

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARI (KONORMLARI)
İNŞA ETMEK İÇİN BAZI YENİ METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eda Nur AYVAZ

AĞUSTOS 2023
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARI (KONORMLARI)
İNŞA ETMEK İÇİN BAZI YENİ METOTLAR

Eda Nur AYVAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 / 07/ 2023

Tezin Savunma Tarihi : 21 / 08 / 2023

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL

Trabzon 2023

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesi, hazırlanması ve düzenlemesine kadar olan süreçte yardımları ile bana önemli katkılarda bulunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL’a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans tezi çalışmam sırasında öğrenim hayatım boyunca hep yanımda olduğu gibi bu süreçte de hep yanımda olan, annem Gülhanım AYVAZ ve kardeşim Ertunç AYVAZ’a teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

Eda Nur AYVAZ

Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normları (Konormları) İnşa Etmek İçin Bazı Yeni Metotlar” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/08/2023

Eda Nur AYVAZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler.....	2
1.2. Kafesler	4
1.3. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar	6
1.3.1. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar	6
1.3.2. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar	7
1.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar	8
1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların Bazı İnşa Yöntemleri	10
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	15
2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların İnşa Yöntemleri	15
2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Konormların İnşa Yöntemleri	38
2.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların Modifiye Ordinal Toplam İnşaları	41
2.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Konormların Modifiye Ordinal Toplam İnşaları.....	46
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	49
4. SONUÇLAR.....	50
5. ÖNERİLER.....	51
6. KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARI (KONORMLARI) İNŞA ETMEK İÇİN BAZI YENİ METOTLARI

Eda Nur AYVAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ümit ERTUĞRUL
2023, 54 Sayfa

Bu tezde sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normları (üçgensel konormları) inşa etmek için bazı yeni metotlar vermeyi ve literatürdeki mevcut inşa yöntemleri ile ilişkisini ortaya koymayı amaçlıyoruz.

Bu çalışma iki bölüme ayrılmıştır. Birinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümü dört alt-kısım oluşturur. Birinci kısımda, t-normlar için iki yeni inşa metodu verilmiştir. Bu metotlar $L \setminus \{0\}$ 'ın en küçük elemanının ve L' 'nin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde bir t-normun varlığından yararlanılarak elde edilmiştir ve örneklenmiştir. Ayrıca, kısıtlamaların önemini vurgulamak için örnekler sunulmuştur. Dahası, tanıtılan inşa metotlarının var olan inşa metotlarından farklı olduğu örnekler ile gösterilmiştir. İkinci kısımda, t-konormlar için iki yeni inşa metodu verilmiştir. Bu metotlar $L \setminus \{1\}$ 'in en büyük elemanının ve L' 'nin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde bir t-konormun varlığından yararlanılarak elde edilmiştir. Üçüncü kısımda, tanıtılan t-norm inşaları için modifiye ordinal toplam inşaları elde edilmiş ve bu inşaların uygulamaları birer örnekle gösterilmiştir. Son kısımda ise, tanıtılan t-konorm inşaları için modifiye ordinal toplam inşaları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alt aralık, İnşa metotları, Sınırlı kafes, Üçgensel norm, Üçgensel konorm

SUMMARY

Master Thesis

SOME NEW METHODS TO CONSTRUCT TRIANGULAR NORMS (CONORMS) ON BOUNDED LATTICES

Eda Nur AYVAZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Ümit ERTUĞRUL
2023, 54 Pages

In this thesis, we aim to give some new methods to construct triangular norms (conorms) on bounded lattice and reveal the relation with the construction methods in the literature.

This study consists of two chapters. The results will be used in this thesis are given in the first chapter. The second chapter is consisted of four sub-sections. In the first section, two new construction methods for t-norms are given. These methods are obtained by exploiting the existence of the smallest element of $L \setminus \{0\}$ and a t-norm on subinterval $[a, b]$ of L and these methods are exemplified. In addition, examples are presented to highlight the importance of constraints. Moreover, it is shown with examples that the introduced construction methods are different from the existing construction methods. In the second sub-section, two new construction methods for t-conorms are given. These methods are obtained by exploiting the existence of the greatest element of $L \setminus \{1\}$ and a t-conorm on subinterval $[a, b]$ of L . In the third section, the modified ordinal sum constructions for the introduced t-norm constructions are obtained and the applications of these constructions are shown with examples. In the last section, the modified ordinal sum constructions for the introduced t-conorm constructions are obtained.

Key Words: Subinterval, Construction methods, Bounded lattice, Triangular norm, Triangular conorm

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Kafes diyagramı	4
Şekil 2. T_{11} t-normun yapısı.....	22
Şekil 3. L_1 kafes diyagramı.....	22
Şekil 4. L_2 kafes diyagramı.....	23
Şekil 5. L_3 kafes diyagramı.....	24
Şekil 6. L_4 kafes diyagramı.....	25
Şekil 7. L_5 kafes diyagramı.....	26
Şekil 8. T_{12} t-normun yapısı.....	33
Şekil 9. L_6 kafes diyagramı.....	33
Şekil 10. L_7 kafes diyagramı.....	34
Şekil 11. L_8 kafes diyagramı.....	35
Şekil 12. L_9 kafes diyagramı.....	36
Şekil 13. L_{10} kafes diyagramı	37
Şekil 14. L_{11} kafes diyagramı	38
Şekil 15. S_1 t-konormun yapısı	39
Şekil 16. S_2 t-konormun yapısı	40
Şekil 17. L_{12} kafes diyagramı	42
Şekil 18. L_{13} kafes diyagramı	45

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. L_1 üzerinde T_{11} t-normu	23
Tablo 2. L_6 üzerinde T_{12} t-normu	34
Tablo 3. $[u_2, v_2]$ üzerinde T_2 t-normu.....	43
Tablo 4. L_{12} üzerinde T_3 t-normu	43
Tablo 5. $[u_2, v_2]$ üzerinde T_2 t-normu.....	45
Tablo 6. L_{13} üzerinde T_3 t-normu	46



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$<$	: Küçüktür
$\leq$	: Küçük eşittir
$\nless$	: Küçük eşit değildir
$>$	: Büyüktür
$\geq$	: Büyük eşittir
$\ngtr$	: Büyük eşit değildir
$\in$	: Elemanıdır
$\emptyset$	: Boş küme
$\cap$	: Kesişim işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$A \cap B$	: Kümelerin kesişimi
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(a, b)	: Açık aralık
$[a, b)$	: Yarı-açık aralık
$(a, b]$	: Yarı-açık aralık
$\vee$	: Kafeste supremum işlemi
$\wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\overline{X}$	: X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X in alt sınırlarının kümesi

$SupX$	: $\overline{X}$ kümesinin en küçük elemanı
$InfX$	: $\underline{X}$ kümesinin en büyük elemanı
T-norm	: Üçgensel norm
T-konorm	: Üçgensel konorm
T_M	: $[0, 1]$ üzerindeki en büyük t-norm
T_D	: $[0, 1]$ üzerindeki en küçük t-norm
$T_\wedge$	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en büyük t-norm
T_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-norm
T_P	: Çarpım t-norm
T_L	: Lukasiewicz t-norm
S_M	: $[0, 1]$ üzerindeki en küçük t-konorm
S_D	: $[0, 1]$ üzerindeki en büyük t-konorm
S_V	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-konorm
S_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en büyük t-konorm
S_P	: İstatistiksel toplam
S_L	: Lukasiewicz t-konorm
$a \parallel b$	: a elemanı ile b elemanı kıyaslanamaz
$a \nparallel b$	: a elemanı ile b elemanı kıyaslanabilir
$\mathbb{I}_a$	: a elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi
$\mathbb{I}_{a,b}$	: a elemanı ve b elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi
$\mathbb{I}_a^b$	: a elemanı ile kıyaslanamayan ve b elemanı ile kıyaslanabilen elemanların kümesi
$\mathbb{I}_b^a$	: b elemanı ile kıyaslanamayan ve a elemanı ile kıyaslanabilen elemanların kümesi

1. GENEL BİLGİLER

Üçgensel normların tarihi "Statistical Metrics" adlı çalışma ile başlamıştır (Menger, 1942). Daha sonra üçgensel normlar Schweizer ve Sklar (1960) tarafından olasılıksal metrik uzaylar çerçevesinde özel birleşmeli fonksiyonların bir çeşidi olarak tanıtılmıştır. Üçgensel normlar (kısaca t-normlar) klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi sırasında daha genel bir yapı olarak ortaya çıkmıştır. İlk olarak Klement vd. (2000) tarafından $[0, 1]$ birim reel aralık üzerinde tanımlanmıştır.

Üçgensel normlar çok değerli mantıkta (Gottwald, 2001; Hájek, 1998; Klement, Mesiar, & Pap, 2000), fuzzy mantıkta (Nguyen & Walker, 1997; Zadeh, 1965), karar verme teorisinde (Fodor & Roubens, 1994; Grabisch, Nguyen, & Walker, 1995), istatistik bilimlerinde (Nelsen, 1999), ölçü teorilerinde (Klement & Weber, 1991; Pap, 1995; Sugeno, 1974; Weber, 1984) ve oyun teorisinde (Butnariu & Klement, 1993) uygulamalara sahiptirler. Üçgensel normların birçok alanda önemli uygulamaları ve kullanımları olması sebebiyle araştırmacılar tarafından ilgi çeken bir konu olmuş ve çeşitli açılardan ele alınmıştır (Aşıcı, 2022; İnce & Karaçal, 2019; Karaçal & Kesicioğlu, 2011; Kesicioğlu & Mesiar, 2014; Kesicioğlu, Karaçal, & Mesiar, 2015).

T-normlar $[0, 1]$ birim aralık üzerinde tanımlanmış olmasına rağmen son zamanlarda yaygın olarak sınırlı kafesler üzerinde çalışılmıştır. Böylece sınırlı kafesler üzerinde t-normların inşası üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Aşıcı, 2021; Aşıcı 2021; Aşıcı 2022; Çaylı, 2018; Çaylı 2019; Dan, Hu, & Qiao, 2020; Dvořák & Holčapek, 2020; El-Zekey, 2020; Ertuğrul & Yeşilyurt, 2019; Ertuğrul, Karaçal, & Mesiar, 2015; Ertuğrul, Kesicioğlu, & Karaçal, 2019; Karaçal & Şanlı, 2022; Karaçal, Ertuğrul, & Kesicioğlu, 2019; Karaçal, Kesicioğlu, & Ertuğrul, 2020; Saminger, 2006).

Literatür incelendiğinde, Saminger (2006) çalışmasında sınırlı bir L kafesinin alt aralıklarında tanımlı üçgensel normlardan bir üçgensel norm üretmek için bir inşa yöntemi vermiştir ancak bu inşa yöntemi alınan herhangi bir kafes üzerinde her durumda üçgensel norm üretmemektedir. Saminger'in bu çalışmasından hareket ederek, Ertuğrul vd. (2015) çalışmalarında sınırlı bir L kafesinin $[a, 1]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel normdan L' 'de bir üçgensel norm ve $[0, a]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel konormdan L' 'de bir üçgensel konorm üretmek için inşa yöntemi üzerinde durmuşlardır. Yine aynı çalışmada, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde üçgensel normlar ve üçgensel konormlar için önerilen inşa

yöntemlerinin modifiye bir ordinal toplam inşa tanıtılmıştır. Ardından, Çaylı (2018) çalışmasında Ertuğrul vd. nin (2015) inşa yönteminde belirli aralıklarda değişiklikler yaparak yeni bir inşa yöntemi sunmuştur. Ertuğrul ve Yeşilyurt (2019) çalışmalarında ise sınırlı bir L kafesin $[0, a]$ ve $[a, 1]$ alt aralıklarında tanımlı üçgensel normlarından, L' de bir üçgensel norm üretmek için yeni inşa yöntemleri üzerinde çalışmışlardır. Dahası, L' nin alt aralıklarının sayısını arttırarak bu inşa yöntemini genelleştirmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen tüm çalışmaların ardından, bu çalışmada keyfi bir L sınırlı kafesinin $[a, b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel normdan (üçgensel konormdan), $L \setminus \{0\}$ 'in en küçük elemanı olması durumunda ($L \setminus \{1\}$ 'in en büyük elemanı olması durumunda), L' de bir üçgensel norm (üçgensel konorm) üretmek için yeni inşa yöntemleri üzerinde çalışılmıştır. Mevcut inşa yöntemleri ile detaylı bir şekilde karşılaştırılmış ve teoremlerin uygulanışı örneklenmiştir. Ayrıca, inşa yöntemlerindeki ilave şartların önemi de örneklerle vurgulanmıştır.

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. (Birkhoff, 1967) $R \neq \emptyset$ ve $\leq, R'$ de bir bağıntı olsun.

R1. Tüm $m \in R$ olmak üzere $(m, m) \in \leq$ (Yansıma)

R2. $m, n \in R$ olmak üzere $(m, n) \in \leq$ ve $(n, m) \in \leq$ iken $m = n$ (Ters Simetri)

R3. $m, n, l \in R$ olmak üzere $(m, n) \in \leq$ ve $(n, l) \in \leq$ iken $(m, l) \in \leq$ (Geçişme)

özelliklerini taşıyan $\leq$ bağıntısına R' de bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Buradaki R kümesine ise sıralı küme (kısmen sıralı küme, poset) denir ve $(R, \leq)$ olarak ifade edilir. $(m, n) \in \leq$ şeklinde verildiğinde bu durum $m \leq n$ olarak da ifade edilir.

Eğer $m \leq n$ ve $m \neq n$ olduğunda $m < n$ yazılır ve " m, n' de öz olarak içerilir" şeklinde belirtilir. $m \leq n$ bağıntısı $n \geq m$ olarak da yazılır ve " m, n' de içerilir" şeklinde belirtilir. $m < n, n > m'$ de benzer şekilde yazılır.

