

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

Her şeyden önce, beni buraya getirdiği için Allah'a şükrediyorum.

Tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, değerli bilgilerini özveriyle paylaşan ve bana her zaman destek olan sayın hocam Doç. Dr. Mehmet KUNT'a, teşekkür ederim.

Tez jürimde yer almayı kabul eden ve bu çalışmayı geliştiren faydalı önerilerde bulunan Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER ve Prof. Dr. Ali ÖZTÜRK'e teşekkür ederim. Doktora eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine, eski ve yeni bölüm başkanlarımız Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ve Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca, Türkiye Bursları Kurumu'na Doktora eğitimi bursu vererek beni destekledikleri için şükranlarımı sunarım.

Son olarak aileme;

Anneme ve babama: sınırsız desteğiniz ve dualarınız için teşekkür ederim.

Eşime ve çocuklarıma: Siz benim hayatımın en büyük hediyesisiniz!

Ve bu tez onlara ithaf edilmiştir.

Abdul Wakil BAIDAR
Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Sol-Sağ q -Türevlenebilir Konveks Fonksiyonlar için Bazı Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizliklerin Kuantum Benzeri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Mehmet KUNT’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu Kabul ettiğimi beyan ederim. 22/05/2023

Abdul Wakil BAIDAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Araştırma Metodolojisi	5
1.3. Tez Organizasyonu	6
1.4. Bazı Temel Tanımlar ve Önemli İntegral Eşitsizlikleri	7
1.5. Yamuk ve Orta Nokta Tipi Eşitsizlikler	11
1.6. Bullen ve Simpson Tipi Eşitsizlikler	16
1.7. Klasik Kuantum Türevi ve Jackson Kuantum İntegrali	20
1.8. Kapalı ve Sınırlı bir Aralık Üzerinde Kuantum Hesabı	26
1.9. Bazı Temel Eşitsizliklerin q_{a+} -Benzeri	29
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	36
2.1. Kapalı ve Sınırlı Bir Aralık Üzerinde Sağ Kuantum Türevi	36
2.2. Kapalı ve Sınırlı Aralık Üzerinde Belirli Sağ Kuantum İntegrali	41
2.3. Sol Kuantum İntegral Eşitsizlikler ile İlgili İddia Edilen Bazı Sonuçların Yeniden Formüle Edilmesi	47
2.4. Kuantum Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin Yeni Varyantları	51
2.5. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Yamuk Tipli Eşitsizlikler	56
2.6. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Orta Nokta Tipi Eşitsizlikler	66
2.7. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Bullen ve Simpson Tipi Eşitsizlikler	72

2.8. Hölder ve Power-Mean Eşitsizliklerinin Bazı Yeni İyileştirmelerinin Sol ve Sağ Kuantum İntegral Benzerleri	87
2.9. Sol ve Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Yamuk Tipi Eşitsizliklerin İyileştirmeleri	92
2.10. Sol ve Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Orta Nokta Tipi Eşitsizliklerin İyileştirmeleri	100
3. İRDELEME	109
4. SONUÇLAR	110
5. ÖNERİLER	112
6. KAYNAKLAR	113
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

SOL-SAĞ q -TÜREVLENE BİLİR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI
HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLERİN KUANTUM BENZERİ

Abdul Wakil BAIDAR
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet KUNT
2023, 118 Sayfa

Bu tezin temel amacı, bazı klasik Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin kuantum benzerini elde etmektir. İlk olarak, reel sayıların $[a, b]$ aralığında sol kuantum türevi ve belirli sol kuantum integraline benzer sağ kuantum türevi ve belirli sağ kuantum integrali kavramları tanıtılmış ve incelenmiştir. Daha sonra, bazı klasik integral özdeşliklerin kuantum benzerleri, sol ve sağ kuantum integrallerinin bir kombinasyonu yoluyla kurulmuştur. Bu özdeşlikler kullanılarak birinci mertbe sol ve sağ kuantum türevleri belirli kuvvetlerde mutlak değerde olan fonksiyonlar için bazı yamuk, orta nokta ve genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin özel durumları olarak, bazı Bullen, Simpson ve ağırlıklı Bullen tipi eşitsizliklerin q -versiyonları türetilmiştir. Son olarak, Hölder-İşcan ve geliştirilmiş güç-ortalama (power-mean) eşitsizliklerinin genel versiyonlarının kuantum benzerleri bulunmuş ve bu eşitsizlikler uygulanarak sol ve sağ kuantum integrallerine ilişkin yamuk ve orta nokta tipi eşitsizliklerin genelleştirilmiş ve geliştirilmiş biçimleri türetilmiştir. Ayrıca $q \rightarrow 1^-$ olduğunda elde edilen sonuçlar da tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar; q -Türevi; q -İntegral; Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik; Simpson tipi eşitsizlik; Bullen tipi eşitsizlik.

PhD Thesis

SUMMARY

QUANTUM ANALOG OF SOME HERMITE-HADAMARD-TYPE INEQUALITIES FOR LEFT-RIGHT q -DIFFERENTIABLE CONVEX FUNCTIONS

Abdul Wakil BAIDAR
Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KUNT
2023, 118 Pages

The main purpose of this study is to obtain the quantum analogue of some classical Hermite-Hadamard-type inequalities. Firstly, the concepts of right quantum derivative and definite right quantum integral, similar to the left quantum derivative and definite left quantum integral on the interval $[a, b]$ of real numbers are introduced and investigated. Then the quantum analogues of some classical integral identities are established through a combination of left and right quantum integrals. Using these identities, some trapezoid, midpoint, and generalized Hermite-Hadamard types inequalities are obtained for the functions whose first-order left and right quantum derivatives in absolute value at certain powers are convex functions. As specific cases of the generalized Hermite-Hadamard type inequalities, the q -versions of some Bullen, Simpson, and weighted Bullen type inequalities are derived. Finally, quantum analogues of the general versions of Hölder-İşcan and improved power-mean inequalities are found, and the generalized and improved forms of the trapezoid and midpoint type inequalities related to left and right quantum integrals are derived by applying these inequalities. Furthermore, the obtained results are also discussed, when $q \rightarrow 1^-$.

Key Words: Convex functions; q -Derivative; q -Integral; Hermite-Hadamard type inequality; Simpson type inequality; Bullen type inequality.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Jackson belirli integralinin geometrik görselleştirilmesi	25
Şekil 2. Türevlenebilir eğri üzerindeki teğet doğruların grafikleri	31
Şekil 3. $f(x) = 2x + 3$ için sağ kuantum türevin yaklaşımının görselleştirmesi	38
Şekil 4. $f(x) = 2x + 3$ için sol kuantum türevin yaklaşımının görselleştirmesi	38
Şekil 5. $f(x) = x^3 - 1$ için sol ve sağ kuantum integrallerin yaklaşımının görselleştirmesi.....	44
Şekil 6. $q = 0.3$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği	86
Şekil 7. $q = 0.99$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği	86
Şekil 8. $\lambda = \eta = \frac{1}{2}$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği	87
Şekil 9. $\lambda = \eta = \frac{1}{3}$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği	87

SEMBOLLER DİZİNİ

$\subseteq$	: Altküme
${}_a^+D_q \cdot$	: $[a, b]$ Aralığında sol kuantum türev
$\int_a^b \cdot {}_a^+d_q x$	: $[a, b]$ Aralığında sol kuantum integral
${}_b^-D_q$	: $[a, b]$ Aralığında sağ kuantum türev
$\int_a^b \cdot {}_b^-d_q x$	: $[a, b]$ Aralığında sağ kuantum integral
q_{a^+}	: $[a, b]$ Aralığında sol kuantum-
q_{b^-}	: $[a, b]$ Aralığında sağ kuantum-
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
(a, b)	: $[a, b]$ Aralığının içi
$D_q \cdot$	: $[0, b]$ Aralığında q -türev
$\int_0^b \cdot d_q x$	: $[0, b]$ Aralığında belirli q -integral veya Jackson integral
$\int \cdot d_q x$	: Belirsiz q -integral
$\prod_{j=0}^4$	: 0'dan 4'e kadar çarpım
$\sum_{k=1}^n$	: 1'dan n 'e kadar toplam
$\sum_{n=0}^{\infty}$	: 0'dan ∞ 'a kadar toplam
$\leq$	: Eşitsizlik
f'	: f 'nin 1.mertebeden türevi
$f^{(k)}$	: f 'nin k .mertebeden türevi
$ f' ^\beta$	: $ f' $ fonksiyonunu β . Kuvveti
$ {}_a^+D_q f ^\beta$	: $ {}_a^+D_q f $ fonksiyonunu β . Kuvveti
$I \subseteq \mathbb{R}$	: I reel sayılardan oluşan bir aralık
I°	: I aralığının içi
q	: Kuntum
q -	: Kuantum-
$ \cdot $	: Mutlak değer
$[n]_q$	: n pozitif tamsayısının kuantum benzeri
$\ \cdot\ $	: Norm
$\mathbb{R}$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$K_q \cdot$	: q -Öteleme operatörü
$K_q^n \cdot$	: q -Öteleme operatörünün n -defa kombinasyonu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi

$[a, b]$: Üst sınırı b ve alt sınırı a olan reel sayıların kapalı ve sınırlı aralığı



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İntegral eşitsizlikleri, matematik alanında iki veya daha fazla integralin değerinin karşılaştırılmasıyla ilgilenen temel bir araştırma alanını oluşturur. Fonksiyonel Analiz, Reel Analiz, Kompliks Analiz ve Diferansiyel Denklemler ile ilgili çalışmalar dahil olmak üzere matematiğin birçok dalında kullanılırlar. Özellikle optimizasyon problemlerinin çözümü, kısmi diferansiyel denklemlerin analizi, sayısal analiz, olasılık teorisi, istatistik ve hatta kuantum mekaniği integral eşitsizliklerinden yararlanır [9-18].

İntegral eşitsizliklerinin en eski formlarından biri, 1821 yılında Augustin-Louis Cauchy tarafından kanıtlanan Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir. $[a, b]$ aralığında tanımlanan ve integrallenebilir iki fonksiyon f ve g için Cauchy-Schwarz eşitsizliği,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Başka bir önemli eşitsizlik ise 1889 yılında Otto Hölder tarafından kanıtlanan Hölder eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik, Cauchy-Schwarz eşitsizliğini genelleştirir ve iki fonksiyonun L_p - normları ve integralleri arasındaki bir ilişki sağlar. 20. yüzyılda, Young eşitsizliği, Hardy eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği gibi diğer önemli integral eşitsizlikleri keşfedilip çalışılmıştır [71,72].

Hermite-Hadamard eşitsizliği matematiksel analizde diğer önemli bir sonuçtur ve matematikteki çeşitli dallarda yaygın olarak uygulamaya sahiptir. $[a, b]$ aralığında konveks bir f fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliği şu şekilde ifade edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1.1.2)$$

Bu eşitsizlik, fonksiyonların konvekslik ve konkavlık gibi özelliklerini göstermek için ve optimizasyon problemlerinin çözümünde bir yöntem olarak kullanılır. Ayrıca, çeşitli istatistiksel ortalama türleri arasındaki farkı elde etmek için de bu eşitsizlikten faydalanılır [1-8].

Eşitsizlikler alanındaki son çalışmalar, Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin daha iyi hata tahmini sınırları elde etmek için yeni teknikler ortaya çıkarmıştır. Bir özdeşlik yoluyla yamuk tipi eşitsizlikler için yeni hata tahmin sınırları ilk olarak Dragomir ve Agarwal [19] tarafından sunulmuştur. Daha sonra, Pearce ve Pečarić [20] tarafından [19]'de sunulan sonuçlar genişletilmiş ve iyileştirilmiştir. Dragomir ve Agarwal'ın [19]'deki öncü çalışmalarından ilham alarak türevlenebilir konveks fonksiyonlar için yeni orta nokta tipi eşitsizlikler sunan Kırmacı [21], bu alandaki araştırmaları daha da ilerletmiştir. Kavurmacı [22], türevlenebilir konveks fonksiyonlar için yeni yamuk tipi eşitsizlikler oluşturmak amacıyla yamuk tipi özdeşliğinin aşağıdaki versiyonunu tanıtmıştır:

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{4} \left(\int_0^1 (\tau-1) f' \left(\frac{a+b}{2} \tau + (1-\tau)a \right) d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (1-\tau) f' \left(\frac{a+b}{2} \tau + (1-\tau)b \right) d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Eftekhari [23], tarafından yapılan çalışmada, türevlenebilir (s, m) -konveks fonksiyonlar için bazı yeni orta nokta tipi eşitsizlikler, aşağıdaki orta nokta tipi özdeşlik kullanılarak türetilmiştir:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
&= \frac{b-a}{4} \left[\int_0^1 \tau f'\left(\frac{a+b}{2}\tau + (1-\tau)a\right) d\tau + \int_0^1 \tau f'\left(\frac{a+b}{2}\tau + (1-\tau)b\right) d\tau \right].
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerle ilgili diğer gelişmelerle birlikte, Tseng vd. [24], Hermite-Hadamard eşitsizliğinin aşağıdaki şekilde bir iyileştirmesini kanıtlamıştır:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+3b}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} \right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

(1.1.5)'te üçüncü eşitsizlik, ilk olarak Bullen tarafından ortaya atılmış olup literatürde Bullen eşitsizliği olarak anılmaktadır. Ayrıca, Tseng vd. [24] sunulan sonuçlara dayanarak, Tseng vd. [25], Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlar için bazı Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Ayrıca, Sarıkaya vd. [26], aşağıdaki ünlü Simpson eşitsizliği için geliştirilmiş sınırlar belirlemek amacıyla bir özdeşlik tanıtmıştır.

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Öte yandan Xi ve Qi [27], Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler için hata sınırlarını aşağıdaki genel özdeşliği kullanarak belirlemiştir:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2 - \lambda - \eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
& = \frac{b-a}{4} \left(\int_0^1 (1-\lambda-\tau) f'\left(\tau a + (1-\tau)\frac{a+b}{2}\right) d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (\eta-\tau) f'\left(\frac{a+b}{2}\tau + (1-\tau)b\right) d\tau \right).
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Xi ve Qi'nin çalışmalarında kullandıkları fikir ve yöntem, Bullen ve Simpson tipi eşitsizliklerin türetilme sürecini basitleştirir. Bu yöntem, ortaya çıkan Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerde λ ve η parametreleri için belirli değerlerin değiştirilmesini içerir. Bu yaklaşım, modern matematiksel eşitsizlikler teorisine yenilikçi ve değerli bir katkı sağlamıştır. Kayda değer çalışmalarıyla İmdat İşcan bu yaklaşımın gelişmesine büyük katkı sağlamıştır [28-35].

Son yirmi yılda, birçok araştırmacı, çeşitli yaklaşımlar yoluyla, çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri genelleştirmiş ve geliştirmiştir. Bu yaklaşımlar, [19] ve [21]'de sunulanlara benzer tekniklerin yanı sıra, kuantum hesabı yöntemi ve diğer yöntemlerin kullanılmasını içerir, [36-41].

Limit olmayan hesap olarak da bilinen Kuantum hesabı yaklaşımının, çeşitli matematiksel kavramların genelleştirilmesi için etkili bir araç olduğu düşünülmektedir. Bu yaklaşımın kökenleri, Leonhard Euler ve Heine gibi matematikçilerin çalışmalarına kadar uzanabilir [45]. Bir İngiliz matematikçi olan F.H. Jackson, 20. yüzyılın başlarında Kuantum hesabının sistematik çalışmasında, özellikle q -serisi ve q -integral alanlarında öncü araştırmacılardan biri olarak kabul edilmektedir [42-51].

Klasik kuantum hesabı kavramları, dürtüsel (impulsive) q -fark denklemlerini çözmek için ilk olarak Tariboon ve Ntouyas [52] tarafından reel sayılardan oluşan keyfi bir $[a, b]$ aralığına genişletilmiştir. Daha sonra, Tariboon ve Ntouyas bu yaklaşımı kullanarak Hermite-Hadamard eşitsizliği de dahil olmak üzere bir dizi iyi bilinen integral eşitsizliğinin q -benzerini türetmişlerdir [53]. [52,53]'te sunulan sonuçlar, $[a, b]$ aralığında kuantum hesabı alanına önemli katkıları sağlayıp, matematik ve fiziğin çeşitli alanlarında potansiyel uygulamalara sahiptir [54-59].

Modern eşitsizlikler teorisindeki son gelişmeler bağlamında, Noor vd. [60] Hermite-Hadamard eşitsizlikleri için kuantum hata sınır tahminleri elde etmiştir. Sonraki bir çalışmada, Alp vd. [39], Tariboon ve Ntouyas [53] tarafından önerilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genel olarak doğru olmadığını bir örnekle göstermiştir. Ek olarak, aynı çalışmada Alp ve diğerleri q -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin düzeltilmiş bir versiyonunu ve ayrıca q -türevlenebilir konveks fonksiyonlar için bazı orta nokta tipi eşitsizliklerin q -benzerlerini sunmuşlardır.

Aslında, kuantum integrallerinde genel bir değişken değiştirme kuralının olmaması temel bir sorun teşkil etmektedir. Bu konunun ihmal edilmesi sadece Taribon ve Ntouyas [53] tarafından yapılan çalışmalarda değil, Noor vd. [61] çalışmalarında da hataya yol açmıştır. Bu, Taribon ve Ntouyas [52] tarafından tanımlanan q -integralinin (1.1.3), (1.1.4) ve (1.1.7) gibi bazı özdeşliklerin doğru q -benzerini elde etmek için yeterli olmadığını gösterir.

Bu tezde, sağ q -türev ve belirli q -integral kavramları sunulmuş ve belirli sol ve sağ q -integrallerin bir kombinasyonu yoluyla q -Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir versiyonunu elde edilmiştir. Bu eşitsizliğe göre, q -türevinin mutlak değerinin belirli bir sayı kuvveti konveks olan fonksiyonlar için bazı yeni q -Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ve bunların geliştirilmiş formları kurulmuştur. Ayrıca, Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler için yeni kuantum tahminleri türetilmiştir. Sonuçların bir uygulaması olarak, $q \rightarrow 1^-$ limiti alındığında literatürde var olan bazı sonuçlar elde edilmiştir.

1.2. Araştırma Metodolojisi

Modern eşitsizlikler teorisinde, fonksiyonların konveksliğinin kullanılması ve iyi bilinen Hölder ve power-mean eşitsizliklerinin uygulanması, Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri kurmak için en yaygın kullanılan tekniklerdir, [28-41]. Benzer bir şekilde araştırmacılar klasik q -Hölder ve q -power-mean eşitsizliklerini kullanarak q -türevlenebilir konveks fonksiyonlar için q -Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir, [49, 53]. Son yıllarda İşcan, Hölder eşitsizliğinin geliştirilmiş ve genel versiyonunu ortaya koymuştur, [62]. Bu versiyon Literatürde Hölder-İşcan eşitsizliği olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra, [62]'de verilen teknikleri kullanarak, Kadakal vd. [63],

geliştirilmiş power-mean eşitsizliğini elde etmiştir. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean eşitsizliklerini uygulaması, klasik Hölder ve power-mean eşitsizliklerini kullanmaya kıyasla Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler için gelişmiş hata tahmin sınırları sağlar [62-68].

Bu çalışmada, ilk olarak, q -Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri kurmak için klasik q -Hölder ve q -power-mean eşitsizlikleri ve fonksiyonların konveksliği kullanılmıştır. Bundan sonra sol q -integralini kullanılarak, Hölder-İşcan eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonu türetilmiştir. Bu yeni yöntemi kullanılarak, bu çalışma sürecinde elde edilen yamuk ve orta nokta eşitsizlikler için geliştirilmiş sınırlar incelenmiştir. Ayrıca, sayısal hesaplamalar ve grafiklerin çizilmesi için Maple yazılımı kullanılmıştır.

1.3. Tez Organizasyonu

Bu tez II ana bölümden oluşmaktadır. I. ana bölüm 9 alt bölüm halinde aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. 1.4. alt bölümde, bazı temel kavramlar gözden geçirilmiş, Hölder ve power-mean eşitsizliklerinin yeni iyileştirmesi verilmiştir. 1.5 alt bölümünde, yamuk ve orta nokta tipi eşitsizliklerle ilgili bazı sonuçlar kısaca sunulmuştur. 1.6 alt bölümünde, Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler kısaca ele alınmıştır. Ek olarak, (1.1.7) özdeşliğinin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlara kısa ve öz bir genel bakış sunulmuştur.

1.7. alt bölümde, klasik q -hesabın temel fikirleri sunulmuş, hem klasik hem de Jackson q -integrallerinin özellikleri tartışılmıştır. Ardından, 1.8. alt bölümde, $[a, b]$ aralığında sol q -türevi ve belirli sol q -integrali kavramları ve temel özellikleri sunulmuştur. 1.9. alt bölümde, sol kuantum integral ile ilgili bazı temel eşitsizlikler kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca, bu alt bölümün sonunda, [15]'te verilen q -Ostrowski tipi eşitsizliklerin genel olarak doğru olmadığı tartışılmıştır.

II. ana bölüm 10 alt bölüm halinde şöyle düzenlenmiştir. 2.1 ve 2.2 alt bölümlerinde, reel sayıların $[a, b]$ aralığında sağ q -türevi ve belirli sağ q -integrali kavramları ve bunların temel özellikleri incelenmiştir. 2.3. alt bölümde, sol ve sağ kuantum integralleri birlikte kullanılarak [53,61]'de iddia edilen sonuçlar yeniden formüle edilmiştir. 2.4 alt bölümde, sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bazı yeni versiyonları tartışılmıştır. 2.5 ve 2.6 alt bölümlerinde, sırasıyla sol ve sağ kuantum

integrallerinin bir kombinasyonu ile ilgili iki ana özdeşlik elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen ana özdeşlikler üzerinde klasik q -Hölder ve q -power-mean eşitsizlikleri kullanılarak sol ve sağ q -integrallerle ilgili bazı yamuk ve orta nokta tipi eşitsizlikler kurulmuştur. 2.1-2.6 alt bölümlerindeki sonuçlar [69, 70]'de yayınlanmıştır. 2.7. alt bölümde, sol ve sağ q -integrallerinin bir kombinasyonu yoluyla Hermite-Hadamard tipi özdeşliklerin genel bir versiyonunu kurulmuştur. Klasik q -Hölder ve q -power-mean eşitsizliklerini bu genel özdeşliğe uygulanarak, sol ve sağ q -integrallerle ilgili bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler incelenmiştir. Ortaya çıkan eşitsizliklere parametrelerin belirli değerlerini koyarak sol ve sağ q -integrallerle ilgili bazı ağırlıklı Bullen, Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler sunulmuştur. 2.8. alt bölümde, sırasıyla Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean eşitsizliklerinin genel versiyonunun sol ve sağ kuantum integral benzerleri sunulmuştur. Son olarak, 2.5, 2.6 ve 2.8 alt bölümlerindeki sonuçlar kullanılarak sırasıyla 2.9 ve 2.10 alt bölümlerinde yamuk ve orta nokta tipi eşitsizliklerin geliştirilmiş ve genelleştirilmiş biçimleri incelenmiştir.

1.4. Bazı Temel Tanımlar ve Önemli İntegral Eşitsizlikleri

Bu alt bölümde, konveksliğin temel kavramı ve çeşitli yönlerde genelleştirilmesi kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca, Hölder ve kuvvet ortalaması (power-mean) integral eşitsizlikleri ve bunların yeni iyileştirmeleri de sunulmuştur.

Tanım 1.4.1. [12] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in I$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$f(\tau\rho_1 + (1 - \tau)\rho_2) \leq \tau f(\rho_1) + (1 - \tau)f(\rho_2) \quad (1.4.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna I üzerinde konvektir denir. Eğer her $\rho_1 \neq \rho_2$ ve $\tau \in (0,1)$ için (1.4.1) eşitsizliği kesin ise f fonksiyonuna kesin konvektir denir. Ayrıca, eğer (1.4.1) eşitsizliği tersine çevrilirse f fonksiyonuna I üzerinde konkavdır denir. Eğer (1.4.1) eşitsizliği tersine çevrilirse ve her $\rho_1 \neq \rho_2$ ve $\tau \in (0,1)$ için kesin ise f fonksiyonuna kesin konkavdır, denir.

