlarız.

Önerme 3. 1. 3 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay olsun. O zaman $\tau_\alpha = \{F(\alpha) | (F, E) \in \tau\}$, $\forall e \in E$ için X de bir soft topolojidir.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in E$ için, $\tau_\alpha = \{F(\alpha) | (F, E) \in \tau\}$ olsun. τ_α bir topolojidir :

- (1) $\Phi, \tilde{X} \in \tau$ için $\Phi, \tau \in \tau_\alpha$
- (2) $\{F_i(\alpha) | i \in I\}$, τ_α da kümeler koleksiyonu olsun.

$\forall i \in I$ için $(F_i, E) \in \tau$ olduğundan $\cup_{i \in I} (F_i, E) \in \tau$. Böylece $\cup_{i \in I} F_i(\alpha) \in \tau_\alpha$

(3) $(F, E), (G, E) \in \tau$ için $F(\alpha), G(\alpha) \in \tau_\alpha$ dir. Böylece $(F, E) \cap (G, E) \in \tau$ dan Önerme 2. 2. 3 gösteriyor ki $\alpha \in E$ parametrelerinin her birine X de bir τ_α topolojisi karşılık gelir. Bu yüzden X de bir soft topoloji bir parametreler ailesinin X de topolojisidir.

Örnek 3. 1. 1 [12]

$X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ burada

$(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$ X de soft kümelerdir.

$$F_1(e_1) = \{h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

olduğundan τ X de bir soft topolojidir ve bu yüzden (X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzaydır. Kolayca görülebilir ki ,

$$\tau_{e_1} = \{\Phi, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\Phi, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

X de birer topolojidir.

Şimdi önermenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verelim.

Örnek 3. 1. 2 [12]

$X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ olsun.

Buradan $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$ X de soft kümelerdir.

$$F_1(e_1) = \{h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_4(e_1) = \{h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

Dolayısıyla τ, X de bir topoloji değildir. Çünkü $(F_2, E) \cup (F_3, E) = (G, E)$
 $G(e_1) = X$ ve $G(e_2) = \{h_1, h_2\}$ olup bundan dolayı $(G, E) \notin \tau$. Ayrıca,

$$\tau_{e_1} = \{\Phi, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\} \quad \text{ve} \quad \tau_{e_2} = \{\Phi, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

X de topolojilerdir. Dolayısıyla örnek 3. 1. 2 de herhangi bir soft küme koleksiyonun üzerinde bir topoloji olması gerekmediğini göstermektedir. Karşı taraftan X de tanımlanan parametrelerin topolojisi koleksiyon belirtir.

Önerme 3. 1. 4 [12]

(X, τ_1, E) ve (X, τ_2, E) herhangi X evreninde iki soft topolojik uzay olmak üzere,
 $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E)$ X de bir topolojik uzaydır.

İspat

$$(1) \quad X, \Phi \in \tau_1 \cap \tau_2$$

$$(2) \quad \{(F_i, E) \mid i \in I\} \text{ soft kümesi ailesi } \tau_1 \cap \tau_2 \text{ nin bir ailesi olmak üzere, } \forall i \in I \text{ için}$$

$(F_i, E) \in \tau_1$ ve $(F_i, E) \in \tau_2$, olduğundan $\cup_{i \in I} (F_i, E) \in \tau_1$ ve $\cup_{i \in I} (F_i, E) \in \tau_2$ olup
 böylece $\cup_{i \in I} (F_i, E) \in \tau_1 \cap \tau_2$.

$$(3) \quad (F, E), (G, E) \in \tau_1 \cap \tau_2 \text{ olsun. } (F, E), (G, E) \in \tau_1 \text{ ve } (F, E), (G, E) \in \tau_2$$

olduğundan $(G, E) \cap (F, E) \in \tau_1 \cap \tau_2$.

Böylece $\tau_1 \cap \tau_2, X$ üzerinde bir topolojidir ve $(X, \tau_1 \cap \tau_2, E), X$ de bir topolojik uzaydır.

Uyarı 3. 1. 1 [12]

İki soft topolojinin birleşimi soft topoloji olmayabilir.

Örnek 3. 1. 3 [12]

$X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau_1 = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$
 , $\tau_2 = \{\Phi, X, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$, X de iki soft topoloji olarak
verilsin.

$(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)$

X de soft kümelerdir. Tanımından

$$F_1(e_1) = \{h_2\} \text{ , } F_1(e_2) = \{h_1\},$$

$$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\} \text{ , } F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\} \text{ , } F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \{h_1, h_2\} \text{ , } F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

ve

$$G_1(e_1) = \{h_2\} \text{ , } G_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$G_2(e_1) = \{h_2, h_3\} \text{ , } G_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$G_3(e_1) = \{h_1, h_2\} \text{ , } G_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$G_4(e_1) = \{h_2\} \text{ , } G_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$$

alırsak , $(F_2, E) \cup (G_3, E) = (H, E)$ ve $H(e_1) = F_2(e_1) \cup G_3(e_1)$

$$= \{h_1, h_3\} \cup \{h_1, h_2\}$$

$$= X$$

$$H(e_2) = F_2(e_2) \cup G_3(e_2)$$

$$= \{h_1, h_2\} \cup \{h_1, h_2\}$$

$$= \{h_1, h_2\}$$

olup $(H, E) \notin \tau$. Böylece τ, X de bir soft topoloji değildir.

Tanım 3. 1. 11 [12]

X de (X, τ, E) bir soft topolojik uzay ve $(F, E), X$ de bir soft küme olsun. (F, E) nin soft kapanışı $\overline{(F, E)}$ ile gösterilir ve (F, E) nin kuvvet kümesindeki soft kapalıların kesişimidir.

Açık olarak $\overline{(F, E)}$, (F, E) yi içeren X de en küçük kapalı soft kümedir.