Örnek 1.2. (Birkhoff, 1967) X bir küme ve $\wp(X)$, X' in güç kümesi olsun. $E, F \in \wp(X)$ olmak üzere $E \leq F \Leftrightarrow E \subseteq F$ bağıntısı tanımlansın. Bu takdirde, $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Örnek 1.3. (Birkhoff, 1967) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde $m, n \in X$ için $m \leq n \Leftrightarrow m = n$ veya $|m| < |n|$ bağıntısı tanımlansın. Bu takdirde $(X, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Lemma 1.4. (Birkhoff, 1967) Kısmen sıralı olan herhangi bir kümede hiçbir m için $m < m'$ dir ve $m < n$ ve $n < l$ ise $m < l'$ dir.

Uyarı 1.5. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Tüm $p \in R$ için $m \leq p$ şartını taşıyan $m \in R$ elemanı varsa bu m elemanına R' nin en küçük elemanı denir ve 0 ile belirtilir.

(ii) Tüm $p \in R$ için $p \leq n$ şartını taşıyan $n \in R$ elemanı varsa bu n elemanına R' nin en büyük elemanı denir ve 1 ile belirtilir.

0 ve 1 elemanları varsa tektir ve bu elemanlara R' nin evrensel sınırları denir.

Lemma 1.6. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $m_1, m_2, \dots, m_n \in R$ olsun. Eğer $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \leq m_1$ ise $m_1 = m_2 = \dots = m_n$ (ters devir)'dir.

Tanım 1.7. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin tüm $m, n \in R$ için $m \leq n$ veya $n \leq m$ durumunda $(R, \leq)$ 'ye zincir (lineer sıralı küme, tam sıralı küme) denir.

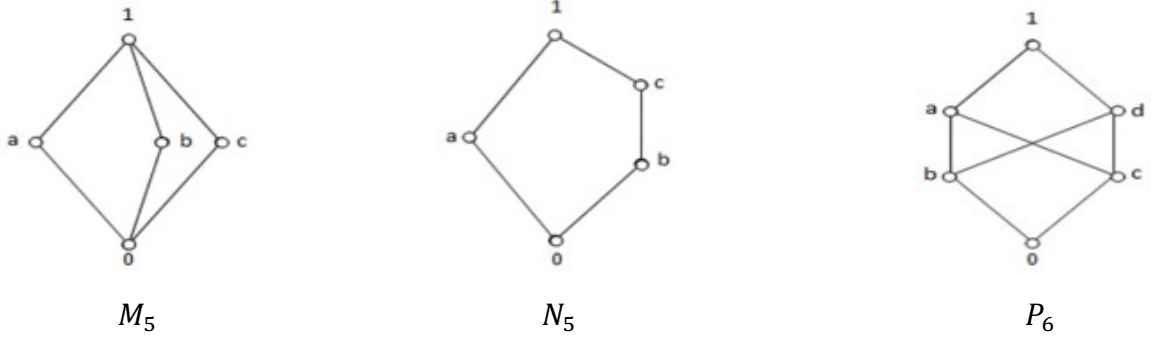
Teorem 1.8. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq R$ alt kümesi olduğunda $(S, \leq)$ 'de kısmen sıralı bir kümedir. Özellikle, R bir zincir olduğunda S' de bir zincir olur.

Örnek 1.9. (Birkhoff, 1967) $\mathbb{R}$ bir zincir olduğu için $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ da doğal sıralamaya göre bir zincir olur.

Tanım 1.10. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı kümesinde $m, n \in R$ için $m \not\leq n$ ve $n \not\leq m$ olduğunda m ve n elemanlarına kıyaslanamayan elemanlar denir.

Tanım 1.11. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ kısmen sıralı bir küme $a, b \in R$ olsun. " a örter b " denir: $\Leftrightarrow a > b$ olup, $p \in R$ öyle ki $a > p > b$ olacak şekilde yoktur.

Bir R kısmen sıralı kümesinin gösterimi şu şekilde belirtilir: R' nin her bir elemanının yerini belirtmek için küçük bir daire çizilir. a, b' yi örter iken a, b' den üste yazılır ve aralarına çizgi çizilir. Böylece ortaya çıkan şekle R' nin diyagramı denir. Belirtilen koşullara uygun bazı diyagram örnekleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. Kafes diyagramı

Tanım 1.12. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, $S \subseteq R$ ve $m \in S$ olsun.

(i) Her $n < m$ olacak şekilde bir $n \in S$ elemanı yoksa, buradaki m elemanına S kümesinde minimal eleman denir.

(ii) Her $n > m$ olacak şekilde bir $n \in S$ elemanı yoksa, buradaki m elemanına S kümesinde maksimal eleman denir.

Teorem 1.13. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ bir kısmen sıralı küme ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ sonlu bir alt küme olsun. Bu durumda, S 'nin minimal ve maksimal elemanları mevcuttur.

Teorem 1.14. (Birkhoff, 1967) Lineer sıralı kümelerde minimal ve en küçük (maksimal ve en büyük) elemanları eşdeğerdir.

Tanım 1.15. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq)$ bir kısmen sıralı küme ve $S \subseteq R$ olsun.

(i) Tüm $t \in S$ için $t \leq m$ olan $m \in R$ elemanına S için bir üst sınır denir ve tüm üst sınırlarının oluşturduğu küme $\bar{S}$ ile belirtilir. Ayrıca, her $q \in \bar{S}$ için $m \leq q$ olan $m \in R$ elemanına da S için supremum (veya en küçük üst sınır) denir ve $m = \sup S$ ($m = \vee S$) ile belirtilir.

(ii) Tüm $t \in S$ için $n \leq t$ olan $n \in R$ elemanına S için bir alt sınır denir ve tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme $\underline{S}$ ile belirtilir. Ayrıca, her $r \in \underline{S}$ için $r \leq n$ olan $n \in R$ elemanına da S için infimum (veya en büyük alt sınır) denir ve $n = \inf S$ ($n = \wedge S$) ile belirtilir.

1.2. Kafesler

Tanım 1.16. (Birkhoff, 1967) Kısmen sıralı bir $(L, \leq)$ kümesinde tüm $\bar{o}, \bar{u} \in L$ için $\sup\{\bar{o}, \bar{u}\}$ ve $\inf\{\bar{o}, \bar{u}\}$ mevcutsa L kafes olarak adlandırılır, sırasıyla $\bar{o} \vee \bar{u}$ ve $\bar{o} \wedge \bar{u}$ ile de gösterilebilir.

Örnek 1.17. (Birkhoff, 1967) Şekil 1 göz önüne alınırsa M_5 ve N_5 kafestir P_6 ise kafes değildir.

Örnek 1.18. (Birkhoff, 1967) $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesinde $E, F \in \wp(X)$ olmak üzere $E \vee F = E \cup F$ ve $E \wedge F = E \cap F$ olup bir kafestir.

Tanım 1.19. (Birkhoff, 1967) En küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1'e sahip olan L kafesine sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir. $(L, \leq, 0, 1)$ yerine kısaca L de yazılabilir.

Tanım 1.20. (Birkhoff, 1967) L bir kafes ve $E \subseteq L$ olmak üzere tüm $\bar{o}, \bar{u} \in E$ için $\bar{o} \wedge \bar{u} \in E$ ve $\bar{o} \vee \bar{u} \in E$ olacak şekilde mevcut ise E' 'ye L' 'nin bir alt kafesi denir. Genel anlamda, $(L, \leq)$ bir kafes ve $\bar{o}, \bar{u} \in L$ için $\bar{o} \leq \bar{u}$ olmak üzere

$$[\bar{o}, \bar{u}] := \{\bar{c} \in L \mid \bar{o} \leq \bar{c} \leq \bar{u}\}$$

biçiminde verilen $[\bar{o}, \bar{u}]$ alt aralığı bir alt kafestir. Benzer şekilde $(\bar{o}, \bar{u}]$, $[\bar{o}, \bar{u})$, $(\bar{o}, \bar{u})$ alt aralıkları da tanımlanabilir.

Tanım 1.21. (Birkhoff, 1967) $(R, \leq_1)$ ve $(S, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $R \times S$, kartezyen çarpım kümesi olup $R \times S = \{(\bar{o}, \bar{u}) \mid \bar{o} \in R, \bar{u} \in S\}$ şeklinde ifade edilir.

$$(\bar{o}_1, \bar{u}_1) \leq (\bar{o}_2, \bar{u}_2) \Leftrightarrow \bar{o}_1 \leq_1 \bar{o}_2 \text{ ve } \bar{u}_1 \leq_2 \bar{u}_2 \quad \bar{o}_1, \bar{o}_2 \in R, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in S$$

bağıntısı göz önüne alındığında $R \times S$ kümesinin kısmen sıralı bir küme olduğu görülür. Buradan $(R \times S, \leq)$, R ve S' 'nin direkt çarpım kümesidir.

Teorem 1.22. (Birkhoff, 1967) R ve S birer kafes olsun. Bu durumda, $R \times S'$ 'nin direkt çarpımı da bir kafestir. Bu kafeste $(\bar{o}_1, \bar{u}_1), (\bar{o}_2, \bar{u}_2) \in R \times S$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\bar{o}_1, \bar{u}_1) \vee (\bar{o}_2, \bar{u}_2) = (\bar{o}_1 \vee \bar{o}_2, \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2)$$

$$(\bar{o}_1, \bar{u}_1) \wedge (\bar{o}_2, \bar{u}_2) = (\bar{o}_1 \wedge \bar{o}_2, \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2).$$

Kafeslerdeki $\wedge$ ve $\vee$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Lemma 1.23. (Birkhoff, 1967) Kısmen sıralı bir R kümesi olmak üzere infimum ve supremum işlemleri (mevcutsa) aşağıda belirtilen özelliklere sahiptir:

$$\text{L1. } \bar{c} \wedge \bar{c} = \bar{c}, \quad \bar{c} \vee \bar{c} = \bar{c}, \quad (\text{İdempotent})$$

$$\text{L2. } \bar{c} \wedge \bar{o} = \bar{o} \wedge \bar{c}, \quad \bar{c} \vee \bar{o} = \bar{o} \vee \bar{c}, \quad (\text{Komütatif})$$

$$\text{L3. } (\bar{c} \wedge \bar{o}) \wedge \bar{u} = \bar{c} \wedge (\bar{o} \wedge \bar{u}), \quad (\bar{c} \vee \bar{o}) \vee \bar{u} = \bar{c} \vee (\bar{o} \vee \bar{u}), \quad (\text{Birleşme})$$

$$\text{L4. } \bar{c} \wedge (\bar{c} \vee \bar{o}) = \bar{c} \vee (\bar{c} \wedge \bar{o}) = \bar{c}. \quad (\text{Yok etme})$$

Üstelik $\bar{c} \leq \bar{o}$ ifadesi $\bar{c} \wedge \bar{o} = \bar{c}$ ve $\bar{c} \vee \bar{o} = \bar{o}$ şartlarına eşdeğerdir.

Lemma 1.24. (Birkhoff, 1967) R kısmen sıralı kümesinin en küçük elemanı 0 olmak üzere tüm $\varphi \in R$ için

$$0 \wedge \varphi = 0 \text{ ve } 0 \vee \varphi = \varphi$$

eşitlikleri sağlanır. Dual olarak, tüm $\varphi \in R$ için

$$\varphi \wedge 1 = \varphi \text{ ve } \varphi \vee 1 = 1$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 1.25. (Birkhoff, 1967) Bir L kafesinde $\varphi, \ddot{o}, \ddot{u} \in L$ için

$$\ddot{o} \leq \ddot{u} \text{ olacak şekilde } \varphi \wedge \ddot{o} \leq \varphi \wedge \ddot{u} \text{ ve } \varphi \vee \ddot{o} \leq \varphi \vee \ddot{u}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu ise $\wedge$ ve $\vee$ işlemlerinin sıra koruduğu anlamına gelir.

Lemma 1.26. (Birkhoff, 1967) L kafes olmak üzere her $\varphi, \ddot{o}, \ddot{u} \in L$ için

$$\varphi \wedge (\ddot{o} \vee \ddot{u}) \geq (\varphi \wedge \ddot{o}) \vee (\varphi \wedge \ddot{u}) \text{ ve } \varphi \vee (\ddot{o} \wedge \ddot{u}) \leq (\varphi \vee \ddot{o}) \wedge (\varphi \vee \ddot{u})$$

eşitsizlikleri sağlanır.

1.3. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.3.1. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi bir durum belirtilmedikçe, $[0, 1]$ aralığındaki doğal sıralama $\leq$ ile ifade edilir.

Tanım 1.27. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $[0, 1]$ üzerinde bir ikili işlem olan $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ T1-T4'ü sağlıyorsa T' 'ye $[0, 1]$ üzerinde bir üçgensel norm (t-norm) denir.

$$\text{T1. } \forall \varphi, \ddot{o} \in [0, 1] \text{ olmak üzere } T(\varphi, \ddot{o}) = T(\ddot{o}, \varphi) \quad (\text{Komütatiflik})$$

$$\text{T2. } \forall \varphi, \ddot{o}, \ddot{u} \in [0, 1] \text{ olmak üzere } T(\varphi, T(\ddot{o}, \ddot{u})) = T(T(\varphi, \ddot{o}), \ddot{u}) \quad (\text{Asosyatiflik})$$

$$\text{T3. } \forall \varphi, \ddot{o}, \ddot{u} \in [0, 1] \text{ olmak üzere } \ddot{o} \leq \ddot{u} \text{ iken } T(\varphi, \ddot{o}) \leq T(\varphi, \ddot{u}) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$\text{T4. } \forall \varphi \in [0, 1] \text{ olmak üzere } T(\varphi, 1) = \varphi. \quad (\text{Sınır şartı})$$

Örnek 1.28. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $T_M(\varphi, \ddot{o}) = \min(\varphi, \ddot{o})$ minimum üçgensel norm, $T_P(\varphi, \ddot{o}) = \varphi \ddot{o}$ çarpım üçgensel norm, $T_L(\varphi, \ddot{o}) = \max(\varphi + \ddot{o} - 1, 0)$

Lukasiewicz üçgensel norm ve $T_D(\varphi, \ddot{o}) = \begin{cases} 0 & , \quad (\varphi, \ddot{o}) \in [0, 1]^2 \\ \min(\varphi, \ddot{o}) & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$ drastik çarpım

üçgensel norm en çok bilinen üçgensel norm örnekleridir.