Tanım 1.4.2. [76] $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ve $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in [0, \infty)$ ve $\tau, \omega \geq 0$ olmak üzere bazı sabit $s \in (0,1)$ için $\tau^s + \omega^s = 1$ ve

$$f(\tau\rho_1 + \omega\rho_2) \leq \tau^s f(\rho_1) + \omega^s f(\rho_2) \quad (1.4.2)$$

ise, bu takdirde f fonksiyonu ilk anlamda s -konvektir denir.

Tanım 1.4.3. [77] $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ve $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\tau, \omega \geq 0$ ve $\tau + \omega = 1$ olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in [0, \infty)$ ve bazı sabit $s \in (0,1]$ için

$$f(\tau\rho_1 + \omega\rho_2) \leq \tau^s f(\rho_1) + \omega^s f(\rho_2) \quad (1.4.3)$$

ise, bu takdirde f fonksiyonu ikinci anlamda s -konvektir denir.

Eğer 1.4.2 ve 1.4.3 tanımlarında $s = 1$ ise s -konveksliği her iki anlamda $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan fonksiyonların konveksliğine indirgenir.

Tanım 1.4.4. [23] $m \in [0,1]$ ve $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in [0, b]$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$f(\tau\rho_1 + m(1-\tau)\rho_2) \leq \tau f(\rho_1) + m(1-\tau)f(\rho_2), \quad (1.4.4)$$

ise, bu takdirde f fonksiyonu m -konvektir denir.

Tanım 1.4.5. [23] $(s, m) \in [0,1]^2$ ve $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in [0, b]$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$f(\tau\rho_1 + m(1-\tau)\rho_2) \leq \tau^s f(\rho_1) + m(1-\tau^s)f(\rho_2) \quad (1.4.5)$$

ise, bu takdirde f fonksiyonu ilk anlamda (s, m) -konvektir denir.

Tanım 1.4.6. [23] $(s, m) \in [0,1]^2$ ve $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\rho_1, \rho_2 \in [0, b]$ ve $\tau \in [0,1]$ için

$$f(\tau\rho_1 + m(1-\tau)\rho_2) \leq \tau^s f(\rho_1) + m(1-\tau)^s f(\rho_2) \quad (1.4.6)$$

ise, bu takdirde f fonksiyonu ikinci anlamda (s, m) -konvektir denir.

Eğer 1.4.5 ve 1.4.6 tanımlarında $m = s = 1$ ise (s, m) -konveksliği her iki anlamda $[0, b]$ üzerinde tanımlanan fonksiyonların konveksliğine indirgenir.

Çeşitli konveks fonksiyon türleri hakkında daha fazla bilgi [23, 28, 76]'de ve buradaki referanslarda bulunabilir.

Teorem 1.4.7. [62, 71] f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|f|^\alpha, |g|^\beta \in L[a, b]$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_a^b |(fg)(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (1.4.7)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik olabilmesi için gerekli ve yeterli şart ω_1 ve ω_2 sabitleri için hemen her yerde $\omega_1 |f(x)|^\alpha = \omega_2 |g(x)|^\beta$ olmasıdır.

Teorem 1.4.8. [63, 71] f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ için $|f|, |f||g|^\alpha \in L[a, b]$ ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_a^b |(fg)(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (1.4.8)$$

Teorem 1.4.9. [62] f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|f|^\alpha, |g|^\beta \in L[a, b]$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(fg)(x)| dx & \leq \frac{1}{b-a} \left[\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin genel versiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^b |(fg)(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \mu_i(x) |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_i(x) |g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (1.4.10)$$

burada, $i = 1, 2, \dots, n$, $\mu_i: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ve her $x \in [a, b]$ için $\sum_{i=1}^n \mu_i(x) = 1$ 'dir.

Uyarı 1.4.10. [62] Eğer Teorem 1.4.9'un tüm koşulları geçerli ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \mu_i(x) |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_i(x) |g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \leq \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlik, (1.4.10) eşitsizliğinin, (1.4.7) eşitsizliğinden daha iyi olduğunu gösterir.

Teorem 1.4.11. [63] f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ için $|f|, |f||g|^\alpha \in L[a, b]$ ise, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(fg)(x)| dx & \quad (1.4.11) \\ & \leq \frac{1}{b-a} \left[\left(\int_a^b (b-x) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| |g(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| |g(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\ & \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

(1.4.11)'deki ilk eşitsizlik, power-mean eşitsizliğinin geliştirilmiş bir biçimidir.

1.5. Yamuk ve Orta Nokta Tipi Eşitsizlikler

Bu alt bölümde, iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili bazı temel özdeşlikler ve bu özdeşliklere dayalı olarak elde edilen bazı yamuk ve orta nokta tipi eşitsizlikler kısaca tanıtılmıştır.

Lemma 1.5.1. [19] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığının içi) üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2\tau) f'(\tau a + (1-\tau)b) d\tau \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

özdeşliği sağlanır.

Sonrasında yukarıdaki özdeşlik ve Hölder eşitsizliğini kullanarak, türevlenebilir konveks fonksiyonlar için aşağıdaki yamuk tipi eşitsizlikleri kurmuşlardır [19].

Teorem 1.5.2. [19] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun.

a) Eğer $|f'|$ fonksiyonu $I = [a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{b-a}{8} [|f'(a)| + |f'(b)|] \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Eğer $\alpha > 1$ olmak üzere $|f'|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.5.3)$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{|f'(a)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + |f'(b)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{2} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde Pearce ve Pecaric [20], power-mean eşitsizliği ve (1.5.1) özdeşliği kullanarak, türevlenebilir konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri türetmiştir.

Teorem 1.5.3. [20] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ için $|f'|^\alpha$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f'(a)|^\alpha + |f'(b)|^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.5.4)$$

eşitsizliği sağlanır. İlâveten $\alpha > 1$ için

$$\frac{1}{4} \left(\frac{|f'(a)|^\alpha + |f'(b)|^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{2(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{|f'(a)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + |f'(b)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{2} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Uyarı 1.5.4. [20] Eğer Teorem 1.5.3'da $\alpha = 1$ alınırsa (1.5.4) eşitsizliği (1.5.2) eşitsizliğine indirgenir.

(1.1.3) özdeşliğinde Hölder ve power-mean eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki yamuk tipi eşitsizlikler Kavurmacı ve diğerleri tarafından sunulmuştur [22].

Teorem 1.5.5. [22] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun.

- a) Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ve $\alpha > 1$ için $|f'|^\beta$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.5.5)$$

$$\leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left[\left(|f'(a)|^\beta + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) |^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(|f'(b)|^\beta + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) |^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Eğer $\alpha \geq 1$ olmak üzere $|f'|^\alpha$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{8} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(2|f'(a)|^\alpha + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) |^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(2|f'(b)|^\alpha + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) |^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (1.5.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

[19]'daki çalışmaya benzer şekilde, Kırmacı [21]'de Hermite-Hadamard eşitsizliğinin orta ve sol tarafı arasındaki farkı için aşağıdaki gibi bir özdeşlik vererek, bazı orta nokta tipli eşitsizlikler bulmuştur.

Lemma 1.5.6. [21] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığının içi) üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \tau f'(\tau a + (1-\tau)b) d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\tau-1) f'(\tau a + (1-\tau)b) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

özdeşliği sağlanır.

Teorem 1.5.7. [21] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun.

a) Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)[|f'(a)| + |f'(b)|]}{8} \quad (1.5.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

b) Eğer $\alpha > 1$ için $|f'|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| & \\ & \leq \frac{b-a}{16} \left(\frac{4}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(|f'(a)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + 3|f'(b)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right. \\ & \quad \left. + \left(3|f'(a)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + |f'(b)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Eftekhari [23], (1.1.4) özdeşliğini kullanarak ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonlar için aşağıdaki orta nokta tipi eşitsizlikleri türetmiştir.

Teorem 1.5.8. [23] $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) açık aralığında birinci mertebeden türevlenebilir ve $f' \in L[a, b]$ olsun.

a) Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci anlamda (s, m) -konveks ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| & \\ & \leq \frac{b-a}{4(s+2)} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \frac{m}{s+1} \left(\left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

eşitsizliği geçerlidir.

b) Eğer $\alpha > 1$ için $|f'|^\alpha$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci anlamda (s, m) -konveks ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + m^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{b-a}{8} \left(\frac{2}{s+2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left(\frac{m}{s+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Uyarı 1.5.9. Eğer Teorem 1.5.8'de $s = m = 1$ alınırsa, 1.5.10-1.5.12 eşitsizlikleri sırasıyla aşağıdaki eşitsizliklere indirgenir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{b-a}{12} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} (|f'(a)| + |f'(b)|) \right], \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + (|f'(a)| + |f'(b)|) \right], \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{b-a}{8} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \left[2 \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} (|f'(a)| + |f'(b)|) \right]. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Yamuk ve orta nokta tipi eşitsizliklerle ilgili daha fazla sonuç [29-40]'daki referanslarda bulunabilir.

1.6. Bullen ve Simpson Tipi Eşitsizlikler

Bu alt bölümde bazı Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerle ilgili bazı sonuçlar kısaca belirtilmiştir.

Tanım 1.6.1. [74] $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $[a, b]$ 'deki x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 keyfi beş farklı noktanın tüm kümeleri için bu noktalar üzerindeki bölünmüş fark pozitif ise, yani

$$V_4(f; x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{k=0}^4 \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^4 (x_k - x_j)} \geq 0 \quad (1.6.1)$$

bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında 4-konvektir denir.

Uyarı 1.6.2. Eğer (a, b) aralığında $f^{(4)}$ mevcut ve $f^{(4)} \geq 0$ ise, bu takdirde f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında 4-konvektir ve tersi genel olarak doğru değildir [73].

1978'de Bullen, 1-konveks (konveks) fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği kanıtlamıştır.

Teorem 1.6.3. [74] Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{4} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (1.6.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

f 'nin $[a, b]$ aralığında konveks olması durumunda

$$\frac{1}{4} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

olduğu açıktır, bu da eşitsizlik (1.6.2)'nin, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin geliştirilmiş bir versiyonu olduğunu gösterir. Ayrıca, Bullen [74], 4-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir.

Teorem 1.6.4. [74] Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında 4-konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right] &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıdaki eşitsizlik literatürde Bullen-Simpson eşitsizliği olarak adlandırılır.

Aşağıdaki eşitsizlikler, L -Lipschitzian fonksiyonları için Hadamard ve Bullen tipi eşitsizliklerle ilgili sonuçlardan elde edilen özel durumlardır [25].

$$\left| \frac{1}{4} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L(b-a)}{8} \quad (1.6.4)$$

ve

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{5L(b-a)}{36}. \quad (1.6.5)$$

Dragomir vd. [75]'te eşitsizlik (1.1.6) için aşağıdaki gibi yeni bir sınır elde etmiştir:

Teorem 1.6.5. [75] $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \frac{b-a}{36} \|f'\|_1. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Burada, $\|f'\|_1 = \int_a^b |f'(x)| dx$ 'dir.

Teorem 1.6.6. [75] $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.

Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $f' \in L_\alpha[a, b]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{\beta}}}{36} \left[\frac{2^{\beta+1} + 1}{3(\beta+1)} \right]^{\frac{1}{\beta}} \|f'\|_\alpha \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sarikaya vd. [26] aşağıdaki özdeşliği kullanarak bazı Simpson tipi eşitsizlikler elde etmiştir.

Lemma 1.6.7. [26] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir ve $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ & \frac{b-a}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{3} \right) f' \left(\frac{1+\tau}{2} b + \frac{1-\tau}{2} a \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\tau}{2} \right) f' \left(\frac{1+\tau}{2} a + \frac{1-\tau}{2} b \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

özdeşliği sağlanır.

[26]'daki ana eşitsizlik aşağıdaki gibi sunulmuştur.

Teorem 1.6.8. [26] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $\beta > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|f'|^\beta$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{1+2^{\alpha+1}}{3(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{3|f'(a)|^\beta + |f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(a)|^\beta + 3|f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Son olarak, (1.1.7) özdeşliğine dayalı olarak Xi ve Qi [27] tarafından elde edilen bazı kayda değer sonuçları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 1.6.9. [27] $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde birinci mertebeden türevlenebilir olsun. Ayrıca $a < b$ olan her $a, b \in I^\circ$ için $|f'| \in L[a, b]$ ve $0 \leq \lambda, \eta \leq 1$ olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ için $|f'|^\alpha$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu takdirde

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.6.10)$$

$$\leq \frac{b-a}{8} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left((1-2\lambda+2\lambda^2)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[(4-9\lambda+12\lambda^2-2\lambda^3)|f'(a)|^\alpha + (2-3\lambda+2\lambda^3)|f'(b)|^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ \left. + (1-2\eta+2\eta^2)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left[(2-3\mu+2\mu^3)|f'(a)|^\alpha + (4-9\eta+12\eta^2-2\eta^3)|f'(a)|^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 1.6.10. [27]

- a) Eğer $\lambda = \eta = \frac{1}{2}$ alınırsa, (1.6.10) eşitsizliği aşağıdaki Bullen tipi eşitsizliğe indirgenir.

$$\left| \frac{1}{4} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.6.11) \\ \leq \frac{b-a}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ [9|f'(a)|^\alpha + 3|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} + [3|f'(a)|^\alpha + 9|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

- b) Eğer $\lambda = \eta = \frac{1}{3}$ alınırsa, (1.6.10) eşitsizliği aşağıdaki Simpson tipi eşitsizliğe indirgenir.

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.6.12) \\ \leq \frac{5(b-a)}{72} \left(\frac{1}{90}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ [61|f'(a)|^\alpha + 29|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ \left. + [29|f'(a)|^\alpha + 61|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

- c) Eğer $\lambda = \eta = \frac{2}{3}$ alınırsa, (1.6.10) eşitsizliği aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğe indirgenir

$$\left| \frac{1}{3} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (1.6.13) \\ \leq \frac{5(b-a)}{72} \left(\frac{1}{180}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ [74|f'(a)|^\alpha + 16|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ \left. + [16|f'(a)|^\alpha + 74|f'(b)|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

Özellikle eğer $\alpha = 1$ alınırsa, (1.6.11), (1.6.12) ve (1.6.13) eşitsizlikleri sırasıyla aşağıdaki eşitsizliklere indirgenir

$$\left| \frac{1}{4} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{16} [|f'(a)| + |f'(b)|], \quad (1.6.14)$$

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{5(b-a)}{72} [|f'(a)| + |f'(b)|], \quad (1.6.15)$$

ve

$$\left| \frac{1}{3} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{5(b-a)}{72} [|f'(a)| + |f'(b)|]. \quad (1.6.16)$$

1.7. Klasik Kuantum Türevi ve Jackson Kuantum İntegrali

Bu alt bölümde, q -türevi ve Jackson q -integrali kavramları ve temel özellikleri kısaca sunulmuştur.

Tanım 1.7.1. [50] $q \in \mathbb{R}$ bir sabit ve I bir boş olmayan küme olsun. Eğer her $t \in I$ için $qt \in I$ ise, bu takdirde I bir q -geometrik kümedir denir.

Örnek 1.7.2. $q \in [0,1]$ olmak üzere $I = [0,1]$ bir q -geometrik kümedir.

Tanım 1.7.3. [50] $q \neq 1$ ve I bir q -geometrik küme olsun. Ayrıca $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks veya reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde q -fark operatörü veya kuantum türevi şu şekilde tanımlanır:

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & x \in I - \{0\}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x), & x = 0 \text{ ve } |q| < 1, \\ D_{q^{-1}} f(0), & x = 0 \text{ ve } |q| > 1. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Bazı kaynaklarda, $f'(0)$ 'ın mevcut olması şartıyla q -fark operatörünün veya kuantum türevinin tanımı şu şekilde verilir [78, 79].

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} & , \quad x \neq 0, \\ f'(0) & , \quad x = 0. \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Yukarıdaki q -fark operatörü, 1910'da Jackson tarafından sistematik olarak incelenmiştir ve bu nedenle bazen Jackson q -fark operatörü olarak adlandırılır.

Tanım 1.7.4. [46] I bir q -geometrik küme ve $f(x)$ fonksiyonu I tüzünde tanımlanmış olsun. Bu takdirde $f(x)$ 'in q -diferansiyeli şu şekilde verilir.

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \quad (1.7.3)$$

Uyarı 1.7.5. [46] I bir q -geometrik küme ve $f(x)$ fonksiyonu I tüzünde tanımlanmış olsun. Eger $x \in I$ için $f'(x)$ mevcut ise, bu takdirde

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (1.7.4)$$

dir.

Teorem 1.7.6. [46] **(Kuantum türevinin özellikleri)** ξ_1 ve ξ_2 iki sabit ve I bir q -geometrik küme olsun. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları I kümesi üzerinde quantum türevlenebilir (q -türevlenebilir) ise, bu takdirde $(\xi_1 f + \xi_2 g)(x)$, $(fg)(x)$ ve $(g(x) \neq 0$ olması) halinde $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonları da I üzerinde q -türevlenebilirdir ve

(i)

$$D_q(\xi_1 f(x) + \xi_2 g(x)) = \xi_1 D_q f(x) + \xi_2 D_q g(x),$$

(ii)

$$\begin{aligned} D_q((fg)(x)) &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x), \\ &= f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x), \end{aligned}$$

(iii)

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

veya

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

dir.

Örnek 1.7.7. [46] n bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda $f(x) = x^n$ fonksiyonun q -türevi yani

$$D_q f(x) = D_q(x^n) = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1}$$

olur. Genellikle $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ sayısı

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \dots + 1 \quad (1.7.5)$$

ile gösterilir ve n 'nin q -analoğu olarak adlandırılır. Böylece $D_q(x^n) = [n]_q x^{n-1}$ olur.

Uyarı 1.7.8. [46] ξ_1 ve ξ_2 iki sabit olsun. Eğer $g(x) = \xi_1 x^{\xi_2}$ ve $h(x) = (f \circ g)(x)$ ise, bu takdirde

$$D_q h(x) = D_{q^{\xi_2}} f(g(x)) D_q g(x) \quad (1.7.6)$$

dir.

Tanım 1.7.9. [46] Eğer $F(x)$ bir fonksiyon ve $D_q F(x) = f(x)$ ise, bu takdirde $F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ 'in q -antitürevi denir ve

$$F(x) = \int f(x) d_q x, \quad (1.7.7)$$

ile gösterilir.

Genel olarak, bir fonksiyonun q -antitürevleri arasındaki farkın mutlak bir sabit olmadığına dikkat etmek önemlidir. Örneğin, eğer $D_q F(x) = f(x)$ ise, yukarıdaki tanıma göre $F(x)$, $f(x)$ 'in q -antitürevidir. Öte yandan, q -türevinin tanımına göre $D_q \varphi(qx) = 0$ ancak ve ancak $\varphi(qx) = \varphi(x)$ ise ve bu, $\varphi(x)$ 'in mutlak bir sabit fonksiyon olduğu anlamına gelmez. Dolayısıyla $D_q(F(x) + \varphi(x)) = f(x)$ ve bu bir fonksiyonun q -antitürevleri arasındaki farkın mutlak bir sabit olmadığını gösterir [46].

Bir fonksiyonun q -antitürevini yeganeliği için q 'ya aşağıdaki gibi bir kısıtlama yapılmıştır.

Önerme 1.7.10. [46] Eğer $q \in (0,1)$ ise, bu takdirde bir sabit farkıyla herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekli olan en fazla bir q -antitürevine sahiptir.

Uyarı 1.7.11. [46] ξ_1 ve ξ_2 iki sabit olsun. Eğer $g(x) = \xi_1 x^{\xi_2}$ ve $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ ' in bir q -antitürevi ise, bu takdirde

$$\int f(g)d_q g = F(g) = F(g(x)) \text{ 'dir} \quad (1.7.8)$$

Tanım 1.7.12. [42, 46] I bir q -geometrik küme ve $f(x)$ fonksiyonu I tüzlerinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde

$$\int f(x)d_q x = (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) \quad (1.7.9)$$

serisine $f(x)$ ' in Jackson belirsiz integrali denir. Ayrıca, (1.7.9)'ün daha genel bir biçimi

$$\begin{aligned} \int f(x)d_q g(x) &= (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) D_q g(q^n x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n x) (g(q^n x) - g(q^{n+1} x)) \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

ile verilir.

Örnek 1.7.13. [46] $g(x) = \log x$ olsun. Bu takdirde

$$D_q g(x) = \frac{\log qx - \log x}{(q-1)x} = \frac{\log q}{1-q} \frac{1}{x} = \frac{\log q}{1-q} f(x)$$

ve Jackson belirsiz integralinin tanımına göre

$$\int \frac{1}{x} d_q x = (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{q^n x} = \infty$$

olur.

Bu örnek bir fonksiyonun q -antitürevine sahip olabileceğini ancak bir Jackson q -integraline sahip olamayacağını göstermektedir. Kac ve Cheung [46], Jackson integralinin varlığı ve bunun yegane q -antitürevi ile ilişkisi için aşağıdaki sonucu sunmuştur.

Teorem 1.7.14. [46] Eğer $q \in (0,1)$ ve $|f(x)x^\alpha|$ fonksiyonu bazı $\alpha \in [0,1)$ için $(0,b]$ aralığında sınırlı ise, bu durumda (1.7.9) ile tanımlanan Jackson belirsiz integrali $(0,b]$ aralığında $f(x)$ 'in bir q -antitürevi olan $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca, $F(x)$, $x = 0$ 'da sürekli ve $F(0) = 0$ 'dır.

Jackson belirli integrali şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.7.15. [46] $b > 0$ ve $f: (0,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x)$ 'in belirli q -integrali

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b), \quad (1.7.11)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca her $0 < a < b$ için

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x \quad (1.7.12)$$

ve (1.7.11)'nin daha genel biçimi

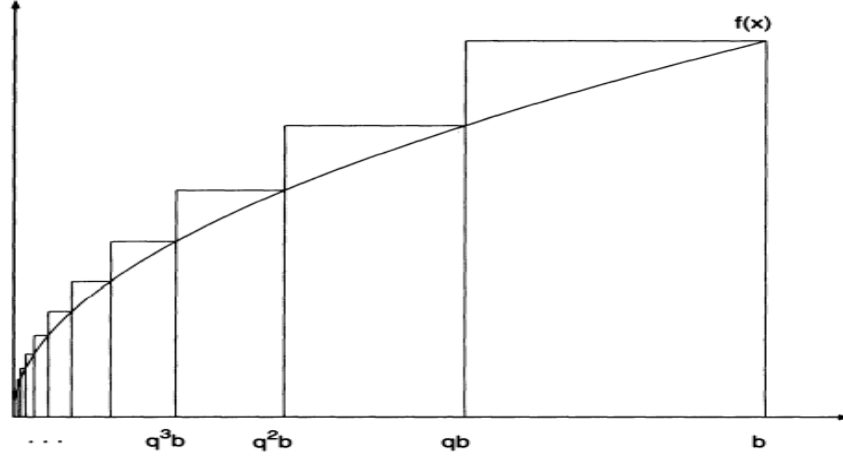
$$\int_0^b f(x) d_q g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n b) (g(q^n b) - g(q^{n+1} b)) \quad (1.7.13)$$

dir.

Jackson belirli integralinin geometrik yorumu [46]'da şu şekilde verilmiştir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $q^n b = x_n$, $q^{n+1} b = x_{n+1}$ ve $\Delta x_n = q^n b - q^{n+1} b$ olsun. Bu takdirde $\Delta x_n f(x_n) = (1-q)bq^n f(q^n b)$ dikdörtgenin alanı ve (1.7.11)'daki Jackson belirli

integrali, aşağıdaki şekil 1. deki gibi sonsuz sayıda dikdörtgenin alanlarının toplamına karşılık gelir.



