



T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



b- METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA  
TEOREMLERİ

Bekir YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN  
2021  
Her hakkı saklıdır

T.C.  
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

b- METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bekir YILDIRIM

TOKAT  
2021

Her hakkı saklıdır

Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN danışmanlığında, Bekir YILDIRIM tarafından hazırlanan bu çalışma 25 / 01 / 2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK .....



Yukarıdaki sonucu onaylarım  
(İmza)

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ  
Enstitü Müdürü

.... / .... / .....

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bekir YILDIRIM

25/01/2021

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

b- METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bekir YILDIRIM

Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

Bu tez çalışmasında ilk olarak sabit nokta, büzülme dönüşümü gibi temel tanımlar ile Banach sabit nokta teoremi gibi temel sonuçlar verildi. b- metrik uzaylarla ilgili genel tanım ve teoremler incelendi. Ayrıca bunların inşa ettiği topolojiler verildi. Son olarak b-metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Yapı, Büzülme Dönüşümü, b-Metrik Uzay, Sabit Nokta

## ABSTRACT

M. Sc. Thesis

### SOME FIXED POINT THEOREMS IN $b$ - METRIC SPACES

Bekir YILDIRIM

Gaziosmanpasa University  
Graduate Education Institute  
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

In this thesis, the first fixed Banach fixed point with basic definitions such as point, contraction transformation basic results such as the theorem were given.  $b$ - related to metric spaces general definitions and theorems were examined. Also, what they built topologies are given. Finally, some fixed point in  $b$ -metric spaces theorems have been studied.

2021, 45 pages

Keywords: Topological structure, Contractive mapping ,  $b$ -Metric Space, Fixed Point

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ÖZET . . . . .                                                                                                          | i  |
| ABSTRACT . . . . .                                                                                                      | ii |
| ÖNSÖZ . . . . .                                                                                                         | iv |
| ŞİMGİ ve KISALTMALAR . . . . .                                                                                          | v  |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                                                      | 1  |
| 2. KURAMSAL TEMELLER . . . . .                                                                                          | 2  |
| 2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler . . . . .                                                                              | 2  |
| 2.2. $b$ -Metrik Uzaylar . . . . .                                                                                      | 6  |
| 3. BULGULAR . . . . .                                                                                                   | 12 |
| 3.1. $b$ -Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri . . . . .                                                             | 12 |
| 3.2. $b$ - Metrik Uzayda Çoğul Değerli Genelleştirilmiş Büzülme Koşulları İçin<br>Bazı Sabit Nokta Teoremleri . . . . . | 35 |
| 4. SONUÇ VE TARTIŞMA . . . . .                                                                                          | 43 |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                                                     | 44 |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                                                      | 47 |

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan değerli hocam ve tez danışmanım, Dr.Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR'e, eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan başta eşim ve ailem olmak üzere herkese sonsuz teşekkür ederim.

Bekir YILDIRIM

Ocak 2021

## SİMGE ve KISALTMALAR

| Simgeler       | Açıklamalar                        |
|----------------|------------------------------------|
| $\mathbb{R}$   | Reel sayılar kümesi                |
| $\mathbb{R}^+$ | Pozitif reel sayılar kümesi        |
| $\mathbb{Z}$   | Tam sayılar kümesi                 |
| $\mathbb{N}$   | Doğal sayılar kümesi               |
| $\mathbb{N}_0$ | Negatif olmayan tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$   | Rasyonel sayılar kümesi            |
| $\mathbb{C}$   | Kompleks sayılar kümesi            |
| $\infty$       | Sonsuzluk                          |
| $<$            | Küçük                              |
| $\leq$         | Küçük veya eşit                    |
| $>$            | Büyük                              |
| $\geq$         | Büyük veya eşit                    |
| $\neq$         | Eşit değil                         |

## 1. GİRİŞ

Sabit nokta teori çalışmalarının büyük bir kısmı metrik uzaylarda ve metrik uzayların genelleştirmeleri olan uzaylarda yapılmaktadır. Bu teorinin en kullanışlı araçlarından biri 1922 yılında ortaya konmuş olan Banach büzülme prensibidir. 1989 yılında Backhtin  $b$ -Metrik uzay kavramını ortaya atmıştır. 1993 yılında Czerwik  $b$ -metrik uzayın sonuçlarını genişleterek, tek ve çoğul değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri vermiştir. Daha sonra Aydi, Boriceanu, Bata, Chug, Du, Kir, Olaru, Olantinwa, Pacurar, Rao, Rashan ve Shi gibi pek çok araştırmacı Banach sabit nokta teoreminin ve bazı sabit nokta teoremlerinin  $b$ -metrik uzaylardaki genelleştirmelerini vermiştir.

Tezimizin ikinci bölümünde öncelikle sabit nokta tanımı örnekleriyle verilerek, bu teoriyle ilgili temel bazı kavramlar ve  $b$ -metrik uzayların yapısı tanıtılmıştır.

Tezimizin son bölümünde Ćirić tipteki çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ile çoğul değerli genelleştirilmiş bir büzülme dönüşümü için sabit nokta teoremi verilmiştir. Hardy ve Reich 'in sabit nokta teoremleri ile farklı büzülme dönüşümleri için verilmiş olan bazı sonuçların  $b$ -metrik uzaylardaki genelleştirmeleri ele alınmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde tezimizin ileri bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1.1.  $X$  boş kümeden farklı keyfi bir küme olarak alınsın.  $T : X \rightarrow X$  şeklindeki dönüşümün bir sabit noktası

$$T(x) = x$$

olacak şekildeki  $x \in X$  noktasıdır.

Aşağıda vereceğimiz örneklerden de görülebilir ki  $T : X \rightarrow X$  şeklindeki bir  $T$  fonksiyonu hiç sabit noktaya sahip olmayabilir, bir tek sabit noktaya sahip olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 2.1.2.  $X = \mathbb{R}$  yi göz önüne alalım.  $a \neq 0$  olmak üzere

$$T(x) = a + x$$

ile tanımlanan  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  öteleme fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

Örnek 2.1.3.  $X = \mathbb{R}^2$  olsun.  $0 < \beta < 2\pi$  için,

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dönme fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu  $(0, 0)$  noktasıdır.

Örnek 2.1.4.  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  kümesinin her bir elemanı

$$T(x, y) = (x, -y)$$

ile tanımlı  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  yansıma fonksiyonunun sabit noktasıdır. Yani  $T$  fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit noktaya sahiptir.

$I$ ,  $X$  üzerindeki özdeşlik fonksiyonu olsun.  $T : X \rightarrow X$  fonksiyonunun sabit noktalarını bulmak,

$$(T - I)(x) = 0 \quad (2.1)$$

denkleminin çözümlerini bulmak anlamına gelir. Yani bir denklemin çözümünü bulmak demek denkleme karşılık gelen fonksiyonun sabit noktalarını bulmak demektir.

Tanım 2.1.5.  $(X, d)$  metrik uzay ve  $T$ ,  $X$  den  $X$ 'e bir fonksiyon olarak alınsın. Eğer  $X$ 'deki her  $x, y$  elemanı için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir  $0 \leq k < 1$  bulunabilirse  $T$  fonksiyonuna daralma (ya da büzülme) fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.1.6.  $X$  boş olmayan bir küme ve  $T : X \rightarrow X$  bir fonksiyon olsun.

$$T \circ T(x) = T(T(x))$$

ile verilen fonksiyonda  $X$  den  $X$  'e bir fonksiyondur ve  $T$  nin ikinci iterasyonu adını alır.

Genel olarak  $n$  adet  $T$  den elde edilen  $T \circ T \circ T \circ \dots \circ T(x)$ ,  $n$ . iterasyon adını alır. Bu iterasyon

$$T \circ T \circ \dots \circ T(x) = T(T(\dots T(x)\dots))$$

şeklinde tanımlanır ve

$$T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$$

ile gösterilir.

Örnek 2.1.7.  $T(x) = x^2$  ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun üçüncü iterasyonu

$$T^3(x) = T(T(T(x))) = ((x^2)^2)^2 = x^8$$

olarak bulunur.

Örnek 2.1.8.  $T(x) = x^2 - 1$  ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun dördüncü iterasyonu

$$T^4(x) = T(T(T(T(x)))) = (((x^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.9. (Banach Sabit Nokta Teoremi)  $(X, d)$  tam metrik uzay ve  $T : X \rightarrow X$  bir büzülme dönüşümü olsun.

Yani , her  $x, y \in X$  için

$$d(T(x), T(y)) \leq k.d(x, y)$$

olacak şekilde bir  $k \in [0, 1)$  var olsun. Bu durumda  $T$  bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 2.1.10.  $T(x) = x + 1$  ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu ele alırsak

$$|T(x) - T(y)| \leq |x - y| \quad (2.2)$$

olup  $T$  sabit bir noktaya sahip değildir.

Teorem 2.1.11.  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  fonksiyonu her  $x \in (a, b)$  noktasında türevlenebilir olsun.  $T'$  nin  $[a, b]$  üzerinde büzülme dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul

$$|T'(x)| \leq L < 1$$

dır.

Örnek 2.1.12.

$$T(x) = x + 1 - \frac{x}{1 + |x|}$$

ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu düşünürsek

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

olup buradan her  $x < y$  için

$$|T(y) - T(x)| = \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \leq \int_x^y |T'(t)| dt < \int_x^y 1 dt = |y - x|$$

bulunur. O halde herhangi  $x, y$  için kesin bir eşitsizlik olan

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

sağlanır. Bununla birlikte  $T$  herhangi bir sabit noktaya sahip değildir.

Örnek 2.1.13.  $T(x) = x$  ile tanımlı  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu durumda bütün  $x \in \mathbb{R}$  noktaları  $T$  nin sabit noktalarıdır. O halde sabit nokta tek değildir (yani birden fazladır).

Tanım 2.1.14.  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $Y$  herhangi bir küme ve  $P(Y)$ ,  $Y$  nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi olmak üzere

$$T : X \rightarrow P(Y)$$

dönüşümüne çoğul (küme) değerli dönüşüm denir.

Yine

$$T : X \rightarrow P(Y)$$

çoğul değerli dönüşüm olmak üzere  $x \in T(x)$  olacak şekildeki  $x$  noktasına çoğul değerli dönüşümün sabit noktası denir (Soykan , 2016 ).

Örnek 2.1.15.  $X = [0, 1]$  ve  $T : X \rightarrow P(X)$ ,  $x \in X$ ,  $T(x) = [0, \frac{x}{2}]$  küme değerli bir dönüşüm olmak üzere  $x_0 = 0$  dönüşümün sabit noktasıdır (Soykan , 2016 ).