Teorem 3. 1. 1 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay ve $(F, E), (G, E)$ de X in soft kümeleri olsun.

$$(1) \overline{\Phi} = \Phi \text{ ve } \widetilde{\overline{X}} = \widetilde{X}$$

$$(2) (F, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$$

$$(3) (F, E) \text{ soft kapalı bir küme ise } (F, E) = \overline{(F, E)} \text{ dir.}$$

$$(4) \overline{\overline{(F, E)}} = (F, E)$$

$$(5) (F, E) \widetilde{\subset} (G, E) \text{ ise } \overline{(F, E)} \widetilde{\subset} \overline{(G, E)}$$

$$(6) \overline{(F, E) \cup (G, E)} = \overline{(F, E)} \cup \overline{(G, E)}$$

$$(7) \overline{(F, E) \cap (G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}$$

İspat

(1) ve (2) açıktır.

(3) Eğer (F, E) , X de bir soft kapalı küme ise (F, E) nin X de içerdiği bir soft kapalı küme kendisidir. Yani (F, E) yi içeren en küçük soft kapalı küme (F, E) ve $(F, E) = \overline{(F, E)}$.

(4) $\overline{(F, E)}$ kapalı kümedir. Bu nedenle (3) den $\overline{\overline{(F, E)}} = (F, E)$

(5) Farz edelim ki $(F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ ve (G, E) nin kapalı soft kuvvet kümelerinin her biri (F, E) yi içerdiğinden (G, E) nin soft kapalı kuvvet kümelerinin (F, E) nin soft kapalı kuvvet kümelerini içerdiği anlamına gelir. Buradan (G, E) nin soft kapalı kuvvet kümelerinin (F, E) nin soft kapalı kuvvet kümelerini içerir. Böylece $\overline{(F, E)} \widetilde{\subset} \overline{(G, E)}$ olur.

(6) $(F, E) \widetilde{\subset} (F, E) \cup (G, E)$ ve $(G, E) \widetilde{\subset} (F, E) \cup (G, E)$ den (5) ile $\overline{(F, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E) \cup (G, E)}$ ve $\overline{(G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E) \cup (G, E)}$ tersine varsayalım ki $(F, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$ ve $(G, E) \widetilde{\subset} \overline{(G, E)}$ yani $(F, E) \cup (G, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)} \cup \overline{(G, E)}$ önerme 2.2.3 ile $\overline{(F, E)} \widetilde{\subset} \overline{(G, E)}$ iki kapalı kümenin birleşimi kapalıdır. O zaman $\overline{(F, E) \cup (G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E)} \cup \overline{(G, E)}$ buradan $\overline{(F, E) \cup (G, E)} = \overline{(F, E)} \cup \overline{(G, E)}$

(7) ve $(F, E) \cap (G, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ den (5) den $(F, E) \cap (G, E) \widetilde{\subset} (F, E)$ $\overline{(F, E) \cap (G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$ ve $\overline{(F, E) \cap (G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(G, E)}$ buradan $\overline{(F, E) \cap (G, E)} \widetilde{\subset} \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}$.

Tanım 3. 1. 12 [12] (X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay ve (F, E) , X de bir soft küme olsun. $\overline{(F, E)}$ ile X de (F, E) nin kapanışı ve $\overline{F}(\alpha) = \overline{F(\alpha)}$ olduğundan $\forall \alpha \in E$ için $F(\alpha)$ nın kapanışı τ_α içinde $\overline{F(\alpha)}$ dır.

Önerme 3. 1. 5 [12]

(X, τ, E) , X de bir topolojik uzay ve (F, E) , X de bir soft küme olsun. O zaman $(\overline{F}, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$.

İspat

Her bir $\alpha \in E$ için $F(\alpha)$ içeren (X, τ_α) nın en küçük kapalı kümesi $\overline{F(\alpha)}$ dır. Eğer $\overline{(F, E)} = (H, E)$ ise $H(\alpha)$, $F(\alpha)$ yı içeren kapalı bir kümedir. Bu ise $\overline{F(\alpha)} = \overline{F(\alpha)} \widetilde{\subset} H(\alpha)$. Böylece $(\overline{F}, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$.

Sonuç 3. 1. 1 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay ve (F, E) , X de bir soft küme olsun.

$(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ ancak ve ancak $(\overline{F}, E) \in \tau$.

İspat Eğer $(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ ise $(\overline{F}, E)$ soft kapalı bir küme olduğundan $(\overline{F}, E) \in \tau$. Karşıt olarak eğer $(\overline{F}, E) \in \tau$ ise (F, E) yi içeren soft kapalı küme $(\overline{F}, E)$ dir. Önerme 2. 2. 5 ile $(\overline{F}, E) \widetilde{\subset} \overline{(F, E)}$ ve (F, E) nin soft kapanış tanımından $(F, E) \subset \overline{(F, E)}$ dir. Bu nedenle $\overline{(F, E)} \widetilde{\subset} (\overline{F}, E)$. Böylece $(\overline{F}, E) = \overline{(F, E)}$ olur.

Örnek 3. 1. 4 [12]

$X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), \dots, (F_7, E)\}$ olsun.

$$F_1(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_2\}, \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_3(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_4(e_1) = \{h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_5(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_5(e_2) = X$$

$$F_6(e_1) = X, \quad F_6(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_7(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_7(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

Dolayısıyla (X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzaydır.

(F, E) ve (G, E) nin tanımları aşağıdaki gibi olsun:

$$F(e_1) = \{h_1, h_3\}, \quad F(e_2) = \emptyset$$

$$G(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad G(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$\text{Buradan } (F, E) \cap (G, E) = ((F \cap G), E)$$

ve

$$\overline{(F, E)} = \widetilde{X} \cap (F_2, E)^{\downarrow} \cap (F_4, E)^{\downarrow} = (F_2, E)^{\downarrow} \text{ olduğundan } \overline{(G, E)} = \widetilde{X}.$$

$$\text{Bu nedenle } \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)} = \overline{(F, E)}.$$

Ayrıca

$$\overline{(F, E) \cap (G, E)} = \cap \left\{ \widetilde{X}, (F_1, E)^{\downarrow}, (F_2, E)^{\downarrow}, (F_3, E)^{\downarrow}, (F_4, E)^{\downarrow}, (F_5, E)^{\downarrow} \right\}$$

$$= (F_5, E)^{\downarrow}.$$

$$\text{Yani } \overline{(F, E) \cap (G, E)} \subsetneq \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}$$

$$\text{Fakat } \overline{(F, E) \cap (G, E)} \neq \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}.$$

Daha sonra şunu göreceğiz:

$$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}, \quad \tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}.$$

olmak üzere $(\overline{F}, E)$ ile, $\overline{F}(e_1) = \{h_1, h_3\}$, $\overline{F}(e_2) = \emptyset$

Açıkça

$\overline{(F, E)} \widetilde{\subset} (\overline{F}, E)$ ancak $\overline{(F, E)} \neq (\overline{F}, E)$.