Uyarı 1.29. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $T, [0, 1]$ 'de bir üçgensel norm olsun.

(i) Tanım 1.27 T üçgensel normu tüm $\ddot{o} \in [0, 1]$ için

$$T(0, \ddot{o}) = T(\ddot{o}, 0) = 0 \quad (1)$$

$$T(1, \ddot{o}) = \ddot{o} \quad (2)$$

sağlar ve bu eşitliklere ilave sınır şartları denir.

(ii) Bir T üçgensel normu (T1) ve (T3) ile ikinci bileşene göre de monotondur. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$$\ddot{o}_1 \leq \ddot{o}_2 \text{ ve } \ddot{u}_1 \leq \ddot{u}_2 \text{ iken } T(\ddot{o}_1, \ddot{u}_1) \leq T(\ddot{o}_2, \ddot{u}_2) \quad (3)$$

sağlanır.

1.3.2. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.30. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $[0, 1]$ üzerinde bir ikili işlem olan $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ S1-S4'ü sağlıyorsa S' 'ye $[0, 1]$ üzerinde bir üçgensel konorm (t-konorm) denir.

$$\text{S1. } \forall \zeta, \ddot{o} \in [0, 1] \text{ için } S(\zeta, \ddot{o}) = S(\ddot{o}, \zeta) \quad (\text{Komütatiflik})$$

$$\text{S2. } \forall \zeta, \ddot{o}, \ddot{u} \in [0, 1] \text{ olmak üzere } S(\zeta, S(\ddot{o}, \ddot{u})) = S(S(\zeta, \ddot{o}), \ddot{u}) \quad (\text{Asosyatiflik})$$

$$\text{S3. } \forall \zeta, \ddot{o}, \ddot{u} \in [0, 1] \text{ için } \ddot{o} \leq \ddot{u} \text{ iken } S(\zeta, \ddot{o}) \leq S(\zeta, \ddot{u}) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$\text{S4. } \forall \zeta \in [0, 1] \text{ olmak üzere } S(\zeta, 0) = \zeta. \quad (\text{Sınır şartı})$$

Tanım 1.27 ve Tanım 1.30'dan açıkça görülür ki, üçgensel normlar ve üçgensel konormlar sınırlarda değişiklik gösterirler.

Örnek 1.31. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $S_M(\zeta, \ddot{o}) = \max(\zeta, \ddot{o})$ maksimum üçgensel konorm, $S_P(\zeta, \ddot{o}) = \zeta + \ddot{o} - \zeta\ddot{o}$ istatistiksel toplam, $S_L(\zeta, \ddot{o}) = \min(\zeta + \ddot{o}, 1)$ Lukasiewicz üçgensel konorm ve $S_D(\zeta, \ddot{o}) = \begin{cases} 1 & , \quad (\zeta, \ddot{o}) \in (0, 1)^2 \\ \max(\zeta, \ddot{o}) & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$ drastik toplam en çok bilinen üçgensel konorm örnekleridir.

Önerme 1.32. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu bir üçgensel konormdur $\Leftrightarrow$ tüm $\zeta, \ddot{o} \in [0, 1]$ için

$$S(\zeta, \ddot{o}) = 1 - T(1 - \zeta, 1 - \ddot{o}) \quad (4)$$

sağlayan bir T üçgensel normunun mevcut olmasıdır. Buradaki S üçgensel konormu, T üçgensel normunun dual üçgensel konormu olarak adlandırılır. Benzer şekilde tüm $\varsigma, \ddot{o} \in [0, 1]$ için,

$$T(\varsigma, \ddot{o}) = 1 - S(1 - \varsigma, 1 - \ddot{o}) \quad (5)$$

şeklindeki T üçgensel normu, S üçgensel konormunun dual üçgensel normu olarak adlandırılır.

$(T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L)$ ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual üçgensel norm ve üçgensel konorm çiftleridir.

Uyarı 1.33. (Klement, Mesiar, & Pap, 2000) $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir üçgensel konorm olsun. Tüm $\varsigma \in [0, 1]$

$$S(1, \varsigma) = S(\varsigma, 1) = 1 \quad (6)$$

$$S(0, \varsigma) = \varsigma \quad (7)$$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır.

1.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

Tanım 1.34. (Karaçal & Khadjiev, 2005) Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir ikili işlem olan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu komütatiflik, asosyatiflik, monotonluk özelliklerini ve 1-birim eleman özelliğini sağlıyorsa, T' 'ye L üzerinde bir üçgensel norm (t-norm) denir.

Uyarı 1.35. (Karaçal & Khadjiev, 2005)

(i) T_1 ve T_2 , L sınırlı kafesi üzerinde iki üçgensel norm olmak üzere tüm $(\ddot{o}, \ddot{u}) \in L \times L$ için $T_1(\ddot{o}, \ddot{u}) \leq T_2(\ddot{o}, \ddot{u})$ olduğunda " T_1, T_2 'den daha zayıf veya T_2, T_1 'den daha güçlü" olarak adlandırılır ve $T_1 \leq T_2$ şeklinde ifade edilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ olursa yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(\ddot{o}_0, \ddot{u}_0) \in L \times L$ olacak şekilde $T_1(\ddot{o}_0, \ddot{u}_0) < T_2(\ddot{o}_0, \ddot{u}_0)$ 'dir ve $T_1 < T_2$ şeklinde ifade edilir.

$$T_W(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} \ddot{o} & , \quad \ddot{u} = 1, \\ \ddot{u} & , \quad \ddot{o} = 1, \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (8)$$

olsun. O halde T_W L' 'de bir üçgensel normdur ve $L = [0, 1]$ alınırsa T_W ve T_D aynıdır. Dahası L' 'deki keyfi üçgensel norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu üçgensel norm, L' 'deki en küçük üçgensel norm olur.

Diğer bir yandan, sınırlı bir L kafesindeki en büyük üçgensel norm ise

$$T_\wedge(\ddot{o}, \ddot{u}) = \ddot{o} \wedge \ddot{u} \quad (9)$$

şeklinde ifade edilir ve $L = [0, 1]$ alındığında $T_\wedge$ ve T_M aynıdır.

Tanım 1.36. (Karaçal & Khadjiev, 2005) Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir ikili işlem olan $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu komütatiflik, asosyatiflik, monotonluk özelliklerini ve 0-birim eleman özelliğini sağlıyorsa, S' 'ye L üzerinde bir üçgensel konorm (t-konorm) denir.

Uyarı 1.37. (Karaçal & Khadjiev, 2005)

(i) T_1, T_2 L üzerinde üçgensel normlar ve S_1, S_2 sırasıyla L üzerinde T_1 ve T_2 'nin dual üçgensel normları olsunlar, bu durumda $T_1 \leq T_2$ ise $S_2 \leq S_1$ 'dir. Buradan da anlaşıldığı üzere dualite sırayı değiştirir.

(ii) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük üçgensel konorm

$$S_W(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} \ddot{o} & , \quad \ddot{u} = 0, \\ \ddot{u} & , \quad \ddot{o} = 0, \\ 1 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (10)$$

olup $L = [0, 1]$ iken S_D ile çakışır. Sınırlı bir L kafesi üzerinde en küçük üçgensel konorm ise

$$S_\vee(\ddot{o}, \ddot{u}) = \ddot{o} \vee \ddot{u} \quad (11)$$

olup $L = [0, 1]$ iken S_M ile çakışır.

Tanım 1.38. (Birkhoff, 1967; Wang, Zhan, & Liu, 2020) L bir sınırlı kafes ve $\ddot{o}$ ve $\ddot{u}$ L 'nin elemanları olmak üzere $\ddot{o}$ ve $\ddot{u}$ kıyaslanamaz olduğunda $\ddot{o} \parallel \ddot{u}$ şeklinde gösterilirken $\ddot{o}$ ve $\ddot{u}$ 'nün kıyaslanabilir olması durumunda ise $\ddot{o} \nparallel \ddot{u}$ şeklinde gösterilir. Böylece

$$\mathbb{I}_{\ddot{o}} = \{\ddot{c} \in L \mid \ddot{c} \parallel \ddot{o}\}$$

ile tanımlanan $\mathbb{I}_{\ddot{o}}$ kümesi $\ddot{o}$ elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesidir.

Benzer şekilde,

$$\mathbb{I}_{\ddot{o}}^{\ddot{u}} = \{ \zeta \in L \mid \zeta \parallel \ddot{o} \text{ ve } \zeta \not\parallel \ddot{u} \},$$

$$\mathbb{I}_{\ddot{u}}^{\ddot{o}} = \{ \zeta \in L \mid \zeta \parallel \ddot{u} \text{ ve } \zeta \not\parallel \ddot{o} \},$$

$$\mathbb{I}_{\ddot{o}, \ddot{u}} = \{ \zeta \in L \mid \zeta \parallel \ddot{o} \text{ ve } \zeta \parallel \ddot{u} \}$$

kümeleri de tanımlanabilir.

1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların Bazı İnşa Yöntemleri

Saminger Teorem 1.39 ile sınırlı kafesler üzerinde bazı şartlar altında üçgensel norm elde etmek için bir inşa metodu önermiştir.

Teorem 1.39. (Saminger, 2006) L bir sınırlı kafes ve $[a, b] \subseteq L$ olsun. W $[a, b]$ alt aralığında bir üçgensel norm iken aşağıdaki şekilde tanımlı $T_1 = (< a, b, W >): L^2 \rightarrow L$ ordinal toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_1(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (12)$$

Aşağıdaki teoremde, Teorem 1.39'da önerilen inşa metodunun sınırlı kafesler üzerinde her zaman bir üçgensel norm üretmesi için gerekli şartlar verilmiştir.

Teorem 1.40. (Saminger, 2006) L bir sınırlı kafes ve $[a, b]$ L' 'nin bir alt aralığı olmak üzere (i) ve (ii) denktir:

(i) (12) ile tanımlı ordinal toplam $T_1: L^2 \rightarrow L$ $[a, b]$ 'de tanımlı keyfi üçgensel norm W için bir üçgensel normdur.

(ii) $\forall \ddot{o} \in L$ için

(a) $\ddot{o} \parallel a \Rightarrow \forall u \in [a, b]$ için $\ddot{o} \parallel u'$ dur.

(b) $\ddot{o} \parallel b \Rightarrow \forall u \in (a, b]$ için $\ddot{o} \parallel u'$ dur.

Aşağıdaki teoremde, Ertuğrul vd. Saminger'in Teorem 1.39'da önerdiği inşa yönteminin her zaman bir üçgensel norm üretmiyor olması gerçeğinden hareket ederek, sınırlı kafesler üzerinde ek şarta gerek duymadan üçgensel norm üretmek için bir inşa yöntemi önermişlerdir.

Teorem 1.41. (Ertuğrul, Karaçal, & Mesiar, 2015) L bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve W' 'de $[a, 1]$ alt aralığında bir üçgensel norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlı $T_2: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L' 'de bir üçgensel normdur:

$$T_2(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad \ddot{o} = 1 \text{ veya } \ddot{u} = 1 \\ W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, 1]^2 \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge a & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (13)$$

Aşağıdaki teoremden, Çaylı Teorem 1.41'de önerilen inşa yönteminde bazı değişiklikler yaparak yeni bir inşa metodu önermiştir.

Teorem 1.42. (Çaylı, 2018) L bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve W' 'de $[a, 1]$ alt aralığında bir üçgensel norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlı $T_3: L^2 \rightarrow L$ L' 'de bir üçgensel normdur:

$$T_3(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, 1]^2 \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (14)$$

Aşağıdaki teoremden, Çaylı sınırlı kafesler üzerinde üçgensel norm elde etmek için alternatif bir inşa metodu daha önermiştir.

Teorem 1.43. (Çaylı, 2019) L bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve W , $[a, 1]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_4: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_4(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, 1]^2 \\ 0 & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [0, a]^2 \cup [0, a] \times I_a \\ & \quad \cup I_a \times [0, a] \cup I_a \times I_a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge a & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (15)$$

Aşağıdaki Teorem 1.44, Teorem 1.45 ve Teorem 1.46'da Ertuğrul vd. sınırlı kafesler üzerinde üçgensel norm elde etmek için üç inşa metodu önermişlerdir.

Teorem 1.44. (Ertuğrul, Kesicioğlu, & Karaçal, 2019) L bir sınırlı kafes ve W , $[a, b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_5: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_5(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \cup [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ & , \quad \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge a & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [0, a] \times L \setminus \{1\} \\ & \cup L \setminus \{1\} \times [0, a) \\ & \cup [a, b] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [a, b) \\ & \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_a^b \times [b, 1) \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_a^b \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \cup [a, b] \times [b, 1) \\ & \cup [b, 1) \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times [b, 1) \\ & \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\}. \end{cases} \quad (16)$$

Teorem 1.45. (Ertuğrul, Kesicioğlu, & Karaçal, 2019) L bir sınırlı kafes ve $W, [a, b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_6: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_6(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \cup [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in \mathbb{I}_b^a \times [b, 1) \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \cup [a, b] \times [b, 1) \\ & \cup [b, 1) \times [a, b], 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (17)$$

Teorem 1.46. (Ertuğrul, Kesicioğlu, & Karaçal, 2019) L bir sınırlı kafes ve $W, [a, b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_7: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_7(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \cup [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in \mathbb{I}_b^a \times [b, 1) \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b] \times [b, 1) \\ & \cup [b, 1) \times [a, b], 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \\ b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (18)$$

Aşağıdaki Teorem 1.47, Teorem 1.48 ve Teorem 1.49'da sırasıyla Karaçal vd., Dan vd. ve Ertuğrul ve Yeşilyurt sınırlı kafesler üzerinde üçgensel norm elde etmek için inşa metotları önermişlerdir.