Örnek 2.1.16.  $X = [0, 1]$  ve  $T : X \rightarrow P(X)$

$$T(x) = \begin{cases} (0, \frac{x}{6}), & 0 < x \leq 1, \\ \{1\}, & x = 0, \end{cases}$$

çoğul değerli dönüşümünün hiç bir sabit noktası yoktur (Soykan , 2016 ).

## 2.2. $b$ -Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.17.  $M \neq \emptyset$  bir küme olsun ve  $\mathbb{R}_+$  bütün negatif olmayan reel sayıların kümesini göstereyin.

$\kappa : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  ,  $\forall x, y, z \in M$  ve  $\forall r > 0$  için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bu fonksiyonun  $b$ -metrik olduğu söylenebilir.

$$b_1. x = y \Leftrightarrow \kappa(x, y) = 0$$

$$b_2. \kappa(x, y) = \kappa(y, x)$$

$$b_3. \kappa(x, y) < r \text{ ve } \kappa(x, z) < r \text{ iken } \kappa(y, z) < 2r$$

Bu durumda  $(M, \kappa)$   $b$ -metrik uzay olarak adlandırılır (Czerwik , 1993 ).

Lemma 2.2.18.  $(b_3)$  şartı ile  $\forall x, y, z \in M$  ve  $\forall r > 0$  için

$$b_4. \kappa(x, y) \leq r \text{ ve } \kappa(x, z) \leq r \text{ iken } \kappa(y, z) \leq 2r$$

eşdeğerdir .

$\forall x, y, z \in M$  için aşağıdaki

$$b_5. \kappa(y, z) \leq 2\kappa(x, y) + 2\kappa(x, z)$$

şartını düşünelim.

Elbette ki  $(b_5)$  şartı  $(b_3)$  şartından daha zayıf bir şarttır. Bu sonuç üzerinden  $(b_1), (b_2)$  ve  $(b_5)$  şartlarının sağlanması durumunda  $\kappa : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  fonksiyonunun bir  $b$ -metrik olduğu söylenecektir.  $T : M \rightarrow M$  için  $T$ -nin  $n$ . iterasyonu  $T^n$  ile gösterilecektir (Czerwik , 1993 ).

Tanım 2.2.19.

$M \neq \emptyset$  bir küme ,  $s \geq 1, s \in \mathbb{R}$  olsun.  $\kappa : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  ,  $\forall x, y, z \in M$  için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyonun  $b$ -metrik olduğu söylenebilir;

$$b_1. \kappa(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$b_2. \kappa(x, y) = \kappa(y, x)$$

$$b_3. \forall x, y, z \in M, \kappa(x, z) \leq s[\kappa(x, y) + \kappa(y, z)]$$

Bu durumda  $(M, \kappa)$   $b$ -metrik uzay olarak adlandırılır (Czerwik , 1998 ) .

NOT

Yukarıdaki tanımlardan  $b$ -metrik uzayın metrik uzaydan daha genel olduğu açıktır.

Burada  $s=1$  almakla standart metrik kavramı elde edilir.

Şimdi  $b$ -metrik uzayın bazı örneklerine bakalım.

Örnek 2.2.20.

$$\ell_q = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty \right\}, \kappa : \ell_q \times \ell_q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(x, y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

olmak üzere  $\ell_q (0 < q < 1)$  uzayını düşünelim.

Burada  $x = x_n, y = y_n \in \ell_q$  alıp bir hesap yapılırsa

$$\kappa(x, z) \leq 2^{\frac{1}{q}} [\kappa(x, y) + \kappa(y, z)]$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$s = 2^{\frac{1}{q}} > 1$$

olarak alınırsa  $(\ell_q, \kappa)$  nın bir  $b$ -metrik uzayı olduğu görülür (Berinde , 1993).

Örnek 2.2.21. Tüm  $x(t), t \in [0, 1]$  reel fonksiyon uzayı

$$\int_0^1 |x(t)|^q dt < \infty$$

olacak şekilde  $L_q (0 < q < 1)$  'dır.

Örneğin,  $\forall x, y \in L_q[0, 1]$  için

$$\kappa(x, y) = \left( \int_0^1 |x(t) - y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

alınırsa,

$b$ –metrik uzayını ortaya koymuş oluruz. Burada  $s$  sabiti bir önceki örnekte olduğu gibi  $2^{\frac{1}{q}}$  dir (Berinde , 1993).

Örnek 2.2.22. (Agarwal ve ark. 2016) e göre ,  $M = \{0, 1, 2\}$  ve

$$\kappa(2, 0) = \kappa(0, 2) = m \geq 2$$

$$\kappa(0, 1) = \kappa(1, 2) = \kappa(1, 0) = \kappa(2, 1) = 1$$

ve

$$\kappa(0, 0) = \kappa(1, 1) = \kappa(2, 2) = 0$$

olsun. O halde  $\forall x, y, z \in M$  için

$$\kappa(x, y) \leq \frac{m}{2} [\kappa(x, z) + \kappa(z, y)]$$

dır. Ancak  $m > 2$  olursa üçgen eşitsizliği sağlanmaz.

Şimdi , Cauchy dizisi, yakınsak dizi tanımları ve tam  $b$ –metrik uzay kavramını verelim.

Tanım 2.2.23.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ – metrik uzay olmak üzere  $M$  de ki  $\{x_n\}$  dizisi için

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n(\varepsilon), \kappa(x_n, x_m) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa  $\{x_n\}$  Cauchy dizisidir.

$$(ii) \quad x \in M$$

olmak üzere

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \ni \quad n \geq n(\varepsilon), \quad \kappa(x_n, x) < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa  $\{x_n\}$  yakınsak bir dizidir (Mishra ve ark. 2014 ).

Tanım 2.2.24.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ –metrik uzay olmak üzere  $L \subset M$  alalım.

(i)  $L$  kompakttır ancak ve ancak  $L'$  nin elemanlarının bütün dizileri için  $L$  nin bir elemanına yakınsayan bir alt dizi varsa

(ii)  $L$  kapalıdır ancak ve ancak  $L'$  de ki bir  $x$  noktasına yakınsayan her bir  $\{x_n\}$  dizisi için  $x \in L$  oluyorsa (Mishra ve ark. 2014 ).

Tanım 2.2.25. Bir  $b$ -metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa  $b$ -metrik uzay tamdır (Mishra ve ark. 2014 ).

Tanım 2.2.26.

$$(i) P(M) = \{N \subseteq M : N \neq \emptyset\}$$

kümesi  $M$  nin boştan farklı alt kümelerinin ailesidir.

$$(ii) diam : P(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, diam(N) = \sup \{\kappa(a, b) : a, b \in N\}$$

$N$  nin çapı olmak üzere

$$P_b(M) := \{N \in P(M) \mid diam(N) < \infty\},$$

$M$  nin sınırlı alt kümelerinin ailesidir.

$$(iii) P_{cp}(M) := \{N \in P(M) \mid N \text{ Kompakt}\}$$

$M$  nin kompakt alt kümelerinin ailesidir.

$$(iv) P_{cl}(M) = \{N \in (P(M) \mid N \text{ Kapalı})\}$$

$M$  nin kapalı alt kümelerinin ailesidir.

$$P_{b,cl}(M) = P_b(M) \cap P_{cl}(M)$$

$M$  nin hem kapalı hem sınırlı alt kümelerinin ailesidir (Boriceanu , 2009 ).

Tanım 2.2.27. (i)  $D : P(M) \times P(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ,

Herhangi  $A, B \subset M$ ,

$$D(A, B) = \inf \{\kappa(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

$D$  fonksiyonu  $A$  ve  $B$  kümelerinin uzaklığı adını alır.

$$x_0 \in M \text{ ise } D(x_0, B) := D(\{x_0\}, B)$$

$x_0$  in  $B$  ye uzaklığıdır.

$$(ii) H : P(M) \times P(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Herhangi  $A, B \subset M$ ,

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} D(x, B), \sup_{y \in B} D(A, y) \right\},$$

olup burada  $H$  (Genelleştirilmiş) Pompeiu-Hausdorff fonksiyonu adını alır.

NOT :  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay olsun.  $F : M \rightarrow P(M)$  çoğul değerli dönüşüm ise  $FixF$  ile  $F$  fonksiyonunun sabit nokta kümesini göstereceğiz.

Yani  $SFixF = \{x \in M \mid \{x\} = F(x)\}$  olur (Czerwik , 1998 ).

Lemma 2.2.28.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $A, B \in P(M)$  olsun.  $\eta \in \mathbb{R}$  olduğunu düşünürsek  $\eta > 0$  öyleki:

$$(i) \forall a \in A, b \in B \ni \kappa(a, b) < \eta;$$

$$(ii) \forall b \in B, a \in A \ni \kappa(a, b) \leq \eta$$

dır. Bu yüzden,  $H(A, B) \leq \eta$  (Petruşel, 2007 ).

Lemma 2.2.29.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay  $A \in P(M)$  ve  $x \in M$  olsun.  $x \in \bar{A}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\kappa(x, A) = 0$  olur (Petruşel, 2007 ).

Lemma 2.2.30.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay olsun. Böylece,  $\forall x, y \in M, A \subset M$ ,

$$D(x, A) \leq s[\kappa(x, y) + D(y, A)]$$

dır (Czerwik , 1998 ).

Lemma 2.2.31.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $\{x_k\}_{k=0}^n \subset M$  olsun. Böylece

$$\kappa(x_n, x_0) \leq s\kappa(x_0, x_1) + \dots + s^{n-1}\kappa(x_{n-2}, x_{n-1}) + s^{n-1}\kappa(x_{n-1}, x_n)$$

dır (Czerwik , 1998 ).

Lemma 2.2.32.  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $\forall A, B, C \in P(M)$ ,

$$H(A, C) \leq s[H(A, B) + H(B, C)]$$

vardır (Czerwik , 1998 ).

Lemma 2.2.33. (1)  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $A, B \in P_{cl}(M)$  olsun.

Böylece her bir  $\alpha > 0$  ve tüm  $b \in B, a \in A \ni \kappa(a, b) \leq H(A, B) + \alpha$ ;

(2)  $(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $A, B \in P_{cp}(M)$  olsun.

Böylece  $\forall b \in B, x \in A \ni \kappa(a, b) \leq sH(A, B)$

dır (Czerwik , 1998 ).



### 3. BULGULAR

#### 3.1. $b$ -Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölüm tezimizin ana sonuçlarını içermektedir. Öncelikle teoremlerin ispatında faydalanacağımız bir lemmayı verelim.

Lemma 3.1.34.