Tanım 3. 1. 13 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay, (G, E) , X in bir soft kümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in (F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde açık bir (F, E) soft kümesi varsa (G, E) ye x in bir soft iç noktası denir.

Tanım 3. 1. 14 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay olsun. (G, E) , X de bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in (F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde açık bir (F, E) soft kümesi varsa (G, E) ye x in bir komşuluğu denir.

Önerme 3. 1. 6 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay, (G, E) , X de bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Eğer x , (G, E) nin bir iç noktası ise o zaman $\forall \alpha \in E$ için x ler (X, τ_α) daki $G(\alpha)$ nin de bir iç noktasıdır.

İspat

Herhangi bir $\alpha \in E$ için $G(\alpha) \subseteq X$. Eğer $x \in X$, (G, E) nin bir soft iç noktası ise $(G, E), (F, E) \in \tau$ yu içerir. Bu $x \in F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ demektir. Dolayısıyla $F(\alpha) \in \tau_\alpha$. Dolayısıyla $F(\alpha)$, τ_α nin bir kümesidir ve $x \in F(\alpha)$. Böylece x , τ_α da ki $G(\alpha)$ bir iç noktasıdır.

Önerme 3. 1. 7 [12]

(X, τ, E) , X de bir topolojik uzay olsun.

(1) her bir $x \in X$ in bir soft komşuluğu vardır.

(2) Eğer (F, E) ve (G, E) ler bazı $x \in X$ in soft komşuluğu ise $(F, E) \cap (G, E)$ de x in soft komşuluğudur,

(3) Eğer (F, E) x in bir soft komşuluğu ve $(F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$ ise (G, E) de $x \in X$ in bir komşuluğudur.

İspat

(1) herhangi bir $x \in X$ için $x \in \widetilde{X}$ ve $\widetilde{X} \in \tau$ olduğundan $x \in \widetilde{X} \widetilde{\subset} \widetilde{X}$.

Böylece $\widetilde{X}$, x in bir komşuluğudur.

(2) $x \in X$ in soft komşulukları (F, E) ve (G, E) olsun. $(F_1, E), (F_2, E) \in \tau$ içerir öyle ki $x \in (F, E_1) \widetilde{\subset} (F, E)$ ve $x \in (F_2, E) \widetilde{\subset} (G, E)$.

Şimdi $x \in (F_1, E)$ ve $x \in (F_2, E)$ ima eder ki $x \in (F_1, E) \cap (F_2, E)$ ve $(F_1, E) \cap (F_2, E) \in \tau$. Böylece biz $x \in (F_1, E) \cap (F_2, E) \widetilde{\subset} (F, E) \cap (G, E)$ diyebiliriz.

Böylece $(F, E) \cap (G, E)$, x in bir soft komşuluğudur.

(3) (F, E) , x in bir soft komşuluğu olsun ve $(F, E) \widetilde{\subset} (G, E)$. Tanım olarak (F_1, E) soft açık kümesi vardır,

$$x \in (F_1, E) \widetilde{\subset} (F, E) \widetilde{\subset} (G, E).$$

Böylece

$$x \in (F_1, E) \widetilde{\subset} (G, E).$$

Bundan dolayı (G, E) , x in bir soft komşuluğudur.

Önerme 3. 1. 8 [12]

(X, τ, E) , X de bir topolojik uzay olsun. X de herhangi bir (F, E) soft açık kümesi için (F, E) , $\cap_{\alpha \in E} F(\alpha)$ nın her bir noktasının komşuluğudur.

İspat

$(F, E) \in \tau$ herhangi bir $x \in \cap_{\alpha \in E} F(\alpha)$ için, biz $\forall \alpha \in E$ için $x \in F(\alpha)$ ya sahibiz.

Böylece $x \in (F, E) \subseteq (F, E)$

ve bu yüzden (F, E) , x in bir soft komşuluğudur.

Tanım 3. 1. 15 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay olsun ve Y de X in boş olmayan alt kümesi.

O zaman

$$\tau_Y = \left\{ \left({}^Y F, E \right) \mid (F, E) \in \tau \right\}$$

Y de bağlı soft topoloji olduğu söylenir ve (Y, τ_Y, E) , (X, τ, E) nin bir soft alt uzayıdır.

Bunu kolayca doğrulayabiliriz. τ_Y gerçekten Y de bir soft topolojidir.

Örnek 3. 1. 9 [12]

Bir soft ayrık topolojik uzayın herhangi bir alt uzayı soft ayrık topolojik uzayıdır.

Örnek 3. 1. 10 [12]

Ayrık olmayan bir soft topolojik uzayın herhangi bir alt uzayı soft ayrık olmayan topolojik uzayıdır.

Önerme 3. 1. 9 [12]

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay ve Y de X in boş olmayan alt kümesidir.

Buradan $\forall \alpha \in E$ için (X, τ_α) nin alt uzayı (Y, τ_{α_Y}) dir.

İspat

(Y, τ_Y, E) , Y de soft topolojik uzay yani $\forall \alpha \in E$ için (Y, τ_{α_Y}) bir topolojik uzayıdır.

$$\tau_{\alpha_Y} = \left\{ {}^Y F(\alpha) \mid (F, E) \in \tau \right\}$$

$$= \{Y \cap F(\alpha), | (F, E) \in \tau\}$$

$$= \{Y \cap F(\alpha), | F(\alpha) \in \tau_\alpha\}.$$

Böylece (Y, τ_α) , (X, τ_α) nın bir alt uzayıdır.

Önerme 3. 1. 10 [12]

(Y, τ_Y, E) , (X, τ, E) soft topolojik uzayının bir alt uzayı ve (F, E) , Y de bir soft açık küme olsun. Eğer $\tilde{Y} \in \tau$ olduğunda $(F, E) \in \tau$ olur.