Teorem 1.47. (Karaçal, Ertuğrul, & Kesicioğlu, 2019) L bir sınırlı kafes ve $W, [a, b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_8: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_8(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \\ W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \\ & \quad \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge a & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [0, a] \times L \setminus \{1\} \\ & \quad \cup L \setminus \{1\} \times [0, a] \\ & \quad \cup [a, b] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [a, b] \\ & \quad \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup \mathbb{I}_a^b \times [b, 1) \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup \mathbb{I}_{a,b} \times L \setminus \{1\} \\ & \quad \cup L \setminus \{1\} \times \mathbb{I}_{a,b} \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in \mathbb{I}_b^a \times [b, 1) \\ & \quad \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1)^2 \\ & \quad \cup [a, b] \times [b, 1) \cup [b, 1) \times [a, b], \\ & \quad 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \end{cases} \quad (19)$$

Teorem 1.48. (Dan, Hu, & Qiao, 2020) $a, b \in L \setminus \{0, 1\}, a < b$ ve $W, [a, b]$ üzerinde bir üçgensel norm olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $T_9: L^2 \rightarrow L$ L' 'de bir üçgensel normdur:

$$T_9(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} W(\ddot{o}, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \\ W(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \\ W(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1)^2, 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\} \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [0, a] \times [b, 1) \\ & \quad \cup [b, 1) \times [0, a] \\ & \quad \cup [0, a] \times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a \times [0, a] \\ & \quad \cup [a, b] \times [b, 1) \cup [b, 1) \times [a, b] \\ & \quad \cup [b, 1) \times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a \times [b, 1) \\ & \quad \cup [0, a] \times \mathbb{I}_{a,b} \cup \mathbb{I}_{a,b} \times [0, a] \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge a & , \quad \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (20)$$

Teorem 1.49. (Ertuğrul & Yeşilyurt, 2019) L bir sınırlı kafes, $0 \leq a \leq b \leq 1$ olacak şekilde $a, b \in L$ için V_1, V_2 ve V_3 sırasıyla L' 'nin $[b, 1], [a, b]$ ve $[0, a]$ alt aralıklarında tanımlı üçgensel normlar olmak üzere aşağıdaki şekilde verilen $T_{10}: L^2 \rightarrow L$ L' 'de bir üçgensel normdur:

$$T_{10}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} V_1(\ddot{o}, \ddot{u}) & , & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \\ V_2(\ddot{o}, \ddot{u}) & , & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \\ V_3(\ddot{o}, \ddot{u}) & , & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [0, a]^2 \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1] \times [0, b) \\ & & \cup [0, b) \times [b, 1) \\ & & \cup [a, b) \times [0, a) \cup [0, a) \times [a, b) \\ & & \cup L \times \{1\} \cup \{1\} \times L \\ V_2(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, 1) \times \mathbb{I}_b \\ & & \cup \mathbb{I}_b \times [a, 1) \\ & & \cup \mathbb{I}_b \times \mathbb{I}_b \\ V_3(\ddot{o} \wedge a, \ddot{u} \wedge a) & , & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \quad (21)$$

Sonuç 1.50. Yukarıdaki inşa metotları göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçlara varılır:

(i) (19) ve (20) formülleri ile verilen inşa metotları herhangi bir L kafesi üzerinde çakışır.

(ii) (21) formülü ile verilen inşa metodunda $V_1 = \wedge, V_2 = W$ ve $V_3 = \wedge$ olarak seçilirse elde edilen t-norm (19) ve (20) formülleri ile verilen inşa metotlarıyla çakışır.

(iii) (21) formülü ile verilen inşa metodunda $V_1 = T_W, V_2 = W, V_3 = \wedge$ olarak seçilirse elde edilen t-norm (16) formülü ile verilen inşa metoduyla çakışır

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölüm, dört alt kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normların inşa metotları üzerinde çalışılmıştır. İkinci kısımda sınırlı kafesler üzerinde üçgensel konormların inşa metotları üzerinde durulmuştur. Üçüncü kısımda birinci kısımda verilen inşa metotları yardımıyla sınırlı bir kafes üzerinde üçgensel normlar için ordinal toplam inşa metotları verilmiştir. Son kısımda ise ikinci kısımda verilen inşa metotları yardımıyla sınırlı bir kafes üzerinde üçgensel konormlar için ordinal toplam inşa metotları verilmiştir.

2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların İnşa Yöntemleri

Bu bölümde, Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de sınırlı bir L kafesinin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde keyfi verilen bir üçgensel normdan, $L \setminus \{0\}$ 'in en küçük elemana sahip olması varsayımı altında, L üzerinde bir üçgensel norm inşa etmek için iki metot verilmiştir. Daha sonra Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'nin uygulamaları olarak örnekler verilmiştir. Ardından Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'deki kısıtlamaların ihmal edilemeyeceği de örneklerle vurgulanmıştır. Ayrıca bu inşa metotlarının literatürde var olan inşa metotlarından farklı olduğu örnekler ile gösterilmiş olup bu inşa metotlarının birbirleriyle olan ilişkileri bazı kısıtlamalar altında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Teorem 2.2. L bir sınırlı kafes, $a, b \in L$ ve $k \in L \setminus \{0\}$ bir en küçük eleman olsun. T^*, L' 'nin $[a, b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel norm ise aşağıdaki şekilde verilen $T_{11}: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L' 'de bir üçgensel normdur:

$$T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \cup [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ k & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (0, a) \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times (0, a) \\ & \cup [a, b] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [a, b] \\ & \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [b, 1] \\ & \cup [b, 1] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_{a,b} \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{I}_{a,b} \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \\ & \cup [a, b] \times [b, 1] \cup [b, 1] \times [a, b] \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [b, 1] \cup [b, 1] \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in L \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times L. \end{cases} \quad (22)$$

İspat: i) Monotonluk: $\ddot{o}, \ddot{u} \in L$ ve her $\zeta \in L$ için $\ddot{o} \leq \ddot{u}$ olacak şekilde $T_{11}(\ddot{o}, \zeta) \leq T_{11}(\ddot{u}, \zeta)$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $\ddot{o} \in (0, a)$ veya $\ddot{o} \in \mathbb{I}_a^b$ veya $\ddot{o} \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise $T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = k$ olup eşitsizlik sağlanır. Benzer şekilde $\zeta \in (0, a)$ veya $\zeta \in \mathbb{I}_a^b$ veya $\zeta \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise eşitsizliğin her iki tarafı da k' 'dir. Ayrıca $\zeta = 1$ ise eşitliğin sağlandığı açıkça görülür. Öte yandan $\ddot{o}$ ve $\ddot{u}$ aynı aralıkta ise $\ddot{o} \leq \ddot{u}$ olduğundan her $\zeta \in L$ için $T_{11}(\ddot{o}, \zeta) \leq T_{11}(\ddot{u}, \zeta)$ 'dir. Bu nedenle, monotonluk özelliği gösterilirken yukarıda belirtilen durumlar aşağıda listelenmemiştir.

1. $\ddot{o} \in [a, b]$ olsun.

1.1. $\ddot{u} \in [b, 1]$,

1.1.1. $\zeta \in [a, b]$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = T^*(\ddot{o}, \zeta) \leq T^*(b, \zeta) = \zeta = \ddot{u} \wedge \zeta \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.1.2. $\zeta \in [b, 1]$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = \ddot{o} \wedge \zeta \wedge b = \ddot{o} < b = \ddot{u} \wedge \zeta \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.1.3. $\zeta \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = T^*(\ddot{o}, \zeta \wedge b) \leq T^*(b, \zeta \wedge b) = \zeta \wedge b = \ddot{u} \wedge \zeta \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2. $\ddot{u} = 1$,

1.2.1. $\zeta \in [a, b]$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = T^*(\ddot{o}, \zeta) \leq T^*(b, \zeta) = \zeta = T_{11}(1, \zeta) = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2.2. $\zeta \in [b, 1]$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = \ddot{o} \wedge \zeta \wedge b = \ddot{o} < b \leq \zeta = T_{11}(1, \zeta) = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2.3. $\zeta \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \zeta) = T^*(\ddot{o}, \zeta \wedge b) \leq T^*(b, \zeta \wedge b) = \zeta \wedge b < \zeta = T_{11}(1, \zeta) = T_{11}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

1.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o}, \varsigma) \leq T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

1.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b \leq \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

1.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \leq T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2. $\ddot{o} \in [b, 1)$ olsun.

2.1. $\ddot{u} = 1$,

2.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = b \leq \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma \wedge b < \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3. $\ddot{o} \in \mathbb{I}_b^a$ olsun.

3.1. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

3.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \leq T^*(b, \varsigma) = \varsigma = \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \ddot{o} \wedge b < b = \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \leq T^*(b, \varsigma \wedge b) = \varsigma \wedge b = \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2. $\ddot{u} = 1$,

3.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \leq T^*(b, \varsigma) = \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \ddot{o} \wedge b < b \leq \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \leq T^*(b, \varsigma \wedge b) = \varsigma \wedge b < \varsigma = T_{11}(1, \varsigma) = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma).$$

ii) Asosyatiflik: Her $\ddot{o}, \ddot{u}, \varsigma \in L$ için $T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma)$ eşitliğinin

sağlandığı gösterilmelidir. $\ddot{o}, \ddot{u}$ ve ς elemanlarından herhangi birinin 0 veya 1 olması

durumunda ispat açıktır. Ayrıca $\ddot{o}$, $\ddot{u}$ ve ς 'den herhangi biri $(0, a)$ 'da veya $\mathbb{I}_a^{b'}$ 'da veya $\mathbb{I}_{a,b}'$ 'nin elemanı ise eşitliğin her iki yanı da k 'ya eşit olur. Yani, $T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) = k = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma)$ 'dır. İspatta kalan tüm diğer olası durumlar listelenmiştir.

1. $\ddot{o} \in [a, b)$ olsun.

1.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

1.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma)) = T^*(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma)) \\ &= T^*(T^*(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}) = T^*(\ddot{o}, \ddot{u}) \\ &= T^*(\ddot{o}, \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = T^*(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) \\ &= T^*(T^*(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma \wedge b) \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

1.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = T^*(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, b) = \ddot{o} \wedge b \wedge b = \ddot{o} \\ &= \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \\ &= T^*(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

1.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = T^*(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) \\ &= T^*(T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) = T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) \\ &= T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) = T^*(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) \\ &= T^*(T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma \wedge b) \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2. $\ddot{o} \in [b, 1)$ olsun.

2.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

2.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma)) = \ddot{o} \wedge T^*(\ddot{u}, \varsigma) \wedge b \\ &= T^*(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b = \ddot{u} \\ &= \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{11}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = \ddot{o} \wedge T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b) \wedge b \\ &= T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{11}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

2.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma \\ &= b \wedge \varsigma = T_{11}(b, \varsigma) \end{aligned}$$

$$= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).$$

2.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, b) = \ddot{o} \wedge b = b \\ &= b \wedge \varsigma = T_{11}(b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) = \ddot{o} \wedge (\varsigma \wedge b) \wedge b \\ &= \varsigma \wedge b = T_{11}(b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

2.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = \ddot{o} \wedge T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \wedge b \\ &= T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) = \ddot{o} \wedge (\ddot{u} \wedge b) \wedge b \\ &= \ddot{u} \wedge b = (\ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{11}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) = \ddot{o} \wedge T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) \wedge b \\ &= T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{11}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3. $\ddot{o} \in \mathbb{I}_b^a$ olsun.

3.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

3.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma)) = T^*(\ddot{o} \wedge b, T^*(\ddot{u}, \varsigma)) \\ &= T^*(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) \\ &= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}) \\
&= T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = T^*(\ddot{o} \wedge b, T^*(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) \\
&= T^*(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma \wedge b) \\
&= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

3.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma) \\
&= T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, b) = \ddot{o} \wedge b = (\ddot{o} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \\
&= T^*(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{11}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

3.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = T^*(\ddot{o} \wedge b, T^*(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) \\
&= T^*(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) \\
&= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) = T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) \\
&= T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(\ddot{o}, T_{11}(\ddot{u}, \zeta)) &= T_{11}(\ddot{o}, T^*(\ddot{u} \wedge b, \zeta \wedge b)) = T^*(\ddot{o} \wedge b, T^*(\ddot{u} \wedge b, \zeta \wedge b)) \\
&= T^*(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \zeta \wedge b) \\
&= T_{11}(T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \zeta) = T_{11}(T_{11}(\ddot{o}, \ddot{u}), \zeta).
\end{aligned}$$

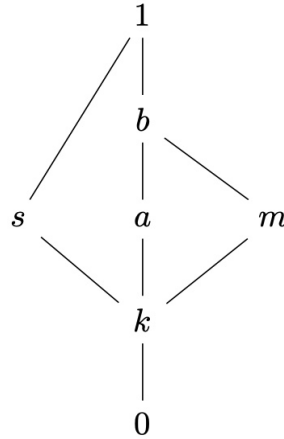
T_{11} komütatiftir. T_{11} 'in birim elemanı 1'dir. Böylece T_{11} bir t-normdur.