$(M, \kappa)$  bir  $b$ -metrik uzay ve  $0 \leq \lambda < 1$  olmak üzere

$$\kappa(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq \lambda \kappa(y_{n+1}, y_{n+2}), n = 0, 1, \dots$$

olacak şekilde  $\{y_n\}$   $M$  içinde bir dizi olsun. Bu durumda eğer  $s\lambda < 1$  ise  $\{y_n\}$   $M$  de bir Cauchy dizisidir (Mishra ve ark. 2014 ).

Teorem 3.1.35.  $(M, \kappa)$  bir tam  $b$ -metrik uzay olsun ve  $T : M \rightarrow M$  dönüşümü

$$\kappa[T(x), T(y)] \leq \varphi[\kappa(x, y)], x, y \in M \quad (3.1)$$

koşulunu sağlasın. Burada  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  fonksiyonu her biri sıfırdan büyük sabit sayı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$$

olacak şekilde artan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,  $T$  kesin olarak bir  $u$  sabit noktasma sahiptir ve  $\forall x \in M$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa[T^n(x), u] = 0$$

dır.

İspat .  $x \in M$  ve  $\epsilon > 0$  alalım.  $\varphi^n(\epsilon) < 4^{-1}$  olacak şekilde bir  $n$  doğal sayısını düşünelim.  $F = T^n$  alalım ve  $k \in \mathbb{N}$  için  $x_k = F^k(x)$  yazalım. O halde  $x, y \in M$  ve  $\alpha = \varphi^n$  için şunu elde ederiz:

$$\kappa[F(x), F(y)] \leq \varphi^n[\kappa(x, y)] = \alpha[\kappa(x, y)] \quad (3.2)$$

Bu yüzden  $k \in \mathbb{N}$  için de  $(k \rightarrow \infty)$  iken

$$\kappa(x_{k+1}, x_k) \rightarrow 0$$

dır.

$$\kappa(x_{k+1}, x_k) < \epsilon.4^{-1}$$

olacak şekilde bir  $k$  doğal sayısı alalım. O halde

$$z \in K(x_k, \epsilon) := \{y \in M : \kappa(x_k, y) \leq \epsilon\}$$

için şunu elde ederiz.

$$\kappa[F(z), F(x_k)] \leq \alpha[\kappa(x_k, z)] \leq \alpha(\epsilon) = \varphi^n(\epsilon) < \epsilon.4^{-1}$$

Bu nedenle

$$\kappa[F(x_k), x_k] \leq 2(\epsilon.4^{-1} + \epsilon.4^{-1}) = \epsilon$$

dır. Sonuç olarak  $m, s \geq K$  için

$$\kappa(x_m, x_s) \leq 4\epsilon$$

dır ve  $\{x_k\}$  dizisi bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan bu yüzden  $(k \rightarrow \infty)$  iken  $x_k \rightarrow u$  olacak şekilde  $u \in M$  vardır. Öte yandan  $F$  nin sürekliliğinden (3.2)

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{k+1}) = F(u)$$

dır. Başka bir ifadeyle  $u$ ,  $F$  nin bir sabit noktasıdır.  $\forall t > 0$ ,

$$\alpha(t) = \varphi^n(t) < t$$

olduğundan dolayı  $F$  kesin olarak bir sabit noktaya sahiptir.

Dahası  $T$  nin sürekliliğinden(3.1)

$$T(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} T[F^k(x)] = \lim_{t \rightarrow \infty} F^k(T(x)) = u$$

elde ederiz ve  $u$  aynı zamanda  $T$  nin de bir sabit noktasıdır. (3.1) den açıktır ki böyle noktalar bir tektir.

$\forall x \in M$  ve  $\forall r = 0, 1, \dots, n-1$  ( $k \rightarrow \infty$ ) iken

$$T^{n_k+r}(x) = F^k [T^r(x)] \rightarrow u$$

olduğundan dolayı  $\forall x \in M$  için de ( $m \rightarrow \infty$ ) iken  $T^m(x) \rightarrow u$  dır. Bu bizim teoremimizin ispatını tamamlar.

Sıradan metrik uzayların benzer sonuçları(Granas, 1982 ) de bulunmaktadır.

(Czerwik , 1993 ) .

Teorem 3.1.36.  $Z$  bir topolojik uzay ve  $(M, \kappa)$  de bir tam  $b$ -metrik uzay olsun.

$T : M \times Z \rightarrow M$  sürekli fonksiyon olsun.  $\forall z \in Z$  ve  $\forall x, y \in M$ ,

$$\kappa[T(x, z), T(y, z)] \leq \alpha \kappa(x, y) \quad (3.3)$$

koşulunu sağlasın. Burada  $0 \leq \alpha < 1$  dir. O halde her bir  $z \in Z$  için  $T$  nin bir tek  $x(z)$  sabit noktası vardır. Başka bir ifadeyle

$$T[x(z), z] = x(z)$$

olup  $z \rightarrow x(z)$  fonksiyonu  $Z$  de süreklidir.

İspat .  $n = 1, 2, \dots$  için

$$T^1(x, z) = T(x, z), T^{n+1} = T[T^n(x, z), z]$$

olsun.

$\alpha^n < 2^{-1}$  olacak şekilde bir  $n$  sayısı alalım.

Yukarıdaki teoremden dolayı  $\forall z \in Z$  için  $T^n$  kesin olarak bir  $x(z)$  sabit noktasına sahiptir.

$$T[x(z), z] = T[T^n(x(z), z), z] = T^n[T(x(z), z), z]$$

eşitliğine sahip olduğumuz için aynı zamanda  $T[x(z), z]$  ,  $T^n$  nin bir sabit noktasıdır. Ama eşitsizlik açısından baktığımızda,

$$T[x(z), z] = x(z)$$

elde ederiz. Yani,  $x(z)$ ,  $T$  nin sabit bir noktasıdır.

(3.3) e göre  $\forall x \in Z$  için  $T$  nin tek bir sabit noktaya sahip olduğu ispatlanabilir. Şimdi,  $\epsilon > 0$  verilsin. Bu durumda  $T$  nin sürekli olmasından  $T^n$  nin de sürekli olduğu söylenebilir.  $z_2 \in Z$  keyfi bir nokta olsun. Bu yüzden aşağıdaki gibi  $z_2$  nin bir  $U$  komşuluğu vardır.  $\forall z_1 \in U$  için

$$\kappa[T^n(z_2), z_1], T^n(x(z_2), z_2) \leq \epsilon \cdot 2^{-1}(1 - 2\alpha^n)$$

dır. Bu nedenle  $z_1 \in U$  için

$$\begin{aligned} \kappa[x(z_1), x(z_2)] &= \kappa[T^n(x(z_1), z_1), T^n(x(z_2), z_2)] \\ &\leq 2\kappa[T^n(x(z_1), z_1), T^n(x(z_2), z_1)] + 2\kappa[T^n(x(z_2), z_1), T^n(x(z_2), z_2)] \\ &\leq 2\alpha^n \kappa[x(z_1), x(z_2)] + \epsilon(1 - 2\alpha^n) \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak  $U$  nun  $z_1$  elemanı için

$$\kappa[x(z_1), x(z_2)] \leq \epsilon$$

dır. Bu ise  $x$  in sürekliliğini sağlar ve teoremin ispatını tamamlar (Czerwik , 1993 ).

Teorem 3.1.37.  $\alpha : (0, \infty) \rightarrow [0, 2^{-1})$  azalan bir fonksiyon olsun.  $(M, \kappa)$  bir tam  $b$ -metrik uzay ve

$$T : M \rightarrow M, \forall x, z \in M, x \neq z$$

için

$$\kappa[T(x), T(z)] \leq \alpha[\kappa(x, z)](\kappa[x, T(x)] + \kappa[z, T(z)]) \quad (3.4)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer  $T$  sürekli ya da  $\alpha$  sabit bir fonksiyon ise  $T$  bir tek  $u \in M$  sabit bir noktasına sahiptir ve  $\forall x \in M$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa[T^n(x), u] = 0$$

dır.

İspat .

$$y_n := \kappa[T^n(x), T^{n+1}(x)], n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere  $x \in M$  olsun.  $y_n \neq 0$  olduğunu varsayalım. O halde (3.4) den

$$y_{n+1} \leq \alpha(y_n)(y_n + y_{n+1}) \leq 2^{-1}(y_n + y_{n+1})$$

elde ederiz.

Bu nedenle,  $y_{n+1} \leq y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  dır.

Böylece  $y_n$  artan bir dizidir.

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

olsun. Bu durumda  $y = 0$  olduğunu ispatlayacağız.

$y > 0$  olduğunu varsayalım. O halde ,

$$y_{n+1} \leq \alpha(y)(y_n + y_{n+1})$$

dır ve sonuç olarak

$$y \leq 2\alpha(y)y$$

dır. Ancak bu sonuç  $\alpha(y) < 2^{-1}$  olduğundan dolayı imkansızdır. Bu ise  $y = 0$  olduğunu ispatlar. Şimdi,  $\{y_n\}$  nin her  $z \in M$  için bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz.

(3.4) dan  $m, n \in M$  için

$$\kappa[T^n(x), T^m(x)] \leq \frac{1}{2}(\kappa[T^{n-1}(x), T^n(z)] + \kappa[T^{m-1}(x), T^m(x)])$$

elde ederiz.

Burada  $m, n \geq n_0$  için bir  $n_0$  sayısı vardır öyleki

$$\kappa[T^{n-1}(x), T^n(x)] < \epsilon$$

ve

$$\kappa[T^{m-1}(x), T^m(x)]$$

dır. Bu yüzden  $\forall m, n \geq n_0$  için

$$\kappa[T^n(x), T^m(x)] < \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) = \epsilon$$

dır.

Böylece  $\{y_n\}$  bir Cauchy dizisidir ve  $M$  nin tamlığından  $T^n(x) \rightarrow u$  olacak şekilde bir  $u \in M$  vardır. Bunu  $T(u) = u$  ile de kontrol edebiliriz. Gerçekten aşağıdaki denklemle de bunu sağlamış oluruz.

$$\kappa[u, T(u)] \leq 2\kappa[u, T^{n+1}(x)] + 2\kappa[T^{n+1}(x), T(u)]$$

dır.

Eğer  $T$  süreklirse o zaman  $n \rightarrow \infty$  iken eşitsizliğin sağ tarafı sifıra yakındır ve  $T(u) = u$  sağlanır. Öte yandan eğer  $\alpha$  bir sabit sayı ise o halde

$$\kappa[u, T(u)] \leq 2\kappa[u, T^{n+1}(x)] + 2\alpha[\kappa[T^n(x), T^{n+1}(x)] + \kappa[u, T(u)]]$$

$$\leq 2\kappa[u, T^{n+1}(x)] + 2\alpha y_n + 2\alpha\kappa[u, T(u)]$$

dır.