İspat

(F, E) , Y de soft açık bir küme, burada (G, E) , X in soft açık kümeleri $(F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$. Şimdi eğer $\tilde{Y} \in \tau$ dan $\tilde{Y} \cap (G, E) \in \tau$ topolojik uzay tanımı önermesi ile topolojik uzay ve bu yüzden $(F, E) \in \tau$.

Teorem 3. 1. 2 [12]

(Y, τ_Y, E) , ${}_B(X, \tau, E)$ soft topolojik uzayının bir soft alt uzayı ve (F, E) , Y de bir soft küme olsun. Buradan

(1) (F, E) , Y nin bir soft açık kümesidir ancak ve ancak en az bir $(G, E) \in \tau$ için

$$(F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$$

(2) (F, E) , Y nin soft kapalı kümesidir ancak ve ancak X de en az bir soft kapalı

$$(G, E) \text{ için } (F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$$

İspat

(1) Soft alt uzayın tanımından çıkar.

(2) Eğer (F, E) , Y de kapalı soft küme o zaman

$$(F, E) = \tilde{Y} \setminus (G, E), \text{ bazı } (H, E) \in \tau$$

şimdi, $(G, E) = \tilde{Y} \cap (H, E)$, bazı $(H, E) \in \tau$

Herhangi bir $\alpha \in E$,

$$F(\alpha) = Y(\alpha) \setminus G(\alpha)$$

$$= Y \setminus (Y \cap H(\alpha))$$

$$= Y \setminus H(\alpha)$$

$$= Y \cap (X \setminus H(\alpha))$$

$$= Y \cap (H(\alpha))^c$$

$$= Y(\alpha) \cap (H(\alpha))^c$$

Böylece $(F, E) = \tilde{Y} \cap (H, E)^\perp$

$(H, E) \in \tau$ iken X deki soft kapalılar $(H, E)^\perp$ de bulunur. Tersine, X de bazı soft kapalı (G, E) kümeleri $(F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$ farz edelim. Bu şu anlama gelir $(G, E)^\perp \in \tau$. Şimdi, eğer $(G, E) = (X, E) \setminus (H, E)$ buradan herhangi bir $\alpha \in E$ için $(H, E) \in \tau$

$$F(\alpha) = Y(\alpha) \cap G(\alpha)$$

$$= Y \cap G(\alpha)$$

$$= Y \cap (X(\alpha) \setminus H(\alpha))$$

$$= Y \cap (X \setminus H(\alpha))$$

$$= Y \setminus H(\alpha)$$

$$= Y \setminus (Y \cap H(\alpha))$$

$$= Y(\alpha) \setminus (Y(\alpha) \cap H(\alpha)).$$

Böylece $(F, E) = \tilde{Y} \setminus (\tilde{Y} \cap (H, E))$.

$(H, E) \in \tau$ dan, yani $(\tilde{Y} \cap (H, E)) \in \tau_Y$ ve dolayısıyla (F, E) , Y de soft kapalıdır.

Önerme 3. 1. 11 [13]

(F, E) , X de bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Sonra,

(1) $x \in (F, E)$ ise $(x, E) \subset (F, E)$

(2) Eğer $(x, E) \cap (F, E) = \emptyset$, o zaman $x \notin (F, E)$

İspat

Açıktır.

Uyarı 3. 1. 2 [13]

Önerme 2. 2. 11 in (2) sinin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3. 1. 11 [13]

$X = \{h_1, h_2\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve (F, E) soft küme devamdaki şekilde tanımlansın:

$F(e_1) = \{h_1\}$, $F(e_2) = \{h_1\}$, $F(e_3) = \{h_1, h_2\}$ o zaman $h_2 \notin (F, E)$. Ancak

$(h_2, E) \cap (F, E) \neq \emptyset$, $e_3 \in E$ için

Tanım 3. 1. 15 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ soft bir topolojik uzay olsun. $\tilde{\tau}$ nun her bir elemanına açık soft küme denir.

Ve F_Φ ve F_A soft açık kümelerdir.

Tanım 3. 1. 16 [14]

$(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ soft topolojik uzay olsunlar. O zaman ,

Eğer $\tilde{\tau}_2 \supseteq \tilde{\tau}_1$, o zaman $\tilde{\tau}_2$ daha ince softtur $\tilde{\tau}_1$ den.

Eğer $\tilde{\tau}_1 \supseteq \tilde{\tau}_2$, o zaman $\tilde{\tau}_1$ daha ince softtur $\tilde{\tau}_2$ den.

Eğer ikisinden biri $\tilde{\tau}_1 \supseteq \tilde{\tau}_2$ veya $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$ ise $\tilde{\tau}_1$ ile $\tilde{\tau}_2$ karşılaştırılabilir.

Tanım 3. 1. 17 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir topolojik uzay olsun ve $\alpha \in F_A$. Eğer burada F_B bir soft açık kümesi var öyle ki $\alpha \in F_B$. O zaman F_B, α nın bir soft komşuluğudur. Kümede α nın tüm soft komşuluklarının ailesini $\tilde{v}(\alpha)$ ile belirtiriz. Yani;

$$\tilde{v}(\alpha) = \{F_B : F_B \in \tilde{\tau}, \alpha \in F_B\}.$$

Tanım 3. 1. 18 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay, $F_B \subseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ olsun. Eğer F_B de α dışındaki α nın her komşuluğu ile kesişimi F_B nin soft limit noktası α denir. Kümede F_B nin tüm limit noktaları $F_B^\perp$ ile gösterilir.