Şekil 1. Jackson belirli integralinin geometrik görselleştirilmesi [46]

Sonuç 1.7.16. [80] Eğer $\int_0^b f(x) dx$ integrali yakınsak ise, bu takdirde

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow 1} b(1 - q)[f(b) + qf(qb) + q^2f(q^2b) + \dots]$$

dir. Bu nedenle

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) dx \quad (1.7.14)$$

dir.

Jackson belirli integralinde değişkenlerin değişimi için genel bir kural yoktur ve aşağıdaki formül sadece ξ_1 ve ξ_2 iki sabit olmak üzere $g(x) = \xi_1 x^{\xi_2}$ olduğunda geçerlidir [46].

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g) d_q g = \int_a^b f(g(x)) d_{\frac{1}{q^{\xi_2}}} g(x).$$

q -Hesab'ın Temel Teoremi 1.7.17. [46] Eğer $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ 'in bir q -antitürevi ve $x = 0$ noktasında sürekli ise, bu takdirde $0 \leq a < b \leq \infty$ için

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a) \quad (1.7.15)$$

dır.

Sonuç 1.7.18. [46] Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ bir komşuluğunda türevlenebilir ve $f'(x)$ sıfır noktasında sürekli ise, bu takdirde $0 \leq a < b$ için

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = f(b) - f(a) \quad (1.7.16)$$

dır.

Sonuç 1.7.19. [46] (**Kısmi İntegrasyon Kuralı**) Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyonu $x = 0$ bir komşuluğunda türevlenebilir ve $f'(x), g'(x)$ sıfır noktasında sürekli ise, bu takdirde $0 \leq a < b$ için

$$\int_a^b f(x) d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) d_q f(x) \quad (1.7.17)$$

dir.

Sonuç 1.7.20. [50] $f: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a = 0$ veya $b = \infty$ ise veya $t \in (0, b]$ ve $a < b$ için $a = q^n t$ ve $b = q^m t$ biçiminde ise, bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) d_q x \right| \leq \int_a^b |f(x)| d_q x \quad (1.7.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer Sonuç 1.7.20'de belirtilen koşullar sağlanmazsa, yukarıdaki eşitsizlik genel olarak geçerli değildir [50].

1.8. Kapalı ve Sınırlı Bir Aralık Üzerinde Kuantum Hesabı

2013 yılında Tariboon ve Ntouyas birinci ve ikinci mertebeden q -fark denklemlerinin başlangıç değer problemlerini çözmek için Jackson q -fark operatörü (q -

türevi) ve Jackson belirli integrali (belirli q -integrali) kavramlarını $[a, b]$ keyfi kapalı ve sınırlı aralığında aşağıdaki gibi genişletmiştir [52].

Tanım 1.8.1. [52] $x \in [a, b]$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $q \in (0, 1)$ için f fonksiyonunun $x \in [a, b]$ noktasındaki q_{a+} -türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}_a D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx + (1-q)a)}{(1-q)(x-a)}, & x \neq a, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} {}_a D_q f(x), & x = a. \end{cases} \quad (1.8.1)$$

Eğer her $x \in [a, b]$ için ${}_a D_q f(x)$ mevcut ise, bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında q_{a+} -türevlenebilir denir.

Uyarı 1.8.2. [52] Eğer $a = 0$ ise, yukarıdaki genişletilmiş q_{a+} -fark operatörü Jackson q -fark operatörüne indirgenir.

Teorem 1.8.3. [52] (**q_{a+} -türevinin özellikleri**) ξ bir sabit olsun. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında q_{a+} -türevlenebilir ise, bu takdirde $(f + g)(x)$, $(\xi f)(x)$, $(fg)(x)$ ve $(g(x)g(qx + (1-q)a) \neq 0$ olması) halinde $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonları da $[a, b]$ aralığında q_{a+} -türevlenebilir ve

(i)

$${}_a D_q (f + g)(x) = {}_a D_q f(x) + {}_a D_q g(x),$$

(ii)

$${}_a D_q (\xi f)(x) = \xi {}_a D_q f(x),$$

(iii)

$$\begin{aligned} {}_a D_q (fg)(x) &= f(x) {}_a D_q g(x) + g(qx + (1-q)a) {}_a D_q f(x) \\ &= g(x) {}_a D_q f(x) + f(qx + (1-q)a) {}_a D_q g(x), \end{aligned}$$

ve

(iv)

$${}_a D_q \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{g(x) {}_a D_q f(x) - f(x) {}_a D_q g(x)}{g(x) g(qx + (1-q)a)}$$

dır.

Tanım 1.8.4. [52] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli q_{a^+} -integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b f(x)_{a^+} d_q x = (1 - q)(b - a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1 - q^n)a) \quad (1.8.2)$$

ve her $c \in (a, b)$ için

$$\int_c^b f(x)_{a^+} d_q x = \int_a^b f(x)_{a^+} d_q x - \int_a^c f(x)_{a^+} d_q x \quad (1.8.3)$$

dir.

Uyarı 1.8.5. [52] Eğer $a = 0$ ise, yukarıdaki genişletilmiş q_{a^+} - integrali Jackson q -integraline indirgenir.

Teorem 1.8.6. [52] (q_{a^+} -integralinin bazı özellikleri): $\xi \in \mathbb{R}$ bir sabit $f(x)$ ve $g(x)$, $[a, b]$ aralığında iki sürekli fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki kurallar geçerlidir.

(i) Her $\rho \in [a, b]$ için

$${}_{a^+}D_q \int_a^\rho f(x)_{a^+} d_q x = f(\rho)$$

ve eğer $c \in (a, \rho)$ ise

$$\int_c^\rho {}_{a^+}D_q f(x)_{a^+} d_q x = f(\rho) - f(c)$$

dir.

(ii) Her $c \in [a, b]$ için

$$\int_a^c (f + g)(x)_{a^+} d_q x = \int_a^c f(x)_{a^+} d_q x + \int_a^c g(x)_{a^+} d_q x ,$$

$$\int_a^c (\xi f)(x)_{a+d_q x} = \xi \int_a^c f(x)_{a+d_q x}$$

ve

$$\int_a^c f(x)_{a+D_q g(x)_a d_q x} = (fg)(x)|_a^c - \int_a^c g(qx + (1-q)a)_{a+D_q f(x)_a d_q x}$$

dir.

1.9. Bazı Temel Eşitsizliklerin q_{a^+} -Benzeri

Hölder integral eşitsizliği, Hermite-Hadamard integral eşitsizliği ve Ostrowski tipi integral eşitsizliği gibi iyi bilinen integral eşitsizliklerinin kuantum benzerleri bu alt bölümde sunulmuş ve tartışılmıştır.

Teorem 1.9.1. [53] f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|f|^\alpha, |g|^\beta$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde q_{a^+} -integrallenebilir ise, bu takdirde

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|_{a+d_q x} = \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha_{a+d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta_{a+d_q x} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (1.9.1)$$

eşitsizliği doğrudur.

Uyarı 1.9.2. [53] Eğer $a = 0$ ise, yukarıdaki eşitsizlik klasik q -Hölder eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 1.9.3. [53] Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde bir konveks sürekli fonksiyon ise, bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)_{a+d_q x} \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \quad (1.9.2)$$

eşitsizliği doğrudur.

Tariboon ve Ntouyas, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak ve elde edilen eşitsizliğin $[0, 1]$ aralığında q -integralini alarak aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f((1-\tau)a + \tau b) d_q \tau + \int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) d_q \tau \right] \\ \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}.$$

Yukarıdaki eşitsizlikteki birinci integralin hesabı [53]'te şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f((1-\tau)a + \tau b) d_q \tau &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f((1-q^n)a + q^n b) \\ &= \frac{(1-q)(b-a)}{(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f((1-q^n)a + q^n b) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)_{a+d_q x} \end{aligned}$$

ve ikinci integral için aşağıdaki eşitlik iddia edilmiştir [53]:

$$\int_0^1 f((1-\tau)a + \tau b) d_q \tau = \int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) d_q \tau. \quad (1.9.3)$$

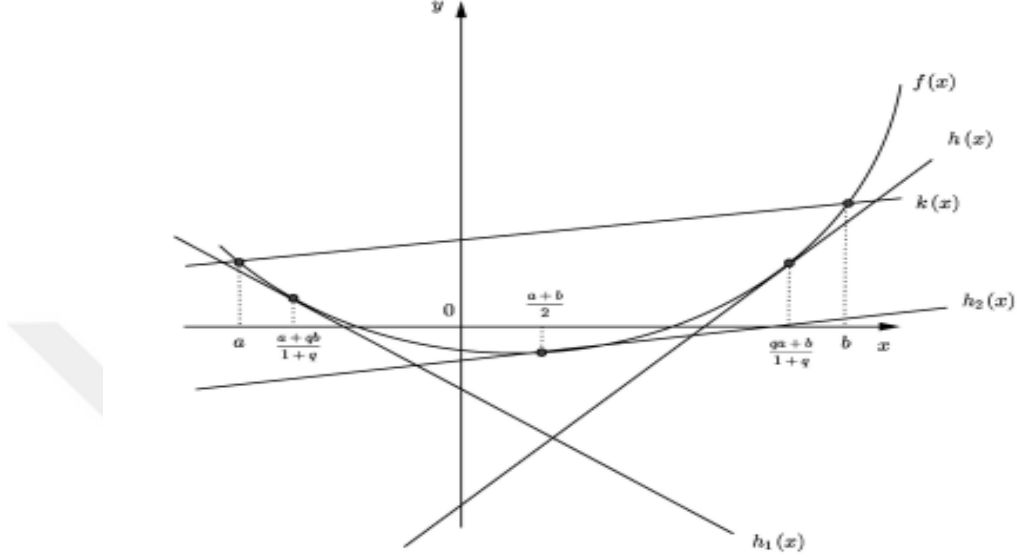
2016 yılında Alp vd. [39] aşağıdaki örneği vererek, (1.9.2) eşitsizliğinin sağ tarafının genel olarak doğru olmadığını göstermiştir.

Örnek 1.9.4. [39] $x \in [0,1]$ ve $f(x) = 1 - x$ olsun. Bu durumda Teorem 1.9.3'te iddia edilen eşitsizliğe göre her $q \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{0+1}{2}\right) &\leq \frac{1}{1-0} \int_0^1 (1-x)_{0+d_q x} \\ 1 - \frac{1}{2} &\leq (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (1-q^n) \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{q}{1+q} \end{aligned}$$

olmalıdır. Ama $q = \frac{1}{2}$ için $\frac{q}{1+q} \leq \frac{1}{2}$ olur ve bu (1.9.3)'teki ilk eşitsizlikle çelişir.

Ayrıca Alp vd. [39] geometrik yöntemi kullanarak, konveks türevlenebilir fonksiyonlar için (1.9.2) eşitsizliğinin doğru biçimlerini aşağıdaki gibi sunmuştur.



Şekil 2. Türevlenebilir eğri üzerindeki teğet doğruların grafikleri [39]

$$I_1 = f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}, \quad (1.9.4)$$

$$I_2 = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \frac{(1-q)(b-a)}{1+q} f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}$$

$$I_3 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(1-q)(b-a)}{2(1+q)} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}$$

$$\max\{I_1, I_2, I_3\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1+q}.$$

Noor vd. [61] aşağıdaki özdeşliği iddia ederek ve bunu kullanarak Ostrowski tipi eşitsizliklerle ilgili bazı sonuçları elde etmişlerdir.

Lemma 1.9.5. [61] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında q_{a+} -türevlenebilir olsun. Eğer ${}_aD_q f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve q -integrallenebilir ise, bu takdirde her $\rho \in [a, b]$ için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir

$$\begin{aligned} f(\rho) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x &= \frac{q(\rho-a)^2}{b-a} \int_0^1 \tau {}_{a+}D_q f(\tau\rho + (1-\tau)a) d_q \tau \\ &+ \frac{q(b-\rho)^2}{b-a} \int_0^1 \tau {}_{a+}D_q f(\tau\rho + (1-\tau)b) d_q \tau. \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

Yukarıda iddia edilen özdeşliğe dayalı olarak elde edilen sonuçlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.9.6. [61] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında q -türevlenebilir olsun. Ayrıca ${}_aD_q f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve q -integrallenebilir olsun.

- a) Eğer $|{}_aD_q f|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ve her $\rho \in [a, b]$ için $|{}_aD_q f(\rho)| \leq M$ ise, bu takdirde

$$\left| f(\rho) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \right| \leq \frac{qM[(\rho-a)^2 + (b-\rho)^2]}{(b-a)(1+q)} \quad (1.9.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

- b) Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|{}_aD_q f|^\alpha$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ve her $\rho \in [a, b]$ için $|{}_aD_q f(\rho)|^\alpha \leq M$ ise, bu takdirde

$$\left| f(\rho) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x \right| \leq \frac{qM[(\rho-a)^2 + (b-\rho)^2]}{(b-a)} \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.9.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

Noor vd. [61] iddia edilen (1.9.5) özdeşliğin ispatında sadece aşağıdaki eşitliğin ispatını vermiştir.

$$\begin{aligned}
& \frac{q(\rho - a)^2}{b - a} \int_0^1 \tau {}_{a^+}D_q f(\tau\rho + (1 - \tau)a) d_q \tau \\
&= \frac{\rho - a}{q(b - a)} f(\rho) - \frac{1}{q(b - a)} \int_a^\rho f(x) {}_{a^+}d_q x.
\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

Fakat, aşağıdaki sonucun ispatını vermemişler ve sadece (1.9.5) ispatının benzer şekilde yapılabileceğini iddia etmişlerdir.

$$\begin{aligned}
& \frac{q(b - \rho)^2}{b - a} \int_0^1 \tau {}_{a^+}D_q f(\tau\rho + (1 - \tau)b) d_q \tau \\
&= \frac{b - \rho}{q(b - a)} f(\rho) - \frac{1}{q(b - a)} \int_\rho^b f(x) {}_{a^+}d_q x.
\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

Şimdi, aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 1.9.7. $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta_1: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ ve $\theta_2: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ fonksiyonları sırasıyla $f(x) = 1 + x$, $\theta_1(\tau) = b\tau + (1 - \tau)a$ ve $\theta_2(\tau) = a\tau + (1 - \tau)b$ olarak tanımlanmış olsun. Bu takdirde $[a, b] = [1, 2]$ olmak üzere

$$f(a\tau + (1 - \tau)b) = f(\tau + (1 - \tau)2) = 3 - \tau$$

ve q_{a^+} -türevinin tanımına göre her $x \in [1, 2]$ için

$${}_{a^+}D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx + (1 - q)a)}{(1 - q)(x - a)}$$

olur. Bu ise,

$${}_{a^+}D_q f(a\tau + (1 - \tau)b) = \frac{f(\tau + (1 - \tau)2) - f(q(\tau + (1 - \tau)2) + (1 - q))}{(1 - q)(\tau + (1 - \tau)2 - 1)} = 1$$

ve $\rho = \frac{3}{2}$ için

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{q(b-\rho)^2}{b-a} \int_0^1 \tau_{a+D_q} f(\tau\rho + (1-\tau)b) d_q \tau \\
&= \frac{q\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}{2-1} \int_0^1 \tau \cdot 1 d_q \tau = \frac{q}{4} \frac{\tau^2}{[2]_q} \Big|_0^1 = \frac{q}{4(1+q)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{b-\rho}{q(b-a)} f(\rho) - \frac{1}{q(b-a)} \int_\rho^b f(x)_{a+} d_q x \\
&= \frac{2-\frac{3}{2}}{q(2-1)} f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{q(2-1)} \int_{\frac{3}{2}}^2 (1+x)_{1+} d_q x \\
&= \frac{5}{4q} - \frac{1}{q} \left\{ \int_1^2 (1+x)_{1+} d_q x - \int_1^{\frac{3}{2}} (1+x)_{1+} d_q x \right\} \\
&= \frac{5}{4q} - \frac{1-q}{q} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n + 2) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\frac{q^n}{2} + 2 \right) \right\} \\
&= \frac{5}{4q} - \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{1}{1-q^2} + \frac{2}{1+q} - \frac{1}{4(1-q^2)} - \frac{1}{1-q} \right\} \\
&= \frac{q-2}{4q(1+q)}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla bu, (1.9.5)'te iddia edilen eşitlikle çelişir ve bu nedenle iddia edilen eşitliğin verilen q -benzeri doğru değildir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f((1-\tau)a + \tau b) d_q \tau &= \int_0^1 f((1-\tau) + 2\tau) d_q \tau \\
&= \int_0^1 f(1+\tau) d_q \tau = \int_0^1 (2+\tau) d_q \tau = 2 + \frac{1}{1+q}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) d_q \tau &= \int_0^1 f(\tau + (1-\tau)2) d_q \tau \\
&= \int_0^1 f(2-\tau) d_q \tau = \int_0^1 (3-\tau) d_q \tau = 3 - \frac{1}{1+q}
\end{aligned}$$

olur. Bu durum (1.9.3) bağıntısıyla çelişmekte ve iddia edilen (1.9.2) eşitsizliğinin geçersiz olmasının ana sebebinin bu bağıntının kullanılması olduğunu göstermektedir. Bu nedenle,

(1.1.3), (1.1.4) ve (1.1.7) özdeşliklerinin yalnızca q_{a+} -integral yoluyla oluşturulması, (1.9.2) ve (1.9.5)'te olduğu gibi hatalara sebep olur.

Şimdi, q -integrallerinde değişken değişimi için genel bir kural olmadığına göre, $[a, b]$ aralığında $\int_0^1 f(\tau a + (1 - \tau)b) d_q \tau$ integralinin nasıl ifade edileceği sorusu ortaya çıkıyor. Ayrıca, eğer $\int_0^1 f(\tau a + (1 - \tau)b) d_q \tau$ integrali $[a, b]$ aralığında $\int_0^1 f((1 - \tau)a + \tau b) d_q \tau$ integraline benzer şekilde ifade edilirse, bu durumda (1.9.3) ve (1.9.5)'te iddia edilen sonuçların kuantum benzerleri ne olacaktır? Bu soruların cevapları bir sonraki alt bölümde bulunabilir.



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Kapalı ve Sınırlı Bir Aralık Üzerinde Sağ Kuantum Türevi

Jackson belirli q -integralinde genel bir değişken değiştirme kuralının olmamasını dikkate alarak ve $\int_0^1 f(\tau a + (1 - \tau)b) d_q \tau$ integralini $[a, b]$ aralığında ifade etmek için Kunt vd. [69] q_{a+} -fark operatörüne benzer şekilde q_{b-} -fark operatörü tanımlamışlardır. Ayrıca, q_{a+} -türevini sol kuantum türevi ve q_{b-} -türevini sağ kuantum türevi olarak yeniden adlandırmışlardır. Bu alt bölümde, [69]'da verilen sağ kuantum türevi (q_{b-} -türevi) ve temel özellikleri sunulmuştur.

Tanım 2.1.1. a ve b , $a < b$ koşulunu sağlayan iki reel sayı ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in [a, b]$ için f fonksiyonunun sağ kuantum türevi veya kısaca sağ q_{b-} -türevi, şu şekilde tanımlanır:

$${}_b-D_q f(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)}, & x \neq b \\ \lim_{x \rightarrow b^-} {}_b-D_q f(x) & x = b \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Eğer her $x \in [a, b]$ için ${}_b-D_q f(x)$ mevcut ise, bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sağ kuantum türevlenebilirdir denir. Ayrıca eğer $b = 0$ ise, bu takdirde yukarıda tanımlanan q_{b-} -türevi klasik q -türevine indirgenir.

Örnek 2.1.2. $f: [-5, -2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2 + 3x$ ile tanımlansın. Bu takdirde $x \in [-5, -2]$ olmak üzere f fonksiyonunun sağ kuantum türevi $x \neq -2$ için

$$\begin{aligned} {}_{-2}-D_q f(x) &= \frac{x^2 + 3x - \left[(qx + (1 - q)(-2))^2 + 3(qx + (1 - q)(-2)) \right]}{(1 - q)(x + 2)} \\ &= qx + 2q + x + 1 \end{aligned}$$

ve $x = -2$ için

$$_{-2-}D_q f(-2) = \lim_{t \rightarrow -2^+} _{-2-}D_q f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (qx + 2q + x + 1) = -1$$

olur. Bu ise,

$$_{-2-}D_q f(x) = \begin{cases} qx + 2q + x + 1, & x \neq -2 \\ -1, & x = -2 \end{cases}$$

dir. Ayrıca f fonksiyonunun sol kuantum türevi $x \neq -5$ için

$$\begin{aligned} _{-5+}D_q f(x) &= \frac{x^2 + 3x - [(qx + (1-q)(-5))^2 + 3(qx + (1-q)(-5))]}{(1-q)(x - (-5))} \\ &= x + qx + 5q - 2 \end{aligned}$$

ve $x = -5$ için

$$_{-5+}D_q f(-5) = \lim_{t \rightarrow -5^+} _{-5+}D_q f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x + qx + 5q - 2) = -7$$

olur. Bu ise,

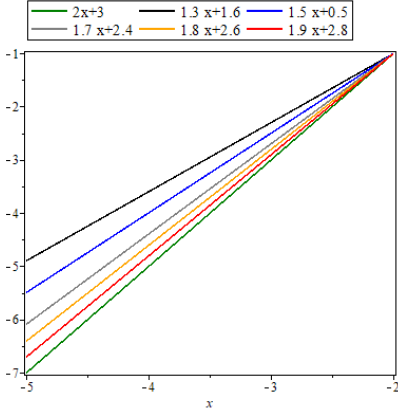
$$_{-5+}D_q f(x) = \begin{cases} x + qx + 5q - 2, & x \neq -5 \\ -7, & x = -5 \end{cases}$$

dir. Açıkça eğer Örnek 2.1.2'de $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda $_{-2-}D_q f(x) \rightarrow f'(x)$, yani

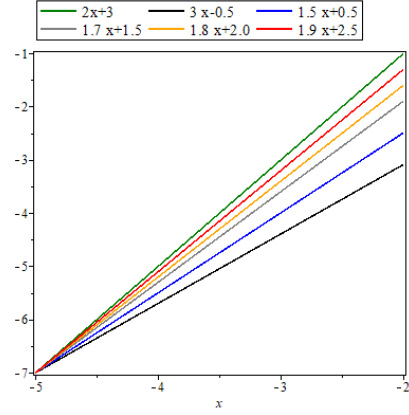
$$\lim_{q \rightarrow 1^-} _{-2-}D_q f(x) = f'(x)$$

olur.

Şekil 3 ve 4, sırasıyla $f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonunun sağ ve sol kuantum türevlerinin normal türevine yakınsama davranışını göstermektedir.



Şekil 3. $f(x)=2x+3$ için sağ kuantum türevin yaklaşımının görselleştirilmesi



Şekil 4. $f(x)=2x+3$ için sol kuantum türevin yaklaşımının görselleştirilmesi

Genel olarak, eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir ise,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$$

ve

$$\frac{df(a^+)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \frac{df(b^-)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

tır.

Öte yandan $0 < q < 1$ ve $a \leq t < b$ için $(1-q)(b-t) > 0$ 'dır. Eğer $h = (1-q)(b-t)$ alınırsa bu takdirde $q \rightarrow 1^-$ iken $h \rightarrow 0^+$. Bu ise,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1^-} {}_b D_q f(x) &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(qx + (1-q)b) - f(x)}{(1-q)(b-x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(t)}{h} = \frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

ve $x = b$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 1^-} {}_b\text{-}D_q f(b) &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \lim_{t \rightarrow b^-} {}_b\text{-}D_q f(x) = \lim_{t \rightarrow b^-} \lim_{q \rightarrow 1^-} {}_b\text{-}D_q f(x) \\
&= \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{df(x)}{dx} = \lim_{t \rightarrow b^-} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^-} \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \frac{df(b^-)}{dx}
\end{aligned}$$

olur.