$u \rightarrow \infty$  olduğunda

$$\kappa[u, T(u)] \leq \alpha\kappa[u, T(u)]$$

elde ederiz.

Yani,

$$\kappa[u, T(u)] = 0$$

dır.

Teoremin son bölümünü ispatlamak için

$$T(u_1) = u_1, T(u_2) = u_2, u_1 \neq u_2, u_1, u_2 \in M$$

olduğunu kabul edelim.

Böylece

$$\begin{aligned} \kappa(u_1, u_2) &= \kappa[T(u_1), T(u_2)] \\ &\leq \alpha[\kappa(u_1, u_2)](\kappa[u_1, T(u_1)] + \kappa[u_2, T(u_2)]) = 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Bu  $u_1 = u_2$  olup ispatın tamamlandığını gösterir (Zamfirescu , 1972 ).

Örnek 3.1.38.  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{5}, & x = 1 \end{cases}$$

olsun. O halde  $x, z \in [0, 1)$  için,

$$|T(x) - T(z)| \leq \frac{1}{3}(|x - T(x)| + |z - T(z)|)$$

dır. Yani  $T$ , (3.4) koşulunu sağlar. Ama  $T$  sürekli değildir.

Teorem 3.1.39.  $(M_i, \kappa_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$   $b$ -metrik uzaylarının tam olduğunu düşünelim.

$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  olsun ve

$$\kappa : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+, \kappa(x, z) = \sum_{i=1}^n r_i \kappa_i(x_i, z_i) \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Burada  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,

$z = (z_1, \dots, z_n)$  ve  $r_i, i = 1, 2, \dots, n$  için negatif olmayan reel sayılardır. Bu durumda

$\forall x, z \in M$  için

$$\kappa(x, z) = 0 \Leftrightarrow x = z$$

ve

$$\kappa(x, z) = \kappa(z, x)$$

olduğu kolayca görülebilir. Dahası  $x, y, z \in M$  için

$$\kappa(x, z) \leq \sum_{i=1}^n 2r_i[\kappa_i(x_i, y_i) + \kappa_i(y_i, z_i)] = 2\kappa(x, y) + 2\kappa(y, z)$$

elde ederiz ki bu  $\forall x, y, z \in M$  için

$$\kappa(x, z) \leq 2\kappa(x, y) + 2\kappa(y, z)$$

eşitsizliğini verir. Bunun anlamı  $\kappa$  fonksiyonunun  $M$  de bir  $b$ -metrik olmasıdır. Bütün  $(M_i, \kappa_i), i = 1, 2, \dots, n$  uzayları tam ise o halde  $(M, \kappa)$  uzayı da bir  $b$ -metrik  $\kappa$  fonksiyonuna göre tamdır.

(Czerwik , 1993 ).

Bu sonuçları kullanarak dönüşümlerin sistemleri için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.40.  $(M_i, \kappa_i), i = 1, 2, \dots, n$  tam  $b$ -metrik uzaylar olsun.  $a_{i,k}, i, k = 1, 2, \dots, n$  negatif olmayan reel sayılar olsun öyleki  $\pi_i : M \rightarrow M_i, i = 1, 2, \dots, n$  dönüşümleri

$\forall x = (x_1, \dots, x_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in M$  için

$$\kappa_i[T_i(x), T_i(z)] \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k} \kappa_k(x_k, z_k) \quad (3.6)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Öte yandan  $[a_{i,k}]_{i,k=1}^n$  matrisinin karakteristik köklerinin mutlak değerleri 1 den daha küçük ise o halde,

$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, i = 1, 2, \dots, n$  denklem sistemi,

$$u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^s, i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

olmak üzere kesin olarak bir  $u = (u_1, \dots, u_n) \in M$  çözümüne sahiptir. Burada  $i = 1, 2, \dots, n$  keyfi sabitler olmak üzere  $x_i \in M_i$ ,

$$x_i^{s+1} = \pi_i(x_i^s, \dots, x_n^s), i = 1, \dots, n, s = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

İspat . Perron nun teoreminden (Gantmacher , 1966 )

$$\sum_{i=1}^n r_i \alpha_{i,k} < r_k, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

eşitsizlik sistemini sağlayan pozitif  $r_i, i = 1, 2, \dots, n$  sayılarının var olduğu sonucuna ulaşabiliriz ( Czerwik , 1980 ) ve (Matkowski , 1975 ).

$$v : \max_{k \in \{1, \dots, n\}} (r_k^{-1} \sum_{i=1}^n r_i \alpha_{i,k} < r_k)$$

alırsak O halde (3.9) dan

$$0 \leq v \leq 1 \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \alpha_{i,k} < r_k \leq v.r_k, k = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

anlamına gelir.

$\kappa$ , (3.5) formülüne göre tanımlansın. O halde,  $(M, \kappa)$  nin tam bir  $b$ -metrik uzayı olduğu görülür. Şimdi  $x \in M$  için

$$T(x) = (T_1(x), \dots, T_n(x))$$

şeklinde tanımlı  $T : M \rightarrow M$  dönüşümünü ele alalım. Bu durumda  $T$  nin bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten  $\forall x, z \in M$ , (3.5), (3.6), ve (3.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \kappa[T(x), T(z)] &= \sum_{i=1}^n r_i \kappa_i[\pi_i(x), \pi_i(z)] \leq \sum_{i=1}^n r_i \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \kappa_k(x_k, z_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n r_i \alpha_{i,k} \right) \kappa_k(x_k, z_k) = \sum_{i=1}^n v r_k \alpha_{i,k} \kappa_k(x_k, z_k) = v \kappa(x, z) \end{aligned}$$

elde ederiz.

(3.10) i hesaba katar ve  $\varphi(t) = v.t$  için Teorem 3.1.35 i uygularsak iddiayı elde ederiz ( Czerwik , 1993 ).

Teorem 3.1.41.  $(M, \kappa)$  tam metrik uzay olsun ve  $T : M \rightarrow M$  fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlasın.

$$\kappa(T(x), T(y)) \leq \alpha\kappa(x, T(x)) + \beta\kappa(y, T(y)) + \gamma\kappa(x, y)$$

$\forall x, y \in M$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  negatif olmayan ve  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  i sağlar. O halde  $T$  tek bir sabit noktaya sahiptir (Reich, 1971).

Teorem 3.1.42.  $(M, \kappa)$  bir tam  $b$ -metrik uzay olsun ve  $T : M \rightarrow M$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\kappa(T(x), T(y)) \leq \alpha\kappa(x, T(x)) + \beta\kappa(y, T(y)) + \gamma\kappa(x, y)$$

$\forall x, y \in M$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  negatif olmayan reel sayılardır ve  $s \geq 1$  için  $\alpha + s(\beta + \gamma) < 1$  şartı sağlanırsa  $T$  nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat .

$x_0 \in M$  ve  $\{x_n\}$ ,  $M$  de bir dizi olsun. Öyle ki  $x_n = T_{x_{n-1}} = T^n x_0$  dır.

Şimdi,

$$\kappa(x_{n+1}, x_{n-1}) = \kappa(Tx_n, Tx_{n-1})$$

$$\leq \alpha\kappa(x_n, T(x_n)) + \beta\kappa(x_{n-1}, T(x_{n-1})) + \gamma\kappa(x_n, x_{n-1})$$

$$= \alpha\kappa(x_n, x_{n+1}) + \beta\kappa(x_{n-1}, x_n) + \gamma\kappa(x_n, x_{n-1})$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)\kappa(x_{n+1}, x_n) \leq (\beta + \gamma)\kappa(x_n, x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \kappa(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{(\beta + \gamma)}{(1 - \alpha)}\kappa(x_n, x_{n-1}) = \kappa\kappa(x_n, x_{n-1})$$

Bu aşamaları kolay bir şekilde aşağıdaki sonuç üzerinden de yorumlayabiliriz.

$$\kappa(x_{n+1}, x_n) \leq \kappa^n \kappa(x_0, x_1)$$

Sonuçta T bir büzölme dönüşümüdür. Simdi elde ettiğimiz bu sonuçla  $\{x_n\}$  nin M üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$m, n > 0, \quad m > n$  olsun.

$$\begin{aligned}
\kappa(x_n, x_m) &\leq s[\kappa(x_n, x_{n+1}) + \kappa(x_{n+1}, x_m)] \\
&\leq s\kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2\kappa(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3\kappa(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots \\
&\leq s\kappa^n\kappa(x_0, x_1) + s^2\kappa^{n+1}\kappa(x_0, x_1) + s^3\kappa^{n+2}\kappa(x_0, x_1) + \dots \\
&\leq s\kappa^n\kappa(x_0, x_1)[1 + s\kappa + (s\kappa)^2 + (s\kappa)^3 + \dots] \\
&= \frac{s\kappa^n}{1 - s\kappa}\kappa(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

dır. Şimdi lemma 3.1.34 ü kullanarak ve  $n \rightarrow \infty$  alarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n, x_m) = 0$$

elde ederiz.

$\{x_n\}$  M üzerinde Cauchy dizisidir. M kapalı olduğundan dolayı  $\{x_n\}$   $x^*$  a yakınsaktır. Şimdi,  $x^*$  ın T nin sabit bir noktası olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\kappa(x^*, T(x^*)) &\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \kappa(x_n, T(x^*))] \\
&\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \kappa(T(x_{n-1}), T(x^*))] \\
&\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \alpha\kappa(x^*, T(x^*)) + \beta\kappa(x_{n-1}, T(x_{n-1})) + \gamma\kappa(x_{n-1}, x^*)] \\
(1 - \alpha s)\kappa(x^*, T(x^*)) &\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \beta\kappa(x_{n-1}, x_n) + \gamma\kappa(x_{n-1}, x^*)]
\end{aligned}$$

$$\kappa(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s}{(1 - \alpha s)} [\kappa(x^*, x_n) + \beta \kappa(x_{n-1}, x_n) + \gamma \kappa(x_{n-1}, x^*)]$$

$$\leq [\kappa(x^*, x_n) + \beta \kappa^n(x_0, x_1) + \gamma \kappa(x_{n-1}, x^*)]$$

dır.  $n \rightarrow \infty$  alırsak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x^*, T(x^*)) = 0$$

$$\Rightarrow x^* = T(x^*)$$

$$\Rightarrow x^*$$

T nin sabit bir noktasıdır.