Başka bir deyişle, eğer $(F_A, \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay, $F_B, F_C \subseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$,

$$\text{sonra } \alpha \in F_B^\perp \Leftrightarrow F_C \cap (F_B \setminus \{\alpha\}) \neq F_\emptyset \text{ her bir } F_C \in \tilde{v}(\alpha).$$

Teorem 3. 1 .3 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. O zaman

$$F_B \cup F_B^\perp = \overline{F_B}.$$

İspat

Eğer $\alpha \in F_B \cup F_B^\perp$, o zaman $\alpha \in F_B$ yada $\alpha \in F_B^\perp$. Bu durumda, eğer $\alpha \in F_B$ o zaman $\alpha \in \overline{F_B}$. Eğer $\alpha \in F_B^\perp$ o zaman $F_C \cap (F_B \setminus \{\alpha\}) \neq F_\emptyset$ her bir $F_C \in \tilde{v}(\alpha)$, ve böylece $F_C \cap F_B \neq F_\emptyset$ her bir $F_C \in \tilde{v}(\alpha)$; dolayısıyla $\alpha \in \overline{F_B}$. Aksine, eğer $\alpha \in \overline{F_B}$ sonra

$\alpha \in F_B$ yada $\alpha \notin F_B$. Bu durumda eğer $\alpha \in F_B$, açıktır ki $\alpha \in F_B \widetilde{\cup} F_B^|$. Eğer $\alpha \notin F_B$, o zaman $F_C \widetilde{\cap} (F_B \widetilde{\setminus} \{\alpha\}) \neq F_\emptyset$ her bir $F_C \in \widetilde{v}(\alpha)$ için. Bu nedenle $\alpha \in F_B^|$, böylece $\alpha \in F_B \widetilde{\cup} F_B^|$. Bu nedenle $F_B \widetilde{\cup} F_B^| = \overline{F_B}$.

Teorem 3. 1. 4 [14]

$(F_A, \widetilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay ve $F_B \widetilde{\subseteq} F_A$ olsun. Sonra F_B soft kapalıdır ancak ve ancak eğer $F_B^| \widetilde{\subseteq} F_B$.

İspat

$$\overline{F_B} = F_B \Leftrightarrow F_B \widetilde{\cup} F_B^| \Leftrightarrow F_B^| \widetilde{\subseteq} F_B.$$

Teorem 3. 1. 5 [14]

$(F_A, \widetilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay ve $F_B, F_C \widetilde{\subseteq} F_A$ olsun. O zaman,

(i) $F_B^| \widetilde{\subseteq} \overline{F_B}$

(ii) $F_B \widetilde{\subseteq} F_C \Rightarrow F_B^| \widetilde{\subseteq} F_C^|$

(iii) $(F_B \widetilde{\cap} F_C)^| \widetilde{\subseteq} F_B^| \widetilde{\cap} F_C^|$

(iv) $(F_B \widetilde{\cup} F_C)^| = F_B^| \widetilde{\cup} F_C^|$

(v) F_B bir kapalı kümedir $\Leftrightarrow F_B^| \widetilde{\subseteq} F_B$.

İspat

(i) Soft kapanışın tanımından ispat açıktır.

(ii) $F_B \widetilde{\subseteq} F_C$ olsun. $F_B \widetilde{\setminus} \{\alpha\} \widetilde{\subseteq} F_C \widetilde{\setminus} \{\alpha\}$ dan $\overline{F_B \widetilde{\setminus} \{\alpha\}} \widetilde{\subseteq} \overline{F_C \widetilde{\setminus} \{\alpha\}}$, ve biz görürüz ki $F_B^| \widetilde{\subseteq} F_C^|$.

(iii) $F_B \widetilde{\cap} F_C \subseteq F_B$ ve $F_B \widetilde{\cap} F_C \subseteq F_C$. Sonra $(F_B \widetilde{\cap} F_C)^{\perp} \subseteq F_B^{\perp}$ ve $(F_B \widetilde{\cap} F_C)^{\perp} \subseteq F_C^{\perp}$. bu nedenle $(F_B \widetilde{\cap} F_C)^{\perp} \subseteq F_B^{\perp} \cap F_C^{\perp}$.

(iv) $\forall \alpha \in (F_B \widetilde{\cup} F_C)^{\perp} \Leftrightarrow \alpha \in \overline{(F_B \widetilde{\cup} F_C)^{\perp} \{\alpha\}}$, bu nedenle

$$\begin{aligned} \overline{(F_B \widetilde{\cup} F_C)^{\perp} \{\alpha\}} &= \overline{(F_B \widetilde{\cup} F_C)^{\perp} \{\alpha\}^{\bar{c}}} \\ &= \overline{(F_B \widetilde{\cap} \{\alpha\}^{\bar{c}}) \widetilde{\cup} (F_C \widetilde{\cap} \{\alpha\}^{\bar{c}})} \\ &= \overline{(F_B \widetilde{\cap} \{\alpha\}^{\bar{c}}) \widetilde{\cup} (F_C \widetilde{\cap} \{\alpha\}^{\bar{c}})} \end{aligned}$$

Bu nedenle $(F_B \widetilde{\cup} F_C)^{\perp} = F_B^{\perp} \widetilde{\cup} F_C^{\perp}$.

(v) F_B bir kapalı kümedir $\Leftrightarrow F_B = \overline{F_B} \Leftrightarrow F_B = F_B \widetilde{\cup} F_B^{\perp} \Leftrightarrow F_B^{\perp} \subseteq F_B$.

Tanım 3. 1. 19 [15]

(X, τ_1, E) de bir soft topolojik uzay ve (F, E) , X de bir soft küme olsun. O zaman (F, E) nin soft kapanışı $\overline{(F, E)}$ ile gösterilir. (F, E) nin her bir kapalı kuvvet kümesinin kesişimi $\overline{(F, E)}$ dir. Açıkça $\overline{(F, E)}$, (F, E) yi içeren X de ki soft kapalı kümelerin en küçüğüdür.

Tanım 3. 1. 20 [15]

(X, τ, E) , X de bir topolojik uzay olsun. Buradan X de (F, E) soft kümelerinin soft içi $(F, E)^{\circ}$ ile gösterilir ve (F, E) yi içeren her bir açık kümelerin birleşimi ile tanımlanır. Buradan (F, E) yi içeren soft açık kümelerin en geniş $(F, E)^{\circ}$ dir.