Klasik kuantum türevinde $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$ olmak üzere $D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$ dir. Aşağıdaki örnekte, $[a, b]$ aralığında tanımlanan $f(x) = (x - b)^n$ fonksiyonu için sağ kuantum türevine göre aynı özelliğin sağlandığı gösterilmiştir.

Örnek 2.1.3. $n \in \mathbb{N}$ ve $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = (x - b)^n$ ile tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
{}_b\text{-}D_q f(x) &= \frac{(x - b)^n - ((q\tau + (1 - q)b - b))^n}{(1 - q)(x - b)} \\
&= \frac{(x - b)^n - q^n(x - b)^n}{(1 - q)(x - b)} = \frac{1 - q^n}{1 - q} (x - b)^{n-1} = [n]_q (x - b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, eğer $p(x)$ bir polinom fonksiyon ve

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - b)^k$$

ise, bu durumda

$${}_b\text{-}D_q p(x) = \sum_{k=1}^n c_k [k]_q (x - b)^{k-1}$$

olur.

Teorem 2.1.4. (q_b --türevinin özellikleri) ξ bir sabit olsun. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında q_b --türevlenebilir ise, bu takdirde $(f + g)(x)$, $(\xi f)(x)$,

$(fg)(x)$ ve $(g(x)g(qx + (1 - q)b) \neq 0$ olması) halinde $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonları da $[a, b]$ aralığında q_b -türevlenebilir ve

(i)

$${}_b-D_q(f + g)(x) = {}_b-D_qf(x) + {}_b-D_qg(x),$$

(ii)

$${}_b-D_q(\xi f)(x) = \xi {}_b-D_qf(x),$$

(iii)

$${}_b-D_q(fg)(x) = f(x) {}_b-D_qg(x) + g(qx + (1 - q)b) {}_b-D_qf(x),$$

ve

(iv)

$${}_b-D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x) {}_b-D_qf(x) - f(x) {}_b-D_qg(x)}{g(x)g(qx + (1 - q)b)}$$

dir.

İspat: Sağ kuantum türevinin tanımını kullanarak

(i)

$$\begin{aligned} {}_b-D_q(f + g)(x) &= \frac{(f + g)(x) - (f + g)(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \\ &= \frac{f(x) - f(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} - \frac{g(x) - g(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \\ &= {}_b-D_qf(x) + {}_b-D_qg(x), \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} {}_b-D_q(\xi f)(x) &= \frac{(\xi f)(x) - (\xi f)(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \\ &= \xi \frac{f(x) - f(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} = \xi {}_b-D_qf(x), \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} {}_b-D_q(fg)(x) &= \frac{(fg)(x) - (fg)(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \\ &\quad + \frac{f(x)g(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f(qx + (1-q)b)g(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \\
& = f(x) \frac{g(t) - g(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \\
& \quad + g(qx + (1-q)b) \frac{f(x) - f((qx + (1-q)b))}{(1-q)(x-b)} \\
& = f(x) {}_{b-D_q}g(x) + g(qx + (1-q)b) {}_{b-D_q}f(x),
\end{aligned}$$

ve

(iv)

$$\begin{aligned}
{}_{b-D_q} \left(\frac{f}{g} \right) (x) &= \frac{\left(\frac{f}{g} \right) (x) - \left(\frac{f}{g} \right) (qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \\
&= \frac{f(x)g(qx + (1-q)b) - g(x)f(qx + (1-q)b)}{g(x)g(qx + (1-q)b)(1-q)(x-b)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(qx + (1-q)b)} \left[\frac{f(x)g(qx + (1-q)b) - f(x)g(x)}{(1-q)(t-b)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{f(x)g(x) - g(x)f(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \right] \\
&= \frac{1}{g(x)g(qx + (1-q)b)} \left[g(x) \frac{f(x) - f(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \right. \\
& \quad \left. - f(x) \frac{g(x) - g(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} \right] \\
&= \frac{g(x) {}_{b-D_q}f(x) - f(x) {}_{b-D_q}g(x)}{g(x)g(qx + (1-q)b)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Kapalı ve Sınırlı Aralık Üzerinde Belirli Sağ Kuantum İntegrali

Kac ve Cheung [46], öteleme operatöründen yararlanarak q -antitürevi oluşturmuştur. Tariboon ve Ntouyas [52], aynı tekniği, q_{a+} -antitürevi elde etmek için kullanmıştır. Kunt vd. [69], Tariboon ve Ntouyas [52] tarafından kullanılan yöntemin aynısını kullanarak q_{b-} -antitürevi oluşturmuştur. Bu alt bölümde, [69]'da verilen $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli sağ kuantum integrali ve temel özellikleri sunulmuştur.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlansın. Bu fonksiyonun q_b --antitürevini $F(x)$ oluşturmak için aşağıdaki öteleme operatörünü ele alalım:

$$K_q F(x) := F(qx + (1 - q)b).$$

Matematiksel indüksiyon yöntemi kullanılarak

$$K_q^n F(x) := \begin{cases} K_q(K_q^{n-1}F)(x) = F(q^n x + (1 - q^n)b) & , \quad n \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ F(x) & , \quad n = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi eğer $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun q_b --antitürevi ise, bu durumda ${}_b D_q F(x) = f(x)$ olur. Bu ise, sağ kuantum türevinin tanımına göre

$${}_b D_q F(x) = \frac{F(x) - F(qx + (1 - q)b)}{(1 - q)(x - b)}$$

verir. Ayrıca yukarıdaki öteleme operatörünün tanımından yararlanarak

$${}_b D_q F(x) = \frac{I - K_q}{(1 - q)(x - b)} F(x) = f(x)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} K_q^n((x - b)f(x)) \\ &= (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} (q^n x + (1 - q^n)b - b)f(q^n x + (1 - q^n)b) \\ &= (1 - q)(x - b) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x + (1 - q^n)b) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

elde edilir.

Yukarıdaki hesabın geçerli olabilmesi için (2.2.1)'nin sağ tarafındaki seri yakınsak olmalıdır.

Tanım 2.2.1. a ve b , $a < b$ koşulunu sağlayan iki reel sayı ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli sağ kuantum integrali veya kısaca belirli q_b -integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x = (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a + (1-q^n)b). \quad (2.2.2)$$

Açıkça, eğer (2.2.2)'nin sağ tarafındaki seri yakınsak ise yukarıdaki integral vardır. Ayrıca, eğer $c \in (a, b)$ ve $\int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x$ ve $\int_c^b f(x) {}_{b-d_q}x$ integralleri varsa, bu durumda $\int_a^c f(x) {}_{b-d_q}x$ integrali vardır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\int_a^c f(x) {}_{b-d_q}x := \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x - \int_c^b f(x) {}_{b-d_q}x \quad (2.2.3)$$

Eğer $b = 0$, ise, integral (2.2.2) aşağıdaki integrali verir

$$\int_a^0 f(x) {}_{0-d_q}x := (1-q)(-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a). \quad (2.2.4)$$

Örnek 2.2.2. $f: [2,5] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^3 - 1$ ile tanımlansın. Bu takdirde $[2,5]$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun belirli sağ ve sol kuantum integralleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_2^5 (x^3 - 1) {}_{5-d_q}x &= (1-q)(5-2) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [(q^n 2 + (1-q^n)5)^3 - 1] \\ &= -\frac{81}{1+q+q^2+q^3} + \frac{405}{1+q+q^2} - \frac{675}{1+q} + 372 \end{aligned}$$

ve

$$\int_2^5 (x^3 - 1) {}_{2+d_q}x = (1-q)(5-2) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [(q^n 5 + (1-q^n)2)^3 - 1]$$

$$= \frac{81}{1+q+q^2+q^3} + \frac{162}{1+q+q^2} + \frac{108}{1+q} + 21$$

olur. Ayrıca

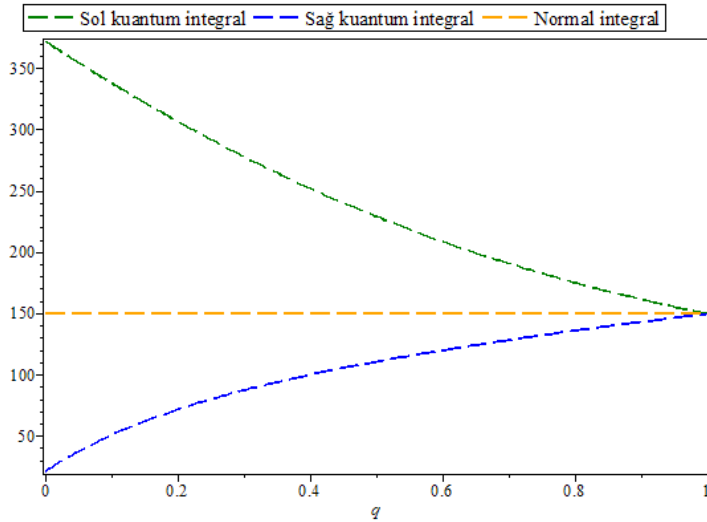
$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1^-} \int_2^5 (x^3 - 1) {}_5-d_q x &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \left(-\frac{81}{1+q+q^2+q^3} + \frac{405}{1+q+q^2} - \frac{675}{1+q} + 372 \right) \\ &= \frac{597}{4} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1^-} \int_2^5 (x^3 - 1) {}_2+d_q x &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \left(\frac{81}{1+q+q^2+q^3} + \frac{162}{1+q+q^2} + \frac{108}{1+q} + 21 \right) \\ &= \frac{597}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

$q \rightarrow 1^-$ olduğunda $\int_2^5 (x^3 - 1) {}_5-d_q x$ ve $\int_2^5 (x^3 - 1) {}_2+d_q x$ integrallerinin yakınsaklığının davranışı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 5. $f(x) = x^3 - 1$ için sol ve sağ kuantum integrallerin yaklaşımının görselleştirmesi

Genel olarak, eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse, bu takdirde

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 1^-} \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x &= \lim_{q \rightarrow 1^-} (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a + (1-q^n)b) \\
&= (b-a) \lim_{q \rightarrow 1^-} \int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{0+d_q}\tau \\
&= (b-a) \int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) dx = \int_a^b f(x) dx
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.2.3. (q_b --integralinin bazı özellikleri) $\xi \in \mathbb{R}$ bir sabit $f(x)$ ve $g(x)$, $[a, b]$ aralığında iki belirli sağ kuantum integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki kurallar geçerlidir.

(i)

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] {}_{b-d_q}x = \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x + \int_a^b g(x) {}_{b-d_q}x,$$

(ii)

$$\int_a^b \xi f(x) {}_{b-d_q}x = \xi \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x$$

ve

(iii) her $\rho \in [a, b]$ için

$${}_{b-D_q} \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x = f(\rho),$$

(iv)

$$\int_{\rho}^b {}_{b-D_q} f(x) {}_{b-d_q}x = f(\rho) - f(b)$$

ve

(v)

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho}^b f(x) {}_{b-D_q} g(x) {}_{b-d_q}x \\
&= (fg)(\rho) - (fg)(b) - \int_{\rho}^b g(qx + (1-q)b) {}_{b-D_q} f(x) {}_{b-d_q}x
\end{aligned}$$

dir.

İspat: Belirli sağ kuantum integralinin tanımına göre

$$\begin{aligned}
& \int_a^b [f(x) + g(x)] {}_{b-d_q}x \\
&= (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [f(q^n a + (1-q^n)b) + g(q^n a + (1-q^n)b)] \\
&= (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [f(q^n a + (1-q^n)b)] \\
&\quad + (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [g(q^n a + (1-q^n)b)]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \xi f(x) {}_{b-d_q}x = (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \xi f(q^n a + (1-q^n)b) \\
&= \xi (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \lambda f(q^n a + (1-q^n)b) = \xi \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca sağ kuantum türevi ve sağ kuantum integralinin tanımlarını kullanarak

$$\begin{aligned}
& {}_{b-D_q} \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x \\
&= \frac{\int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x - \int_{q\rho+(1-q)b}^b f(x) {}_{b-d_q}x}{(1-q)(\rho-b)} \\
&= \frac{(1-q)(\rho-b) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b)}{(1-q)(\rho-b)} \\
&\quad - \frac{(1-q)((q\rho + (1-q)b) - b) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n(q\rho + (1-q)b) + (1-q^n)b)}{(1-q)(\rho-b)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1} \rho + (1-q^{n+1})b) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} [f(\rho) - q^{k+1} f(q^{k+1} \rho + (1-q^{k+1})b)] = f(\rho)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_{\rho}^b {}_{b-D_q} f(x) {}_{b-d_q}x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\rho}^b \frac{f(x) - f(qx + (1-q)b)}{(1-q)(x-b)} {}_b d_q x \\
&= \frac{1}{(1-q)} \left[\int_{\rho}^b \frac{f(x)}{x-b} {}_b d_q x - \int_{\rho}^b \frac{f(qx + (1-q)b)}{x-b} {}_b d_q x \right] \\
&= \frac{1}{(1-q)} \left[(1-q)(\rho-b) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{f(q^n \rho + (1-q^n)b)}{(q^n \rho + (1-q^n)b) - b} \right. \\
&\quad \left. - (1-q)(\rho-b) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{f(q(q^n \rho + (1-q^n)b) + (1-q)b)}{(q^n \rho + (1-q^n)b) - b} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n \rho + (1-q^n)b) - \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{n+1} \rho + (1-q^{n+1})b) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} [f(\rho) - f(q^{k+1} \rho + (1-q^{k+1})b)] = f(\rho) - f(b)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak Teorem 2.1.4'ün üçüncü maddesine göre

$$f(x) {}_b D_q g(x) = {}_b D_q (fg)(x) - g(qx(1-q)b) {}_b D_q f(x)$$

dir. Bu ise, $\rho \in [a, b]$ olmak üzere $[\rho, b]$ aralığında yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının q_b -integralini alıp dördüncü kuralı kullanarak

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho}^b f(x) {}_b D_q g(x) {}_b d_q x \\
&= (fg)(\rho) - (fg)(b) - \int_{\rho}^b g(qx + (1-q)b) {}_b D_q f(x) {}_b d_q x
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (i)-(v) kuralları geçerlidir.

2.3. Sol Kuantum İntegral Eşitsizlikleri ile İlgili İddia Edilen Bazı Sonuçların Yeniden Formüle Edilmesi

Kunt ve diğerleri, [53, 61]'de iddia edilen bazı sonuçları yeniden formüle etmek ve bazı sağ ve sol kuantum integral eşitsizliklerini elde etmek için önceki alt bölümlerde sağ kuantum türevi ve belirli sağ kuantum integrali kavramlarını kullanmışlardır [69]. İddia

edilen bu bazı sonuçların yeniden formüle edilmesi ve sağ-sol kuantum integralleriyle ilgili bazı eşitsizlikler bu alt bölümde sunulmuştur.

Jackson belirli kuantum integrali ve belirli sağ kuantum integrali tanımlarına göre

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(\tau a + (1 - \tau)b)_{0+} d_q \tau & \\
 &= (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a + (1 - q^n)b) \\
 &= \frac{1}{b - a} \left[(1 - q)(b - a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a + (1 - q^n)b) \right] \\
 &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)_{b-} d_q x
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

olur. Ayrıca sol kuantum integralinin tanımına göre

$$\int_0^1 f(\tau b + (1 - \tau)a)_{0+} d_q \tau = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)_{a+} d_q x \tag{2.3.2}$$

dir. Bu ise,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(\tau b + (1 - \tau)a)_{0+} d_q \tau + \int_0^1 f(\tau a + (1 - \tau)b)_{0+} d_q \tau & \\
 = \frac{1}{b - a} \left[\int_a^b f(x)_{a+} d_q x + \int_a^b f(x)_{b-} d_q x \right] &
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
 & - \frac{q(b - \rho)^2}{b - a} \int_0^1 \tau {}_{b-}D_q f(\tau \rho + (1 - \tau)b)_{0+} d_q \tau \\
 &= - \frac{q(b - \rho)^2}{b - a} \int_0^1 \tau \frac{f(\tau \rho + (1 - \tau)b) - f(\tau q \rho + (1 - q\tau)b)}{(1 - q)(\rho - b)\tau} {}_{0+}d_q \tau \\
 &= \frac{q(b - \rho)}{(b - a)(1 - q)} \left[\int_0^1 f(\tau \rho + (1 - \tau)b)_{0+} d_q \tau \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^1 f(\tau q \rho + (1 - q\tau)b)_{0+} d_q \tau \right]
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q(b-\rho)}{(b-a)(1-q)} \left[(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) \right. \\
&\quad \left. - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1} \rho + (1-q^{n+1})b) \right] \\
&= \frac{q(b-\rho)}{(b-a)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) \right] \\
&= \frac{q(b-\rho)}{(b-a)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) - \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) + \frac{f(\rho)}{q} \right] \\
&= \frac{q(b-\rho)}{(b-a)} \left[\left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) + \frac{f(\rho)}{q} \right] \\
&= \frac{(b-\rho)}{(b-a)} f(\rho) - \frac{1}{b-a} \left[(1-q)(b-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n \rho + (1-q^n)b) \right] \\
&= \frac{(b-\rho)}{(b-a)} f(\rho) - \frac{1}{b-a} \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, iddia edilen özdeşlik (1.9.5) ve eşitsizlikler (1.9.6) ve (1.9.7) aşağıdaki gibi yeniden formüle edilebilir:

$$f(\rho) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\rho} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q(\rho-a)^2}{b-a} \int_0^1 \tau {}_{a+D_q}f(\rho\tau + (1-\tau)a) {}_{0+d_q}\tau \\
&\quad - \frac{q(b-\rho)^2}{b-a} \int_0^1 \tau {}_{b-D_q}f(\rho\tau + (1-\tau)b) {}_{0+d_q}\tau \\
&\left| f(\rho) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\rho} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \right| \quad (2.3.6) \\
&\leq \frac{qM[(\rho-a)^2 + (b-\rho)^2]}{(b-a)(1+q)}
\end{aligned}$$

ve

$$\left| f(\rho) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\rho} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\rho}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \right| \quad (2.3.7)$$

$$\leq \frac{qM[(\rho - a)^2 + (b - \rho)^2]}{(b - a)} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

dır.

Teorem 2.3.1. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde bir konveks sürekli fonksiyon ise, bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)} \left[\int_a^b f(x) {}_{a+}d_q x + \int_a^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.3.8)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Eğer $\tau \in [0,1]$ ise, bu durumda $[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu konveks olduğundan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(\tau b + (1-\tau)a) + f(\tau a + (1-\tau)b)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.3.9)$$

eşitsizliği geçerlidir. $[0,1]$ aralığı üzerinde yukarıdaki eşitsizliğin sol kuantum integrali alınarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) {}_{0+}d_q x &\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(\tau b + (1-\tau)a) {}_{0+}d_q \tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{0+}d_q \tau \right] \\ &\leq \int_0^1 \frac{f(a) + f(b)}{2} {}_{0+}d_q x \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Böylece, (2.3.10) eşitsizliğindeki integralleri hesaplayarak istenilen eşitsizlik elde edilir.

Uyarı 2.3.2. Eğer $q \rightarrow 1^-$ ise (2.3.8) eşitsizliği klasik Hermite-Hadamard integral eşitsizliğine indirgenir.

2.4. Kuantum Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin Yeni Varyantları

Bu alt bölümde, [69,70]'te sunulan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bazı yeni varyantları tartışılmıştır.

Teorem 2.4.1. (Sağ Kuantum Hermite-Hadamard Eşitsizliği) Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde bir konveks sürekli fonksiyon ise, bu takdirde

$$f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x \leq \frac{f(a) + qf(b)}{1+q} \quad (2.4.1)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu konveks olduğundan dolayı, her $x \in (a, b)$ için $f'(x^+)$ ve $f'(x^-)$ mevcut ve

$$h_r(x) = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)^+ \left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) \leq f(x), \quad (2.4.2)$$

$$h_l(x) = f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)^- \left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) \leq f(x) \quad (2.4.3)$$

dir. Dahası, eğer f , (a, b) aralığında türevlenebilir ise, bu durumda her $x \in (a, b)$ için $h_l(x) = h_r(x)$ dir. Şimdi $[a, b]$ aralığında (2.3.12) eşitsizliğin her iki tarafının sağ kuantum integralini alalım:

$$\begin{aligned} & \int_a^b h_r(x) {}_{b-d_q}x \\ &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)^+ \left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) \right] {}_{b-d_q}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)^+ \int_a^b \left(x - \frac{a+qb}{1+q}\right) {}_{b-d_q}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) + f'\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)^+ \left[(b-a)\frac{a+qb}{1+q} - (b-a)\frac{a+qb}{1+q} \right] \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_a^b h_l(x) {}_{b-d_q}x = (b-a)f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x$$

olur. Buradan

$$f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x \quad (2.4.4)$$

bulunur. Bu (2.4.1)'deki birinci eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir.

(2.4.1)'deki ikinci eşitsizliği kanıtlamak için, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemini ele alalım:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

dır. Bu ise, f fonksiyonu konveks olduğundan

$$f(x) \leq h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (2.4.5)$$

olur. Şimdi $[a, b]$ aralığında (2.4.5) eşitsizliğinin her iki tarafının sağ kuantum integralini alalım:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x &\leq \int_a^b h(x) {}_{b-d_q}x \\ &= \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right] {}_{b-d_q}x \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a) {}_{b-d_q}x + f(a) \int_a^b {}_{b-d_q}x \\ &= (f(b) - f(a)) \frac{(b-a)q}{1+q} + (b-a)f(a) \\ &= (b-a) \frac{f(a) + qf(b)}{1+q} \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x \leq \frac{f(a) + qf(b)}{1+q} \quad (2.4.6)$$

bulunur. Bu, (2.4.1)'deki ikinci eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir. Böylece (2.4.4) ve (2.4.6) eşitsizliklerini birleştirerek istenen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 2.4.2. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde bir konveks sürekli fonksiyon ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)}{2} &\leq \frac{1}{2(b-a)} \left[\int_a^b f(x) {}_{a+d_q}x + \int_a^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

dir.

İspat: (1.9.3) ve (2.4.1) eşitsizliklerini toplayıp ortaya çıkan eşitsizliği $\frac{1}{2}$ ile çarparak istenen eşitsizlik elde edilir.