Simdi sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim. x ve y, T nin iki sabit noktası olsun.

$$\Rightarrow x = T(x), y = T(y)$$

$$\kappa(x, y) = \kappa(T(x), T(y)) \leq \alpha \kappa(x, T(x)) + \beta \kappa(y, T(y)) + \gamma \kappa(x, y)$$

$$\Rightarrow \kappa(x, y) \leq \gamma \kappa(x, y)$$

dır. Yani bir çelişkidir . Bu sayede ispat tamamlanmış olur (Mishra ve ark. 2014 )

Şimdi Hardy ve Rogers tarafından metrik uzaylarda verilmiş olan aşağıdaki teoremi ve bunun  $b$ -metrik uzaylardaki genelleştirilmesinden bahsedelim.

Teorem 3.1.43.  $(M, \kappa)$  bir metrik uzay ve  $T : M \rightarrow M$  aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in M$  ve  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$\kappa(Tx, Ty) \leq \alpha \kappa(x, Tx) + \beta \kappa(y, Ty) + \gamma \kappa(x, Ty) + \delta \kappa(y, Tx) + \epsilon \kappa(x, y)$$

alalım.

a)  $(M, \kappa)$  bir tam metrik uzay ve  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon < 1$  ise T birtek sabit noktaya sahiptir.

b) Eğer  $x \neq y$  iken

$$\kappa(Tx, Ty) \leq \alpha\kappa(x, Tx) + \beta\kappa(y, Ty) + \gamma\kappa(x, Ty) + \delta\kappa(y, Tx) + \epsilon\kappa(x, y)$$

şartı sağlanırsa ve M kompakt olursa T sürekli ve  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$  olması durumunda T birtek sabit noktaya sahiptir(Hardy ve Rogers , 1973 ).

Teorem 3.1.44.  $(M, \kappa)$  tam bir  $b$ - metrik uzay ve  $T: M \rightarrow M$  fonksiyonu  $\forall x, y \in M$ , aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$\kappa(Tx, Ty) \leq \alpha\kappa(x, Tx) + \beta\kappa(y, Ty) + \gamma\kappa(x, Ty) + \delta\kappa(y, Tx) + \epsilon\kappa(x, y) \quad (3.12)$$

Burada  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  negatif olmayan ve  $s \geq 1$  olmak üzere  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon \in (0, \frac{1}{2s})$  alınsın. Bu durumda T birtek sabit noktaya sahiptir(Mishra ve ark. , 2014).

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.45. T , M nin kendi üzerinde herhangi bir dönüşümü olsun.  $(M, \kappa)$  nın (3.12) şartının sağlandığını varsayalım. O halde Eğer  $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon \in (0, \frac{1}{2s})$  ise  $\lambda < \frac{1}{2s}$  vardır. Öyleki,

$$\kappa(Tx, T^2x) \leq \lambda\kappa(x, Tx) \quad (3.13)$$

dir.

İspat

$y = Tx$  olsun. (3.12) ve

$$\kappa(Tx, T^2x) \leq \frac{\alpha + \epsilon}{1 - \beta}\kappa(x, Tx) + \frac{\gamma}{1 - \beta}\kappa(x, T^2x) \quad (3.14)$$

sağlasın. Şimdi (3.14) de ki

$$\kappa(x, T^2x) \leq s[\kappa(x, Tx) + \kappa(Tx, T^2x)]$$

üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{1}{s}\kappa(T^2x, x) - \kappa(Tx, x) \leq \frac{\alpha + \epsilon}{1 - \beta}(x, Tx) + \frac{\gamma}{1 - \beta}\kappa(x, T^2x)$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise daha basit olarak;

$$\kappa(T^2x, x) \leq \frac{(1 + \alpha + \epsilon - \beta)s}{1 - \beta - \gamma.s}\kappa(x, Tx) \quad (3.15)$$

olarak gösterilir. Şimdi (3.15) den (3.14) e kadar olan alt kümelerin eşitsizliği için

$$\kappa(Tx, T^2x) \leq \left( \frac{\alpha + \epsilon + \gamma.s}{1 - \beta - \gamma.s} \right) \kappa(x, Tx) \quad (3.16)$$

elde edelim. Bunun simetrisini kullanarak (3.16) da ki  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  nın değişimlerini görebiliriz.

$$\kappa(Tx, T^2x) \leq \left( \frac{\beta + \epsilon + \delta.s}{1 - \beta - \delta.s} \right) \kappa(x, Tx) \quad (3.17)$$

ve o halde

$$\lambda = \min \left( \frac{\alpha + \epsilon + \gamma.s}{1 - \beta - \gamma.s}, \frac{\beta + \epsilon + \delta.s}{1 - \beta - \delta.s} \right) \quad (3.18)$$

olup lemma'nın ispatı tamamlanır(Hardy ve Rogers , 1973 ).

İspat .  $x_0 \in M$  ve  $\{x_n\}$  M de bir dizi olsun öyleki  $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$  dır. Şimdi Lemma 3.1.45 i kullanarak

$$\kappa(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \kappa(x_{n+1}, x_0)$$

gösterebiliriz. Buradan da  $\{x_n\}$  nin M de bir Cauchy dizisi olduğu açıktır.  $m, n > 0$ ,  $m > n$  olsun. O halde

$$\kappa(x_n, x_m) \leq s[\kappa(x_n, x_{n+1}) + \kappa(x_{n+1}, x_m)]$$

$$\leq s\kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2\kappa(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3\kappa(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots$$

$$\leq s\lambda^n\kappa(x_0, x_1) + s^2\lambda^{n+1}\kappa(x_0, x_1) + s^3\lambda^{n+2}\kappa(x_0, x_1) + \dots$$

dır.

$\lim_{n \rightarrow \infty}$  limiti ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n, x_m) = 0$$

dır. Bu takdirde  $\{x_n\}$  M de bir Cauchy dizisidir. M nin tamlığından dolayı  $\{x_n\}$  nin  $x^*$  a yakınsak olduğu sonucuna varırız. Bu durumda  $x^*$  ın T nin sabit noktası olduğunu ortaya koyarız ve burda da

$$\kappa(x^*, T(x^*)) \leq s[\kappa(x^*, x_n) + \kappa(x_n, T(x^*))]$$

$$\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \kappa(T(x_{n-1}), T(x^*))]$$

$$\leq s[\kappa(x^*, x_n) + \alpha\kappa((x_{n-1}, T(x_{n-1})) + \beta\kappa((x^*, T(x^*)) + \gamma\kappa(x_{n-1}, T(x^*))$$

$$+ \delta\kappa(x^*, T(x_{n-1})) + \epsilon\kappa(x_{n-1}, x^*)]$$

$$\Rightarrow \kappa(x^*, T(x^*)) \leq s[\alpha\kappa(x_{n-1}, x_n) + \beta\kappa(x^*, T(x^*)) + \gamma\kappa(x_{n-1}, T(x^*))$$

$$+ (\delta + 1)\kappa(x^*, x_n) + \epsilon\kappa(x_{n-1}, x^*)]$$

elde ederiz.

$\lim_{n \rightarrow \infty}$  limite geçilirse

$$\kappa(x^*, T(x^*)) \leq s(\beta + \gamma)\kappa(x^*, T(x^*))$$

dır.  $x^* = T(x^*)$  olmasıyla çelişir. Şimdi sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim.

x ve y , T nin iki sabit noktası olsun.

$$\Rightarrow x = T(x), y = T(y)$$

$$\kappa(x, y) = \kappa(T(x), T(y))$$

$$\leq \alpha\kappa(x, T(x)) + \beta\kappa(y, T(y)) + \gamma\kappa(x, T(y)) + \delta\kappa(y, T(x)) + \epsilon\kappa(x, y)$$

$$\leq (\gamma + \delta + \epsilon)\kappa(x, y)$$

dır. Elde ettiğimiz bu sonuçlar bir çelişki olduğunu gösterir ve bu sayede ispat tamamlanır (Hardy ve Rogers , 1973 ).

Teorem 3.1.46.  $(M, \kappa)$  tam bir  $b$ -metrik uzayı olsun.

$$T : M \rightarrow M$$

$$\kappa(Tx, Ty) \leq \alpha \max \{ \kappa(x, Tx), \kappa(y, Ty), \kappa(x, y) \} + \beta \{ \kappa(x, Ty) + \kappa(y, Tx) \} \quad (3.19)$$

koşulunu sağlasın. Burada  $\alpha, \beta > 0$  ve  $\forall x, y \in M, \alpha + 2\beta \leq 1, s \geq 1$ 'dir.

O halde ,  $T$  sabit noktaya sahiptir.

$$\text{İspat . } x_0 \in M \text{ ve } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} M \text{ üzerinde } x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlı bir dizi olsun. Şimdi, (3.19) ve (3.20)' e göre aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) = \kappa(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha \max \{ \kappa(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \kappa(x_n, Tx_n), \kappa(x_{n-1}, x_n) \}$$

$$+ \beta \{ \kappa(x_{n-1}, Tx_n) + \kappa(x_n, Tx_{n-1}) \},$$

$$\kappa(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha \max \{ \kappa(x_{n-1}, x_n), \kappa(x_n, x_{n+1}), \kappa(x_{n-1}, x_n) \}$$

$$+ \beta \{ \kappa(x_{n-1}, x_{n+1}) + \kappa(x_n, x_n) \},$$

$$\kappa(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha \max \{ \kappa(x_{n-1}, x_n), \kappa(x_n, x_{n+1}) \} + \beta \{ \kappa(x_{n-1}, x_{n+1}) \},$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \max \{ \kappa(x_{n-1}, x_n), \kappa(x_n, x_{n+1}) \} + s\beta \{ \kappa(x_{n-1}, x_n) + \kappa(x_n, x_{n+1}) \},$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha M_1 + s\beta \{\kappa(x_{n-1}, x_n) + \kappa(x_n, x_{n+1})\} \quad (3.21)$$

dır. Burada,

$$M_1 = \max \{\kappa(x_{n-1}, x_n), \kappa(x_n, x_{n+1})\}$$

dır. Şimdi bu sonuçlara göre aşağıdaki 2 durum ortaya çıkar.

Durum 1:

Eğer,  $M_1 = \kappa(x_n, x_{n+1})$  olduğunu varsayarsak o halde,

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \kappa(x_n, x_{n+1}) + s\beta \{\kappa(x_{n-1}, x_n) + \kappa(x_n, x_{n+1})\},$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \kappa(x_n, x_{n+1}) + s\beta \kappa(x_{n-1}, x_n) + s\beta \kappa(x_n, x_{n+1}),$$

$$(1 - \alpha - \beta s) \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \beta s \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\beta s}{(1 - \alpha - \beta s)} \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k \kappa(x_{n-1}, x_n)$$

Burada,

$$k = \frac{\beta s}{1 - \alpha - \beta s} < 1$$

dır. Bu takdirde

$$\implies \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

$$\implies \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k^2 \kappa(x_{n-2}, x_{n-1}),$$

Bu işlemler

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \kappa(x_0, x_1)$$

elde edene kadar devam eder.