Örnek 3. 1. 12 [15]

$$X = \{h_1, h_2, h_3\}, \quad E = \{e_1, e_2\} \quad \tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$$

burada

(F_1, E) , (F_2, E) , (F_3, E) , (F_4, E) , (F_5, E) X de soft kümelerdir. Tanımın devamında :

$$F_1(e_1) = \{h_2\} , \quad F_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\} , \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\} , \quad F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \{h_1, h_2\} , \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

$$F_5(e_1) = \{h_2\} , \quad F_5(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

burada τ , X de bir soft topolojidir. Ve buradan (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır. Kolayca görülebilir

$$\tau_{e_1} = \{\Phi, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\Phi, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

X de topolojilerdir.

$(G, E) = \{\{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$ nin soft iç noktası $h_2 \in X$ dir. Ancak h_2 , τ_{e_2} de $G(e_2) = \{h_1\}$ in iç noktası değildir.

Örnek 3. 1. 13 [15]

örnek 2. 2. 4 deki (X, τ, E) soft topolojik uzayını göz önüne alalım.

$(F, E) = \{\{h_2\}, \{h_1, h_3\}\}$, X soft topolojik uzayının soft kümesidir. Buradan

$$(F, E)^\circ = \{\{h_2\}, \{h_1\}\}.$$

Örnek 3. 1. 14 [15]

örnek 2. 2. 4 deki (X, τ, E) soft topolojik uzayını göz önüne alalım.

$(F, E) = \{\{h_2\}, \{h_1, h_3\}\}$, $(G, E) = \{\{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2, h_3\}\}$ X soft topolojik uzayında soft kümelerdir. Buradan $(F, E)^\circ = \{\{h_2\}, \{h_1\}\}$ ve $(G, E)^\circ = \Phi$.

Tanım 3. 1. 21 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir soft topolojik uzay olmak üzere ve $F_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun. F_B soft sınır F_B^b ile gösterilir.

$$F_B^b = \overline{F_B} \tilde{\cap} \overline{F_B^c}.$$

Teorem 3. 1. 6 [14]

$(F_A, \tilde{\tau})$ soft topolojik uzay olmak üzere ve $F_B, F_C \tilde{\subseteq} F_A$ olsun.

(i) $F_B^b \tilde{\subseteq} \overline{F_B}$,

(ii) $F_B^b = (F_B^c)^b$

(iii) $F_B^b = \overline{F_B} \tilde{\setminus} F_B^\circ$

BÖLÜM 4

SOFT BAĞLANTILI VE SOFT BAĞLANTISIZ TOPOLOJİK UZAYLAR

4. 1 Soft Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 4. 1. 1 [17]

(X, τ, E) , X de bir topolojik uzay (F, E) ve (G, E) , X de boş olmayan açık kümeler olsun. Eğer,

$\widetilde{X} = (F, E) \cup (G, E)$, $(F, E) \cap (G, E) = \Phi_E$ oluyorsa (F, E) ve (G, E) kümelerine $\widetilde{X}$ in ayrılmış kümeleridir denir.

Tanım 4. 1. 2 [17]

Eğer $\widetilde{X}$ in ayrılmış soft kümeleri bulunmuyorsa (X, τ, E) topolojik uzayına soft bağlantılı denir.

Önerme 4. 1. 1 [17]

(F, E) , X de bir soft küme olsun, buradan

$$(i) (F, E) \cup (F, E)^{\downarrow} = \widetilde{X},$$

$$(ii) (F, E) \cap (F, E)^{\downarrow} = \Phi_E,$$

$$(iii) (F, E) \cap \widetilde{X} = (F, E).$$

İspat $(F, E) \cap (F, E)^{\downarrow} = (H, E)$ olsun. O zaman

$$H(e) = F(e) \cup F^{\downarrow}(e) = F(e) \cup (X - F(e)) = \emptyset. \text{ Bu yüzden } (H, E) = \Phi_E.$$

Teorem 4. 1. 1 [17] Bir (X, τ, E) soft topolojik uzayı bağlantılıdır ancak ve ancak X de Φ ve $\widetilde{X}$ den başka soft kapalı ve soft açık kümesi yoktur

İspat

(X, τ, E) soft bağlantılı olsun. Farz edelim ki X de Φ_E ve $\widetilde{X}$ den farklı hem açık ve hem kapalı küme (F, E) olsun. Açıktır ki Φ_E ve $\widetilde{X}$ den farklı olarak X de $(F, E)^{\downarrow}$ bir soft çelişkidir. Böylece X de açık ve kapalı soft kümeler yalnızca Φ_E ve $\widetilde{X}$ dir. Karşıt olarak $(F, E), (G, E) \in \widetilde{X}$ de soft ayrılabilir. Dolayısıyla $(F, E) = \widetilde{X}$. O zaman önerme 3. 1. 1 den $(G, E) = \Phi_E$ olduğunu ima eder. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $(F, E) \neq \widetilde{X}$. $\forall e \in E$ için $F(e) \cap G(e) = \emptyset$ ve $F(e) \cup G(e) = X$ dir. Biz $G^{\downarrow}(e) = X - G(e) = F(e)$. Bu yüzden $(F, E) = (G, E)^{\downarrow}$. Bu gösteriyor ki (F, E) ile X de Φ_E ve $\widetilde{X}$ den farklı soft açık ve soft kapalı küme vardır. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden (X, τ, E) soft bağlantılıdır.

Teorem 4. 1. 2

(X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (X, τ, E) bir soft bağlantılı uzay $\Leftrightarrow X$ de $\widetilde{X}$ ve Φ_E den farklı her soft altkümenin sınırı boş soft kümeden farklıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ (X, τ, E) soft bağlantılı bir uzay ve (F, E) , X de soft bir küme olsun. $(F, E)^b = \overline{(F, E)} \setminus (F, E)^{\circ} = \Phi_E$ şeklinde tanımlı olsun. Buradan $\overline{(F, E)} = (F, E)^{\circ} \cup (F, E)^b$ olduğundan $\overline{(F, E)} = (F, E)^{\circ}$ olur. Ve $(F, E)^{\circ} \subseteq (F, E) \subseteq \overline{(F, E)}$ olduğundan $(F, E) = (F, E)^{\circ} = \overline{(F, E)}$ olur. Böylece (F, E) nin hem açık hem kapalı olması teorem 4.1.1 ile çelişir. O halde $(F, E)^b \neq \Phi_E$.