Uyarı 2.4.3. Eğer $q \rightarrow 1^-$ ise (2.4.1) ve (2.4.7) eşitsizlikleri klasik Hermite-Hadamard integral eşitsizliğine indirgenir. Ayrıca konvekslikten $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) + f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right)}{2}$ olduğundan, (2.4.7)'deki birinci eşitsizliğin (2.3.8)'deki birinci eşitsizlikten daha iyi olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.4. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde bir konveks sürekli fonksiyon ise, bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.4.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Belirli sağ ve sol kuantum integralinin tanımını kullanarak

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{0+d_q}\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{1-d_q}\tau \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-q)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\frac{q^n}{2}a + \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)b\right) \\
&+ (1-q) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\left(1 - \frac{q^n}{2}\right)a + \left(1 - \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)\right)b\right) \\
&= \frac{(1-q)}{b-a} \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\frac{q^n}{2}a + \frac{q^n}{2}b - \frac{q^n}{2}b + \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)b\right) \\
&+ \frac{(1-q)}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(-\frac{q^n}{2}a + a + \frac{q^n}{2}b + \frac{q^n}{2}a - \frac{q^n}{2}a\right) \\
&= \frac{(1-q)}{b-a} \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \\
&+ \frac{(1-q)}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) \\
&= \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x + \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right]
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} f(\tau b + (1-\tau)a) {}_{0+d_q}\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tau b + (1-\tau)a) {}_{1-d_q}\tau \quad (2.4.10) \\
&= \frac{(1-q)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\frac{q^n}{2}b + \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)a\right) \\
&+ \frac{(1-q)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\left(1 - \frac{q^n}{2}\right)b + \left(1 - \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)\right)a\right) \\
&= \frac{(1-q)}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(\frac{q^n}{2}b + \frac{q^n}{2}a - \frac{q^n}{2}a + \left(1 - \frac{q^n}{2}\right)a\right) \\
&+ \frac{(1-q)}{b-a} \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(-\frac{q^n}{2}b + b + \frac{q^n}{2}a + \frac{q^n}{2}b - \frac{q^n}{2}b\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-q)}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \\
&+ \frac{(1-q)}{b-a} \left(b - \frac{a+b}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} f \left(\frac{a+b}{2} \right) {}_{0+}d_q \tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 f \left(\frac{a+b}{2} \right) {}_{1-}d_q \tau \quad (2.4.11) \\
&= f \left(\frac{a+b}{2} \right) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} {}_{0+}d_q \tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 {}_{1-}d_q \tau \right] = f \left(\frac{a+b}{2} \right) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = f \left(\frac{a+b}{2} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} {}_{0+}d_q \tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(a) + f(b)}{2} {}_{1-}d_q \tau \quad (2.4.12) \\
&= \frac{f(a) + f(b)}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} {}_{0+}d_q \tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 {}_{1-}d_q \tau \right] = \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}$$

olur. $[0, \frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2}, 1]$ aralıklarında sırasıyla (2.3.9)'da verilen eşitsizliğin sol ve sağ integralleri alınarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} f \left(\frac{a+b}{2} \right) {}_{0+}d_q \tau \quad (2.4.13) \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{0+}d_q \tau + \int_0^{\frac{1}{2}} f(\tau b + (1-\tau)a) {}_{0+}d_q \tau \right] \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} {}_{0+}d_q \tau
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) {}_{1-d_q}\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tau a + (1-\tau)b) {}_{1-d_q}\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tau b + (1-\tau)a) {}_{1-d_q}\tau \right] \\
& \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(a) + f(b)}{2} {}_{1-d_q}\tau
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

bulunur. Son olarak, (2.4.13) ve (2.4.14) eşitsizliklerini taraf tarafa toplanarak ve ortaya çıkan eşitsizlikte (2.4.9), (2.4.10), (2.4.11) ve (2.4.12) eşitliklerini kullanarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 2.4.5. Eğer $q \rightarrow 1^-$ ise (2.4.8) eşitsizliği klasik Hermite-Hadamard integral eşitsizliğine indirgenir.

2.5. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Yamuk Tipli Eşitsizlikler

Bu alt bölümde, (2.4.8) eşitsizliği ile ilgili yamuk tipi bir özdeşlik sunulmuştur. Daha sonra bu özdeşlik yardımcı sonuç olarak kullanılarak, konveks fonksiyonlar için sol-sağ kuantum integralleriyle ilişkili bazı yamuk tipi eşitsizlikler tartışılmıştır.

Lemma 2.5.1. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \\
& = \frac{b-a}{4} \int_0^1 (1-q\tau) \left({}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right. \\
& \quad \left. - {}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right) {}_{0+d_q}\tau
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat: Sol kuantum integralinin lineer özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1 - q\tau) \left({}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) \right. \\
& \quad \left. - {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)b \right) \right) {}_{0^+}d_q \tau \\
&= \int_0^1 (1 - q\tau) {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) {}_{0^+}d_q \tau \\
& \quad - \int_0^1 (1 - q\tau) {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)b \right) {}_{0^+}d_q \tau
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\int_0^1 (1 - q\tau) {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) {}_{0^+}d_q \tau = \Lambda_1$$

ve

$$\int_0^1 (1 - q\tau) {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)b \right) {}_{0^+}d_q \tau = \Lambda_2$$

ile gösterelim. O halde sol kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \int_0^1 (1 - q\tau) {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) {}_{0^+}d_q \tau \\
&= \int_0^1 {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) {}_{0^+}d_q \tau \\
& \quad - q \int_0^1 {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) {}_{0^+}d_q \tau \\
&= \int_0^1 \left[\frac{f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) - f \left(q\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - q\tau)a \right)}{(1 - q) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \tau} \right] {}_{0^+}d_q \tau \\
& \quad - q \int_0^1 \tau \left[\frac{f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - \tau)a \right) - f \left(q\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1 - q\tau)a \right)}{(1 - q) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \tau} \right] {}_{0^+}d_q \tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})a\right) \right] \\
&\quad - \frac{2q}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})a\right) \right]
\end{aligned}$$

ve sağ kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \int_0^1 (1-q\tau) {}_b D_q f\left(\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0+} d_q \tau \\
&= \int_0^1 {}_a D_q f\left(\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0+} d_q \tau \\
&\quad - q \int_0^1 \tau {}_a D_q f\left(t \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-t)b\right) {}_{0+} d_q \tau \\
&= \int_0^1 \left[\frac{f\left(\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) - f\left(q\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)b\right)}{(1-q) \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \tau} \right] {}_{0+} d_q \tau \\
&\quad - q \int_0^1 \tau \left[\frac{f\left(\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) - f\left(q\tau \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)b\right)}{(1-q) \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \tau} \right] {}_{0+} d_q \tau \\
&= -\frac{2}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right] \\
&\quad + \frac{2q}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right] \\
&= -\frac{2}{b-a} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2q}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) \right]$$

olur. Öte yandan, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekliliğinden

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) - \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})a \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \left[f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) - f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})a \right) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f \left(q^{k+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{k+1})a \right) \right] = f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) - \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})b \right) \\ &= f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(b) \end{aligned}$$

dir. Bu ise,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{2}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(a) \right] - \frac{2q}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \right] \\ &= \frac{2}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(a) \right] \\ &\quad - \frac{2q}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) - \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) + \frac{1}{q} f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(a) \right] - \frac{2}{b-a} f \left(\frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2q}{b-a} \left[\frac{q-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \right] \\
& = \frac{4}{(b-a)^2} \left[(1-q) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \right] \\
& \quad - \frac{4}{b-a} \frac{f(a)}{2} \\
& = \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x - \frac{4}{b-a} \frac{f(a)}{2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 & = -\frac{2}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(b) \right] \\
& \quad + \frac{2q}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) \\
& \quad + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) + \frac{1}{q} f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
& = -\frac{2}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(b) \right] + \frac{2}{b-a} f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
& \quad + \frac{2q}{b-a} \left[\frac{q-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) \right] \\
& = \frac{4}{b-a} \frac{f(b)}{2} \\
& \quad - \frac{4}{(b-a)^2} \left[(1-q) \left(b - \frac{a+b}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)b \right) \right] \\
& = \frac{4}{b-a} \frac{f(b)}{2} - \frac{4}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{b-a}{4} [\Lambda_1 - \Lambda_2] = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 2.5.2. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, bu durumda (2.5.1) özdeşliği (1.1.3) özdeşliğine indirgenir.

Teorem 2.5.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olan $\alpha, \beta > 1$ için $|{}_a^+D_q f|^\beta$ ve $|{}_b^-D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^-d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{([2]_q^{-1})^{\frac{1}{\beta}} (b-a) (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}}}{4} \left(\left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + q \left| {}_a^+D_q f(a) \right|^r \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \quad \left[+ \left(\left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + q \left| {}_a^+D_q f(a) \right|^r \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

burada,

$$\Omega(q) = \int_0^1 (1-q\tau)^p {}_0^+d_q \tau = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n (1-q^{n+1})^p$$

dir

İspat: (2.5.1)'deki özdeşlik ve Kuantum integrali için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^-d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left[\int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_0^+d_q \tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_0^+d_q \tau \right] \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left(\int_0^1 (1-q\tau)^\alpha {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \left| {}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right|^\beta {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \quad \left[+ \left(\int_0^1 \left| {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right|^\beta {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $|_{a^+D_qf}|^\beta$ ve $|_{b^-D_qf}|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$\left|_{a^+D_qf}\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\tau)a\right)\right|^\beta \leq \left|_{a^+D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta \tau + (1-\tau)|_{a^+D_qf}(a)|^\beta$$

ve

$$\left|_{b^-D_qf}\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\tau)b\right)\right|^\beta \leq \left|_{b^-D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta \tau + (1-\tau)|_{b^-D_qf}(b)|^\beta$$

dır. Ayrıca

$$\int_0^1 \tau {}_{0^+}d_q\tau = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{[2]_q} \text{ ve } \int_0^1 (1-\tau) {}_{0^+}d_q\tau = \frac{q}{1+q} = \frac{[2]_q-1}{[2]_q}$$

olur. Bu ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_qx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_qx \right] - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left| \left|_{a^+D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta \int_0^1 \tau {}_{0^+}d_q\tau \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left|_{a^+D_qf}(a)\right|^\beta \int_0^1 (1-\tau) {}_{0^+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left| \left|_{b^-D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta \int_0^1 \tau {}_{0^+}d_q\tau \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left|_{b^-D_qf}(b)\right|^\beta \int_0^1 (1-\tau) {}_{0^+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\ & = \frac{b-a}{4} (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{\left|_{a^+D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta + ([2]_q-1) |_{a^+D_qf}(a)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\left|_{b^-D_qf}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^\beta + ([2]_q-1) |_{b^-D_qf}(b)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.5.4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrellenebilir olsun. Eğer $\beta \geq 1$ için $|{}_a^+D_q f|^\beta$ ve $|{}_b^-D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^-d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \quad (2.5.3) \\
 & \leq \frac{(b-a) \left(\frac{[2]_q - q}{[2]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}}}{4} \left[\frac{([3]_q - q[2]_q) |{}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{([3]_q([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) |{}_a^+D_q f(a)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right] \\
 & \quad + \frac{([3]_q - q[2]_q) |{}_b^-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \\
 & \quad \left. + \frac{([3]_q([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) |{}_b^-D_q f(b)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right] \quad \left. \right]^{\frac{1}{\beta}}.
 \end{aligned}$$

İspat: (2.5.1)'deki özdeşlik ve Kuantum integrali için power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^-d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
 & \leq \frac{b-a}{4} \left[\int_0^1 |1 - q\tau| \left| {}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_0^+d_q \tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^1 |1 - q\tau| \left| {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_0^+d_q \tau \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 |1 - q\tau| {}_{0+}d_q\tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{b-a}{4} \times \left(\int_0^1 |1 - q\tau| \left| {}_{a+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|^\beta {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 |(1-q\tau)| {}_{0+}d_q\tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \left[\times \left(\int_0^1 |1 - q\tau| \left| {}_{b-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|^\beta {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $|{}_{a+}D_q f|^\beta$ ve $|{}_{b-}D_q f|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_qx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_qx \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\int_0^1 |1 - q\tau| {}_{0+}d_q\tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \left| {}_{a+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 (1-q\tau) \tau {}_{0+}d_q\tau^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \times \left| \left(+ |{}_{a+}D_q f(a)|^\beta \int_0^1 (1-q\tau)(1-\tau) {}_{0+}d_q\tau \right) \right. \\
& \quad \left. + \left| {}_{b-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 (1-q\tau) \tau {}_{0+}d_q\tau^{\frac{1}{\beta}} \right| \\
& \quad \left[\left(+ |{}_{b-}D_q f(b)|^\beta \int_0^1 (1-q\tau)(1-\tau) {}_{0+}d_q\tau \right) \right]
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\int_0^1 (1-q\tau) {}_{0+}d_q\tau = \frac{[2]_q - q}{[2]_q}, \quad \int_0^1 (1-q\tau) \tau {}_{0+}d_q\tau = \frac{[3]_q - q[2]_q}{[2]_q[3]_q}$$

ve

$$\int_0^1 (1-q\tau)(1-\tau) {}_{0+}d_q\tau = \frac{[3]_q([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q}{[2]_q[3]_q}$$

dur. Buna göre

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
& \leq \frac{(b-a) \left(\frac{[2]_q - q}{[2]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}}}{4} \left[\left(\frac{([3]_q - q[2]_q) \left| {}_{a+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad + \left. \frac{([3]_q ([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left(\frac{([3]_q - q[2]_q) {}_{b-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left. \left(\frac{([3]_q ([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 2.5.5. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, (2.5.2) ve (2.5.3) eşitsizlikleri sırasıyla (1.5.5) ve (1.5.6) eşitsizliklerine indirgenir.

Sonuç 2.5.6. Eğer Teorem 2.5.4'te $\beta = 1$ alınırsa, 2.5.3 eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
& \leq \frac{(b-a)}{4} \left[\frac{([3]_q - q[2]_q) \left(\left| {}_{a+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| + \left| {}_{b-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right)}{[2]_q [3]_q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{([3]_q ([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) \left(\left| {}_{a+}D_q f(a) \right| + \left| {}_{b-}D_q f(b) \right| \right)}{[2]_q [3]_q} \right].
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Ek olarak, eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, bu durumda yukarıdaki eşitsizlik [22]'deki ikinci sonucu verir.

2.6. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Orta Nokta Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde, (2.4.8) eşitsizliği ile ilgili orta nokta tipi bir özdeşlik sunulmuştur. Daha sonra bu özdeşlik yardımcı sonuç olarak kullanılarak, konveks fonksiyonlar için sol-sağ kuantum integralleriyle ilişkili bazı orta nokta tipi eşitsizlikler incelenmiştir.

Lemma 2.6.1. Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^-d_q x \right] \\ &= \frac{b-a}{4} \int_0^1 q\tau \left({}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right. \\ &\quad \left. - {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right) {}_0^+d_q \tau \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

özdeşliği geçerlidir.

İspat: Sol kuantum integralinin lineer olması özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 q\tau \left({}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) - {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right) {}_0^+d_q \tau \\ &= \int_0^1 q\tau {}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) {}_0^+d_q \tau \\ &\quad - \int_0^1 q\tau {}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_0^+d_q \tau \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\int_0^1 \tau {}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) {}_0^+d_q \tau = Y_1$$

ve

$$\int_0^1 \tau {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0^+}d_q \tau = Y_2$$

ile gösterelim. O halde sol kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned} Y_1 &= \int_0^1 \tau {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) {}_{0^+}d_q \tau \\ &= \int_0^1 \tau \left[\frac{f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) - f\left(q\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)a\right)}{(1-q)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\tau} \right] {}_{0^+}d_q \tau \\ &= \frac{2}{b-a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) - \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1}\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})a\right) \right] \\ &= \frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2}{b-a} \left[\frac{q-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) \right] \\ &= \frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad - \frac{4}{q(b-a)^2} \left[(1-q)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)a\right) \right] \\ &= \frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{q(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x \end{aligned}$$

ve sağ kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned} Y_2 &= \int_0^1 \tau {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0^+}d_q \tau \\ &= \int_0^1 \tau \left[\frac{f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) - f\left(q\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)b\right)}{(1-q)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\tau} \right] {}_{0^+}d_q \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \\
&\quad \left[-\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right] \\
&= -\frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a} \left[\frac{q-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \right] \\
&= -\frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + \frac{4}{q(b-a)^2} \left[(1-q) \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \right] \\
&= -\frac{2}{q(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{4}{q(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{q(b-a)}{4} [\Upsilon_1 - \Upsilon_2] = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) {}_{b-d_q}x \right]$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 2.6.2. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, bu durumda (2.6.1) özdeşliği (1.1.4) özdeşliğine indirgenir.

Teorem 2.6.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_{a+d_q}f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_{b-d_q}f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0, 1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olan her $\alpha, \beta > 1$ için $|{}_{a+d_q}f|^\beta$ ve $|{}_{b-d_q}f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+d_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-d_q}x \right] \right| \quad (2.6.2)$$

$$\leq \frac{q(b-a)([1+\alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}{4} \left(\frac{\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left| \right. \\ \left. + \left(\frac{\left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right|$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (2.6.1)'deki özdeşlik ve Kuantum integrali için Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] \right| \\ \leq \frac{q(b-a)}{4} \left[\int_0^1 \tau \left| {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right. \\ \left. + \int_0^1 \tau \left| {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right] \\ \leq \frac{q(b-a)}{4} \left(\int_0^1 \tau^\alpha {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 \left| {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \left[+ \left(\int_0^1 \left| {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

elde edilir.

$[a, b]$ aralığında $\left| {}_{a^+}D_q f \right|^\beta$ ve $\left| {}_{b^-}D_q f \right|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] \right| \\ \leq \frac{q(b-a)}{4} ([1+\alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \\ \times \left(\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \tau {}_{0^+}d_q \tau + \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 (1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \left[+ \left(\left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \tau {}_{0^+}d_q \tau + \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 (1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

$$= \frac{q(b-a)([1+\alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}{4} \left[\left(\frac{|{}_a^+ D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta + ([2]_q - 1) |{}_a^+ D_q f(a)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|{}_b^- D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta + ([2]_q - 1) |{}_b^- D_q f(b)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.6.4 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a^+ D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b^- D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0, 1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\beta \geq 1$ için $|{}_a^+ D_q f|^\beta$ ve $|{}_b^- D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+ d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^- d_q x \right] \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{4[2]_q[3]_q^{\frac{1}{\beta}}} \left[\left([2]_q |{}_a^+ D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta + ([3]_q - [2]_q) |{}_a^+ D_q f(a)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left([2]_q |{}_b^- D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)|^\beta + ([3]_q - [2]_q) |{}_b^- D_q f(b)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (2.6.1)'deki özdeşlik ve Kuantum integrali için power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+ d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^- d_q x \right] \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{4} \left[\int_0^1 \tau \left| {}_a^+ D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_0^+ d_q \tau + \int_0^1 \tau \left| {}_b^- D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_0^+ d_q \tau \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{q(b-a)}{4} \left(\int_0^1 \tau {}_0+d_q\tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\int_0^1 \tau \left| {}_{a+D_q}f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|^\beta {}_0+d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \left[+ \left(\int_0^1 \tau {}_0+d_q\tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\int_0^1 \tau \left| {}_{b-D_q}f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|^\beta {}_0+d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $|{}_{a+D_q}f|^\beta$ ve $|{}_{b-D_q}f|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$\left| f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+D_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-D_q}x \right] \right| \\ \leq \frac{q(b-a)([2]_q^{-1})^{1-\frac{1}{\beta}}}{4} \\ \times \left(\left| {}_{a+D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \tau^2 {}_0+d_q\tau + |{}_{a+D_q}f(a)|^\beta \int_0^1 \tau(1-\tau) {}_0+d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \left[+ \left(\left| {}_{b-D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \tau^2 {}_0+d_q\tau + |{}_{b-D_q}f(b)|^\beta \int_0^1 \tau(1-\tau) {}_0+d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\ = \frac{q(b-a)}{4[2]_q[3]_q^{\frac{1}{\beta}}} \left([2]_q \left| {}_{a+D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) |{}_{a+D_q}f(a)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ \left[+ \left([2]_q \left| {}_{b-D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) |{}_{b-D_q}f(b)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 2.6.5. Eğer Teorem 2.6.4'te $\beta = 1$ alınırsa, (2.6.3) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\left| f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+D_q}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-D_q}x \right] \right| \tag{2.6.4} \\ \leq \frac{q(b-a)}{4[2]_q[3]_q} \left[[2]_q \left(\left| {}_{a+D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| + \left| {}_{b-D_q}f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right) \right. \\ \left. + ([3]_q - [2]_q) (|{}_{a+D_q}f(a)| + [2]_q + |{}_{b-D_q}f(b)|) \right]$$

Uyarı 2.6.6. Eğer $r \in (0,1)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$ ise,

$$\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^r \leq \sum_{j=1}^n x_j^r + \sum_{j=1}^n y_j^r$$

eşitsizliği doğrudur. Buna göre

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)([1+\alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}{4[2]_q^{\frac{1}{\beta}}} \left[\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right. \\ & \quad \left. + ([2]_q - 1)^{\frac{1}{\beta}} (|{}_{a^+}D_q f(a)| + |{}_{b^-}D_q f(b)|) \right] \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{4[2]_q[3]_q^{\frac{1}{\beta}}} \left[[2]_q^{\frac{1}{\beta}} \left(\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right) \right. \\ & \quad \left. + ([3]_q - [2]_q)^{\frac{1}{\beta}} (|{}_{a^+}D_q f(a)| + |{}_{b^-}D_q f(b)|) \right] \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

olur. Ayrıca, eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, bu durumda (2.6.4), (2.6.5) ve (2.6.6) eşitsizlikleri sırasıyla (1.5.13), (1.5.14) ve (1.5.15) eşitsizliklerine indirgenir.

2.7. Sol-Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Bullen ve Simpson Tipi Eşitsizlikler

Bu alt bölümde, önceki alt bölümlerdeki bazı temel tanımlar ve sonuçlar kullanılarak, sol-sağ kuantum integralleri ile ilgili bazı ağırlıklı Bullen, Bullen ve Simpson tipi eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Lemma 2.7.1. $0 \leq \theta \leq 1$ bir sabit olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$K_1(q, \theta) = \int_0^1 |q\tau - \theta| {}_0+d_q\tau \quad (2.7.1)$$

$$= \begin{cases} \frac{2\theta^2([2]_q - 1) - q\theta[2]_q + q^2}{q[2]_q}, & 0 \leq \frac{\theta}{q} < 1 \text{ ise} \\ \frac{\theta[2]_q - q}{[2]_q}, & 1 \leq \frac{\theta}{q} \text{ ise} \end{cases},$$

$$K_2(q, \theta) = \int_0^1 |q\tau - \theta| \frac{\tau}{2} {}_0+d_q\tau \quad (2.7.2)$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta^3(2[3]_q - 2[2]_q) - q^2\theta[3]_q + q^3[2]_q}{2q^2[2]_q[3]_q}, & 0 \leq \frac{\theta}{q} < 1 \text{ ise} \\ \frac{\theta[3]_q - q[2]_q}{2[2]_q[3]_q}, & 1 \leq \frac{\theta}{q} \text{ ise} \end{cases}.$$

İspat: Eğer $\theta \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ ise, bu durumda $0 \leq \theta < q$ ve $q \leq \theta$ eşitsizliklerinden birisi doğrudur. Bu ise $0 \leq \frac{\theta}{q} < 1$ yada $1 \leq \frac{\theta}{q}$ olur. Şimdi θ ve q sayıları arasındaki bu ilişkiler göz önüne alındığında, ispat aşağıdaki iki adımda tamamlanır.

(i) Eğer $0 \leq \frac{\theta}{q} < 1$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 |q\tau - \theta| {}_0+d_q\tau &= q \int_0^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| {}_0+d_q\tau \\ &= q \left\{ \int_0^{\frac{\theta}{q}} \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| {}_0+d_q\tau + \int_{\frac{\theta}{q}}^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| {}_0+d_q\tau \right\} \\ &= q \left\{ \int_0^{\frac{\theta}{q}} \left(\frac{\theta}{q} - \tau \right) {}_0+d_q\tau + \int_{\frac{\theta}{q}}^1 \left(\tau - \frac{\theta}{q} \right) {}_0+d_q\tau \right\} \\ &= q \left\{ \left(\frac{\theta}{q} \tau - \frac{\tau^2}{[2]_q} \right) \Big|_0^{\frac{\theta}{q}} + \left(\frac{\tau^2}{[2]_q} - \frac{\theta}{q} \tau \right) \Big|_{\frac{\theta}{q}}^1 \right\} \\ &= \frac{2\theta^2([2]_q - 1) - q\theta[2]_q + q^2}{q[2]_q} \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 |q\tau - \theta| \frac{\tau}{2} {}_0+d_q\tau = \frac{q}{2} \int_0^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| \tau {}_0+d_q\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\theta}{q}} \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| \tau \, {}_0+d_q\tau + \int_{\frac{\theta}{q}}^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| \tau \, {}_0+d_q\tau \right\} \\
&= \frac{q}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\theta}{q}} \left(\frac{\theta}{q} \tau - \tau^2 \right) \, {}_0+d_q\tau + \int_{\frac{\theta}{q}}^1 \left(\tau^2 - \frac{\theta}{q} \tau \right) \, {}_0+d_q\tau \right\} \\
&= \frac{\theta^3(2[3]_q - 2[2]_q) - q^2\theta[3]_q + q^3[2]_q}{2q^2[2]_q[3]_q}
\end{aligned}$$

olur.