T_{11} t-normun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$I_{a,b}$	k	k	k	k	k	k
I_b^a	k	$T^*(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b)$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k	$T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b)$	k
I_a^b	k	k	k	k	k	k
1	k	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k
b	k	$T^*(\ddot{o}, \ddot{u})$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k	$T^*(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u})$	k
a	k	k	k	k	k	k
0	a	b	1	I_a^b	I_b^a	$I_{a,b}$

Şekil 2. T_{11} t-normun yapısı

Örnek 2.3. Şekil 3'te verilen $(L_1 = \{0, k, a, b, m, s, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi alınsın. $(L_1, \leq)$ kafesinin Teorem 2.2'nin şartlarını sağladığı kolayca görülür.



Şekil 3. L_1 kafes diyagramı

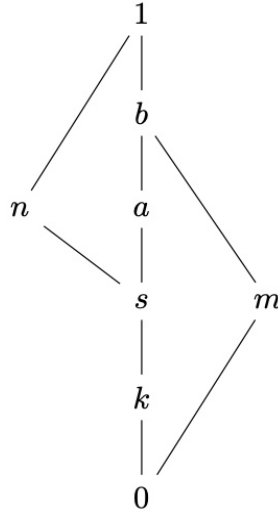
$[a, b]$ üzerinde $T^* = T_{\wedge}$ t-normu seçilirse Teorem 2.2 ile L_1' 'de T_{11} t-normu Tablo 1'deki gibi bulunur.

Tablo 1. L_1 üzerinde T_{11} t-normu

T_{11}	0	k	a	b	m	s	1
0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	k	k	k	k	k	k
a	0	k	a	a	k	k	a
b	0	k	a	b	k	k	b
m	0	k	k	k	k	k	m
s	0	k	k	k	k	k	s
1	0	k	a	b	m	s	1

Uyarı 2.4. Teorem 2.2 ile verilen inşa yöntemindeki ilave şartlar kaldırılamaz. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.5. Şekil 4 ile verilen $(L_2 = \{0, k, s, a, b, m, n, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 4. L_2 kafes diyagramı

$m \in \mathbb{I}_a^b$ ve $k \in (0, a)$ için $m \parallel k$ olacak şekilde bir $m \in L_2$ elemanı olduğu için $(L_2, \leq)$ kafesinin Teorem 2.2'de belirtilen ilave şartları sağlamadığı açıktır. Teorem 2.2 kullanılarak, $T_{11}(k, m) = k \not\leq m = T_{11}(1, m)$ elde edilir. Buradan, T_{11} fonksiyonu monotonluk

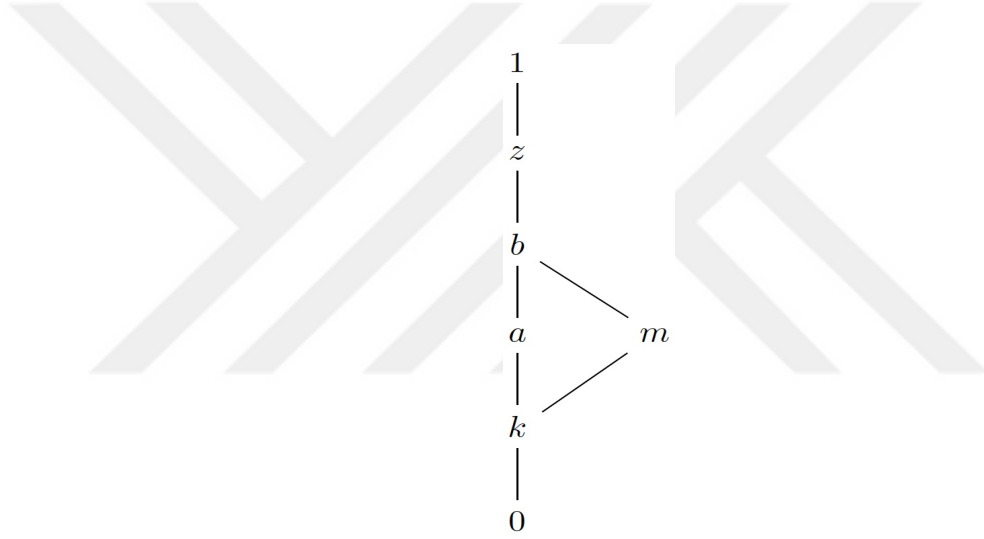
özelliğini sağlamadığı için L_2 üzerinde bir t-norm değildir. Ayrıca eşitsizliğin T^* t-norm seçiminden bağımsız elde edildiğine dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.6.

(i) (22) ile ifade edilen inşa metodu (12) ile ifade edilen inşa metodundan farklı bir yapıya sahiptir (Bakınız Örnek 2.7). Ayrıca (12) ile ifade edilen inşa metodu her durumda bir üçgensel norm olmayabilir (Bakınız Teorem 1.40).

(ii) (22) ile ifade edilen inşa metodu (16), (17), (18), (19), (20) ve (21) ile ifade edilen inşa metotlarından farklıdır (Bakınız Örnek 2.8).

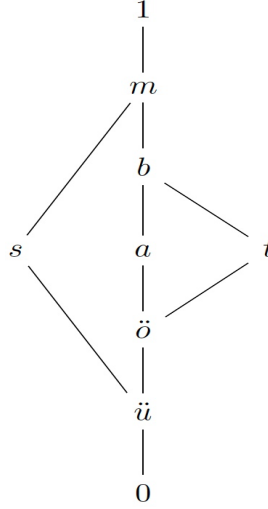
Örnek 2.7. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_3 = \{0, k, a, b, m, z, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 5. L_3 kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.39 ve Teorem 2.2 kullanılarak, $T_1(m, z) = m \neq k = T_{11}(m, z)$ elde edilir ve buradan $T_1 \neq T_{11}$ bulunur. Ayrıca farklılığın W ve T^* seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 2.8. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_4 = \{0, \ddot{u}, \ddot{o}, a, b, m, t, s, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.

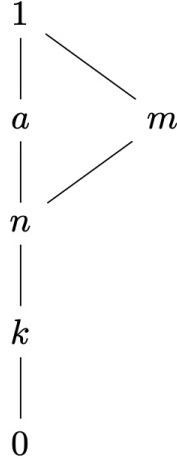


Şekil 6. L_4 kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.44, Teorem 1.45, Teorem 1.46, Teorem 1.47, Teorem 1.48, Teorem 1.49 ve Teorem 2.2 kullanılarak, $T_5(\bar{o}, \bar{o}) = \bar{o} \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{o}, \bar{o})$, $T_6(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{u}, \bar{u})$, $T_7(\bar{u}, \bar{o}) = 0 \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{u}, \bar{o})$, $T_8(\bar{o}, \bar{o}) = \bar{o} \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{o}, \bar{o})$, $T_9(\bar{o}, \bar{o}) = \bar{o} \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{o}, \bar{o})$ ve $T_{10}(\bar{o}, m) = \bar{o} \neq \bar{u} = T_{11}(\bar{o}, m)$ elde edilir. Buradan, T_{11} üçgensel normunun T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 ve T_{10} üçgensel normlarından farklı olduğu görülür. Ayrıca farklılıkların T^*, W, V_1, V_2 ve V_3 'ün seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.9. (22) formülünde $b = 1$ alınsa dahi (22) formülü ile elde edilen T_{11} üçgensel normu, (13), (14) ve (15) formülleri ile verilen sırasıyla T_2, T_3 ve T_4 üçgensel normları eşit olmak zorunda değildir. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.10. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_5 = \{0, k, n, a, m, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.

Şekil 7. L_5 kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.41, Teorem 1.42, Teorem 1.43 ve Teorem 2.2 kullanılarak, $T_2(n, n) = n \neq k = T_{11}(n, n)$, $T_3(k, k) = 0 \neq k = T_{11}(k, k)$ ve $T_4(k, m) = 0 \neq k = T_{11}(k, m)$ olduğu elde edilir. Buradan, $T_{11} \neq T_2$, $T_{11} \neq T_3$ ve $T_{11} \neq T_4$ bulunur. Ayrıca farklılıkların W ve T^* seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerilen inşa metotları ile literatürde mevcut olan yöntemler kıyaslandıktan sonra doğal olarak akla "Teorem 2.2'deki inşa yöntemi ile literatürdeki inşa yöntemleri bazı kısıtlamalar altında çakışabilir mi?" sorusu gelir. Aşağıdaki uyarıda bu soruya cevap verilmiştir.

Uyarı 2.11.

(i) (16), (18) ve (22) formüllerinde $a = 0$ alınırsa (16) ve (18) formülleri ile sırasıyla elde edilen T_5 ve T_7 üçgensel normları, (22) formülü ile elde edilen T_{11} üçgensel normu ile çakışır.

(ii) (22) formülünde $a = 0$ ve (21) formülünde $a = 0, V_1 = T_W$ ve $V_2 = T^*$ alınırsa (21)'de verilen T_{10} üçgensel normu, (22) formülü ile bulunan T_{11} üçgensel normu ile çakışır.

Aşağıdaki teoremden, üçgensel normlar için bir başka inşa metodu verilmiştir.

Teorem 2.12. L bir sınırlı kafes, $a, b \in L$ ve $k \in L \setminus \{0\}$ bir en küçük eleman olsun. T^{**}, L' nin $[a, b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel norm ise aşağıdaki şekilde verilen $T_{12}: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L' de bir üçgensel normdur:

$$T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b]^2 \cup [a, b] \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [a, b] \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ k & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (0, a) \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times (0, a) \\ & \cup [a, b] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [a, b] \\ & \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [b, 1] \\ & \cup [b, 1] \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_{a,b} \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{I}_{a,b} \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [a, b] \times [b, 1] \\ & \cup [b, 1] \times [a, b] \\ & \cup \mathbb{I}_b^a \times [b, 1] \cup [b, 1] \times \mathbb{I}_b^a \\ \ddot{o} \wedge \ddot{u} & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in [b, 1]^2 \\ & \cup L \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times L. \end{cases} \quad (23)$$

İspat: i) Monotonluk: $\ddot{o}, \ddot{u} \in L$ ve her $\zeta \in L$ için $\ddot{o} \leq \ddot{u}$ olacak şekilde $T_{12}(\ddot{o}, \zeta) \leq T_{12}(\ddot{u}, \zeta)$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $\ddot{o} \in (0, a)$ veya $\ddot{o} \in \mathbb{I}_a^b$ veya $\ddot{o} \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise $T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = k$ olup eşitsizlik sağlanır. Benzer şekilde $\zeta \in (0, a)$ veya $\zeta \in \mathbb{I}_a^b$ veya $\zeta \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise eşitsizliğin her iki tarafı da k 'dir. Ayrıca $\zeta = 1$ ise eşitliğin sağlandığı açıkça görülür. Öte yandan $\ddot{o}$ ve $\ddot{u}$ aynı aralıkta ise $\ddot{o} \leq \ddot{u}$ olduğundan tüm $\zeta \in L$ için $T_{12}(\ddot{o}, \zeta) \leq T_{12}(\ddot{u}, \zeta)$ 'dir. Bu nedenle, monotonluk özelliği gösterilirken yukarıda belirtilen durumlar aşağıda listelenmemiştir.

1. $\ddot{o} \in [a, b]$ olsun.

1.1. $\ddot{u} \in [b, 1]$,

1.1.1. $\zeta \in [a, b]$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = T^{**}(\ddot{o}, \zeta) \leq T^{**}(b, \zeta) = \zeta = \ddot{u} \wedge \zeta \wedge b = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.1.2. $\zeta \in [b, 1]$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = \ddot{o} \wedge \zeta \wedge b = \ddot{o} < b \leq \ddot{u} \wedge \zeta = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.1.3. $\zeta \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = T^{**}(\ddot{o}, \zeta \wedge b) \leq T^{**}(b, \zeta \wedge b) = \zeta \wedge b = \ddot{u} \wedge \zeta \wedge b = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2. $\ddot{u} = 1$,

1.2.1. $\zeta \in [a, b]$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = T^{**}(\ddot{o}, \zeta) \leq T^{**}(b, \zeta) = \zeta = T_{12}(1, \zeta) = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2.2. $\zeta \in [b, 1]$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = \ddot{o} \wedge \zeta \wedge b = \ddot{o} < b \leq \zeta = T_{12}(1, \zeta) = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.2.3. $\zeta \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \zeta) = T^{**}(\ddot{o}, \zeta \wedge b) \leq T^{**}(b, \zeta \wedge b) = \zeta \wedge b < \zeta = T_{12}(1, \zeta) = T_{12}(\ddot{u}, \zeta).$$

1.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

1.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o}, \varsigma) \leq T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

1.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b \leq \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

1.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \leq T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2. $\ddot{o} \in [b, 1)$ olsun.

2.1. $\ddot{u} = 1$,

2.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \leq \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

2.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma \wedge b < \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3. $\ddot{o} \in \mathbb{I}_b^a$ olsun.

3.1. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

3.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \leq T^{**}(b, \varsigma) = \varsigma = \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \ddot{o} \wedge b < b \leq \ddot{u} \wedge \varsigma = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \leq T^{**}(b, \varsigma \wedge b) = \varsigma \wedge b = \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2. $\ddot{u} = 1$,

3.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \leq T^{**}(b, \varsigma) = \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \ddot{o} \wedge b < b \leq \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

3.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \leq T^{**}(b, \varsigma \wedge b) = \varsigma \wedge b < \varsigma = T_{12}(1, \varsigma) = T_{12}(\ddot{u}, \varsigma).$$

ii) Asosyatiflik: Her $\ddot{o}, \ddot{u}, \varsigma \in L$ için $T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma)$ olmalıdır.