Durum 2:

Eğer,  $M_1 = \kappa(x_{n-1}, x_n)$  olduğunu varsayarsak o halde ,

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \kappa(x_{n-1}, x_n) + s\beta \{ \kappa(x_{n-1}, x_n) + \kappa(x_n, x_{n+1}) \},$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \kappa(x_{n-1}, x_n) + s\beta \kappa(x_{n-1}, x_n) + s\beta \kappa(x_n, x_{n+1}),$$

$$(1 - \beta s) \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha + \beta s) \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(\alpha + \beta s)}{(1 - \beta s)} \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

Burada,

$$k \rightarrow q = \frac{(\alpha + \beta s)}{(1 - \beta s)} < 1$$

dır. Bu takdirde

$$\implies \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k \kappa(x_{n-1}, x_n),$$

$$\implies \kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k^2 \kappa(x_{n-2}, x_{n-1}),$$

Bu işlemler,

$$\kappa(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \kappa(x_0, x_1)$$

elde edene kadar devam eder. Böylece, T bir büzülme dönüşümüdür.

Şimdi,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  nin M üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$m, n \in \mathbb{N}$  ve  $m > n$  olsun.

$$\kappa(x_n, x_m) \leq s \{ \kappa(x_n, x_{n+1}) + \kappa(x_{n+1}, x_m) \},$$

$$\leq s \kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2 \{ \kappa(x_{n+1}, x_{n+2}) + \kappa(x_{n+2}, x_m) \},$$

$$\leq s \kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2 \kappa(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 \kappa(x_{n+2}, x_m),$$

$$\leq s\kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2\kappa(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3\kappa(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots$$

$$sk^n\kappa(x_0, x_1) + s^2k^{n+1}\kappa(x_0, x_1) + s^3k^{n+2}\kappa(x_0, x_1) + \dots$$

$$sk^n\kappa(x_0, x_1)[1 + sk + (sk)^2 + (sk)^3 + \dots],$$

$$\leq \frac{sk^n}{1 - sk}\kappa(x_0, x_1)$$

O halde

$$(m, n \rightarrow \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n, x_m) = 0$$

dır. Çünkü ,

$$(m, n \rightarrow \infty), k < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sk^n}{1 - sk}\kappa(x_0, x_1) = 0$$

dır. Böylece  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  M üzerinde bir Cauchy dizisidir.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  bir Cauchy dizisi olduğu için  $\{x_n\}$   $x^* \in X$  e yakınsaktır.

Şimdi  $x^*$  ın T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$\kappa(x^*, Tx^*) \leq s \{ \kappa(x^*, x_{n+1}) + \kappa(x_{n+1}, Tx^*) \},$$

$$\leq s\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\kappa(Tx_n, Tx^*),$$

$$\begin{aligned} \kappa(x^*, Tx^*) &\leq s\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha \max \{ \kappa(x_n, Tx_n), \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x_n, x^*) \} \\ &\quad + s\beta \{ \kappa(x_n, Tx^*) + \kappa(x^*, Tx_n) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa(x^*, Tx^*) &\leq s\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha \max \{ \kappa(x_n, x_{n+1}), \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x_n, x^*) \} \\ &\quad + s\beta \{ \kappa(x_n, Tx^*) + \kappa(x^*, x_{n+1}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq s\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha \max \{\kappa(x_n, x_{n+1}), \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x_n, x^*)\} \\ &\quad + s^2\beta \{\kappa(x_n, x^*) + \kappa(x^*, Tx^*)\} + s\beta\kappa(x^*, x_{n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - s^2\beta)\kappa(x^*, Tx^*) &\leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) \\ &\quad + s\alpha \max \{\kappa(x_n, x_{n+1}), \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x_n, x^*)\} + s^2\beta\kappa(x_n, x^*), \end{aligned}$$

$$(1 - s^2\beta)\kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha M_2 + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

Burada ,

$$M_2 = \max \{\kappa(x_n, x_{n+1}), \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x_n, x^*)\}$$

dır. Bunu üç durumda gösterelim.

(i)Eğer,

$$M_2 = \kappa(x_n, x_{n+1})$$

olduğunu varsayarsak,

$$(1 - s^2\beta)\kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha\kappa(x_n, x_{n+1}) + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

$$\leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s^2\alpha \{\kappa(x_n, x^*) + \kappa(x^*, x_{n+1})\} + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

$$(1 - s^2\beta)\kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta + \alpha s)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s^2(\alpha + \beta)\kappa(x_n, x^*),$$

$$\kappa(x^*, Tx^*) \leq \frac{s(1 + \beta + \alpha s)}{(1 - s^2\beta)}\kappa(x^*, x_{n+1}) + \frac{s^2(\alpha + \beta)}{(1 - s^2\beta)}\kappa(x_n, x^*)$$

elde ederiz.  $n \rightarrow \infty$  iken limit alırsak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x^*, Tx^*) = 0$$

olur.

$$\implies x^* = Tx^*$$

dır. Bu yüzden  $x^*$  T nin sabit noktasıdır.

(ii)  $M_2 = \kappa(x_n, x^*)$  olduğunu varsayarsak,

$$(1 - s^2\beta) \kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta) \kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha\kappa(x_n, x^*) + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

$$(1 - s^2\beta) \kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta) \kappa(x^*, x_{n+1}) + (s\alpha + s^2\beta) \kappa(x_n, x^*),$$

$$\kappa(x^*, Tx^*) \leq \frac{s(1 + \beta)}{(1 - s^2\beta)} \kappa(x^*, x_{n+1}) + \frac{(s\alpha + s^2\beta)}{(1 - s^2\beta)} \kappa(x_n, x^*)$$

dır.  $n \rightarrow \infty$  iken limit alırsak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x^*, Tx^*) = 0$$

olur. Yani

$$x^* = Tx^*$$

dır. Bu yüzden  $x^*$  T nin sabit noktasıdır.

(iii) Eğer,

$$M_2 = \kappa(x^*, Tx^*)$$

olduğunu varsayarsak,

$$(1 - s^2\beta) \kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s\alpha\kappa(x^*, Tx^*) + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

$$(1 - s\alpha - s^2\beta) \kappa(x^*, Tx^*) \leq s(1 + \beta)\kappa(x^*, x_{n+1}) + s^2\beta\kappa(x_n, x^*),$$

$$\kappa(x^*, Tx^*) \leq \frac{s(1 + \beta)}{(1 - s\alpha - s^2\beta)} \kappa(x^*, x_{n+1}) + \frac{s^2\beta}{(1 - s\alpha - s^2\beta)} \kappa(x_n, x^*)$$

dır.  $n \rightarrow \infty$  iken limit alırsak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x^*, Tx^*) = 0$$

dır. Bu yüzden  $x^*$  T nin sabit noktasıdır.

Şimdi  $x^*$  ın T nin bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim.  $x$  T nin başka bir sabit noktası olsun. Yani

$$Tx' = x' \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \kappa(x^*, x') &= \kappa(Tx^*, Tx') \leq \alpha \max \{ \kappa(x^*, Tx^*), \kappa(x', Tx'), \kappa(x^*, x') \} \\ &\quad + \beta \{ \kappa(x^*, Tx'), \kappa(x', Tx^*) \}, \\ &\leq \alpha \max \{ \kappa(x^*, x^*), \kappa(x', x'), \kappa(x^*, x') \} + \beta \{ \kappa(x^*, x'), \kappa(x', x^*) \}, \\ &\leq \alpha \kappa(x^*, x') + \beta \{ \kappa(x^*, x'), \kappa(x', x^*) \}, \end{aligned}$$

$$\leq \alpha \kappa(x^*, x') + 2\beta \kappa(x^*, x'),$$

$$\kappa(x^*, x') \leq (\alpha + 2\beta) \kappa(x^*, x')$$

Bu çelişkidir. Bu yüzden  $x^* = x'$  dır.

Bu yüzden  $x^*$  bir tek sabit noktadır.

Sonuç:

$(M, \kappa)$  bir tam  $b$ - metrik uzay ve  $T : M \rightarrow M$  bir dönüşüm olsun.  $\alpha, \beta > 0$  olmak üzere

$$\kappa(Tx, Ty) \leq \alpha \{ \kappa(x, Tx) + \kappa(y, Ty) \} + \beta \{ \kappa(x, Ty) + \kappa(y, Tx) \}$$

dır. Örneğin,

$$2\alpha + \beta(2s + 1) < 1$$

ve  $\forall x, y \in X$ ,  $s \geq 1$  dir. O halde  $T$  bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal ve ark. 2016).



### 3.2. $b$ - Metrik Uzayda Çoğul Değerli Genelleştirilmiş Büzülme Koşulları İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.2.47.  $M \neq \emptyset$ ,  $\kappa$  ve  $t$   $M$  de sırasıyla  $k > 1$  ve  $s > 1$  sabitleriyle iki  $b$ -metrik olduğunu ve  $F : M \rightarrow P(M)$  çoğul değerli fonksiyon,

(i)  $(M, \kappa)$  tam bir  $b$ -metrik uzaydır.

(ii)  $\forall x, y \in M, c > 0 \ni \kappa(x, y) \leq c.t(x, y)$

(iii)  $F : (M, \kappa) \rightarrow (P(M), H_\kappa)$  kapalıdır.

(iv)  $\forall x, y \in M, 0 \leq \alpha < \frac{1}{s} \ni H_t(F(x), F(y)) \leq \alpha M_t^F(x, y)$ ,

Burada,

$$M_t^F(x, y) = \max \left\{ t(x, y), D_t(x, F(x)), D_t(y, F(y)), \frac{1}{2}[D_t(x, F(y)) + D_t(y, F(x))] \right\},$$

olduğunu varsayalım. Böylece,

1)  $Fix F \neq \emptyset$

2)  $\forall x \in M$  ve  $\forall y \in F(x)$  için  $(x_n) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki ;

(a)  $x_0 = x, x_1 = y$

(b)  $x_{n+1} \in F(x_n)$ ;

(c)  $x^* \in F(x^*)$  olduğu yerde  $n \rightarrow \infty$  olduğundan  $\kappa(x_n, x^*) \rightarrow 0$  dır.