(ii) Eğer $1 \leq \frac{\theta}{q}$ ise

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |q\tau - \theta| \, {}_0+d_q\tau &= q \int_0^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| \, {}_0+d_q\tau = q \int_0^1 \left(\frac{\theta}{q} - \tau \right) \, {}_0+d_q\tau \\
&= \frac{\theta[2]_q - q}{[2]_q}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |q\tau - \theta| \frac{\tau}{2} \, {}_0+d_q\tau &= \frac{q}{2} \int_0^1 \left| \tau - \frac{\theta}{q} \right| \tau \, {}_0+d_q\tau = \frac{q}{2} \int_0^1 \left(\frac{\theta}{q} - \tau \right) \tau \, {}_0+d_q\tau \\
&= \frac{\theta[3]_q - q[2]_q}{2[2]_q[3]_q}
\end{aligned}$$

bulunur ve bu ispatı tamamlar.

Lemma 2.7.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrellenebilir olsun. Bu taktirde her $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2 - \lambda - \eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \, {}_a+d_qx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) \, {}_b-d_qx \right] \\
&= \frac{b-a}{4} \left(\int_0^1 (q\tau - \lambda) {}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \, {}_0+d_q\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (\eta - q\tau) {}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \, {}_0+d_q\tau \right).
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

İspat:

$$\int_0^1 (q\tau - \lambda) {}_{a+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) {}_{0+}d_q \tau = \Delta_1$$

ve

$$\int_0^1 (\eta - q\tau) {}_{b-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) {}_{0+}d_q \tau = \Delta_2$$

ile gösterelim. O halde sol kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^1 (q\tau - \lambda) {}_{a+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) {}_{0+}d_q \tau \\ &= q \int_0^1 \tau \frac{f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) - f \left(q\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q\tau)a \right)}{(1-q) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \tau} {}_{0+}d_q \tau \\ &\quad - \lambda \int_0^1 \frac{f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) - f \left(q\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q\tau)a \right)}{(1-q) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) \tau} {}_{0+}d_q \tau \\ &= \frac{2q}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \\ &\quad \left[- \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})a \right) \right] \\ &\quad - \frac{2\lambda}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \\ &\quad \left[- \sum_{n=0}^{\infty} f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})a \right) \right] \\ &= \frac{2q}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \\ &\quad \left[- \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^{n+1} \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^{n+1})a \right) \right] \\ &\quad - \frac{2\lambda}{b-a} \left[f \left(\frac{a+b}{2} \right) - f(a) \right] \\ &= \frac{2q}{b-a} \left[\frac{q-1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f \left(q^n \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-q^n)a \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(1-\lambda)}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2\lambda f(a)}{b-a} \\
& = \frac{2\lambda f(a)}{b-a} + \frac{2(1-\lambda)}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x
\end{aligned}$$

ve sağ kuantum türevi ve sol kuantum integralinin tanımlarına göre

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \int_0^1 (\eta - q\tau) {}_{b-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0+}d_q \tau \\
&= \eta \int_0^1 {}_{b-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0+}d_q \tau \\
&\quad - q \int_0^1 \tau {}_{b-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) {}_{0+}d_q \tau \\
&= \eta \int_0^1 \frac{f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) - f\left(q\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)b\right)}{(1-q)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\tau} {}_{0+}d_q \tau \\
&\quad - q \int_0^1 \tau \frac{f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) - f\left(q\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q\tau)b\right)}{(1-q)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\tau} {}_{0+}d_q \tau \\
&= -\frac{2\eta}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \\
&\quad \left[-\sum_{n=0}^{\infty} f\left(q^{n+1}\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right] \\
&\quad + \frac{2q}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \\
&\quad \left[-\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1}\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right] \\
&= -\frac{2\eta}{b-a} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) \right] \\
&\quad + \frac{2q}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \\
&\quad \left[-\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^{n+1}\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^{n+1})b\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\eta}{b-a} f(b) + \frac{2(1-\eta)}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{4}{(b-a)^2} \left[(1-q) \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(q^n \left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-q^n)b\right) \right] \\
&= \frac{2\eta}{b-a} f(b) + \frac{2(1-\eta)}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{4} [\Delta_1 + \Delta_2] \\
&= \frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right]
\end{aligned}$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 2.7.3. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, bu durumda (2.7.3) özdeşliği (1.1.7) özdeşliğine indirgenir.

Not: Uzun matematiksel ifadelerden kaçınmak için (2.7.1)'deki özdeşliğin sol tarafı için aşağıdaki gösterimi kullanalım:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f) &:= \frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2-\lambda-\eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right].
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Teorem 2.7.4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_{a+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_{b-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0, 1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olan her $\alpha, \beta > 1$ için $|{}_{a+}D_q f|^\beta$ ve $|{}_{b-}D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)| \quad (2.7.5)$$

$$\leq \frac{b-a}{4} \left[\mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \lambda, \alpha) \left(\frac{|a^+ D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|a^+ D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \eta, \alpha) \left(\frac{|b^- D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|b^- D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

burada

$$\mathcal{M}(q, \lambda, \alpha) = \int_0^1 |q\tau - \lambda|_{0^+ d_q \tau}^\alpha, \mathcal{M}(q, \eta, \alpha) = \int_0^1 |\eta - q\tau|_{0^+ d_q \tau}^\alpha \text{ ve } \lambda, \eta \in [0, 1]$$

dir.

İspat: (2.7.3)'teki özdeşlik ve Kuantum integrali için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & |\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left[\int_0^1 |q\tau - \lambda| \left| a^+ D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|_{0^+ d_q \tau} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\eta - q\tau| \left| b^- D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|_{0^+ d_q \tau} \right] \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left[\left(\int_0^1 |q\tau - \lambda|_{0^+ d_q \tau}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 \left| a^+ D_q f \left(\frac{\tau}{2}b + \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)a \right) \right|_{0^+ d_q \tau}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\eta - q\tau|_{0^+ d_q \tau}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 \left| b^- D_q f \left(\frac{\tau}{2}a + \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)b \right) \right|_{0^+ d_q \tau}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $|a^+ D_q f|^\beta$ ve $|b^- D_q f|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$|\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \lambda, \alpha) \left(|_{a^+}D_q f(b)|^\beta \int_0^1 \frac{\tau}{2} {}_{0^+}d_q \tau \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |_{a^+}D_q f(a)|^\beta \int_0^1 \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \eta, \alpha) \left(|_{b^-}D_q f(a)|^\beta \int_0^1 \frac{\tau}{2} {}_{0^+}d_q \tau \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |_{b^-}D_q f(b)|^\beta \int_0^1 \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\
& = \frac{b-a}{4} \left[\mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \lambda, \alpha) \left(\frac{|_{a^+}D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{a^+}D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \eta, \alpha) \left(\frac{|_{b^-}D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{b^-}D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 2.7.5. Teorem 2.7.4'te $\lambda = \eta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ alınırsa, sol-sağ kuantum integralleriyle ilgili aşağıdaki Bullen, Simpson ve Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilir.

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.6)$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{1}{2}, \alpha\right) \left(\frac{|_{a^+}D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{a^+}D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{1}{2}, \alpha\right) \left(\frac{|_{b^-}D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{b^-}D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.7)$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{1}{3}, \alpha\right) \left(\frac{|_{a^+}D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{a^+}D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{M}_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{1}{3}, \alpha\right) \left(\frac{|_{b^-}D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|_{b^-}D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.8)$$

$$\leq \frac{b-a}{4} \mathcal{M}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{2}{3}, \alpha\right) \left(\frac{|{}_a^+ D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|{}_a^+ D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big| \\ \Big| + \mathcal{M}^{\frac{1}{\alpha}}\left(q, \frac{2}{3}, \alpha\right) \left(\frac{|{}_b^- D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|{}_b^- D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big|$$

Genel olarak, eğer Teorem 2.7.4'te $\lambda = \mu$ ise, aşağıdaki ağırlıklı kuantum Bullen tipi eşitsizliği elde edilir.

$$\left| \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + (1 - \lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a^+ d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b^- d_q x \right] \right| \\ \leq \frac{(b-a) \mathcal{M}^{\frac{1}{\alpha}}(q, \lambda, \alpha)}{4} \left(\frac{|{}_a^+ D_q f(b)|^\beta + (2[2]_q - 1)|{}_a^+ D_q f(a)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big| \\ \Big| + \left(\frac{|{}_b^- D_q f(a)|^\beta + (2[2]_q - 1)|{}_b^- D_q f(b)|^\beta}{2[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big|$$

burada

$$\mathcal{M}(q, \lambda, \alpha) = \int_0^1 |\lambda - q\tau|^\alpha {}_0^+ d_q \tau$$

dur.

Uyarı 2.7.6. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde türevlenebilir ve $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda (2.7.5), (2.7.6), (2.7.7) ve (2.7.8) eşitsizlikleri sırasıyla aşağıdaki eşitsizliklere indirgenir.

$$\left| \frac{\lambda f(a) + \eta f(b)}{2} + \frac{2 - \lambda - \eta}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2.7.9)$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{\lambda^{\alpha+1} + (1-\lambda)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|f'(b)|^\beta + 3|f'(a)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big| \\ \Big| + \left(\frac{\eta^{\alpha+1} + (1-\eta)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|f'(a)|^\beta + 3|f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big|$$

$$\left| \frac{1}{4} \left[f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2.7.10)$$

$$\leq \frac{b-a}{8} \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{|f'(b)|^\beta + 3|f'(a)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(a)|^\beta + 3|f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right],$$

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(b) + f(a)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2.7.11)$$

$$\leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{2^{\alpha+1} + 1}{3(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{|f'(b)|^\beta + 3|f'(a)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(a)|^\beta + 3|f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right],$$

$$\left| \frac{1}{3} \left[f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2.7.12)$$

$$\leq \frac{b-a}{12} \left(\frac{2^{\alpha+1} + 1}{3(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{|f'(b)|^\beta + 3|f'(a)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(a)|^\beta + 3|f'(b)|^\beta}{4} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right].$$

Teorem 2.7.7. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a^+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b^-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\beta \geq 1$ için $|{}_a^+D_q f|^\beta$ ve $|{}_b^-D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)| \quad (2.7.13)$$

$$\leq \frac{b-a}{4} \left[K_1^{1-\frac{1}{\beta}}(q, \lambda) \left(\frac{K_2(q, \lambda) |{}_a^+D_q f(b)|^\beta}{+(K_1(q, \lambda) - K_2(q, \lambda)) |{}_a^+D_q f(a)|^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ \left. + K_1^{1-\frac{1}{\beta}}(q, \eta) \left(\frac{K_2(q, \eta) |{}_b^-D_q f(a)|^\beta}{+(K_1(q, \eta) - K_2(q, \eta)) |{}_b^-D_q f(b)|^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

burada, $\lambda, \eta \in [0,1]$ ve $K_1(q, \lambda), K_1(q, \eta), K_2(q, \lambda)$ ve $K_2(q, \eta)$ Lemma 2.7.1'de verilmiştir.

İspat: (2.7.3)'teki özdeşlik ve Kuantum integrali için power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$|\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{4} \int_0^1 |q\tau - \lambda| \left| {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \\
&\quad \left[+ \int_0^1 |\eta - q\tau| \left| {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right] \\
&\quad \left(\int_0^1 |q\tau - \lambda| {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \frac{b-a}{4} \times \left(\int_0^1 |q\tau - \lambda| \left| {}_{a^+}D_q f \left(\frac{\tau}{2}b + \left(1-\frac{\tau}{2}\right)a \right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 |\eta - q\tau| {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\quad \left[\times \left(\int_0^1 |\eta - q\tau| \left| {}_{b^-}D_q f \left(\frac{\tau}{2}a + \left(1-\frac{\tau}{2}\right)b \right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$[a, b]$ aralığında $|{}_{a^+}D_q f|^\beta$ ve $|{}_{b^-}D_q f|^\beta$ fonksiyonlarının konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)| \\
&\quad \left(\int_0^1 |q\tau - \lambda| {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\quad \times \left| {}_{a^+}D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 |q\tau - \lambda| \frac{\tau}{2} {}_{0^+}d_q \tau \\
&\leq \frac{b-a}{4} \times \left(\left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 |q\tau - \lambda| \left(1-\frac{\tau}{2}\right) {}_{0^+}d_q \tau \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 |\eta - q\tau| {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right. \\
&\quad \left. \times \left| {}_{b^-}D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 |\eta - q\tau| \frac{\tau}{2} {}_{0^+}d_q \tau \right. \\
&\quad \left. \times \left(\left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 |\eta - q\tau| \left(1-\frac{\tau}{2}\right) {}_{0^+}d_q \tau \right) \right| \\
&= \frac{b-a}{4} \left[K_1^{1-\frac{1}{\beta}}(q, \lambda) \left(K_2(q, \lambda) \left| {}_{a^+}D_q f(b) \right|^\beta + (K_1(q, \lambda) - K_2(q, \lambda)) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
&\quad \left. + K_1^{1-\frac{1}{\beta}}(q, \eta) \left(K_2(q, \eta) \left| {}_{b^-}D_q f(a) \right|^\beta + (K_1(q, \eta) - K_2(q, \eta)) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 2.7.8. Eğer Teorem 2.7.7'de $\beta = 1$ alınırsa, 2.7.13 eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{H}(\lambda, \eta, a, b, f)| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left[(K_2(q, \lambda)|_{a^+D_qf(b)}| + (K_1(q, \lambda) - K_1(q, \lambda))|_{a^+D_qf(a)}|) \right. \\ & \quad \left. + (K_2(q, \eta)|_{b^-D_qf(a)}| + (K_1(q, \eta) - K_1(q, \eta))|_{b^-D_qf(b)}|) \right]. \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

Sonuç 2.7.9. Teorem 2.7.7'de $\lambda = \eta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ alınırsa, sol-sağ kuantum integralleriyle ilgili aşağıdaki Bullen, Simpson ve Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde edilir.

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.15)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(b-a)K_1^{1-\frac{1}{\beta}}\left(q, \frac{1}{2}\right)}{4} \left[\left(K_2\left(q, \frac{1}{2}\right)|_{a^+D_qf(b)}|^\beta \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_1\left(q, \frac{1}{2}\right) - K_2\left(q, \frac{1}{2}\right) \right) |_{a^+D_qf(a)}|^\beta \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(K_2\left(q, \frac{1}{2}\right)|_{b^-D_qf(a)}|^\beta \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_1\left(q, \frac{1}{2}\right) - K_2\left(q, \frac{1}{2}\right) \right) |_{b^-D_qf(b)}|^\beta \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.16)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(b-a)K_1^{1-\frac{1}{\beta}}\left(q, \frac{1}{3}\right)}{4} \left[\left(K_2\left(q, \frac{1}{3}\right)|_{a^+D_qf(b)}|^\beta \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_1\left(q, \frac{1}{3}\right) - K_2\left(q, \frac{1}{3}\right) \right) |_{a^+D_qf(a)}|^\beta \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(K_2\left(q, \frac{1}{3}\right)|_{b^-D_qf(a)}|^\beta \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(K_1\left(q, \frac{1}{3}\right) - K_2\left(q, \frac{1}{3}\right) \right) |_{b^-D_qf(b)}|^\beta \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

$$\left| \mathcal{H}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, a, b, f\right) \right| \quad (2.7.17)$$

$$\begin{aligned}
& \left| K_2\left(q, \frac{2}{3}\right) |_{a^+D_q f(b)}|^\beta \right|^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{(b-a)K_1^{1-\frac{1}{\beta}}\left(q, \frac{2}{3}\right)}{4} \left[\left(K_1\left(q, \frac{2}{3}\right) - K_2\left(q, \frac{2}{3}\right) \right) |_{a^+D_q f(a)}|^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left[\left(K_1\left(q, \frac{2}{3}\right) - K_2\left(q, \frac{2}{3}\right) \right) |_{b^-D_q f(b)}|^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \left[K\left(q, \frac{2}{3}\right) |_{b^-D_q f(a)}|^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

Genel olarak, eğer Teorem 2.7.7'de $\lambda = \mu$ ise, aşağıdaki ağırlıklı kuantum Bullen tipi eşitsizliği elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + (1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] \right| \\
& \leq \frac{(b-a)K_1^{1-\frac{1}{r}}(q, \lambda)}{4} \left[\left(K_2(q, \lambda) |_{a^+D_q f(b)}|^\beta + \Omega(q, \lambda) |_{a^+D_q f(a)}|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(K_2(q, \lambda) |_{b^-D_q f(a)}|^\beta + \Omega(q, \lambda) |_{b^-D_q f(b)}|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

burada, $K_1(q, \lambda)$ ve $K_2(q, \lambda)$ Lemma 2.7.1'de verilmiştir.

Uyarı 2.7.10. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde türevlenebilir ve $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda (2.7.13), (2.7.15), (2.7.16), ve (2.7.17) eşitsizlikleri sırasıyla (1.6.10), (1.6.11), (1.6.12) ve (1.6.13) eşitsizliklerine indirgenir.

Uyarı 2.7.11. Eğer Sonuç 2.7.9'de $\beta = 1$, f fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde türevlenebilir ve $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda (2.7.15), (2.7.16), ve (2.7.17) eşitsizlikleri sırasıyla (1.6.14), (1.6.15) ve (1.6.16) eşitsizliklerine indirgenir.

Örnek 2.7.12. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ ile tanımlansın. Bu takdirde açıkça, $\tau \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& {}_{-1^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-\tau)(-1)\right) \\
& = \frac{f\left(\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-\tau)(-1)\right) - f\left(q\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-q\tau)(-1)\right)}{(1-q)\left(\frac{-1+2}{2} - (-1)\right)\tau}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3+3q}{2}\tau - 2$$

ve

$$\begin{aligned} & {}_2^-D_q f\left(\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-\tau)2\right) \\ &= \frac{f\left(\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-\tau)2\right) - f\left(q\tau\left(\frac{-1+2}{2}\right) + (1-q\tau)2\right)}{(1-q)\left(\frac{-1+2}{2} - 2\right)\tau} \\ &= 4 - \frac{3+3q}{2}\tau \end{aligned}$$

fonksiyonları $[0,1]$ aralığında q_0^+ -integrallenebilirdir. Ek olarak,

$$|_{-1}^+D_q f(x)| = |(1+q)x + q - 1|$$

ve

$$|{}_2^-D_q f(x)| = |(1+q)x - 2q + 2|$$

fonksiyonları $[-1,2]$ üzerinde konvektir. Dolayısıyla, $f(x)$ fonksiyonu, Sonuç 2.7.8'de belirtilen varsayımları karşılar ve (2.7.14) eşitsizliğin sol ve sağ tarafları şu hale gelir:

$$L(q, \lambda, \eta) := \left| \frac{2+3\lambda+15\eta}{8} - \frac{20q^3+4q^2+22q+2}{8(1+q)(1+q+q^2)} \right|$$

ve

$$R(q, \lambda, \eta) := \frac{3}{4} \left[(K_2(q, \lambda)(3q+1) + (K_1(q, \lambda) - K_2(q, \lambda))2) \right. \\ \left. + (K_2(q, \eta)|1-3q| + (K_1(q, \eta) - K_2(q, \eta))4) \right],$$

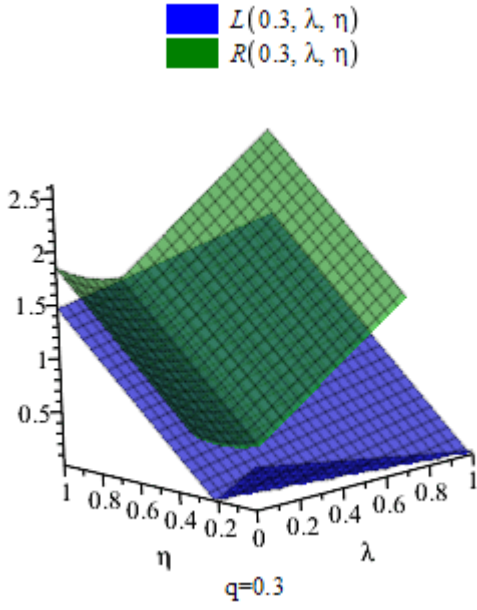
burada

$$\begin{aligned} K_2(q, \theta) &= \begin{cases} \frac{\theta^3(2[3]_q - 2[2]_q) - q^2\theta[3]_q + q^3[2]_q}{2q^2[2]_q[3]_q}, & 0 \leq \frac{\theta}{q} < 1 \text{ ise} \\ \frac{\theta[3]_q - q[2]_q}{2[2]_q[3]_q}, & 1 \leq \frac{\theta}{q} \text{ ise} \end{cases}, \\ K_1(q, \theta) &= \begin{cases} \frac{2\theta^2([2]_q - 1) - q\theta[2]_q + q^2}{q[2]_q}, & 0 \leq \frac{\theta}{q} < 1 \text{ ise} \\ \frac{\theta[2]_q - q}{[2]_q}, & 1 \leq \frac{\theta}{q} \text{ ise} \end{cases}, \end{aligned}$$

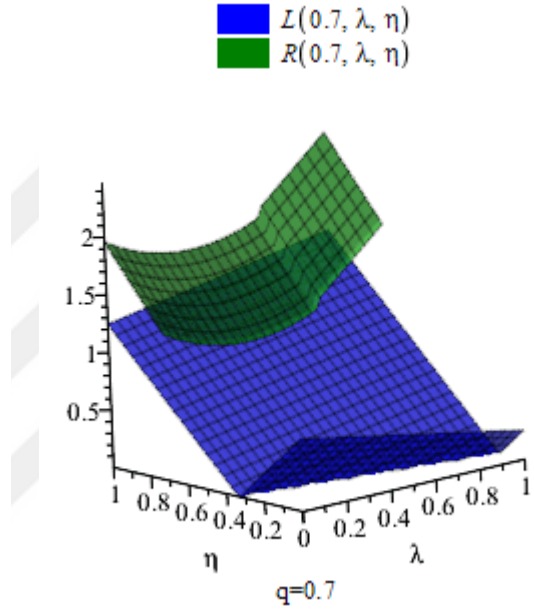
olur. Buradan

$$L(q, \lambda, \eta) \leq R(q, \lambda, \eta) \quad (2.7.18)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin geometrik yorumu için λ , η ve q 'dan bir veya iki parametrenin sabit kabul edilmesi gerekir. Örneğin, eğer q parametresi sabit ise, (2.7.18) eşitsizliğin her iki tarafı da iki değişkenli fonksiyonlar haline gelir. Bu durumda, q 'nın bazı özel değerleri için (2.7.18) eşitsizliğin geometrik davranışı aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir:

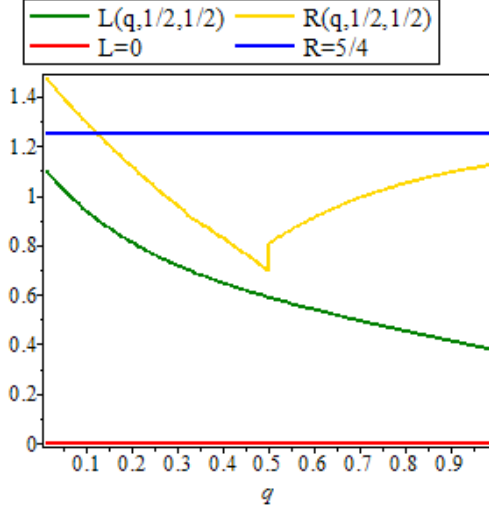


Şekil 6. $q = 0.3$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği.

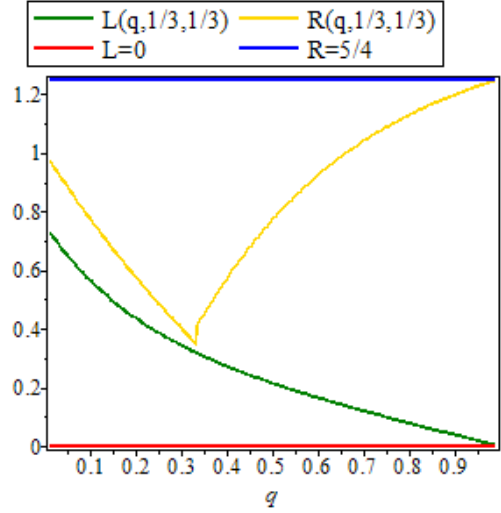


Şekil 7. $q = 0.99$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği

Benzer şekilde eğer λ ve η parametreleri sabit alınırsa, (2.7.18) eşitsizliğin her iki tarafı da tek değişkenli fonksiyonlar haline gelir. Bu durumda, λ ve η 'nın bazı özel değerleri için, (2.7.18) eşitsizliğin her iki tarafındaki fonksiyonların geometrik davranışı aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Ayrıca aşağıdaki şekiller (2.7.18) eşitsizliğin her iki tarafındaki fonksiyonların q bire yaklaşırken gerçek değerlerine yakınsamasının davranışını açıklamaktadır.