$\ddot{o}, \ddot{u}$ ve ς elemanlarından herhangi birinin 0 veya 1 olması durumunda ispat açıktır. Ayrıca

$\ddot{o}, \ddot{u}$ ve ς' den herhangi biri $(0, a)$ 'da veya $\mathbb{I}_a^b$ 'da veya $\mathbb{I}_{a,b}'$ nin elemanı ise eşitliğin her iki yanı da k' ya eşit olur. Yani, $T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) = k = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma)$ ' dir. İspatta kalan tüm diğer durumlar listelenmiştir.

1. $\ddot{o} \in [a, b)$ olsun.

1.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

1.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma)) = T^{**}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}) = T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}) \\ &= T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = T^{**}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

1.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma) = \ddot{o} \wedge (\ddot{u} \wedge \varsigma) \wedge b = \ddot{o} \\ &= \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \\ &= T^{**}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

1.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = T^{**}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) = T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) \\ &= T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

1.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) = T^{**}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2. $\ddot{o} \in [b, 1)$ olsun.

2.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

2.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma)) = \ddot{o} \wedge T^{**}(\ddot{u}, \varsigma) \wedge b = T^{**}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b = \ddot{u} \\ &= \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = \ddot{o} \wedge T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b) \wedge b \\ &= T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(\ddot{u}, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

2.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

2.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = \ddot{o} \wedge \varsigma \wedge b = \varsigma$$

$$\begin{aligned}
&= (\ddot{o} \wedge \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u}, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

2.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma) = \ddot{o} \wedge (\ddot{u} \wedge \varsigma) \\
&= (\ddot{o} \wedge \ddot{u}) \wedge \varsigma \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u}, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

2.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) = \ddot{o} \wedge (\varsigma \wedge b) \wedge b \\
&= \varsigma \wedge b = (\ddot{o} \wedge \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u}, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

2.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

2.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = \ddot{o} \wedge T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \wedge b \\
&= T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{12}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

2.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b) = \ddot{o} \wedge (\ddot{u} \wedge b) \wedge b \\
&= \ddot{u} \wedge b = (\ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\
&= T_{12}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

2.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) = \ddot{o} \wedge T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) \wedge b \\
&= T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b) \\
&= T_{12}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma) \\
&= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3. $\ddot{o} \in \mathbb{I}_b^a$ olsun.

3.1. $\ddot{u} \in [a, b)$,

3.1.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned}
T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma)) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma)) \\
&= T^{**}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) \\
&= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

3.1.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}) \\ &= T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.1.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, T^{**}(\ddot{u}, \varsigma \wedge b)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u}), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.2. $\ddot{u} \in [b, 1)$,

3.2.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.2.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma) = \ddot{o} \wedge (\ddot{u} \wedge \varsigma) \wedge b = \ddot{o} \wedge b \\ &= (\ddot{o} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b = T_{12}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.2.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma \wedge b) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge b, \varsigma) \\ &= T_{12}(\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b, \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.3. $\ddot{u} \in \mathbb{I}_b^a$,

3.3.1. $\varsigma \in [a, b)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma)) \\ &= T^{**}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.3.2. $\varsigma \in [b, 1)$,

$$\begin{aligned} T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) &= T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge \varsigma \wedge b) = T_{12}(\ddot{o}, \varsigma \wedge b) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) \\ &= T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b) \wedge \varsigma \wedge b \\ &= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma). \end{aligned}$$

3.3.3. $\varsigma \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{12}(\ddot{o}, T_{12}(\ddot{u}, \varsigma)) = T_{12}(\ddot{o}, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b)) = T^{**}(\ddot{o} \wedge b, T^{**}(\ddot{u} \wedge b, \varsigma \wedge b))$$

$$\begin{aligned}
&= T^{**}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma \wedge b) \\
&= T_{12}(T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b), \varsigma) = T_{12}(T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u}), \varsigma).
\end{aligned}$$

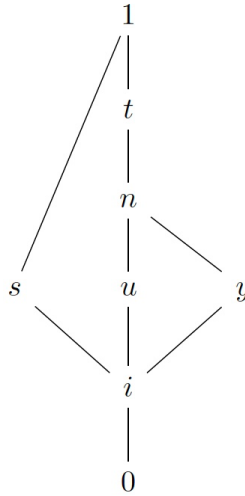
Açıkça, T_{12} değişmelidir ve 1 birim elemandır.

T_{12} t-normun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$I_{a,b}$	k	k	k	k	k	k
I_b^a	k	$T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \wedge b)$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k	$T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u} \wedge b)$	k
I_a^b	k	k	k	k	k	k
1	k	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u}$	k	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k
b	k	$T^{**}(\ddot{o}, \ddot{u})$	$\ddot{o} \wedge \ddot{u} \wedge b$	k	$T^{**}(\ddot{o} \wedge b, \ddot{u})$	k
a	k	k	k	k	k	k
0	a	b	1	I_a^b	I_b^a	$I_{a,b}$

Şekil 8. T_{12} t-normun yapısı

Örnek 2.13. Şekil 9'da verilen $(L_6 = \{0, i, u, n, t, y, s, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi alınsın. $(L_6, \leq)$ kafesinin Teorem 2.12'nin şartlarını sağladığı kolayca görülür.



Şekil 9. L_6 kafes diyagramı

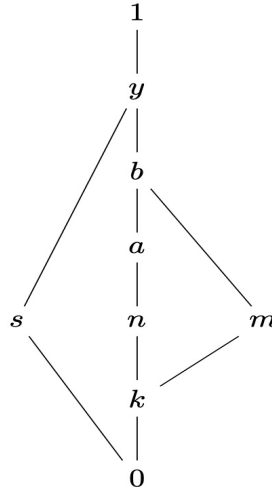
$[u, n]$ üzerinde $T^{**} = T_{\wedge}$ t-normu seçilirse Teorem 2.12 ile L_6' 'da T_{12} t-normu Tablo 2'deki gibi bulunur.

Tablo 2. L_6 üzerinde T_{12} t-normu

T_{12}	0	i	u	n	t	y	s	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	i	i	i	i	i	i	i
u	0	i	u	u	u	i	i	u
n	0	i	u	n	n	i	i	n
t	0	i	u	n	t	i	i	t
y	0	i	i	i	i	i	i	y
s	0	i	i	i	i	i	i	s
1	0	i	u	n	t	y	s	1

Uyarı 2.14. Teorem 2.12 ile verilen inşa yöntemindeki ilave şartlar kaldırılamaz. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.15. Şekil 10 ile verilen $(L_7 = \{0, k, n, a, b, y, m, s, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 10. L_7 kafes diyagramı

$s \in \mathbb{I}_{a,b}$ ve $k \in (0, a)$ için $s \parallel k$ olacak şekilde bir $s \in L_7$ elemanı olduğu için $(L_7, \leq)$ kafesinin Teorem 2.12'de belirtilen ilave şartları sağlamadığı açıktır. Teorem 2.12 kullanılarak, $T_{12}(k, s) = k \not\leq s = T_{12}(1, s)$ elde edilir. Buradan, T_{12} fonksiyonu

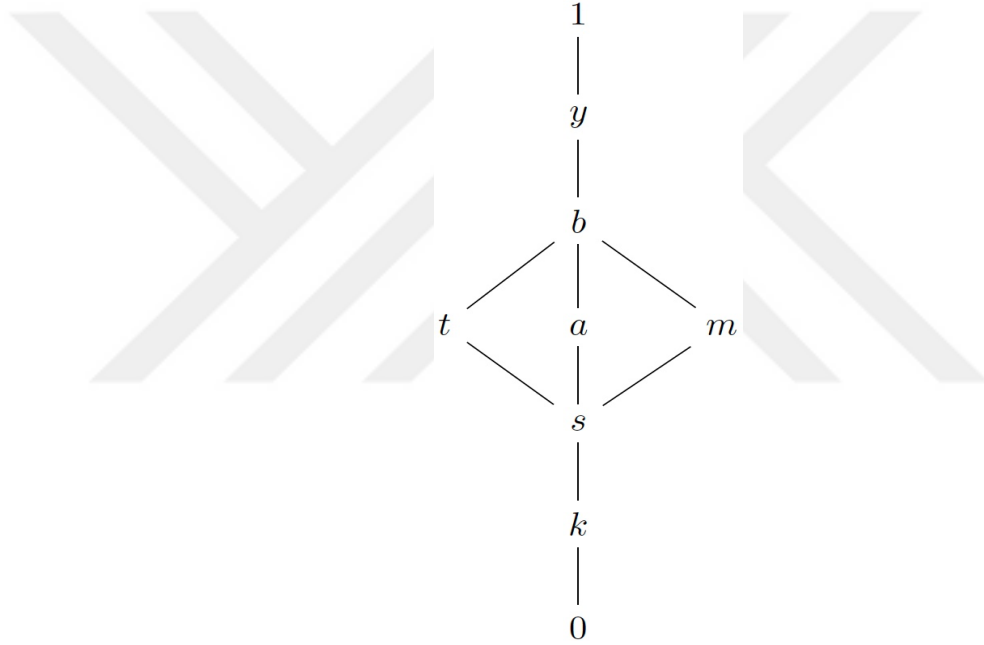
monotonluk özelliğini sağlamadığı için L_7 üzerinde bir t-norm değildir. Ayrıca eşitsizliğin T^{**} t-norm seçiminden bağımsız elde edildiğine dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.16.

(i) (23) ile ifade edilen inşa metodu (12) ile ifade edilen inşa metodundan farklı bir yapıya sahiptir (Bakınız Örnek 2.17).

(ii) (23) ile ifade edilen inşa metodu (16), (17), (18), (19), (20) ve (21) formülleriyle ifade edilen inşa metotlarından farklı bir yapıya sahiptir (Bakınız Örnek 2.18).

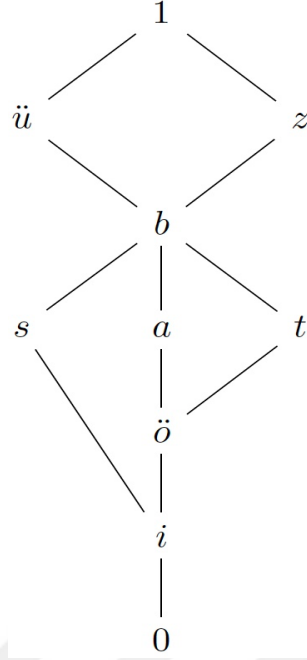
Örnek 2.17. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_8 = \{0, k, s, a, b, t, m, y, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 11. L_8 kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.39 ve Teorem 2.12 kullanılarak, $T_1(s, t) = s \neq k = T_{12}(s, t)$ elde edilir ve buradan $T_1 \neq T_{12}$ bulunur. Ayrıca farklılığın W ve T^{**} seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

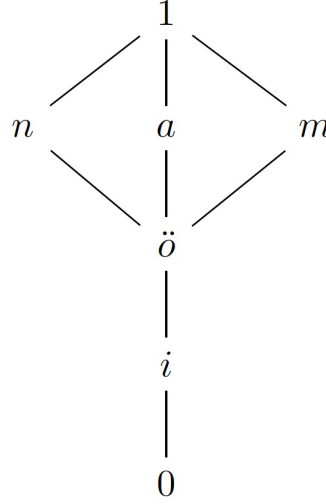
Örnek 2.18. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_9 = \{0, i, ö, a, b, ü, z, s, t, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.

Şekil 12. L_9 kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.44, Teorem 1.45, Teorem 1.46, Teorem 1.47, Teorem 1.48, Teorem 1.49 ve Teorem 2.12 kullanılarak, $T_5(\ddot{o}, \ddot{o}) = \ddot{o} \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$, $T_6(\ddot{o}, \ddot{o}) = 0 \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$, $T_7(\ddot{o}, \ddot{o}) = 0 \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$, $T_8(\ddot{o}, \ddot{o}) = \ddot{o} \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$, $T_9(\ddot{o}, \ddot{o}) = \ddot{o} \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$ ve $T_{10}(\ddot{o}, \ddot{u}) = \ddot{o} \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{u})$ bulunur. Buradan, T_{12} üçgensel normunun T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 ve T_{10} üçgensel normlarından farklı olduğu görülür. Ayrıca farklılıkların T^{**}, W, V_1, V_2 ve V_3 'ün seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.19. (23) formülünde $b = 1$ alınsa dahi (23) formülü ile elde edilen T_{12} üçgensel normu, (13), (14) ve (15) formülleri ile verilen sırasıyla T_2, T_3 ve T_4 üçgensel normları eşit olmak zorunda değildir. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.20. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_{10} = \{0, i, \ddot{o}, a, n, m, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.

Şekil 13. L_{10} kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 1.41, Teorem 1.42, Teorem 1.43 ve Teorem 2.12 kullanılarak, $T_2(\ddot{o}, \ddot{o}) = \ddot{o} \neq i = T_{12}(\ddot{o}, \ddot{o})$, $T_3(i, \ddot{o}) = 0 \neq i = T_{12}(i, \ddot{o})$ ve $T_4(n, n) = 0 \neq i = T_{12}(n, n)$ olduğu elde edilir. Buradan, $T_{12} \neq T_2$, $T_{12} \neq T_3$ ve $T_{12} \neq T_4$ bulunur. Ayrıca farklılıkların W ve T^{**} seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerilen inşa metotları ile literatürde mevcut olan yöntemler kıyaslandıktan sonra doğal olarak akla "Teorem 2.12'deki inşa yöntemi ile literatürdeki inşa yöntemleri bazı kısıtlamalar altında çakışabilir mi?" sorusu gelir. Aşağıdaki uyarıda bu soruya cevap verilmiştir.