$(\Leftarrow) (F, E)^b \neq \Phi_E$ olduğunu varsayalım. Φ_E, X den farklı $(F, E), (G, E) \in (X, \tau, E)$ ve $X = (F, E) \cup (G, E)$ olsun. $(F, E) \cap (G, E) \neq \Phi_E$ olduğunu gösterelim: Kabul edelim ki $(F, E) \cap (G, E) = \Phi_E$ olsun. Bu durumda $(F, E) = (G, E)^c$ olduğundan (F, E) hem açık hem de kapalı olur. O halde $(F, E)^b = \overline{(F, E)} \setminus (F, E)^\circ = \Phi_E$. Bu ise $(F, E)^\circ \neq \Phi_E$ olması ile çelişir. Bu yüzden $(F, E) \cap (G, E) \neq \Phi_E$ dir. Böylece (X, τ, E) soft bağlantılı topolojik uzay olur.

Önerme 4. 1. 2

(X, τ, E) bir soft topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- (i) (X, τ, E) soft bağlantısız uzaydır.
- (ii) X de Φ_E ve X den farklı hem açık hem de kapalı soft küme vardır.
- (iii) X de , X ve Φ_E den farklı bir soft kümenin sınırı soft boş kümedir.

Örnek 4. 1. 1

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ soft topolojik uzay ve $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$ X de soft kümeler olmak üzere,

$$F_1(e_1) = \{h_1\}, \quad F_1(e_2) = \{h_2\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_1, h_3\}, \quad F_2(e_2) = X$$

$$F_3(e_1) = \{h_1\}, \quad F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_4(e_1) = \{h_1, h_3\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

Soft topolojik uzayının bağlantılı olup olmadığını iki farklı yöntem ile kontrol edelim.

1. Yöntem [17]

Soft topolojik uzayın bağlantılı olması için aynı kümenin hem açık hem de kapalı olmayacağı ile ilgili, şimdi bu yöntem ile kapalı kümeleri bulalım. Bu kümeleri G ler işaretleyelim.

$$G_1(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad G_1(e_2) = \{h_1, h_3\}$$

$$G_2(e_1) = \{h_2\}, \quad G_2(e_2) = \Phi_E$$

$$G_3(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad G_3(e_2) = \{h_3\}$$

$$G_4(e_1) = \{h_2\}, \quad G_4(e_2) = \{h_3\}$$

Buradan hem açık hem de kapalı bir küme bulunmadığından (X, τ, E) soft bağlantılı topolojik uzaydır.

2. Yöntem

Bu yöntem bizim geliştirdiğimiz açık kümenin sınırının boş olmaması teorisine dayanmaktadır. Yani soft topolojik uzayın her bir açığının sınırı boştan farklı ise soft bağlantılı eğer en az biri bile boş ise soft bağlantısız topolojik uzay olacaktır. Şimdi yöntemi uygulayalım,

$$(F_1, E)^b = \overline{(F_1, E)} \tilde{\setminus} (F_1, E)^\circ = X \tilde{\setminus} (F_1, E) \neq \Phi_E$$

$$(F_2, E)^b = \overline{(F_2, E)} \tilde{\setminus} (F_2, E)^\circ = X \tilde{\setminus} (F_2, E) \neq \Phi_E$$

$$(F_3, E)^b = \overline{(F_3, E)} \tilde{\setminus} (F_3, E)^\circ = X \tilde{\setminus} (F_3, E) \neq \Phi_E$$

$$(F_4, E)^b = \overline{(F_4, E)} \tilde{\setminus} (F_4, E)^\circ = X \tilde{\setminus} (F_4, E) \neq \Phi_E$$

olduğundan (X, τ, E) soft bağlantılı topolojik uzaydır

4. 2 Soft Bağlantısız Topolojik Uzaylar

Tanım 4. 2. 1

(X, τ, E) , X de bir soft topolojik uzay olsun. X de en az bir (F, E) ve (G, E) boştan farklı iki açık soft küme için $(F, E) \cup (G, E) = \widetilde{X}$ ve $(F, E) \cap (G, E) = \Phi_E$ oluyorsa (X, τ, E) soft bağlantısız topolojik uzay denir.

Örnek 4. 2. 1

$$X = \{h_1, h_2, h_3\}, \quad E = \{e_1, e_2\} \text{ ve } \tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$$

soft topolojik uzayı verilsin.

$$\begin{aligned} F_1(e_1) &= \{h_2\}, & F_1(e_2) &= \{h_1\} \\ F_2(e_1) &= \{h_2, h_3\}, & F_2(e_2) &= \{h_1, h_2\} \\ F_3(e_1) &= \{h_1, h_2\}, & F_3(e_2) &= \{h_1, h_2\} \\ F_4(e_1) &= \{h_2\}, & F_4(e_2) &= \{h_1, h_3\}. \end{aligned}$$

(X, τ, E) topolojik uzayının bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

Öncelikle soft topolojik uzayın kapalılarını bulup sonra soft topolojik uzayın hem açık hem de kapalı alt kümesi var mı? temel çıkış noktamız bu olacak, o halde inceleyelim.

$$\begin{aligned} F_1^|(e_1) &= \{h_1, h_3\}, & F_1^|(e_2) &= \{h_2, h_3\} \\ F_2^|(e_1) &= \{h_1\}, & F_2^|(e_2) &= \{h_3\} \\ F_3^|(e_1) &= \{h_3\}, & F_3^|(e_2) &= \{h_3\} \\ F_4^|(e_1) &= \{h_1, h_3\}, & F_4^|(e_2) &= \{h_2\} \end{aligned}$$

Buradan $F_n^|(e_m) = G_n(e_m) \cdot G_n(e_m)$, X in kapalılarıdır. Φ ve X dışında hiçbir açık ve kapalı alt küme olmadığından (X, τ, E) topolojik uzayı bağlantılıdır.