Şekil 8. $\lambda = \eta = \frac{1}{2}$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği



Şekil 9. $\lambda = \eta = \frac{1}{3}$ için (2.7.18) eşitsizliğin grafiği

2.8. Hölder ve Power-Mean İntegral Eşitsizliklerinin Bazı Yeni İyileştirmelerinin Sol ve Sağ Kuantum İntegral Benzerleri

Bu alt bölümde, sol ve sağ kuantum integralleri ile ilgili Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean eşitsizliklerinin genel versiyonları ve bunların özel durumları tartışılmıştır.

Teorem 2.8.1. f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için $|f|^\alpha, |g|^\beta$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde sol ve sağ kuantum integrallenebilir ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x)| |g(x)|_{a^+ d_q x} \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha_{a^+ d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta_{a^+ d_q x} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \leq \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha_{a^+ d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta_{a^+ d_q x} \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

ve

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)|_{b^- d_q x} \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{b-d_q}x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{b-d_q}x \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{b-d_q}x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{b-d_q}x \right)^{\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}$$

burada $\mu_k: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [a, b]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: $\mu_k: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $k = 1, \dots, n$ fonksiyonlarının $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ özelliğinden

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)| |g(x)| {}_{a+d_q}x &= \int_a^b \sum_{k=1}^n \mu_k(x) |f(x)g(x)| {}_{a+d_q}x \\
&= \sum_{k=1}^n \int_a^b |\mu_k(x) f(x) g(x)| {}_{a+d_q}x \\
&= \sum_{k=1}^n \int_a^b \left| \mu_k^{\frac{1}{\alpha}}(x) f(x) \mu_k^{\frac{1}{\beta}}(x) g(x) \right| {}_{a+d_q}x
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan (2.5.1) eşitsizliğine göre her $k = 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left| \mu_k^{\frac{1}{\alpha}}(x) f(x) \mu_k^{\frac{1}{\beta}}(x) g(x) \right| {}_{a+d_q}x \\
&\leq \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{a+d_q}x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{a+d_q}x \right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \int_a^b \left| \mu_k^{\frac{1}{\alpha}}(x) f(x) \mu_k^{\frac{1}{\beta}}(x) g(x) \right| {}_{a+d_q}x \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{a+d_q}x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{a+d_q}x \right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece (2.8.1)'deki birinci eşitsizlik elde edilir.

Şimdi (2.8.1)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı için aşağıdaki iki durumu ele alalım:

1. durum: Eğer

$$\left(\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

ise, bu taktirde sol kuantum integralinin tanımına göre her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $|f(q^n b + (1 - q^n)a)| = 0$ veya $|g(q^n b + (1 - q^n)a)| = 0$ olur. Böylece

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| {}_{a+}d_q x = 0$$

olur. Dolayısıyla (2.8.1)'deki ikinci eşitsizlik bu durumda geçerlidir.

2. durum: Eğer

$$\left(\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\beta}} \neq 0$$

ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x \right)^{\frac{1}{\beta}}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x}{\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x}{\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x} \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

olur. Şimdi, iyi bilinen Young eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x}{\int_a^b |f(x)|^\alpha {}_{a+}d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x}{\int_a^b |g(x)|^\beta {}_{a+}d_q x} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|^{\alpha}_{a+d_q x}}{\alpha \int_a^b |f(x)|^{\alpha}_{a+d_q x}} + \frac{\int_a^b \mu_k(x) |g(x)|^{\beta}_{a+d_q x}}{\beta \int_a^b |g(x)|^{\beta}_{a+d_q x}} \right] = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla (2.8.1)'deki ikinci eşitsizlik bu durumda da geçerlidir.

(2.8.2)'deki eşitsizlikler benzer şekilde kanıtlanabilir.

Sonuç 2.8.2. f ve g fonksiyonlar $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer $\alpha \geq 1$ için $|f|, |f||g|^{\alpha}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde sol ve sağ kuantum integrallenebilir ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)|_{a+d_q x} \quad (2.8.3)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|_{a+d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)| |g(x)|^{\alpha}_{a+d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|_{a+d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^{\alpha}_{a+d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)|_{b-d_q x} \quad (2.8.4)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)|_{b-d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b \mu_k(x) |f(x)| |g(x)|^{\alpha}_{b-d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|_{b-d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^{\alpha}_{b-d_q x} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

burada $\mu_k: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [a, b]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: $\alpha = 1$ için (2.8.3) ve (2.8.4)'teki eşitlik açıktır. Eğer $\alpha > 1$ ise, bu durumda sırasıyla (2.8.1) ve (2.8.2)'de $|f| = |f|^{\frac{1}{\alpha}} |g|$ ve $|g| = |f|^{1-\frac{1}{\alpha}}$ yerine konularak (2.8.3) ve (2.8.4)'deki eşitsizlikler elde edilir.

Uyarı 2.8.3. Eğer Teorem 2.8.1'de $n = 2$, $\mu_1(x) = \frac{b-x}{b-a}$, ve $\mu_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x)| |g(x)|_{a^+d_q x} \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x) |g(x)|_{a^+d_q x}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a) |g(x)|_{a^+d_q x}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x)| |g(x)|_{b^-d_q x} \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|_{b^-d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x) |g(x)|_{b^-d_q x}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|_{b^-d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a) |g(x)|_{b^-d_q x}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.8.6}$$

(2.8.5) eşitsizliğinin (p, q) -versiyonu [81]'de verilmiştir. Ayrıca, eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda (2.8.5) ve (2.8.6) eşitsizlikleri (1.4.9) eşitsizliğine indirgenir.

Uyarı 2.8.4. Eğer Sonuç 2.8.2'de $n = 2$, $\mu_1(x) = \frac{b-x}{b-a}$, ve $\mu_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f(x)| |g(x)|_{a^+d_q x} \\
& \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)||g(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)||g(x)|_{a^+d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

ve

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)|_{b^-d_q x} \tag{2.8.8}$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|_{b-d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)||g(x)|_{b-d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[+ \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|_{b-d_q x} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)||g(x)|_{b-d_q x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

(2.8.7) eşitsizliğinin (p, q) -versiyonu [81]'de verilmiştir. Ayrıca, eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve $q \rightarrow 1^-$ ise, bu durumda (2.8.7) ve (2.8.8) eşitsizlikleri (1.4.11)'deki ikinci eşitsizliğe indirgenir.

2.9. Sol ve Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Yamuk Tipi Eşitsizliklerin İyileştirmeleri

Bu alt bölümde, 5. ve 8. alt bölümlerin sonuçlarına göre, sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili bazı yamuk tipi eşitsizliklerin iyileştirmeleri tartışılmıştır.

Teorem 2.9.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olan $\alpha, \beta > 1$ için $|{}_a+D_q f|^\beta$ ve $|{}_b-D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b-d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_a+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) |{}_a+D_q f(a)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \quad \left[+ \left(\Omega_2(k) \left| {}_b-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) |{}_b-D_q f(b)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\ & \leq \frac{b-a}{4} (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\left| {}_a+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) |{}_a+D_q f(a)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \quad \left[+ \left(\frac{\left| {}_b-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) |{}_b-D_q f(b)|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

burada

$$\begin{aligned}\Omega_1(k, \alpha) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) (1 - q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau, & \Omega_2(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) t {}_{0+}d_q\tau, \\ \Omega_3(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) (1 - \tau) {}_{0+}d_q\tau, & \Omega(q) &= \int_0^1 (1 - q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau\end{aligned}$$

ve $\mu_k: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: (2.5.1)'deki özdeşlik ve q -Hölder-İşcan eşitsizliğinin genel versiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_qx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_qx \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\& \leq \frac{b-a}{4} \left[\int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_{a+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right| {}_{0+}d_q\tau \right. \\& \quad \left. + \int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_{b-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right| {}_{0+}d_q\tau \right] \\& \leq \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) (1-q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\& \quad \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \left| {}_{a+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|^\beta {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\& \quad + \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) (1-q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\& \quad \times \left(\mu_k(\tau) \left| {}_{b-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|^\beta {}_{0+}d_q\tau \right)^{\frac{1}{\beta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_0^+d_q \tau^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\left| {}_a^+D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| {}_b^-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| {}_b^-D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_0^+d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\
& = \sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_a^+D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \left[+ \left(\Omega_2(k) \left| {}_b^-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_b^-D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.9.1)'deki birinci eşitsizlik elde edilir.

(2.9.1)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı için aşağıdaki üç durumu ele alalım:

1. durum: Eğer

$$\varpi_1 := \left(\frac{\left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_a^+D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

ve

$$\varpi_2 := \left(\frac{\left| {}_b^-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_b^-D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

ise, bu durumda eşitlik açıktır.

2. durum: Eğer $\varpi_1 \neq 0$ ve $\varpi_2 \neq 0$ ise, bu takdirde iyi bilinen Young eşitsizliğine göre

$$\frac{\sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_a^+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_a^+D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{(\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha} \varpi_1}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau}{\alpha \int_0^1 (1-q\tau)^\alpha {}_{0+}d_q\tau} \\
& \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0+}d_q\tau \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \int_0^1 \mu_k(\tau)(1-\tau) {}_{0+}d_q\tau \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{\beta \frac{\left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q}} \right] \\
& = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{(\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_2} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{b-a}{4} (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_1
\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n (\Omega_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(\Omega_2(k) \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Omega_3(k) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{b-a}{4} (\Omega(q))^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_2
\end{aligned} \tag{2.9.3}$$

olur. Böylece (2.9.2) ve (2.9.3) eşitsizlikleri yan yana toplanarak (2.9.1)'deki ikinci eşitsizlik elde edilir.

3. durum: Eğer $\varpi_1 = 0$ yada $\varpi_2 = 0$ ise, bu taktirde (2.9.1)'deki ikinci eşitsizliğin geçerliliği durum 1 ve durum 2 dikkate alınarak elde edilir.

Teorem 2.9.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_{a+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_{b-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0, 1]$ aralığında sol

kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\beta \geq 1$ için $|_{a+D_q f}|^\beta$ ve $|_{b-D_q f}|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
 & \leq \sum_{k=1}^n (\Psi_1(k))^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\Psi_2(k) \left| {}_{a+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\alpha + \Psi_3(k) |_{a+}D_q f(a)|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 & \quad \left[+ \left(\Psi_2(k) \left| {}_{b-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\alpha + \Psi_3(k) |_{b-}D_q f(b)|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\
 & \leq \frac{(b-a) \left(\frac{[2]_q - q}{[2]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}}}{4} \left(\frac{([3]_q - q[2]_q) |_{a+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad + \frac{([3]_q ([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) |_{a+}D_q f(a)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad + \frac{([3]_q - q[2]_q) |_{b-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad \left[+ \frac{([3]_q ([2]_q - q) - [3]_q + q[2]_q) |_{b-}D_q f(b)|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9.4}$$

burada

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) (1 - q\tau) {}_{0+}d_q \tau, \quad \Psi_2(k) = \int_0^1 \mu_k(\tau) (1 - q\tau) \tau {}_{0+}d_q \tau, \\
 \Psi_3(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) (1 - q\tau) (1 - \tau) {}_{0+}d_q \tau
 \end{aligned}$$

ve $\mu_k: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: (2.5.1)'deki özdeşlik ve q -power-mean eşitsizliğinin genel versiyonu kullanılarak

$$\left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{4} \int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \\
&\quad \left[+ \int_0^1 |(1-q\tau)| \left| {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right] \\
&\leq \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau) \left| {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\quad + \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau) \left| {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \frac{b-a}{4} \sum_{k=1}^n (\Psi_1(k))^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\left| {}_{a^+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau)\tau {}_{0^+}d_q \tau \right. \\
&\quad \left. + \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau)(1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\quad + \left(\left| {}_{b^-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau)\tau {}_{0^+}d_q \tau \right. \\
&\quad \left. + \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau)(1-q\tau)(1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big] \\
&= \sum_{k=1}^n (\Psi_1(k))^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\left(\Psi_2(k) \left| {}_{a^+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \Psi_3(k) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_2(k) \left| {}_{b^-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \Psi_3(k) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.9.4)'teki birinci eşitsizlik elde edilir.

Şimdi, eğer $\beta > 1$ ise, bu taktirde (2.9.1)'deki ikinci eşitsizliğin ispatındaki benzer argümanlar kullanılarak (2.9.4)'teki ikinci eşitsizlik kolayca ispatlanabilir ve $\beta = 1$ olması durumunda, (2.9.4)'teki ikinci eşitsizlik, eşitlik haline dönüşür.

Sonuç 2.9.3. Eğer Teorem 2.9.1'de $n = 2$, $\mu_1(\tau) = 1 - \tau$, ve $\mu_2(\tau) = \tau$ alınırsa (2.5.2) eşitsizliğin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \quad (2.9.5) \\
& \leq \frac{b-a}{4} (\Omega_1(1, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\frac{([3]_q - [2]_q) \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q [3]_q - 2[3]_q + [2]_q) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left(\frac{([3]_q - [2]_q) \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q [3]_q - 2[3]_q + [2]_q) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big| \\
& \quad + \frac{b-a}{4} (\Omega_1(2, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\frac{[2]_q \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left(\frac{[2]_q \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Big|,
\end{aligned}$$

burada

$$\Omega_1(1, \alpha) = \int_0^1 (1-\tau)(1-q\tau)^\alpha {}_{0^+}d_q \tau, \quad \Omega_1(2, \alpha) = \int_0^1 \tau(1-q\tau)^\alpha {}_{0^+}d_q \tau$$

dur.

Uyarı 2.9.4. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, (2.9.5) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \quad (2.9.6) \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\left(\frac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + 2|f'(a)|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + 2|f'(b)|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + |f'(a)|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{2\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + |f'(b)|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)
\end{aligned}$$

Sonuç 2.9.5. Eğer Teorem 2.9.2’de $n = 2$, $\mu_1(\tau) = 1 - \tau$, ve $\mu_2(\tau) = \tau$ alınırsa (2.5.3) eşitsizliğinin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \quad (2.9.7) \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{[2]_q [3]_q - q[3]_q - [3]_q + q[2]_q}{[2]_q [3]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \times \left(\frac{([3]_q [4]_q - q[2]_q [4]_q - [2]_q [4]_q + q[2]_q [3]_q) \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{([2]_q [3]_q [4]_q - 2[3]_q [4]_q + [3]_q [4]_q) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{-q[3]_q [4]_q + 2q[2]_q [4]_q - q[2]_q [3]_q} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{([3]_q [4]_q - q[2]_q [4]_q - [2]_q [4]_q + q[2]_q [3]_q) \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{([2]_q [3]_q [4]_q - 2[3]_q [4]_q + [3]_q [4]_q) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta}{-q[3]_q [4]_q + 2q[2]_q [4]_q - q[2]_q [3]_q} \right) \\
& \quad + \frac{b-a}{4} \left(\frac{[3]_q - q[2]_q}{[2]_q [3]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \quad \times \left(\frac{[2]_q \left(\frac{[4]_q}{-q[3]_q} \right) \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \left(\frac{[3]_q [4]_q}{-q[2]_q [4]_q} \right) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{[2]_q \left(\frac{[4]_q}{-q[3]_q} \right) \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \left(\frac{[3]_q [4]_q}{-q[2]_q [4]_q} \right) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right) \\
& \quad + \frac{b-a}{4} \left(\frac{[3]_q - q[2]_q}{[2]_q [3]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

Uyarı 2.9.6. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, (2.9.7) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + 5|f'(a)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + 5|f'(b)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(a)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(b)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

2.10. Sol ve Sağ Kuantum İntegralleri ile İlgili Bazı Orta Nokta Tipi Eşitsizliklerin İyileştirmeleri

Bu alt bölümde, 6. ve 8. alt bölümlerin sonuçlarına göre, sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili bazı orta nokta tipi eşitsizliklerin iyileştirmeleri tartışılmıştır.

Teorem 2.10.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_a+D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_b-D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol kuantum integrellenebilir olsun. Eğer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olan $\alpha, \beta > 1$ için $|{}_a+D_q f|^\beta$ ve $|{}_b-D_q f|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_a+d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_b-d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(X_2(k) \left| {}_a+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + X_3(k) |{}_a+D_q f(a)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ & \quad \left. + \left(X_2(k) \left| {}_b-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + X_3(k) |{}_b-D_q f(b)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

$$\leq \frac{q(b-a)([1+\alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}{4} \left(\frac{\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left| \right. \\ \left. + \left(\frac{\left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right|$$

burada

$$X_1(k, \alpha) = \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^\alpha {}_{0^+}d_q \tau, \quad X_2(k) = \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0^+}d_q \tau, \\ X_3(k) = \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau$$

ve $\mu_k: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: (2.6.1)'deki özdeşlik ve q -Hölder-İşcan eşitsizliğinin genel versiyonu kullanılarak

$$\left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{q(b-a)}{4} \left[\int_0^1 \tau \left| {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right. \\ \left. + \int_0^1 \tau \left| {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right] \\ \leq \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^\alpha {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \left| {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ + \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^\alpha {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \left| {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right|^\beta {}_{0^+}d_q \tau \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leq \frac{q(b-a)}{4}$$

$$\begin{aligned} & \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0^+}d_q \tau^{\frac{1}{\beta}} \\ & \times \sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left| \left({}_{a^+}D_q f(a) \right)^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right|^{\frac{1}{\beta}} \\ & + \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0^+}d_q \tau^{\frac{1}{\beta}} \\ & \left| \left({}_{b^-}D_q f(b) \right)^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau \right|^{\frac{1}{\beta}} \Bigg| \\ & = \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(X_2(k) \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ & \left| + \left(X_2(k) \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.10.1)'deki birinci eşitsizlik elde edilir.

(2.10.1)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı için aşağıdaki üç durumu ele alalım:

1. durum: Eğer

$$\varpi_1 := \left(\frac{\left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

ve

$$\varpi_2 := \left(\frac{\left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([2]_q - 1) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0$$

ise, bu durumda eşitlik açıktır.

2. durum: Eğer $\varpi_1 \neq 0$ ve $\varpi_2 \neq 0$ ise, bu taktirde iyi bilinen Young eşitsizliğine göre

$$\frac{\sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(X_2(k) \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{([1 + \alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_1}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{\frac{\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^\alpha {}_{0+}d_q \tau}{\alpha [1 + \alpha]_q^{-1}}}{\beta \frac{|\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0+}d_q \tau|_{a+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)}|^\beta + \int_0^1 \mu_k(\tau) (1-\tau) {}_{0+}d_q \tau|_{a+D_q f(a)}|^\beta}{[2]_q}} \right] \\
& = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(X_2(k) \left| {}_{b-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{b-D_q f(b)} \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{([1 + \alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_2} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(X_2(k) \left| {}_{a+D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{a+D_q f(a)} \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.10.2) \\
& \leq \frac{q(b-a)}{4} ([1 + \alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (X_1(k, \alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \left(X_2(k) \left| {}_{b-D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \right|^\beta + X_3(k) \left| {}_{b-D_q f(b)} \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.10.3) \\
& \leq \frac{q(b-a)}{4} ([1 + \alpha]_q^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \varpi_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece (2.10.2) ve (2.10.3) eşitsizlikleri yan yana toplanarak (2.10.1)'deki ikinci eşitsizlik elde edilir.

3. durum: Eğer $\varpi_1 = 0$ yada $\varpi_2 = 0$ ise, bu taktirde (2.10.1)'deki ikinci eşitsizliğin geçerliliği durum 1 ve durum 2 dikkate alınarak elde edilir.

Teorem 2.10.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olmak üzere ${}_{a+D_q f}\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right)$ ve ${}_{b-D_q f}\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right)$, $[0,1]$ aralığında sol

kuantum integrallenebilir olsun. Eğer $\beta \geq 1$ için $|_{a^+D_qf}|^\beta$ ve $|_{b^-D_qf}|^\beta$, $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise, bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
 & \leq \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (\Phi_1(k))^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\Phi_2(k) \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Phi_3(k) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad \left[+ \left(\Phi_2(k) \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + \Phi_3(k) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\
 & \leq \frac{q(b-a)}{4[2]_q[3]_q^{\frac{1}{\beta}}} \left([2]_q \left| {}_{a^+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad \left[+ \left([2]_q \left| {}_{b^-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.10.4}$$

burada

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0^+}d_q \tau, \quad \Phi_2(k) = \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^2 {}_{0^+}d_q \tau, \\
 \Phi_3(k) &= \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau(1-\tau) {}_{0^+}d_q \tau
 \end{aligned}$$

ve $\mu_k: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, her $k = 1, \dots, n$ için sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1$ dir.

İspat: (2.6.1)'deki özdeşlik ve q -power-mean eşitsizliğinin genel versiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
 & \leq \frac{q(b-a)}{4} \int_0^1 \tau \left| {}_{a^+}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)a\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \\
 & \quad \left[+ \int_0^1 \tau \left| {}_{b^-}D_q f\left(\tau\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\tau)b\right) \right| {}_{0^+}d_q \tau \right] \\
 & \leq \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau {}_{0^+}d_q \tau \right)^{1-\frac{1}{\beta}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau \left| {}_{a^+}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)a \right) \right|_{0^+d_q \tau}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& + \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \mu_k(\tau) \tau \right)_{0^+d_q \tau}^{1-\frac{1}{\beta}} \\
& \times \left(\mu_k(\tau) \tau \left| {}_{b^-}D_q f \left(\tau \left(\frac{a+b}{2} \right) + (1-\tau)b \right) \right|_{0^+d_q \tau}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (\Phi_1(k))^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\left| {}_{a^+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^2 \right)_{0^+d_q \tau}^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau(1-\tau) \right)_{0^+d_q \tau}^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left| {}_{b^-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau^2 \right)_{0^+d_q \tau}^{\frac{1}{\beta}} \\
& \quad + \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \int_0^1 \mu_k(\tau) \tau(1-\tau) \right)_{0^+d_q \tau}^{\frac{1}{\beta}} \Big| \\
& = \frac{q(b-a)}{4} \sum_{k=1}^n (\Phi_1(k))^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\left(\Phi_2(k) \left| {}_{a^+}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \Phi_3(k) \left| {}_{a^+}D_q f(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\Phi_2(k) \left| {}_{b^-}D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \Phi_3(k) \left| {}_{b^-}D_q f(b) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \Big|
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.9.4)'teki birinci eşitsizlik elde edilir.

Şimdi, eğer $\beta > 1$ ise, bu taktirde (2.10.1)'deki ikinci eşitsizliğin ispatındaki benzer argümanlar kullanılarak (2.10.4)'teki ikinci eşitsizlik kolayca ispatlanabilir ve $\beta = 1$ olması durumunda, (2.10.4)'teki ikinci eşitsizlik, eşitlik haline gelmiş olur.