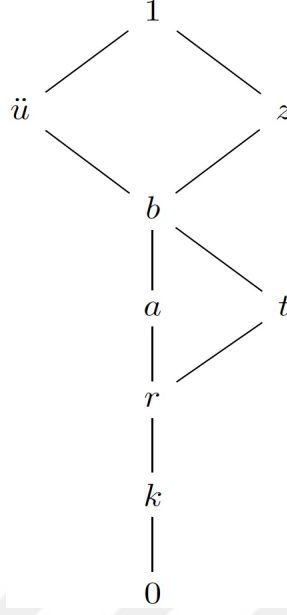
Uyarı 2.21.

(i) (17), (19), (20) ve (23) formüllerinde $a = 0$ alınırsa (17), (19) ve (20) formülleri ile sırasıyla elde edilen T_6, T_8 ve T_9 üçgensel normları, (23) formülü ile elde edilen T_{12} üçgensel normu ile çakışır.

(ii) (23) formülünde $a = 0$ ve (21) formülünde $a = 0, V_1 = \wedge$ ve $V_2 = T^{**}$ alınırsa (21) formülü ile bulunan T_{10} üçgensel normu, (23) formülü ile bulunan T_{12} üçgensel normu ile çakışır.

Uyarı 2.22. Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de verilen inşa yöntemleri birbirinden farklıdır. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.23. Şekil 14'te verilen $(L_{11} = \{0, k, r, a, b, \ddot{u}, z, t, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 14. L_{11} kafes diyagramı

Bu kafes diyagramında, Teorem 2.2 ve Teorem 2.12 kullanılarak, $T_{11}(\ddot{u}, \ddot{u}) = b \neq \ddot{u} = T_{12}(\ddot{u}, \ddot{u})$ elde edilir. Böylece kolayca görülür ki T_{11} ve T_{12} t-normları birbirinden farklıdır. Ayrıca farklılıkların T^* ve T^{**} seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Konormların İnşa Yöntemleri

Bu bölümde, Teorem 2.24 ve Teorem 2.25'te verilen üçgensel konorm inşa metotları, Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de verilen üçgensel norm inşa metotlarından dual olarak elde edilmiştir. Bu sebeple ispatlara yer verilmemiştir.

Teorem 2.24. L bir sınırlı kafes, $a, b \in L$ ve $k \in L \setminus \{1\}$ bir en büyük eleman olsun. S^*, L' 'nin $[a, b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel konorm ise aşağıdaki şekilde verilen $S_1: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L' 'de bir üçgensel konormdur:

$$S_1(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} S^*(\ddot{o} \vee a, \ddot{u} \vee a) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (a, b]^2 \cup (a, b] \times I_a^b \\ & \cup I_a^b \times (a, b] \cup I_a^b \times I_a^b \\ k & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (0, a] \times (b, 1) \\ & \cup (a, b] \times (b, 1) \\ & \cup (b, 1) \times (0, a] \\ & \cup (b, 1) \times (a, b] \\ & \cup (b, 1)^2 \\ & \cup (b, 1) \times I_a^b \cup I_a^b \times (b, 1) \\ & \cup I_b^a \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times I_b^a \\ & \cup I_{a,b} \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times I_{a,b} \\ \ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in I_a^b \times (0, a] \\ & \cup (0, a] \times I_a^b \cup (0, a]^2 \\ \ddot{o} \vee \ddot{u} & , \quad \cup (a, b] \times (0, a] \cup (0, a] \times (a, b] \\ & 0, 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\}. \end{cases} \quad (24)$$

İspat: Teorem 2.2'ye benzer şekilde ispatlanır.

S_1 t-konormun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$I_{a,b}$	k	k	k	k	k	k
I_b^a	k	k	k	k	k	k
I_a^b	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	$S^*(\ddot{o}, \ddot{u} \vee a)$	k	$S^*(\ddot{o} \vee a, \ddot{u} \vee a)$	k	k
1	k	k	k	k	k	k
b	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	$S^*(\ddot{o}, \ddot{u})$	k	$S^*(\ddot{o} \vee a, \ddot{u})$	k	k
a	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	k	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	k	k
0	a	b	1	I_a^b	I_b^a	$I_{a,b}$

Şekil 15. S_1 t-konormun yapısı

Teorem 2.25. L bir sınırlı kafes, $a, b \in L$ ve $k \in L \setminus \{1\}$ bir en büyük eleman olsun. S^{**}, L' 'nin $[a, b]$ alt aralığında bir üçgensel konorm ise aşağıdaki gibi verilen $S_2: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L' 'de bir üçgensel konormdur:

$$S_2(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} S^{**}(\ddot{o} \vee a, \ddot{u} \vee a) & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (a, b]^2 \cup (a, b] \times I_a^b \\ & \cup I_a^b \times (a, b] \cup I_a^b \times I_a^b \\ k & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (0, a] \times (b, 1) \\ & \cup (a, b] \times (b, 1) \\ & \cup (b, 1) \times (0, a] \\ & \cup (b, 1) \times (a, b] \\ & \cup (b, 1)^2 \\ & \cup (b, 1) \times I_a^b \cup I_a^b \times (b, 1) \\ & \cup I_b^a \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times I_b^a \\ & \cup I_{a,b} \times L \setminus \{0, 1\} \\ & \cup L \setminus \{0, 1\} \times I_{a,b} \\ \ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a & , \quad (\ddot{o}, \ddot{u}) \in I_a^b \times (0, a] \\ & \cup (0, a] \times I_a^b \\ \ddot{o} \vee \ddot{u} & , \quad \cup (a, b] \times (0, a] \cup (0, a] \times (a, b] \\ & (\ddot{o}, \ddot{u}) \in (0, a]^2, 0, 1 \in \{\ddot{o}, \ddot{u}\}. \end{cases} \quad (25)$$

İspat: Teorem 2.12'ye benzer şekilde ispatlanır.

S_2 t-konormun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$I_{a,b}$	k	k	k	k	k	k
I_b^a	k	k	k	k	k	k
I_a^b	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	$S^{**}(\ddot{o}, \ddot{u} \vee a)$	k	$S^{**}(\ddot{o} \vee a, \ddot{u} \vee a)$	k	k
1	k	k	k	k	k	k
b	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	$S^{**}(\ddot{o}, \ddot{u})$	k	$S^{**}(\ddot{o} \vee a, \ddot{u})$	k	k
a	$\ddot{o} \vee \ddot{u}$	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	k	$\ddot{o} \vee \ddot{u} \vee a$	k	k
0	a	b	1	I_a^b	I_b^a	$I_{a,b}$

Şekil 16. S_2 t-konormun yapısı

2.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların Modifiye Ordinal Toplam İnşaları

Bu bölümde, [8] çalışması göz önüne alınarak, Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de önerilen inşa metotları, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde üçgensel normlar için modifiye ordinal toplam inşasına genelleştirilmiştir. Dahası genelleştirilmiş bu metotlar örneklerle desteklenmiştir.

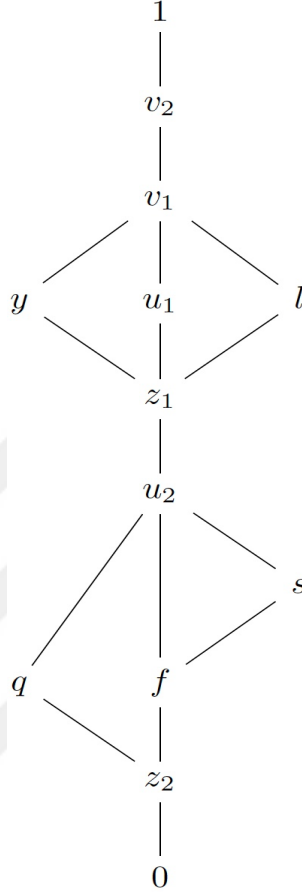
Teorem 2.26. L bir sınırlı kafes ve $0 = a_n < \dots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = 1$ olacak şekilde L 'nin $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{i-1} \in L \setminus \{a_i\}$ 'nin en küçük elemanı ve $T^*, [a_1, b_1]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $T_n: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir üçgensel normdur, burada $T_1 = T^*$ ve $i \in \{2, \dots, n\}$ için $T_i: [a_i, b_i]^2 \rightarrow [a_i, b_i]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$T_i(\ddot{o}, \ddot{u}) = \begin{cases} T_{i-1}(x \wedge b_{i-1}, y \wedge b_{i-1}) & , & (x, y) \in [a_{i-1}, b_{i-1}]^2 \\ & & \cup [a_{i-1}, b_{i-1}] \times I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \\ & & \cup I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & & \cup I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \times I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \\ k_{i-1} & , & (x, y) \in (a_i, a_{i-1}) \times L \setminus \{a_i, b_i\} \\ & & \cup L \setminus \{a_i, b_i\} \times (a_i, a_{i-1}) \\ & & \cup [a_{i-1}, b_{i-1}] \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \\ & & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times [b_{i-1}, b_i] \\ & & \cup [b_{i-1}, b_i] \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & & \cup I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & & \cup I_{a_{i-1}, b_{i-1}} \times L \setminus \{a_i, b_i\} \\ & & \cup L \setminus \{a_i, b_i\} \times I_{a_{i-1}, b_{i-1}} \\ x \wedge y \wedge b_{i-1} & , & (x, y) \in I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \times [b_{i-1}, b_i] \\ & & \cup [b_{i-1}, b_i] \times I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \\ & & \cup [b_{i-1}, b_i] \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & & \cup [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [b_{i-1}, b_i] \\ & & \cup [b_{i-1}, b_i]^2 \\ x \wedge y & , & a_i, b_i \in \{x, y\}. \end{cases} \quad (26)$$

İspat: Teorem 2.2'den tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

Teorem 2.26'nın bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.27. Şekil 17'de verilen $(L_{12} = \{0, z_2, f, q, s, u_2, z_1, y, l, u_1, v_1, v_2, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 17. L_{12} kafes diyagramı

$[u_1, v_1]$ üzerinde $T_1 = T_{\wedge}$ t-normu alınırsa Teorem 2.26 yardımıyla $T_2: [u_2, v_2]^2 \rightarrow [u_2, v_2]$ ve $T_3: L_{12}^2 \rightarrow L_{12}$ t-normları Tablo 3 ve Tablo 4'teki gibi bulunur.

Tablo 3. $[u_2, v_2]$ üzerinde T_2 t-normu

T_2	u_2	z_1	y	l	u_1	v_1	v_2
u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2
z_1	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
y	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	y
l	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	l
u_1	u_2	z_1	z_1	z_1	u_1	u_1	u_1
v_1	u_2	z_1	z_1	z_1	u_1	v_1	v_1
v_2	u_2	z_1	y	z	u_1	v_1	v_2

Tablo 4. L_{12} üzerinde T_3 t-normu

T_3	0	z_2	f	q	s	u_2	z_1	y	l	u_1	v_1	v_2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2
f	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	f
q	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	q
s	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	s
u_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2
z_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
y	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	y	y
l	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	l	l
u_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	u_1	u_1	u_1	u_1
v_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	u_1	v_1	v_1	v_1
v_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	y	l	u_1	v_1	v_2	v_2
1	0	z_2	f	q	s	u_2	z_1	y	l	u_1	v_1	v_2	1

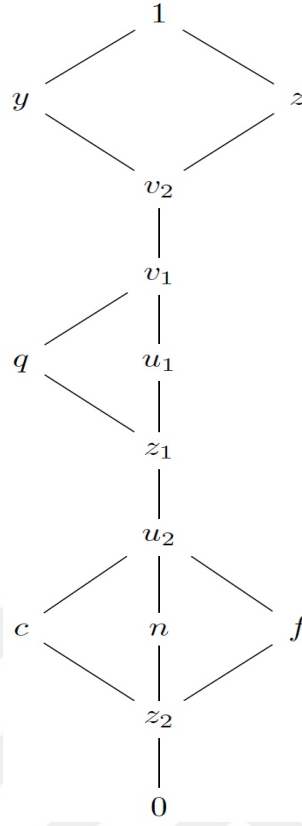
Teorem 2.28. L bir sınırlı kafes ve $0 = a_n < \dots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = 1$ olacak şekilde L 'nin $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{j-1} \in L \setminus \{a_j\}$ 'nin en küçük elemanı ve $T^{**}, [a_1, b_1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $T_n: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur, burada $T_1 = T^{**}$ ve $j \in \{2, \dots, n\}$ için $T_j: [a_j, b_j]^2 \rightarrow [a_j, b_j]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$T_j(l, m) = \begin{cases} T_{j-1}(l \wedge b_{j-1}, m \wedge b_{j-1}) & , \quad (l, m) \in [a_{j-1}, b_{j-1}]^2 \\ & \cup [a_{j-1}, b_{j-1}) \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times [a_{j-1}, b_{j-1}) \\ & \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ k_{j-1} & , \quad (l, m) \in (a_j, a_{j-1}) \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times (a_j, a_{j-1}) \\ & \cup [a_{j-1}, b_{j-1}) \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times [a_{j-1}, b_{j-1}) \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times [b_{j-1}, b_j) \\ & \cup [b_{j-1}, b_j) \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \\ l \wedge m \wedge b_{j-1} & , \quad (l, m) \in I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times [b_{j-1}, b_j) \\ & \cup [b_{j-1}, b_j) \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \cup [b_{j-1}, b_j) \times [a_{j-1}, b_{j-1}) \\ & \cup [a_{j-1}, b_{j-1}) \times [b_{j-1}, b_j) \\ l \wedge m & , \quad (l, m) \in [b_{j-1}, b_j]^2, a_j, b_j \in \{l, m\}. \end{cases} \quad (27)$$

İspat: Teorem 2.12'den tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

Teorem 2.28'in bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.29. Şekil 18'de verilen $(L_{13} = \{0, z_2, c, n, f, u_2, z_1, q, u_1, v_1, v_2, y, z, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.