Örnek 4. 2. 2

$$X = \{h_1, h_2, h_3\}, \quad E = \{e_1, e_2\} \quad \text{ve} \quad \tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$$

soft topolojik uzay olsun. Buradan ,

$$F_1(e_1) = \{h_2\} , \quad F_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_3\} , \quad F_2(e_2) = \{h_2, h_3\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_2, h_3\} , \quad F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1\} \quad \text{olsun.}$$

Soft topolojik uzayının bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

$(F_2, E)^{\circ} = (F_4, E)$ olduğundan (F_2, E) hem açık hem de kapalı kümedir. Dolayısıyla (X, τ, E) soft bağlantısız uzaydır.

Örnek 4. 2. 3

$X = \{h_1, h_2, h_3\} , \quad E = \{e_1, e_2\} \quad \text{ve} \quad \tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ soft topolojik uzayı verilsin.

$$F_1(e_1) = \{h_2\} , \quad F_1(e_2) = \{h_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\} , \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\} , \quad F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

$$F_4(e_1) = \{h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_3\} \quad \text{olsun.}$$

Soft topolojik uzayın bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

Burada $(F, E)^b = \overline{(F, E)} \tilde{\cap} (F, E)^{\circ}$ leri inceleyeceğiz.

$$(F_1, E)^b = \overline{(F_1, E)} \tilde{\cap} (F_1, E)^{\circ} = X \tilde{\cap} (F_1, E) \neq \Phi$$

$$(F_2, E)^b = \overline{(F_2, E)} \tilde{\cap} (F_2, E)^\circ = X \tilde{\cap} (F_2, E) \neq \Phi$$

$$(F_3, E)^b = \overline{(F_3, E)} \tilde{\cap} (F_3, E)^\circ = X \tilde{\cap} (F_3, E) \neq \Phi$$

$$(F_4, E)^b = \overline{(F_4, E)} \tilde{\cap} (F_4, E)^\circ = X \tilde{\cap} (F_4, E) \neq \Phi$$

olduğundan (X, τ, E) soft bağlantılı topolojik uzaydır.

Soft topolojik uzayının bağlantılı olup olmadığını inceleyelim:

Burada (F_2, E) yi inceleyelim. $(F_2, E)^\circ = (F_2, E)$ ve $\overline{(F_2, E)} = (F_2, E)$ buradan

$$(F_2, E)^b = \overline{(F_2, E)} \tilde{\cap} (F_2, E)^\circ = (F_2, E) \tilde{\cap} (F_2, E) = \Phi_E \text{ olduğundan } (X, \tau, E) \text{ soft}$$

bağıntısız uzaydır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tezde yaptığımız çalışmada elde ettiğimiz verileri açıklayıp bazı durumlar ön göreceğiz. Soft küme teorisi matematik, mühendislik, bilişim bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerdeki belirsizlikleri modellemek için Molodtsov tarafından ortaya atılmış olup fuzzy teorisi, sezgisel fuzzy teorisi, kararsız küme teorisi, rough küme teorisi gibi teorilerden temel farkı ve kullanışlı olma sebebi soft küme teorisinde parametrelerin daha esnek verilebilmesidir. Bu çalışmada soft küme teorisinin literatür çalışmasını yaptık. Soft kümeyi, soft topolojik uzayı ve bazı özelliklerini inceleyerek soft topolojik uzaylarda bağlantısızlık ve bağlantılılık ile ilgili olarak örnekler verip , soft bağlantılılık ve bağlantısızlığın tespiti için kullanışlı bir teorem ve bir önerme belirttik. Burada soft topolojik uzaylarda bağlantılılığı, çarpım uzayına, kompaktlığa yada sürekliliğe bağlayarak farklı çalışmalarda yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*. **8**, 338-353
- [2] Atanassov, K. T. (1986) . Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*. **20**, 87-96
- [3] Atanassov, K. T. (1994) . Operators Over Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Set, *Fuzzy Sets and Systems*. **64**, 159-174
- [4] Gau, W. L. , Buehrer, D. J. (1993) . Vague Sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. **23**, 610-614
- [5] Pawlak, Z. (1982) . Rough Sets, *International Journal of Information and Computer Sciences*. **11**, 341-356
- [6] Molodtsov, D. (1999) . Soft Sets Theory-First Results, *Computer and Mathematics with Applications*. **37**, 19-31
- [7] Maji, P. K, Biswas, R. and Roy, A. R. (2003) . Soft Set Theory, *Computer and Mathematics with Applications*. **45**, 555-562
- [8] Chen, D. , Tsang, E. CC, Yeung, D. S. , Wang X. , (2005) , The Parameterization Reduction of Soft Sets and its Applications, *Computer and Mathematics with Applications*, **49**, 757-763
- [9] Naim, Ç. , Hacı, A. , (2007) , Soft Sets and Soft Groups, *Information Sciences*, **177**, 2726-2735

- [10] Cheng, Fu Y. , (2008) , A Note On"Soft Set Theory" *Computer and Mathematics with Applications*, **56, 7**, 1899-900
- [11] Irfan, Ali M. , Feng, F. , Liu X. , Won Keun, M., Shabir, M., (2009) , On Some New Operations in Soft Set Theory, *Computer and Mathematics with Applications*, **57**, 1547-1553
- [12] Muhammad, S. , Munazza, N. , (2011) , On Soft Topological Spaces, *Computer and Mathematics with Applications*, **61**, 1786-1799
- [13] Win, W. K. , A Note On Soft Topological Spaces, *Computer and Mathematics with Applications*, **62**, 9, 3524-3528
- [14] Çağman, N. , Karataş, S, Enginoğlu, S. , (2011) , Soft Topology, *Computer and Mathematics with Applications*, **62**, 351-358
- [15] Sabir, H. , Bashir, A. , (2011) , Some Properties of Soft Topological Spaces, *Computer and Mathematics with Applications*, **62**, 4058-4067
- [16] Peyghan, E. , Samadi, B. , (2012) , On Soft Connected topological Spaces, 43nd Annual Iranian Mathematics Conference 27-30 Augst 2012 University of Tabriz
- [17] Peygan, E. , Samadi, Tayabi A. , (2018) , *On Soft Connecteness*, *arXiv: 1668v1 (math. GN) 8 Feb 2012*
- [18] Yıldız, C. , (2005) , Genel Topoloji, 3. baskı, Ankara, Gazi Kitapevi
- [19] Koçak, M. , (2015) , Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri, Nisan Kitap Evi, Eskişehir