Sonuç 2.10.3. Eğer Teorem 2.10.1'de $n = 2$, $\mu_1(\tau) = 1 - \tau$, ve $\mu_2(\tau) = \tau$ alınırsa (2.6.2) eşitsizliğinin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a^+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b^-}d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{q(b-a)}{4} \left(\frac{[\alpha+2]_q - [\alpha+1]_q}{[\alpha+1]_q [\alpha+2]_q} \right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.10.5}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{([3]_q - [2]_q) \left| {}_a D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([2]_q [3]_q - 2[3]_q + [2]_q) \left| {}_a D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \times \left[\left(\frac{([3]_q - [2]_q) \left| {}_b D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([2]_q [3]_q - 2[3]_q + [2]_q) \left| {}_b D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \\
& + \frac{q(b-a)}{4} \left(\frac{1}{[\alpha + 2]_q} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \times \left(\frac{[2]_q \left| {}_a D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_a D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \times \left[\left(\frac{[2]_q \left| {}_b D_q f \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + ([3]_q - [2]_q) \left| {}_b D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right].
\end{aligned}$$

Uyarı 2.10.4. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, (2.10.5) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{(\alpha+2)(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\left(\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + 2 \left| f'(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{6} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + 2 \left| f'(b) \right|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \\
& \quad + \frac{b-a}{4} + \left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\left(\left| 2f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \left| f'(a) \right|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{6} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2 \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^\beta + \left| f'(b) \right|^\beta}{6} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right).
\end{aligned} \tag{2.10.6}$$

Sonuç 2.10.5. Eğer Teorem 2.10.2’de $n = 2$, $\mu_1(\tau) = 1 - \tau$, ve $\mu_2(\tau) = \tau$ alınırsa (2.6.3) eşitsizliğinin aşağıdaki iyileştirmesi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) {}_{a+}d_q x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) {}_{b-}d_q x \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
 & \leq \frac{q(b-a)}{4} \left(\frac{[3]_q - [2]_q}{[2]_q [3]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad \times \left[\frac{[2]_q ([4]_q - [3]_q) \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{([3]_q [4]_q - 2[2]_q [4]_q + [2]_q [3]_q) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right] \\
 & \quad + \frac{[2]_q ([4]_q - [3]_q) \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \\
 & \quad \left. + \frac{([3]_q [4]_q - 2[2]_q [4]_q + [2]_q [3]_q) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta}{[2]_q [3]_q [4]_q} \right] \\
 & \quad + \frac{q(b-a)}{4} \left(\frac{1}{[3]_q} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
 & \quad \times \left[\left(\frac{[3]_q \left| {}_{a+}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([4]_q - [3]_q) \left| {}_{a+}D_q f(a) \right|^\beta}{[3]_q [4]_q} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{[3]_q \left| {}_{b-}D_q f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^\beta + ([4]_q - [3]_q) \left| {}_{b-}D_q f(b) \right|^\beta}{[3]_q [4]_q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.10.7}$$

Uyarı 2.10.6. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $q \rightarrow 1$ ise, (2.10.7) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \tag{2.10.8}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(a)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(b)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{3|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(a)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{3|f'(\frac{a+b}{2})|^\beta + |f'(b)|^\beta}{12} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right].
\end{aligned}$$



3. İRDELEME

İntegral eşitsizliklerin matematiğinin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılması nedeniyle, Hölder, power-mean ve diğer eşitsizlikler dahil olmak üzere bazı iyi bilinen integral eşitsizlikler, Jackson integrali kullanılarak yeniden oluşturulmuştur [46, 49]. Klasik kuantum integrali yalnızca tanım kümesi $[0, b]$ aralığında yer alan fonksiyonlara uygulanır ve bu, Jackson integralinin sınırlamalarından biridir [46]. 2014 yılında Tariboon ve Ntouyas keyfi kapalı ve sınırlı aralık $[a, b]$ üzerinde q_{a+} -türevi (sol kuantum türevi) ve q_{a+} -integral (sol kuantum integrali) kavramlarını tanıtmıştır [52]. Ayrıca Tariboon ve Ntouyas [53], Hermite-Hadamard eşitsizliği de dahil olmak üzere bazı integral eşitsizliklerin q_{a+} -versiyonunu önermiştir. Noor vd. [61] bazı Ostrowski tipi eşitsizliklerin q_{a+} -benzerleri sunmuştur. Kuantum integralinde genel bir değişken değiştirme kuralının olmaması, bazı integral eşitsizliklerinin kuantum benzerlerinin elde edilmesini engelleyen önemli bir sorundur ve bu konuya dikkat edilmemesi, [53] ve [61] çalışmalarındaki hataların temel nedenidir.

Bu çalışmada sol kuantum türevi ve sol kuantum integrale benzer şekilde sağ kuantum türevi ve sağ kuantum integrali kavramları temel özellikleri ile incelenmiştir. [61]'de iddia edilen sonuçlar yeniden formüle edilmiştir ve sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin bazı yeni versiyonları elde edilmiştir. Ayrıca, sol - sağ kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni versiyonlarından biriyle ilgili bazı diğer eşitsizlik tipleri de oluşturulmuştur.

Bu çalışma kapsamında, fonksiyonların bilinen konveksliği ile bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu eşitsizlikler, s -konveks, m -konveks vb. gibi diğer konveks fonksiyon sınıfları için araştırılabilir. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean eşitsizliklerinin genel q -versiyonu kullanılarak, Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler de dahil olmak üzere çeşitli integral eşitsizlik türleri daha geniş bir şekilde incelenebilir.

4. SONUÇLAR

İntegral eşitsizlikler, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok dalında, özellikle diferansiyel denklemlerde ve fonksiyonel analizde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, türevlenemeyen fonksiyonlar da dahil olmak üzere çok çeşitli fonksiyonlarla ilgilenen kuantum hesabındaki son gelişmelerle, çeşitli türde integral eşitsizlikler oluşturulmuştur. Bu çalışmada, sağ kuantum türevi ve sağ kuantum integralinin yanı sıra sol ve sağ kuantum integrallerinin birleşik kullanımının incelenmesi önemlidir. Özellikle elde edilen sonuçlar, yaklaşımlar teorisi ve sayısal analizlerdeki bazı problemlerin hata tahminlerinin bulunmasına katkı sağlayacaktır.

Çalışmamızda sağ kuantum türevi ve sağ kuantum integrali kavramları ve özellikleri incelenmiş, sol ve sağ kuantum integralinin bir kombinasyonu kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. [53] ve [61]'de iddia edilen sonuçlardaki bazı hatalar tespit edildi ve bu sonuçlar yeniden formüle edildi.
2. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bazı yeni versiyonları, sol ve sağ kuantum integralleri yolu ile elde edildi. (Teorem 2.4.1, Sonuç 2.4.2 ve Teorem 2.4.4)
3. (1.3.1) özdeşliğinin kuantum benzeri türetildi. (Lemma 2.5.1)
4. Sol ve sağ kuantum integralleri ile ilgili bazı yamuk tipi eşitsizlikler elde edildi ve $q \rightarrow 1^-$ iken bu eşitsizlikler türevlenebilir fonksiyonlar için incelendi. (Teorem 2.5.3, Teorem 2.5.4 ve Sonuç 2.5.6)
5. (1.1.4) özdeşliğinin kuantum benzeri türetildi. (Lemma 2.6.1)
6. Sol ve sağ kuantum integralleri ile ilgili bazı orta nokta tipi eşitsizlikler elde edildi ve $q \rightarrow 1^-$ iken bu eşitsizlikler türevlenebilir fonksiyonlar için incelendi. (Teorem 2.6.3, Teorem 2.6.4 ve Sonuç 2.6.5)
7. (1.1.7) özdeşliğinin kuantum benzeri türetildi. (Lemma 2.7.2)
8. $\lambda, \eta \in [0,1]$ parametrelerini içeren sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili bazı genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edildi. (Teorem 2.7.4, Sonuç 2.7.8 ve Teorem 2.7.7)

9. Sırasıyla $\lambda = \eta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ve $\lambda = \eta$ için sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili bazı Bullen, Simpson, Hermite-Hadamard ve ağırlıklı Bullen tipi eşitsizlikler türetildi. Ayrıca $q \rightarrow 1^-$ iken bu eşitsizlikler türevlenebilir fonksiyonlar için incelendi. (Sonuç 2.7.5 ve Sonuç 2.7.9).
10. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean (güç-ortalama) eşitsizliklerinin genel q -versiyonu bulundu. Ayrıca, bu eşitsizliklerin bazı özel durumları incelendi. (Teorem 2.8.1 ve Sonuç 2.8.2).
11. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean (güç-ortalama) eşitsizliklerinin genel q -versiyonu kullanılarak bazı genelleştirilmiş ve geliştirilmiş yamuk tipi eşitsizlikler elde edildi. (Teorem 2.9.3 ve Teorem 2.9.2).
12. Genelleştirilmiş ve geliştirilmiş yamuk tipi eşitsizliklerin bazı özel durumları tartışıldı ve $q \rightarrow 1^-$ iken, bu özel durumlar türevlenebilir fonksiyonlar için incelendi. (Sonuç 2.9.3 ve Sonuç 2.9.5).
13. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean (güç-ortalama) eşitsizliklerinin genel q -versiyonu kullanılarak bazı genelleştirilmiş ve geliştirilmiş orta nokta tipi eşitsizlikler elde edildi. (Teorem 2.10.1 ve Teorem 2.10.2).
14. Genelleştirilmiş ve geliştirilmiş orta nokta tipi eşitsizliklerin bazı özel durumları tartışıldı ve $q \rightarrow 1^-$ iken, bu özel durumlar türevlenebilir fonksiyonlar için incelendi. (Sonuç 2.10.3 ve Sonuç 2.10.5).

5. ÖNERİLER

Bu çalışmanın kuantum hesabı teorisine ve kuantum integral eşitsizliklerine katkı sağlayacağı umulmaktadır. Bununla beraber, gelecekte bu çalışma aşağıdaki yönlerde geliştirilebilir:

1. Bu çalışmada elde edilen eşitsizliklerin s -konveks, h -konveks fonksiyon sınıfları gibi diğer konveks fonksiyon sınıfları için incelenebilir.
2. Sol ve sağ kuantum integralleriyle ilgili iç çarpım uzayları incelenebilir.
3. Sol ve sağ q -fark operatörlerinin toplamı incelenebilir ve bunlar sırasıyla geri, ileri ve orta nokta fark operatörleri ile karşılaştırılabilir.
4. Hölder-İşcan ve geliştirilmiş power-mean (güç-ortalama) eşitsizliklerinin genel versiyonlarını kullanarak geliştirilmiş Bullen, Simpson ve ağırlıklı Bullen tipi eşitsizlikler incelenebilir.
5. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar konveks stokastik süreçler için araştırılabilir.
6. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar yarı konveks fonksiyonlar için incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Mitrinović, D. S. ve Lacković, I. B., Hermite and convexity, Aequationes mathematicae, 28, 1 (1985) 229-232.
2. Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journal de mathématiques pures et appliquées, 9, (1893) 171-215.
3. Hermite, C., Sur deux limites d'une intégrale définie, Mathesis, 3, 1 (1883) 1-82.
4. Bullen, P. S., Handbook of means and their inequalities, Vol. 560, Springer Science & Business Media., 2003.
5. Wang, J. ve Fečkan, M., Fractional Hermite-Hadamard Inequalities, In Fractional Hermite-Hadamard Inequalities, de Gruyter, Berlin, 2018.
6. Niculescu, C. P. ve Persson, L. E., Old and new on the Hermite-Hadamard inequality, Real Analysis Exchange, 29, 2 (2003) 663-685.
7. Dragomir, S. S., Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 167, 1 (1992). 49-56.
8. Yang, G. S. ve Tseng, K. L., On certain integral inequalities related to Hermite-Hadamard inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 239, 1 (1999) 180-187.
9. Lakshmikantham, V. ve Vatsala, A. S., Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 69, 8 (2008). 2677-2682.
10. Walter, W., Differential and integral inequalities, Vol. 55, Springer Science & Business Media., 2012.
11. Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S., Integral inequalities and applications, Vol. 57, Springer Science & Business Media., 1992.
12. Peajcariac, J. E. ve Tong, Y. L., Convex functions, partial orderings, and statistical applications, Academic Press., 1992.
13. Dragomir, S. S., Bounds for the normalised Jensen functional, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 74, 3 (2006). 471-478.
14. Dragomir, S. S., Hermite-Hadamard's type inequalities for operator convex functions, Applied Mathematics and Computation, 218, 3 (2011) 766-772.

15. Denton, Z. ve Vatsala, A. S., Fractional integral inequalities and applications, Computers & Mathematics with Applications, 59, 3 (2010) 1087-1094.
16. Andrica, D. ve Rassias, T. M., Differential and integral inequalities, Springer, Berlin, 2019.
17. Agarwal, P., Dragomir, S. S., Jleli, M. ve Samet, B., Advances in mathematical inequalities and applications, Springer, Singapore, 2018.
18. Agarwal, R. P. ve Wong, P. J., Error inequalities in polynomial interpolation and their applications, Vol. 262, Springer science & business media., 1993.
19. Dragomir, S. S. ve Agarwal, R., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Applied mathematics letters, 11, 5 (1998) 91-95.
20. Pearce, C. E. ve Pečarić, J., Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, Applied Mathematics Letters, 13, 2 (2000) 51-55.
21. Kirmaci, U. S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Applied mathematics and computation, 147, 1 (2004) 137-146.
22. Kavurmaci, H., Avci, M. ve Özdemir, M. E., New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications, Journal of Inequalities and Applications, 2011, 1 (2011) 1-11.
23. Eftekhari, N., Some remarks on (s, m) -convexity in the second sense, J. Math. inequal, 8, 3 (2014) 489-495.
24. Tseng, K. L., Hwang, S. R. ve Dragomir, S. S., Fejér-type inequalities (I), Journal of Inequalities and Applications, 2010, (2010) 1-7.
25. Tseng, K. L., Hwang, S. R. ve Hsu, K. C. Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications, Computers & Mathematics with Applications, 64, 4 (2012) 651-660.
26. Sarıkaya, M. Z., Set, E. ve Ozdemir, M. E., On new inequalities of Simpson's type for s -convex functions, Computers & Mathematics with Applications, 60, 8 (2010) 2191-2199.
27. Xi, B. Y. ve Qi, F. Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications to means, Journal of Function Spaces and Applications, 2012, (2012) 14.
28. İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 43, 6 (2014) 935-942.
29. İşcan, İ., Ostrowski type inequalities for p -convex functions, New Trends in Mathematical Sciences, 4, 3 (2016) 140-150.

30. İşcan, İ., Weighted Hermite–Hadamard–Mercer type inequalities for convex functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 37, 1 (2021) 118-130.
31. İşcan, İ., On generalization of different type inequalities for harmonically quasi-convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 275, (2016) 287-298.
32. İşcan, İ., Set, E. ve Özdemir, M. E., On new general integral inequalities for s-convex functions, Applied Mathematics and Computation, 246, (2014) 306-315.
33. İşcan, İ., Some new general integral inequalities for h-convex and h-concave functions, Advances in Pure and Applied Mathematics, 5, 1 (2014) 21-29.
34. İşcan, İ., Generalization of different type integral inequalities via fractional integrals for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex, Konuralp journal of Mathematics, 1, 2 (2013) 67-79.
35. İşcan, İ., Kunt, M., Yazici, N. ve Gozutok, T., New general integral inequalities for Lipschitzian functions via Riemann-Liouville fractional integrals and applications, Journal of Inequalities and Special Functions, 7, 4 (2016) 1-12.
36. Dragomir, S. S., ve Fitzpatrick, S., The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Mathematica, 32, 4 (1999) 687-696.
37. Alomari, M. W., Darus, M. ve Kirmaci, U. S., Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions, Acta Mathematica Scientia, 31, 4 (2011) 1643-1652.
38. Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H. ve Başak, N., Hermite–Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57, 9-10 (2013) 2403-2407.
39. Alp, N., Sarıkaya, M. Z., Kunt, M. ve İşcan, İ., q-Hermite Hadamard inequalities and quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, Journal of King Saud University-Science, 30, 2 (2018) 193-203.
40. Kunt, M., İşcan, İ., Alp, N. ve Sarıkaya, M., (p, q)-Hermite-Hadamard inequalities and (p, q)-estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas Fisicas Y Naturales Serie A-Matematicas, 112, 4 (2018).
41. Asawasamrit, S., Sudprasert, C., Ntouyas, S. K. ve Tariboon, J., Some results on quantum Hahn integral inequalities, Journal of Inequalities and Applications, 2019, 1 (2019) 1-18.
42. Jackson, F. H., On q-definite integrals, Quart. J. Pure Appl. Math, 41, 15 (1910) 193-203.

43. Jackson, F. H., On basic double hypergeometric functions, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1, (1942) 69-82.
44. Jackson, F. H., Basic double hypergeometric functions (II), *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1, (1944) 49-61.
45. Heine, E., Untersuchungen über die reihe $1+\dots x^2+\dots$, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 35, (1847) 285-328.
46. Kac, V. G. ve Cheung, P., *Quantum calculus*, Vol. 113, Springer, New York, 2002.
47. Gasper, G. ve Rahman, M., *Basic hypergeometric series*, Vol. 96, Cambridge university press, 2004.
48. Gauchman, H., Integral inequalities in q-calculus, *Computers & Mathematics with Applications*, 47, 2-3 (2004) 281-300.
49. Anastassiou, G. A., *Intelligent mathematics: computational analysis*, Vol. 5, Springer, Heidelberg, 2011.
50. Annaby, M. H. ve Mansour, Z. S., *q-Fractional calculus and equations*, Vol. 2056, Springer, 2012.
51. Ernst, T., *A comprehensive treatment of q-calculus*, Springer Science & Business Media., 2012.
52. Tariboon, J. ve Ntouyas, S. K., Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2013, (2013) 1-19.
53. Tariboon, J. ve Ntouyas, S. K., Quantum integral inequalities on finite intervals, *Journal of Inequalities and Applications*, 2014, (2014) 1-13.
54. Ahmad, B., Ntouyas, S. K. ve Tariboon, J., *Quantum calculus: New concepts, impulsive IVPs and BVPs, inequalities*, Vol. 4, World Scientific, 2016.
55. Tariboon, J., Ntouyas, S. K. ve Agarwal, P., New concepts of fractional quantum calculus and applications to impulsive fractional q-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2015, 1 (2015) 1-19.
56. Ntouyas, S. K. ve Tariboon, J., Applications of quantum calculus on finite intervals to impulsive difference inclusions, *Advances in Difference Equations*, 2014, 1 (2014) 1-16.
57. Aral, A., Gupta, V. ve Agarwal, R. P., *Applications of q-calculus in operator theory*, Springer, New York, 2013.
58. Mishra, S. K., Samei, M. E., Chakraborty, S. K. ve Ram, B., On q-variant of Dai–Yuan conjugate gradient algorithm for unconstrained optimization problems, *Nonlinear Dynamics*, 104, (2021) 2471-2496.

59. Mishra, S. K., Panda, G., Chakraborty, S. K., Samei, M. E. ve Ram, B., On q-BFGS algorithm for unconstrained optimization problems, Advances in Difference Equations, 2020, 1 (2020) 1-24.
60. Noor, M. A., Noor, K. I. ve Awan, M. U., Some quantum estimates for Hermite–Hadamard inequalities, Applied Mathematics and Computation, 251, (2015) 675-679.
61. Noor, M. A., Awan, M. U. ve Noor, K. I., Quantum Ostrowski inequalities for q-differentiable convex functions, J. Math. Inequal, 10, 4 (2016) 1013-1018.
62. İşcan, İ., New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality, Journal of inequalities and applications, 2019, 1 (2019) 1-11.
63. Kadakal, M., Iscan, I., Kadakal, H. ve Bekar, K., On improvements of some integral inequalities. Honam Mathematical Journal, 43, 3 (2021) 441-452.
64. Kadakal, M., İşcan, İ., Agarwal, P. ve Jleli, M., Exponential trigonometric convex functions and Hermite-Hadamard type inequalities, Mathematica Slovaca, 71 1 (2021) 43-56.
65. Kadakal, H., On refinements of some integral inequalities using improved power-mean integral inequalities, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 36, 6 (2020) 1555-1565.
66. Toplu, T., Iscan, I. ve Kadakal, M., Hyperbolic type convexity and some new inequalities, Honam Mathematical Journal, 42, 2 (2020) 301-318.
67. Ozcana, S., On Refinements of Some Integral Inequalities for Differentiable Prequasiinvex Functions, Filomat, 33, 14 (2019) 4377-4385.
68. Kadakal, M., Geometric trigonometrically convexity and better approximations, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 36, 6 (2020) 1830-1844.
69. Mehmet, K., Baidar, A. ve Şanlı, Z., Some Quantum Integral Inequalities Based on Left-Right Quantum Integrals, Turkish Journal of Science and Technology, 17, 2 (2022) 343-356.
70. Baidar, A. ve Mehmet, K., Quantum analog of some trapezoid and midpoint type inequalities for convex functions, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 71, 2 (2022) 456-480.
71. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and New York, 1978.
72. Hoffmann-Ostenhof, M., Hoffmann-Ostenhof, T. ve Laptev, A., A geometrical version of Hardy's inequality, Journal of Functional Analysis, 189, 2 (2002) 539-548.

73. Bullen, P., A criterion for n -convexity, Pacific Journal of Mathematics, 36, 1 (1971) 81-98.
74. Bullen, P. S., Error estimates for some elementary quadrature rules, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika, 602/633, (1978) 97-103.
75. Dragomir, S. S., Agarwal, R. P. ve Cerone, P., On Simpson's inequality and applications, Journal of Inequalities and Applications [electronic only], 5, 6 (2000) 533-579.
76. Hudzik, H. ve Maligranda, L., Some remarks on s -convex functions, Aequationes mathematicae, 48, (1994) 100-111
77. Breckner, W. W., Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen, Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS), 23, 37 (1978) 13-20.
78. Swarttouw, R. F., An addition theorem and some product formulas for the Hahn-Exton q -Bessel functions, Canadian Journal of Mathematics, 44, 4 (1992) 867-879.
79. Koelink, H. T. ve Swarttouw, R. F., On the Zeros of the Hahn-Exton q -Bessel Function and Associated q -Lommel Polynomials, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 186, 3 (1994) 690-710.
80. Bromwich, T.J.I'A., An Introduction to the Theory of Infinite Series, 1st edition, Macmillan, London, 1908.
81. Yu, B., Luo, C. Y. ve Du, T. S., On the refinements of some important inequalities via (p, q) -calculus and their applications, Journal of Inequalities and Applications, 2021, 1 (2021) 1-26.

ÖZGEÇMİŞ

Abdul Wakil BAIDAR, Paktika'daki Ali Baba lisesinden mezun oldu. Lisans eğitimini Afganistan Kabil Üniversitesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. Yüksek Lisans eğitimini Hindistan'da Delhi Üniversitesin Matematik bilimleri fakültesi, Matematik anabilim dalında 2014 yılında tamamladı. Daha sonra Kabil Üniversitesi Matematik Bölümü'ne tam üye olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. 2018 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora programında eğitimine başladı. Yabancı dili İngilizce ve Türkçedir. Evli ve üç kız çocuğu babasıdır.

Doktora eğitimi sürecinde bilimsel hakemli dergilerde yapmış olduğu yayınlar aşağıdaki şekildedir.

1. **Baidar, A. W.** ve Kunt, M., Some Hermite–Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions in the fourth sense, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45, 5 (2023) 5466-5482.
2. Kunt, M., Kashuri, A., Du, T. ve **Baidar, A. W.**, Quantum Montgomery identity and quantum estimates of Ostrowski type inequalities, AIMS Mathematics, 5, 6 (2020) 5439-5457.
3. **Baidar, A. W.** ve Kunt, M., Quantum analog of some trapezoid and midpoint type inequalities for convex functions . Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 71, 2 (2022) 456-480.
4. Kunt, M., **Baidar, A. W.** ve ŞANLI, Z., Some Quantum Integral Inequalities Based on Left-Right Quantum Integrals, Turkish Journal of Science and Technology , 17, 2 (2022) 343-356.
5. **Baidar, A. W.** ve Kunt, M., Quantum Analog of Some Simpson and Bullen Type Inequalities for Convex Functions, International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME) September 1-3, 2021 -Balıkesir, Turkey.
6. Kunt, M., **Baidar, A. W.** ve ŞANLI, Z., Some Quantum Integral Inequalities Based on Left-Right Quantum Integrals, 10th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences And Applications (IECMSA) 25-27 August 2021 Sakarya, Turkey.