Şekil 18. L_{13} kafes diyagramı

$[u_1, v_1]$ üzerinde $T_1 = T_W$ t-normu alınırsa Teorem 2.28 yardımıyla $T_2: [u_2, v_2]^2 \rightarrow [u_2, v_2]$ ve $T_3: L_{13}^2 \rightarrow L_{13}$ t-normları Tablo 5 ve Tablo 6'daki gibi bulunur.

Tablo 5. $[u_2, v_2]$ üzerinde T_2 t-normu

T_2	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2
u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2
z_1	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
q	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	q
u_1	u_2	z_1	z_1	u_1	u_1	u_1
v_1	u_2	z_1	z_1	u_1	v_1	v_1
v_2	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2

Tablo 6. L_{13} üzerinde T_3 t-normu

T_3	0	z_2	c	n	f	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2	y	z	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2
c	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	c
n	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	n
f	0	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	z_2	f
u_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2	u_2
z_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1	z_1
q	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	z_1	z_1	q	q	q	q
u_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	u_1	u_1	u_1	u_1	u_1	u_1
v_1	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	z_1	u_1	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1
v_2	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2	v_2	v_2	v_2
y	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2	y	v_2	y
z	0	z_2	z_2	z_2	z_2	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2	v_2	z	z
1	0	z_2	c	n	f	u_2	z_1	q	u_1	v_1	v_2	y	z	1

2.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Konormların Modifiye Ordinal Toplam İnşaları

Bu bölümde, [8] çalışması göz önüne alınarak, Teorem 2.24 ve Teorem 2.25'te önerilen inşa metotları, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde t-konormlar için modifiye ordinal toplam inşasına genelleştirilmiştir.

Teorem 2.30. L bir sınırlı kafes ve $0 = a_n < \dots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = 1$ olacak şekilde L 'nin $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{i-1} \in L \setminus \{b_i\}$ 'nin en büyük elemanı ve $S^*, [a_1, b_1]$ üzerinde bir t-konorm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $S_n: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur, burada $S_1 = S^*$ ve $i \in \{2, \dots, n\}$ için $S_i: [a_i, b_i]^2 \rightarrow [a_i, b_i]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_i(x, y) = \begin{cases} S_{i-1}(x \vee a_{i-1}, y \vee a_{i-1}) & , \quad (x, y) \in (a_{i-1}, b_{i-1}]^2 \\ & \cup (a_{i-1}, b_{i-1}] \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times (a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ k_{i-1} & , \quad (x, y) \in (a_i, a_{i-1}] \times (b_{i-1}, b_i) \\ & \cup (a_{i-1}, b_{i-1}] \times (b_{i-1}, b_i) \\ & \cup (b_{i-1}, b_i) \times (a_i, a_{i-1}] \\ & \cup (b_{i-1}, b_i) \times (a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & \cup (b_{i-1}, b_i)^2 \times (b_{i-1}, b_i) \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & \cup I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times (b_{i-1}, b_i) \\ & \cup I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \times L \setminus \{a_i, b_i\} \\ & \cup L \setminus \{a_i, b_i\} \times I_{b_{i-1}}^{a_{i-1}} \\ & \cup I_{a_{i-1}, b_{i-1}} \times L \setminus \{a_i, b_i\} \\ & \cup L \setminus \{a_i, b_i\} \times I_{a_{i-1}, b_{i-1}} \\ x \vee y \vee a_{i-1} & , \quad (x, y) \in I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \times (a_i, a_{i-1}] \\ & \cup (a_i, a_{i-1}] \times I_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \\ & \cup (a_{i-1}, b_{i-1}] \times (a_i, a_{i-1}] \\ & \cup (a_i, a_{i-1}] \times (a_{i-1}, b_{i-1}] \\ & \cup (a_i, a_{i-1})^2 \\ x \vee y & , \quad a_i, b_i \in \{x, y\}. \end{cases} \quad (28)$$

İspat: Teorem 2.24'ten tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

Teorem 2.31. L bir sınırlı kafes ve $0 = a_n < \dots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n = 1$ olacak şekilde L 'nin $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{j-1} \in L \setminus \{b_j\}$ 'nin en büyük elemanı ve $S^{**}, [a_1, b_1]$ üzerinde bir t-konorm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $S_n: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu bir t-normdur, burada $S_1 = S^{**}$ ve $j \in \{2, \dots, n\}$ için $S_j: [a_j, b_j]^2 \rightarrow [a_j, b_j]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_j(l, m) = \begin{cases} S_{j-1}(l \vee a_{j-1}, m \vee a_{j-1}) & , \quad (l, m) \in (a_{j-1}, b_{j-1}]^2 \\ & \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ k_{j-1} & , \quad (l, m) \in (a_j, a_{j-1}] \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \cup (b_{j-1}, b_j) \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \cup (b_{j-1}, b_j) \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ & \cup (b_{j-1}, b_j)^2 \times (b_{j-1}, b_j) \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \cup I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \\ l \vee m \vee a_{j-1} & , \quad (l, m) \in I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \cup (a_j, a_{j-1}] \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \cup (a_j, a_{j-1}] \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ l \vee m & , \quad (l, m) \in (a_j, a_{j-1}]^2, a_j, b_j \in \{l, m\}. \end{cases} \quad (29)$$

İspat: Teorem 2.25'ten tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

Uyarı 2.32. Bölüm 2.3'te t-normlar için verilen örnekler dual olarak t-konormlar için de verilebilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Üçgensel normlar (konormlar) ilk kez $[0, 1]$ 'de tanımlanmış olup birim aralık üzerinde kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Ardından, t-normlar (t-konormlar) sınırlı kafesler üzerinde tanımlanmış ve sınırlı kafesler üzerinde incelenmiştir. Bu bağlamda, sınırlı kafesler üzerinde t-normların (t-konormların) inşası, birçok potansiyel uygulamaya sahip olduğundan, araştırmacılar tarafından ilgi çeken bir konu olmuştur. Bu amaçla literatür incelendiğinde, L sınırlı kafesinin $[0, a]$, $[a, 1]$ ve $[a, b]$ alt aralıklarında tanımlı üçgensel normlardan (üçgensel konormlardan) L' 'de bir üçgensel norm (üçgensel konorm) üretmek için inşa yöntemlerinin var olduğu görülmüştür. Ayrıca bahsedilen inşa metotlarından bazıları ek kısıtlamalar altında L üzerinde elde edilen inşa metotlarıdır. Bu bilgilerin ışığı altında, bu çalışmada keyfi bir L sınırlı kafesinin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde tanımlı bir üçgensel normdan (üçgensel konormdan), $L \setminus \{0\}$ 'in en küçük elemanı ($L \setminus \{1\}$ 'in en büyük elemanı) varsayımı altında, L' 'de bir üçgensel norm (üçgensel konorm) üretmek için inşa yöntemleri verilmiştir. Daha sonra, bu metotların uygulamaları yapılmış ve kısıtlamaların önemi vurgulanmıştır. Ardından, elde edilen inşa metotlarının mevcut yöntemlerden farklı olduğu gösterilmiş ve hangi durumlarda da çakıştıkları incelenmiştir. Son olarak ise, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde üçgensel normlar (üçgensel konormlar) için önerilen inşa metotlarının modifiye ordinal toplam inşası verilmiştir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Sınırlı bir L kafesinin $[a, b]$ alt aralığı üzerinde tanımlı bir t -normdan, $L \setminus \{0\}$ 'ın en küçük elemanı varsayımı altında, L sınırlı kafesi üzerinde bir t -norm elde etmek için iki inşa metodu verildi.

2. Önerilen inşa metotlarında mevcut kısıtlamaların ihmal edilemeyeceği gösterildi.

3. Önerilen inşa metotlarının (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21) formülleri ile verilen inşa metotlarından farklı olduğu gösterildi.

4. Önerilen inşa metotları ile literatürdeki inşa metotlarının hangi ilave şartlar altında çakıştığı ortaya konuldu.

5. Önerilen inşa metotlarının birbirinden farklı olduğu gösterildi.

6. Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de verilen t -norm inşa metotlarından dual olarak t -konorm inşa metotları elde edildi.

7. Teorem 2.2 ve Teorem 2.12'de önerilen t -norm inşa metotları modifiye bir ordinal toplam inşasına genelleştirildi.

8. Teorem 2.24 ve Teorem 2.25'te elde edilen t -konorm inşa metotları modifiye bir ordinal toplam inşası verildi.

Elde edilen sonuçlar, sınırlı kafesler üzerindeki t -normlar (t -konormlar) için yeni inşa metotlarıdır.

5. ÖNERİLER

1. Yapılan çalışmada bir L sınırlı kafesi üzerinde ek bir kısıtlama altında t-norm ve t-konorm inşa metotları verildi. Sınırlı bir L kafesi üzerinde başka kısıtlamalar altında (atom, koatom vb. gibi) t-norm ve t-konorm inşa metotları elde edilebilir mi, araştırılabilir.

2. Keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde $[a, b]$ alt aralığı üzerindeki bir t-normun varlığına dayanılarak önerilen metodun bir genelleştirmesi olarak uninormlar için bir inşa yöntemi verilebilir mi, araştırılabilir.



6. KAYNAKLAR

- Aşıcı, E. (2021). Construction Methods for Triangular Norms and Triangular Conorms on Appropriate Bounded Lattices. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 18(3), 81-98.
- Aşıcı, E. (2021). On the Constructions of T-norms and T-conorms on Some Special Classes of Bounded Lattices. *Kybernetika*, 57(2), 352-371.
- Aşıcı, E. (2022). On the Construction of T-norms (T-conorms) By Using Interior (Closure) Operator on Bounded Lattices. *Kybernetika*, 58(3), 456-478.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. Providence, Rhode Island.
- Butnariu, D., & Klement, E. P. (1993). *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Çaylı, G. D. (2018). On a New Class of T-norms and T-conorms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 332, 129-143.
- Çaylı, G. D. (2019). Some Methods to Obtain T-norms and T-conorms on Bounded Lattices. *Kybernetika*, 55(2), 273-294.
- Dan, Y., Hu, B. Q., & Qiao, J. (2020). New Construction of T-norms and T-conorms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 395, 40-70.
- Dvořák, A., & Holčápek, M. (2020). New Construction of an Ordinal Sum of T-norms and T-conorms on Bounded Lattices. *Information Sciences*, 515, 116-131.
- El-Zekey, M. (2020). Lattice-Based Sum of T-norms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386, 60-76.
- Ertuğrul, Ü., & Yeşilyurt, M. (2019). Ordinal Sums of Triangular Norms on Bounded Lattices. *Information Sciences*, 517, 198-216.
- Ertuğrul, Ü., Karaçal, F., & Mesiar, R. (2015). Modified Ordinal Sums of Triangular Norms and Triangular Conorms on Bounded Lattices. *International Journal of Intelligent Systems*, 30(7), 807-817.
- Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M. N., & Karaçal, F. (2019). Some New Construction Methods for T-norms on Bounded Lattices. *International Journal of General Systems*, 48(7), 775-791.
- Fodor, J. C., & Roubens, M. (1994). *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gottwald, S. (2001). *A Treatise on Many-Valued Logic*, *Studies in Logic and Computation*. Baldock: Research Studies Press.

- Grabisch, M., Nguyen, H. T., & Walker, E. A. (1995). *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- İnce, M. A., & Karaçal, F. (2019). T-Closure Operators. *International Journal of General Systems*, 48(2), 139-156.
- Karaçal, F., & Kesicioğlu, M. N. (2011). A T-Partial Order Obtained From T-norms. *Kybernetika*, 47(2), 300-314.
- Karaçal, F., & Khadjiev, D. (2005). $\vee$ -Distributive and Infinitely $\vee$ -Distributive T-norms on Complete Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 151(2), 341-352.
- Karaçal, F., & Şanlı, Z. (2022). Some New Construction Methods of T-norms and T-conorms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 451, 84-93.
- Karaçal, F., Ertuğrul, Ü., & Kesicioğlu, M. N. (2019). An Extension Method for T-norms on Subintervals to T-norms on Bounded Lattices. *Kybernetika*, 55(6), 976-993.
- Karaçal, F., Kesicioğlu, M. N., & Ertuğrul, Ü. (2020). Generalized Convex Combination of Triangular Norms on Bounded Lattices. *International Journal of General Systems*, 49(3), 277-301.
- Kesicioğlu, M. N., & Mesiar, R. (2014). Ordering Based on Implications. *Information Sciences*, 276, 377-386.
- Kesicioğlu, M. N., Karaçal, F., & Mesiar, R. (2015). Order-Equivalent Triangular Norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 268, 59-71.
- Klement, E. P., & Weber, S. (1991). Generalized Measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 40(2), 375-394.
- Klement, E. P., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Menger, K. (1942). Statistical Metrics. *Proceeding of National Academy of Sciences*, 28, 535-537.
- Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. New York: Springer.
- Nguyen, H. T., & Walker, E. (1997). *A First Course in Fuzzy Logic*. Boca Raton: CRC Press.
- Pap, E. (1995). *Null-Additive Set Functions*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Saminger, S. (2006). On Ordinal Sums of Triangular Norms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(10), 1403-1416.

- Schweizer, B., & Sklar, A. (1960). Statistical Metric Spaces. *Pacific Journal of Mathematic*, 10(1), 313-334.
- Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. Tokyo Institute of Technology: Ph. D. Thesis, Tokyo.
- Wang, Y.-M., Zhan, H., & Liu, H.-W. (2020). Uni-nullnorms on Bounded Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386, 132-144.
- Weber, S. (1984). $\perp$ -Decomposable Measures and Integrals for Archimedean T-konorms $\perp$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101, 114-138.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.



ÖZGEÇMİŞ

Eda Nur AYVAZ, ilk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2015-2016 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim dalında lisans eğitimine başladı ve 2019-2020 Eğitim-Öğretim yılında lisans eğitiminden mezun oldu. Aynı Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına kabul edildi ve bir yıl İngilizce hazırlık öğrenimi gördü.