İspat .  $1 < q < \frac{1}{s\alpha}$  keyfi olsun. Keyfi  $x_0 \in M$  ve  $x_1 \in F(x_0)$  için  $x_2 \in F(x_1)$  vardır

öyleki ;

$$t(x_1, x_2) \leq qH_t(F(x_0), F(x_1)) \leq q\alpha M_t^F(x_0, x_1)$$

Bu yüzden elimizde

$$t(x_1, x_2) \leq$$

$$q\alpha \cdot \max \left\{ t(x_0, x_1), D_t(x_0, F(x_0)), D_t(x_1, F(x_1)), \frac{1}{2}[D_t(x_0, F(x_1)) + D_t(x_1, F(x_0))] \right\}$$

vardır.

$\max = t(x_0, x_1)$  düşünelim.

Bu yüzden elimizde

$$t(x_1, x_2) \leq q\alpha t(x_0, x_1)$$

vardır.

$\max = D_t(x_0, F(x_0))$  olduğunu düşünürsek

$$t(x_1, x_2) \leq q\alpha D_t(x_0, F(x_0)) \leq q\alpha t(x_0, x_1)$$

olur.

$\max = D_t(x_1, F(x_1))$  olduğunu düşünürsek

$$t(x_1, x_2) \leq q\alpha D_t(x_1, F(x_1)) \leq q\alpha t(x_1, x_2)$$

vardır. Bu yüzden

$$t(x_1, x_2) = 0$$

dır. Böylelikle  $x_1 \in Fix F$  dır.

$$\max = \frac{1}{2} [D_t(x_0, F(x_1)) + D_t(x_1, F(x_0))]$$

olduğunu düşünürsek

$$t(x_1, x_2) \leq q\alpha \frac{1}{2} D_t(x_0, F(x_1)) \leq q\alpha \frac{1}{2} t(x_0, x_2) \leq \frac{q\alpha}{2} s [t(x_0, x_1) + t(x_1, x_2)]$$

olur. Bu yüzden

$$t(x_1, x_2) \leq \frac{q\alpha s}{2 - q\alpha s} t(x_0, x_1)$$

bulunur.

$x_2 \in F(x_1)$  için  $x_3 \in F(x_2)$  vardır öyleki

$$t(x_2, x_3) \leq qH_t(F(x_1), F(x_2)) \leq q\alpha M_t^F t(x_1, x_2)$$

$\max = t(x_1, x_2)$  olduğunu düşünürsek

$$t(x_2, x_3) \leq q\alpha t(x_1, x_2) \leq (q\alpha)^2 t(x_0, x_1)$$

olur.

$\max = D_t(x_1, F(x_1))$  olduğunu düşünürsek

$$t(x_2, x_3) \leq q\alpha D_t(x_1, F(x_1)) \leq q\alpha t(x_1, x_2) \leq (q\alpha)^2 t(x_0, x_1)$$

sağlanır.

$\max = D_t(x_2, F(x_2))$  olduğunu düşünürsek

$$t(x_2, x_3) \leq q\alpha D_t(x_2, F(x_2)) \leq q\alpha t(x_2, x_3)$$

dır. Bu yüzden  $t(x_2, x_3) = 0$  ve böylelikle  $x_2 \in \text{Fix} F$  bulunur.

$$\max = \frac{1}{2} [D_t(x_1, F(x_2)) + D_t(x_2, F(x_1))]$$

olduğunu düşünürsek

$$t(x_1, x_2) \leq q\alpha \frac{1}{2} D_t(x_1, F(x_2)) \leq q\alpha \frac{1}{2} t(x_1, x_3) \leq \frac{q\alpha}{2} s [t(x_1, x_2) + t(x_2, x_3)]$$

vardır. Bu yüzden de

$$t(x_2, x_3) \leq \frac{q\alpha s}{2 - q\alpha s} t(x_1, x_2) \leq \left[ \frac{q\alpha s}{2 - q\alpha s} \right]^2 t(x_0, x_1)$$

olur. Tümevarım ile  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini inşa ederiz öyle ki

$$t(x_n, x_{n+1}) \leq \max \left\{ (q\alpha)^n, \left[ \frac{q\alpha s}{2 - q\alpha s} \right]^n \right\} t(x_0, x_1).$$

Şimdi  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayalım.

İlk önce Maksimum  $(q\alpha)^n$  olsun. Böylece,

$$t(x_n, x_{n+p}) \leq s t(x_n, x_{n+1}) + s^2 t(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots +$$

$$+ s^{p-1} t(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^{p-1} t(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq s (q\alpha)^n t(x_0, x_1) + s^2 (q\alpha)^{n+1} t(x_0, x_1) + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& +s^{p-1}(q\alpha)^{n+p-2}t(x_0, x_1) + s^{p-1}(q\alpha)^{n+p-1}t(x_0, x_1) \\
& = s(q\alpha)^n t(x_0, x_1) [1 + sq\alpha + \dots + (sq\alpha)^{p-2} + s^{p-2}(q\alpha)^{p-1}] \\
& \leq s(q\alpha)^n t(x_0, x_1) [1 + sq\alpha + \dots + (sq\alpha)^{p-2} + s^{p-2}(q\alpha)^{p-1}] \\
& = s(q\alpha)^n t(x_0, x_1) \frac{1 - (sq\alpha)^p}{1 - (sq\alpha)}
\end{aligned}$$

$1 < q < \frac{1}{s\alpha}$  ve  $n \rightarrow \infty$  olduğundan

$$t(x_n, x_{n+p}) \leq s(q\alpha)^n t(x_0, x_1) \frac{1 - (sq\alpha)^p}{1 - (sq\alpha)} \rightarrow 0$$

elde ederiz. Bu yüzden  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi olup ve  $x_n \rightarrow x \in M$  dır.

Şimdi maximum  $A: = \left[ \frac{q\alpha s}{2 - q\alpha s} \right]^n$  olduğunu düşünelim. Böylelikle

$$t(x_n, x_{n+p}) \leq st(x_n, x_{n+1}) + s^2 t(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots +$$

$$+s^{p-1}t(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^{p-1}t(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq sA^n t(x_0, x_1) + s^2 A^{n+1} t(x_0, x_1) + \dots +$$

$$+s^{p-1}A^{n+p-2}t(x_0, x_1) + s^{p-1}A^{n+p-1}t(x_0, x_1)$$

$$= sA^n t(x_0, x_1) [1 + sA + \dots + (sA)^{p-2} + s^{p-2} A^{p-1}]$$

$$\leq sA^n t(x_0, x_1) [1 + sA + \dots + (sA)^{p-2} + s^{p-1} A^{p-1}]$$

$$= sA^n t(x_0, x_1) \frac{1 - (sA)^p}{1 - sA}$$

vardır.

$1 < q < \frac{1}{s\alpha}$  ve  $n \rightarrow \infty$  olduğundan

$$t(x_n, x_{n+p}) \leq sA^n t(x_0, x_1) \frac{1 - (sA)^p}{1 - sA} \rightarrow 0$$

elde ederiz.

Bu yüzden  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(X, t)$  de Cauchy dizisidir.

(ii) den devam edildiğinde dizinin  $(X, d)$  de bir cauchy dizisidir.  $x^* \in X$  ile dizinin sınırını belirleyelim. (i) ve (iii) den anladığımız  $x^* \in F(x^*)$  olduğu yerde  $n \rightarrow \infty$  olduğundan  $d(x_n, x^*) \rightarrow 0$  olur. Kanıt tamamlanmıştır (Boriceanu 2009).

Sıradaki sonuçlar için

$$N_t^F(x, y) = \max \left\{ t(x, y), D_t(y, F(y)), \frac{1}{2} [D_t(x, F(y)) + D_t(y, F(x))] \right\}$$

belirtelim.

Teorem 3.2.48.  $M$  boş olmayan küme,  $\kappa$  ve  $t$  sırasıyla  $k > 1, s > 1$  sabitler ile iki  $b$ -metrik olduğunu ve  $F : M \rightarrow P(M)$  çoğul değerli dönüşüm,

(i)  $(M, \kappa)$  tam  $b$ -metrik uzaydır.

(ii)  $\forall x, y \in M, c > 0$  vardır öyle ki  $\kappa(x, y) \leq ct(x, y)$

(iii)  $F : (M, \kappa) \rightarrow (P(M), H_\rho)$  kapalıdır.

(iv)  $0 \leq \alpha < \frac{1}{s}$  vardır öyleki  $\forall x, y \in M$  için

$$H_t(F(x), F(y)) \leq \alpha N_t^F(x, y)$$

(v)  $SFixF \neq \emptyset$  olduğunu varsayalım. Böylece

$$1. FixF = SFixF = \{x^*\};$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, \text{ her bir } x \in M \text{ için } H_t(F^n(x), x^*) \leq \alpha^n t(x, x^*)$$

$$3. \forall x \in M, \quad t(x, x^*) \leq \frac{s}{1-s\alpha} H_t(x, F(x)) \text{ in iyi bir şekilde ortaya konmuştur.}$$

İspat . 1.  $x^* \in SFixF$  olduğunu düşünelim.  $y \in SFixF$  olduğunu varsayalım.

Böylece  $\forall x, y \in M$ ,

$$t(x^*, y) = H_t(F(x^*), F(y))$$

$$\leq \alpha \cdot \max \left\{ t(x^*, y), D_t(y, F(y)), \frac{1}{2} [D_t(x^*, F(y)) + D_t(y, F(x^*))] \right\}$$

$$\leq \alpha \cdot \max \left\{ t(x^*, y), \frac{1}{2} [t(x^*, y) + t(y, x^*)] \right\} = \alpha t(x^*, y)$$

vardır. Bu yüzden  $t(x^*, y) = 0$  olduğu görülür ve sonuçta  $x^* = y$

2. (iv)  $y = x^*$  şartını alalım. Böylece

$$H_t(F(x), F(x^*)) \leq \alpha \cdot \max \left\{ t(x, x^*), D_t(x^*, F(x^*)), \frac{1}{2} [D_t(x, F(x^*)) + D_t(x^*, F(x))] \right\}$$

$$= \alpha \cdot \max \left\{ t(x, x^*), \frac{1}{2} [D_t(x, F(x^*)) + D_t(x^*, F(x))] \right\}$$

vardır. Eğer  $t(x, x^*)$  maksimum ise

$$H_t(F(x), x^*) \leq \alpha t(x, x^*) \text{ dir.}$$

Eğer  $\frac{1}{2} [D_t(x, F(x^*)) + D_t(x^*, F(x))]$  maksimum ise

$$H_t(F(x), x^*) \leq \frac{\alpha}{2} [D_t(x, F(x^*)) + D_t(x^*, F(x))]$$

$$= \frac{\alpha}{2} [D_t(x, F(x^*)) + H_t(F(x^*), F(x))]$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} [t(x, F(x^*)) + H_t(F(x^*), F(x))]$$

vardır. Böylece

$$H_t(F(x^*), F(x)) \leq \frac{\alpha}{2-\alpha} t(x, x^*)$$

elde edilir.  $\max\{\alpha, \frac{\alpha}{2-\alpha}\} = \alpha$  ve  $\forall x \in M$ ,

$$H_t(F(x^*), F(x)) \leq \alpha t(x, x^*)$$

olup tümevarım yoluyla  $\forall x \in M$ ,

$$H_t(F^n(x), x^*) \leq \alpha^n t(x, x^*)$$

$y^* \in Fix F$  olduğunu düşünelim. Böylelikle  $n \rightarrow \infty$  olduğunda

$$t(y^*, x^*) \leq H_t(F(y^*), x^*) \leq \alpha^n t(y^*, x^*) \rightarrow 0$$

olur. Bu yüzden  $y^* = x^*$  dır.

3.

$$t(x, x^*) \leq s [H_t(x, F(x)) + H_t(F(x), x^*)] \leq s H_t(x, F(x)) + s \alpha t(x, x^*)$$

Böylece,

$$t(x, x^*) \leq \frac{s}{1-s\alpha} H_t(x, F(x))$$

dır (Boriceanu 2009 ).

**Teorem 3.2.49.**  $M$  boştan farklı bir küme ,  $\kappa$  ve  $t$   $M$  de sırasıyla  $k > 1$  ve  $s > 1$  sabitleriyle iki  $b$ -metrik ve  $F, T : M \rightarrow P(M)$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

- (i)  $(M, \kappa)$  tam  $b$ -metrik uzaydır;
- (ii)  $c > 0$  vardır öyle ki  $\forall x, y \in M$ ,  $\kappa(x, y) \leq ct(x, y)$ ;
- (iii)  $F : (M, \kappa) \rightarrow (P(M), H_\kappa)$  kapalıdır;

(iv)  $0 \leq \alpha < \frac{1}{s}$  vardır öyle ki  $\forall x, y \in M$ ,

$$H_t(F(x), F(y)) \leq \alpha N_t^F(x, y)$$

(v)  $SFixF \neq \emptyset$

(vi)  $FixT \neq \emptyset$

(vii)  $\eta > 0$  vardır öyle ki  $\forall x \in M$ ,

$$H_t(F(x), T(x)) \leq \eta$$

koşulları sağlanıyorsa ;

$$H_t(FixF, FixT) \leq \frac{s\eta}{1-s\alpha}$$

dır.

İspat .  $x^* \in SFixF$  ve  $y^* \in FixT$  olduğunu varsayalım. Biliyoruz ki,

$$t(y^*, x^*) \leq H_t(T(y^*), x^*) \leq s[H_t(T(y^*), F(y^*)) + H_t(F(y^*), x^*)]$$

$$\leq s[\eta + H_t(F(y^*), F(x^*))] \leq s[\eta + \alpha t(y^*, x^*)]$$

dır. Böylece

$$t(y^*, x^*) \leq \frac{s\eta}{1-s\alpha}$$

dır (Boriceanu 2009 ).

## KAYNAKLAR

- Agarwal, S. , Qureshi, K. ve Nema J. , 2016. A Fixed Point Theorem For b-Metric Space. International Journal Of Pure and Applied Mathematical Sciences , (1) 45-50.
- Aydi, H. , Bota, M. F. , Karapinar, E. ve Mitrović, S. , 2012. A fixed point theorem for set-valued quasicontractions in b-metric spaces. Fixed point theory and Application, (88).
- Bakthin, I. A. , 1989. The contraction mapping principle in almost metric spaces. Funct.Anal. Unianowsk , Gos.Ped.Inst. , (30) , 26-37.
- Banach , S. , 1922.Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. Fundamenta Mathematica (3) , 133-181.
- Berinde, V. , 1993. Generalized contractions in quasimetric spaces.Seminar on Fixed Point Theory, (3), 3-9.
- Boriceanu, M. , 2009a. Fixed point theory on spaces with vector-valued b-metrics. Demonstratio Mathematica Studia XLII (4), 285-301.
- Boriceanu, M. , 2009b. Fixed theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metric , Babes-Bolyai University Mathematica Studia LIV, (3), 1-14.
- Boriceanu, M. , 2009c. Strict fixed point theorems for multivalued operators in b-metric spaces. International Journal of Modern Mathematics 4 , (2), 285-301
- Bota, M. , Molnar, A. ve Varga C. , 2011. On ekeland's variational principle in b-metric's spaces. Fixed point theory 12, (2) , 21-28.
- Chugh , Kumar, V. ve Kadian, T. , 2012. Some fixed point theorems for multivalued mappings in generalized b-metric spaces. International Journal of Mathematical Archive 3 ,(3) , 1198-1210
- Czerwik, S., 1980. Fixed point theorems and special solutions of functional equations. Prace Nauk Univ. Slask .(428), 1-83.
- Czerwik, S. , 1993. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis (1) , 5-11.
- Czerwik, S. , Dlutek, K. , ve Singh, S.L. , 1997. Round-off stability of iteration procedures for operators in b-metric spaces. J.Natur.Phys.Sci. (11) , 87-94.
- Czerwik, S. , 1998. Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces , Atti.Sem.Mat.Fis.Univ.Modena (46) , 263-276.

- Czerwik, S. , Dłutek, K. , ve Singh, S.L. , 2001. Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b-metric spaces. *J.Natur.Phys.Sci.* (15) , 1-2.
- Du, W. S. , ve Karapinar, E. , 2012. A note on cone b-metric and its related results generalizations or equivalence. *Fixed Point Theory and Application* , (210).
- Gantmacher, F. R. , 1966. The theory of matrices , Moscow.
- Granas, A. , Dugundji, J. , 1982. Fixed point theory. , 12-13 , Moscow.
- Hardy, G. E. ve Rogers, T. D. , 1973. A generalization of fixed point theorem of reich. *Canadian Mathematical Bulletin* (16).
- Kir, M. , ve Kiziltunç, H. , 2013. On some well known fixed point theorems in b-metric spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, (1), 13-16.
- Matkowski, J. , 1975. Integrable solutions of functional equations , *Dissertationes Math.* (127), 5-63.
- Memudu, O. ve Christopher, O. I. , 2008. A generalization of some results on multi-valued weakly Picard mappings in b-metric space. *Fasciculi-Mathematici* , (40) , 45-56.
- Mishra, P. K. , Sachdeva, S. , Banerjee, S. K. , 2014. Some Fixed Theorems in b-metric spaces ,(1) , 19-21 .
- Olaru , I. A. , Branga, A. , 2011. Common fixed point results in b-K-metric spaces. *General Mathematics* 19 , (4) , 51-59.
- Pacurar, M. , 2010. A fixed point result for  $\phi$ -contractions on b-metric spaces without the bound-edeness assumption , *Fasciculi Mathematici.* (43), 125-137.
- Pacurar, M. , 2010 .Sequences of almost contractions and fixed points in b-metric spaces. *Analele Universitat de Vest , Timisoara , Seria Matematica informatica XLVII*, (3), 125-137.
- Petruşel, A. , Rus, I. A. , 2007. Fixed point theory for multivalued operators on a set with two metrics. *Fixed Point Theory*, (8 ) , 97-104.
- Petruşel, A. , Mot, G. , Petruşel, G. , 2007. Topics in Nonlinear Analysis and Applications to Mathematical Economics. Casa Cartii de Ştiinţa , Cluj-Napoca .
- Rao, K. P. R. ve Rao, K. R. K. , 2013. A common fixed point theorem for two hybrid pairs of mappings in b-metric spaces. *International Journal of Analysis*, (404838)
- Reich, S. , 1971. Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin* 14 , (1) , 121-124.

- Roshan, J. R. , Parvaneh, V. , Sedghi, S. , Shobkolaei, N. ve Shatanawi, W. , 2013. Common fixed points of almost generalized  $(\psi, \phi)$ -contractive mappings in ordered b-metric spaces. Fixed Point Theory and Application, (159).
- Rus, I. A. , Petruşel, A. ve Sintamarian, A. , 2001. Data dependence of the fixed points set of multivalued weakly Picard operators. Studia Univ. "Babeş-Bolyai" , Mathematica , (46) , 111-121.
- Rus, I. A. , 2001. Generalized Contractions and Applications , Cluj University Press , Cluj-Napoca . (2) , 41-58.
- Shi, L. ve Xu, S. , 2013. Common fixed point theorems for two weakly compatible self-mappings in cone b-metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, (120) .
- Singh, S. L. , Czerwik, S. , Krol, K., 2008. Coincidences and fixed points of hybrid contractions. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, (24), 401-416.
- Singh, S. L. , Bhatnagar, C. , Mishra, S.N. , 2005. Stability of iterative procedures for multivalued maps in metric spaces . Demonstratio Math. , (37) , 905-916.
- Soykan, Y. , 2016. Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, VI 546 s Türkiye.
- Zamfirescu, T. , 1972. Fixpoint theorems in metric spaces. Archiv der Math (Basel) (23), 292-298.

#### 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, metrik uzaylardaki sabit nokta teorisi ile ilgili literatür çalışması yapılmış ve temel tanım, teorem ile sonuçlardan bahsedilmiştir. Bunların bazıları çoğul değerli dönüşüm, büzülme koşulu, Banach sabit nokta teoremi gibi kavramlardır. Diğer taraftan b-metrik uzaylarda kendi içine dönüşümler ve çoğul değerli dönüşümlerde geliştirilmiş büzülme koşulları için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Ayrıca metrik uzaylardaki bazı bilinen sabit nokta sonuçlarının özel şartlar altında b-metrik uzaylardaki genelleştirmeleri ve bunların örnekleri tartışılmıştır.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Bekir YILDIRIM

Doğum Tarihi :12/09/1988

Doğum Yeri :TOKAT

Medeni Hali :EVLİ

Yabancı Dili :İNGİLİZCE

Telefon :0553 241 83 97

E-posta :bymath60@gmail.com

### Eğitim:

| Derece        | Eğitim Birimi                | Mezuniyet Tarihi |
|---------------|------------------------------|------------------|
| Yüksek Lisans | Gaziosmanpaşa Üniversitesi   | 2021             |
| Lisans        | Gaziosmanpaşa Üniversitesi   | 2016             |
| Lise          | Tokat Atatürk Anadolu Lisesi | 2007             |